修 士 論 文 の 和 文 要 旨

研究科・専攻	大学院　情報理工学研究科　情報・ネットワーク工学専攻　博士前期課程		
氏　　　名	中村　正男	学籍番号	1831112
論 文 題 目	非双曲型平衡点をもつ力学系に対する局所 Lyapunov 関数の導出		

要　　旨

近年では精度保証付き数値計算が急速に発展し，数値解析の主題の一つとなっている．精度保証付き数値計算とは，計算と同時に誤差評価を行うことで，計算結果の正しさが数学的に保証される数値計算法である．それゆえに純粋数学の一分野である，力学系の解析において非常に強力な道具となっている．活用例として，不安定多様体やホモクリニック軌道といった時間無限大の極限を含む現象の解析や有限時間爆発解の解析が挙げられる．

上で挙げた例において，Lyapunov 関数の局所的な構成が力学系における解析の重要な道具の一つとなっている．その Lyapunov 関数について，双曲型平衡点近傍では 2 次形式の形で局所的に構成可能であり，また精度保証付き数値計算による体系的な構成方法も知られている．しかしながら，非双曲型平衡点近傍では 2 次形式の形では Lyapunov 関数は原理的に構成することができず，したがって精度保証付き数値計算による局所 Lyapunov 関数の体系的な構成方法は確立されていなかった．そのため非双曲型平衡点の近傍でも構成できれば，精度保証付き数値計算と力学系の理論を組み合わせた研究のさらなる発展が期待できる．

先行研究によって，2 次元の自励系における非双曲型平衡点のうち，標準形定理と呼ばれる力学系の基礎的な理論を利用できる場合について，局所 Lyapunov 関数を体系的に構成する方法が知られている．

本論文では，標準形定理との関連性がより明確となるように，先行研究での座標変換の扱いを変更し，さらに 3 次元の場合について局所 Lyapunov 関数の構成方法を導出した．
標準形定理は力学系の基礎的な理論であり，数値的な手法として活用しやすい．それゆえに，精度保証付き数値計算へのさらなる応用が見込まれる．

電気通信大学情報理工学研究科
情報・ネットワーク工学専攻情報数理工学コース修士論文

非双曲型平衡点をもつ力学系に対する局所 Lyapunov 関数の導出

2020 年 3 月 19 日

情報数理工学コース

学籍番号 1831112

中村 正男

主任指導教員 山本 野人
指導教員 伊東 裕也

目 次

1 はじめに **4**

2 精度保証付き数値計算 **5**

2.1 精度保証付き数値計算とは 5
2.2 区間と区間演算 5
2.3 区間拡大 6
2.4 平均値形式 6
2.5 常微分方程式の初期値問題の精度保証 7
2.5.1 問題設定 7
2.5.2 ODE-IVP のための定理 7
2.5.3 解の粗い包含 8
2.5.4 Taylor 展開法 9

3 力学系および平衡点の安定性 **9**

3.1 問題設定 9
3.2 平衡点の安定性 10

4 Lyapunov 関数 **10**

4.1 Lyapunov 関数の定義 10
4.2 局所 Lyaunov 関数の定義 11
4.3 双曲型平衡点近傍における局所 Lyapunov 関数の構成 11
4.3.1 2 次形式の導出 11
4.3.2 $L(\boldsymbol{x})$ の妥当性 12
4.3.3 Lyapunov 関数の定義域の検証 13
4.4 双曲型平衡点近傍で構成された局所 Lyapunov 関数の応用 14
4.5 非双曲型平衡点に対する問題点 14

5 非双曲型平衡点近傍における局所 Lyapunov 関数の構成 **15**

5.1 問題設定 16
5.2 標準形定理 16
5.3 局所 Lyapunov 関数の構成の方針 17
5.4 $n = 2$ の場合の構成方法 18
5.4.1 J_1 の場合 19
5.4.2 J_2 の場合 19
5.4.3 J_3 の場合 20
5.4.4 J_4 の場合 22
5.5 $n = 3$ の場合の構成方法 22
5.5.1 J_5, J_7, J_9 の場合 23
5.5.2 J_6, J_8 の場合 24
5.5.3 J_{10} の場合 24
5.5.4 J_{11} の場合 25
5.5.5 J_{12} の場合 29
5.6 逆変換 30
5.7 定義域の検証方法 30

6 数値例 **31**

6.1 J_{11} の場合に該当する 3 次元の数値例 31

7 まとめと展望 **32**

8 参考文献 **32**

9 謝辞 **33**

1　はじめに

力学系理論とは，時間の発展とともに一定の規則に従って状態が変化する系 (時としてモデル，システムあるいはリズムともいう) についてその大域的あるいは局所的な変化・ふるまいを探求する分野であり，非常に広範である. 系そのものに着目する純粋数学の側面がある一方，取り扱う分野のその広範さから物理や工学，生物などあらゆる分野への応用が成されている [1–3]．すなわち，力学系の理論と方法は実現象の数学的な基盤を理解するための有力な解析の「道具」となる．また，精度保証付き数値計算は，この四半世紀の間に急速に発展し，今日における数値解析の主題の一つとなっている．近年ではこの精度保証付き数値計算と力学系を組み合わせた研究が盛んに行われている. 精度保証付き数値計算とは，計算と同時に誤差評価を行う，計算結果の正しさが数学的に保証された数値計算法である. それゆえに 純粋数学への応用も可能であり，力学系の「難しい問題」を解くための非常に強力な道具となっている.「難しい問題」の例として，不安定多様体やホモクリニック軌道といった時間 無限大の極限を含む現象の解析 [4,5] や有限時間爆発解の解析 [6] が挙げられる．

上記の例において，局所的な Lyapunov 関数 (以下局所 Lyapunov 関数と呼ぶ) を構成することが「難しい問題」を解く重要な「道具」の一つとなっている．

局所 Lyapunov 関数は相空間上の点の位置で決まるスカラー値関数であり，与えられた力学系に従って時間の経過とともにこの点が推移する際に，その値が減少する性質を持つ．言い換えれば，力学系によって動く点は局所 Lyapunov 関数の等高線を下って移動する．この性質が時間無限大の極限を数値的に扱えるようにするための要となる．

局所 Lyapunov 関数は，双曲型平衡点近傍においては 2 次形式の形で構成することができ，また精度保証付き数値計算による体系的な構成方法も知られている [7,8]．しかしながら，非双曲型平衡点近傍では 2 次形式の局所 Lyapunov 関数は原理的に構成することができず，したがって精度保証付き数値計算による局所 Lyapunov 関数の体系的な構成方法は確立されていなかった．そこで局所 Lyapunov 関数を非双曲型平衡点の近傍でも構成できれば，精度保証付き数値計算と力学系を組み合わせた研究のさらなる発展が期待できる.

先行研究 [22] では自励系における非双曲型平衡点のうち，標準形定理と呼ばれる力学系の基礎的な理論を利用できる場合について，2 次元における局所 Lyapunov 関数を体系的に構成する方法を導いている．

本論文では，それを発展させ，同じく標準形定理を利用できる場合について，3 次元局所 Lyapunov 関数を体系的に構成する方法を開発した．

本論文の構成について述べる．

第 2 章では本論文で用いる精度保証付き数値計算の技法について簡単に記述する．区間や区間演算の定義，常微分方程式の初期値問題の精度保証付き数値計算について触れる．

第 3 章では計算の対象となる力学系および平衡点の安定性について記述する．

第 4 章では Lyapunov 関数およびその定義について，また「一般的な」Lyapunov 関数と「局所」Lyapunov 関数の違い，その意義とともに記述する．さらに双曲型平衡点近傍における局所 Lyapunov 関数の構成方法，そして，その構成方法が非双曲型平衡点近傍では構成不可能な理由について記述する．

第 5 章では本論文の主題である，3 次元非双曲型平衡点近傍での局所 Lyapunov 関数の構成方法および検証方法について記述する.

第 6 章では本論文の手法によって構成された局所 Lyapunov 関数の数値例を記述する.

第 7 章では本論文の手法の展望について記述する.

2 精度保証付き数値計算

2.1 精度保証付き数値計算とは

数値計算の誤差は次のように分類をすることができる．

1. モデル化誤差: 科学計算のもとになる数学モデルが，現象を正しく記述できていないことによる誤差
2. 打ち切り誤差: 問題の解法手順が，計算機内で本質的に実現不能なことに起因する誤差
3. 丸め誤差: 計算機内で扱える数値が，有限桁であるために生じる誤差

精度保証付き数値計算 (以下精度保証と呼ぶ) は打ち切り誤差と丸め誤差の厳密評価を対象としている．本論文では，精度保証を利用することで Lyapunov 関数の定義域の検証を行う．本章では本研究で利用する精度保証の技法 [9, 10] をに基づき紹介する．

2.2 区間と区間演算

現代において，計算機は実数を浮動小数点数で近似して数値計算している．数値計算は，解析的に解くことが困難な問題を数値的に解く計算手段であるが，これは実数演算のような厳密な計算ではなく，近似計算である．近似計算であるということは計算途中でさまざまな誤差が発生するため，最終的に得られた結果がどれくらい正しいかは問題に依存する．すなわち，数学的厳密解を得られないことを意味する．数値計算によって得られた結果に対して，数学的に厳密な誤差限界を与える手法が，精度保証である．そこで，精度保証では以下のように，閉区間で厳密解を包含する．このときの閉区間を単に区間と呼ぶ．

$$X = [\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \le x \le \overline{x}, \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}\} \tag{2.1}$$

上のように表現される閉集合 X を区間と呼び，実数上の区間全体の集合を $\mathbb{IR}$ と表現する．

このとき $X \in \mathbb{IR}$ となる. 区間の表現方法は 2.1 のように上限 $\overline{x}$・下限 $\underline{x}$ で表す下端上端方式と中心値半径方式の二種類があるが，本論文では下端上端方式を用いる．ふたつの区間 $X = [\underline{x}, \overline{x}], Y = [\underline{y}, \overline{y}]$ における演算は，それぞれの区間に含まれる任意の実数同士の演算結果を全て包含する最小の有界閉区間として定義する．実数の代わりにこのような区間を用いて計算をすることで， 真の解が包含されるような区間を得るのが精度保証の基本的な考え方である．この区間同士の演算を区間演算と呼ぶ．四則演算については以下の通りである．

$$\begin{aligned}
X + Y &= [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}] \\
X - Y &= [\underline{x} - \underline{y}, \overline{x} - \overline{y}] \\
X \cdot Y &= [\min\{\underline{\mathrm{x}}\underline{\mathrm{y}}, \underline{\mathrm{x}}\overline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}}\underline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}}\overline{\mathrm{y}}\}, \max\{\underline{\mathrm{x}}\underline{\mathrm{y}}, \underline{\mathrm{x}}\mathrm{y}, \overline{\mathrm{x}}\underline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}}\overline{\mathrm{y}}\}] \\
X/Y &= [\underline{x}, \overline{x}] * [1/\underline{y}, 1/\overline{y}], 0 \notin Y
\end{aligned}$$

演算結果の上限・下限が浮動小数点数にならない場合は，上限の場合は上向きに，下限の場合は下向きに丸めた結果の浮動小数点数を上限・下限とする．区間演算は実数における四則演算と同じ性質を持つとは限らない．その最たる例として，区間演算では半分配則しか成り立たないことが挙げられる. すなわち，3 つの区間 A, B, C に対して

$$A \cdot (B + C) \subset A \cdot B + A \cdot C$$

は成り立つが，逆向きの包含は一般には成立しない．この性質から区間演算においては同じ区間はできるだけくくって計算したほうが区間の拡大を抑えられる．
また，区間演算では

$$X - X \neq [0, 0] \tag{2.2}$$

$$X/X \neq [1, 1] \tag{2.3}$$

となることに注意されたい. すなわち加法および乗法に関して逆元が存在しないため，プログラミングの際には注意が必要である. また，区間を成分として持つベクトル，行列をそれぞれ区間ベクトル，区間行列と呼び，それらの間も同様にして演算する．
以上が、区間演算に関する事柄であるが，これは理論的なものである．つまり，実際の計算では実数全体を扱うことができず，浮動小数点数を用いて計算することになる．したがって以上で述べた演算を浮動小数点数を用いた演算に落としこむ必要がある．このような区間演算を機械区間演算と呼ぶ．
まず第一に，用意すべき区間あるいは結果として得られる区間の下端および上端，あるいは中心および半径は浮動小数点数となる．そのような区間のことを機械区間と呼ぶ．また機械区間演算の結果が，機械区間になるとは限らない．そのような場合は，上端の場合は上向きに，下端の場合は下向きに丸めた結果の浮動小数点数を上端あるいは下端とする．

2.3 区間拡大

区間演算をそのまま適用すれば過大評価によって区間幅が余計に拡大してしまう場合がある. 原因として Dependency Problem と Wrapping Effect(以下 W.E.) が挙げられる．
Dependency Problem とは数式の表現によって区間拡大が起きてしまう現象である. これは区間演算に関して分配則が成立しないことに起因する区間拡大である．特に，区間値に関する非線形関数で起こりやすい．
W.E. とは区間ベクトルと行列との積により区間ベクトルが歪み・回転作用を受け，その結果を区間として包含する際に区間拡大が起きてしまう現象である．一般に大きな W.E. は歪み作用よりもむしろ回転作用によって引き起こされることが多い．W.E. は行列ベクトル積の繰り返しにより指数関数的に増加していくため，精度保証においては行列ベクトル積の計算は注意を要する．行列ベクトル積を計算し得られるベクトルに再び行列を掛ける，といった計算を繰り返す場合は先に行列と行列の積を計算し，最後にベクトルを掛けることで W.E. を一回に軽減させることができる．

2.4 平均値形式

下端上端方式の区間 $[x]$ について 1 階連続微分可能な関数 f の値域 $f([x]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [x]\}$ を包含する区間を $[f([x])]$ と書く．$[x]$ に属する任意の点 $\hat{x}$ をとる．$\hat{x}$ は任意の点ではあるが，通常は区間 $[x]$ の中心点である．まず，$f(x)$ について 1 次のテイラー展開を用いれば

$$\begin{aligned} \forall x \in [x], f(x) &= f(\hat{x} + (x - \hat{x})) \\ &= f(\hat{x}) + (x - \hat{x}) f'(\hat{x} + \theta(x - \hat{x}))(0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} \hat{x} + \theta(x - \hat{x}) &\in [x] = [\underline{x}, \overline{x}] \\ x - \hat{x} &\in [x] - \hat{x} = [\underline{x} - \hat{x}, \overline{x} - \hat{x}] \end{aligned}$$

より

$$f([x]) \subset f(\hat{x}) + f'([x])([x] - \hat{x}), \hat{x} \in [x]$$

となる．そこで，$[f([x])]$ として

$$[f([x])] = f(\hat{x}) + [f'([x])]([x] - \hat{x}), \hat{x} \in [x]$$

を採用することができる．これを $f([x])$ の $\hat{x}$ における平均値形式という．また，区間ベクトル $[\boldsymbol{x} \subset \mathbb{R}^n]$, ベクトル値関数 $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n$ に対しても同様に平均値形式を考えることができる．

2.5 常微分方程式の初期値問題の精度保証

常微分方程式の初期値問題 (以下 ODE-IVP と呼ぶ) に関する精度保証について [9] に基づいた簡単な説明を記す.

2.5.1 問題設定

ODE-IVP を次のように設定する．

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \ (0 < t < T) \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \ \boldsymbol{x}_0 \in [\boldsymbol{x}_0] \end{cases} \tag{2.4}$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n$ であり，$\boldsymbol{f}$ は定義域が $[0, T] \times D, D \subset \mathbb{R}^n$ で，$t, \boldsymbol{x}$ に関して p 回連続微分可能とする．また，初期値 $\boldsymbol{x}_0$ は区間ベクトル $[\boldsymbol{x}_0] \subset \mathbb{R}^n$ の任意の点であるとする．

2.5.2 ODE-IVP のための定理

ODE-IVP の精度保証については次の 2 つの定理を利用する．

Brouwer の不動点定理は，有限次元空間において不動点の存在および存在範囲を保証する定理である．

定理 2.1. Brouwer の不動点定理

Ω を n 次ユークリッド空間 R^n の有界凸閉集合とし，f を $f : \Omega \to \Omega$ の連続写像としたときに f は不動点を持つ，すなわち，$f(x) = x$ となる $x \in \Omega$ が存在する．

これに対し，無限次元空間におけるコンパクト写像の不動点の存在および存在範囲を保証するものが Schauder の不動点定理である．これは Brouwer の不動点定理の拡張と見做すことができる．

定理 2.2. Schauder の不動点定理

M を Banach 空間 X の空でない有界凸閉集合とし，$T : M \to M$ がコンパクト作用素であるとき，T は M に不動点を持つ．

以上二つの定理は，精度保証における解の存在証明の理論的な根拠を与えるものである．

2.5.3 解の粗い包含

時間軸上に分点 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T$ を設定し，ステップ幅を $h = t_j + 1 - t_j$ とする．まず，$[t_j, t_j + 1]$ で真の解を包含する区間ベクトル $[\boldsymbol{x}]$ を求める．もとの ODE を t_j から t まで積分し，$\boldsymbol{x}$ について整理することで次の式を得る．

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_j + \int_{t_j}^{t} \boldsymbol{f}(\tau.\boldsymbol{x}(\tau))d\tau,\ t_j < t < t_{j+1}$$

この右辺は $\boldsymbol{x}$ に関する作用素とみなすことができる．右辺を $F(\boldsymbol{x})$ とおくと，不動点方程式

$$\boldsymbol{x} = F(\boldsymbol{x})$$

が得られる．積分作用素と連続写像の合成はコンパクト作用素であるため右辺 F はコンパクト作用素といえる．

関数空間として $[t_j, t_{j+1}]$ 上の連続関数を要素に持つ n 元ベクトル全体の集合である $(C[t_j, t_{j+1}])^n$ を考える．$\boldsymbol{f} \in (C[t_j, t_{j+1}])^n$ に対してノルム $\|\boldsymbol{f}\|$ を

$$\|\boldsymbol{f}\| := \max_{1 \le i \le n} \Big(\max_{t_j < t < t_{j+1}} |f_i(t)| \Big)$$

として定めると $\boldsymbol{f} \in (C[t_j, t_{j+1}])^n$ はこのノルムのもとで Banach 空間となる. 以上より，$[\boldsymbol{x}] \subset (C[t_j, t_{j+1}])^n$ が有界凸閉集合であること，また

$$F([\boldsymbol{x}]) \subset [\boldsymbol{x}]$$

となれば，Schauder の不動点定理から $[\boldsymbol{x}]$ に不動点方程式の解 $\boldsymbol{x} = F(\boldsymbol{x})$ が存在することになる. そこで，$[\boldsymbol{x}]$ を有界凸閉集合とするべく n 元実定数ベクトル α, β を選んで

$$[\boldsymbol{x}] = \{\boldsymbol{x} \in (C[t_j, t_{j+1}])^n \mid \alpha \le \boldsymbol{x}(t) \le \beta, \forall t \in [t_j, t_{j+1}]\}$$

として定める．まず，$\boldsymbol{x}(\tau) \in [\boldsymbol{x}]$ のもとで $\int_{t_j}^{t} \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau))d\tau \in \int_{t_j}^{t} \boldsymbol{f}(\tau, [\boldsymbol{x}])d\tau$ であり，さらに t を固定して考えれば区間ベクトル同士の包含関係に帰着され，

$$\begin{aligned}
\int_{t_j}^{t} \boldsymbol{f}(\tau, [\boldsymbol{x}])d\tau &\subset \int_{t_j}^{t} \boldsymbol{f}(\tau, [\alpha, \beta])d\tau \\
&\subset \int_{t_j}^{t} \boldsymbol{f}([t_j, t_{j+1}, [\alpha, \beta])d\tau \\
&= (t - t_j)\boldsymbol{f}([t_j, t_{j+1}, [\alpha, \beta]) \\
&\subset [0, h]\boldsymbol{f}([t_j, t_{j+1}, [\alpha, \beta]) \subset [\alpha, \beta]
\end{aligned}$$

となる．これより Schauder の不動点定理を満たすための十分条件として

$$[\boldsymbol{x}_j] + [0, h]\boldsymbol{f}([t_j, t_{j+1}], [\alpha, \beta]) \in [\alpha, \beta] \tag{2.5}$$

が得られる．これを満たす $[\boldsymbol{x}] = [\alpha, \beta]$ を求めれば良い．

$[\boldsymbol{x}]$ の初期値を t_j における解 $\boldsymbol{x}_j$ とし，以下のアルゴリズムを用いることで条件 (2.5)を満たす $[\boldsymbol{x}]$ が得られる．

1. (2.5) の左辺を区間演算で計算して，これを包含する区間ベクトルを $[\boldsymbol{v}]$ とおく．
2. $[\boldsymbol{v}] \in [\boldsymbol{x}]$ をチェックし，成立していれば $[\boldsymbol{x}] := [\boldsymbol{v}]$ として終了．
3. そうでなければ $[\boldsymbol{x}] := (1 + \epsilon)[\boldsymbol{v}] - \epsilon[\boldsymbol{v}]$ とおいて反復.

ϵ はあらかじめ定めた小さな正定数であり，この操作を $\epsilon-$inflation と呼ぶ.

ここで得られる解の包含 $\boldsymbol{x}$ は十分な精度とはいえない粗い包含である．そこで，Taylor 展開を用いて打ち切り誤差の評価を簡単にし，区間半径の小さな包含を求める．

2.5.4 Taylor 展開法

$t = t_j$ での解 $\boldsymbol{x}_j$ を包含する区間を $[\boldsymbol{x}_j]$ とする．前節で求めた $[t_j, t_{j+1}]$ における真の解を包含する区間 $[\boldsymbol{x}]$ を Taylor 展開に適用し，$t = t_{j+1}$ での解の包含 $[\boldsymbol{x}_{j+1}]$ を小さくすることを考える．

まず，$\boldsymbol{x}_{j+1} = \boldsymbol{x}(t_j + h)$ を $t = t_j$ の周りで Taylor 展開すると

$$\boldsymbol{x}_{j+1} = \boldsymbol{x}(t_j) + \dot{\boldsymbol{x}}(t_j)h + \frac{1}{2!}\ddot{\boldsymbol{x}}(t_j)h^2 + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}\boldsymbol{x}^{p-1}(t_j)h^{p-1} + \frac{1}{p!}\boldsymbol{x}^{(p)}(t_j + \theta h)h^p \tag{2.6}$$

となる．剰余項 $\boldsymbol{x}^{(p)}(t_j + \theta h)$ については

$$\boldsymbol{x}_\theta^{(p)}(t_j + \theta h) = \begin{pmatrix} x_1^{(p)}(t_j + \theta_1 h) \\ \vdots \\ x_n^{(p)}(t_j + \theta_n h) \end{pmatrix},\ (0 < \theta_j < 1, j = 1, 2, \cdots, n)$$

である．

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t_j, \boldsymbol{x}_j) \\ \ddot{\boldsymbol{x}} &= \frac{d}{dt}\boldsymbol{f}(t_j, \boldsymbol{x}_j) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(t_j, \boldsymbol{x}_j) \end{aligned}$$

となることに注意する．ここで

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}^{(1)} &= \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{f}^{(k+1)} &= \frac{1}{k+1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{f}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}\right) \end{aligned}$$

とおくと，式 (2.6) は

$$\boldsymbol{x}_{j+1} = \boldsymbol{x}_j + \sum_{k=1}^{p-1} h^k \boldsymbol{f}^{(k)}(t_j, \boldsymbol{x}_j) + h^p \boldsymbol{f}^{(p)}(t_j + \theta h, \boldsymbol{x}(t_j + \theta h))$$

と定めることができる．$\boldsymbol{f}^{(p)}(t_j + \theta h, \boldsymbol{u}(t_j + \theta h)) \subset \boldsymbol{f}^{(p)}([t_j, t_{j+1}], [\boldsymbol{x}])$ に注意して区間 $[\boldsymbol{x}]$ を用いれば

$$[\boldsymbol{x}_{j+1}] = [\boldsymbol{x}_j] + \sum_{k=1}^{p-1} h^k \boldsymbol{f}^{(k)}(t_j, [\boldsymbol{x}_j]) + h^p \boldsymbol{f}^{(p)}([t_j, t_{j+1}], [\boldsymbol{x}]) \tag{2.7}$$

を導かれる．(2.7) に平均値形式を適用して Dependency Problem を軽減し，さらに，QR 分解による座標回転を用いれば W.E. を軽減させることができる．この手法を Lohner 法と呼ぶ. 詳しくは [9] を参照されたい．また，他には Lohner 法と同じく Taylor 展開法をベースにしているが，W.E. 対策に affine arithmetic と呼ばれる計算方法を用いた手法も存在する．詳しくは [10, 11] を参照されたい．

3 力学系および平衡点の安定性

本章では，取り扱う系の紹介と，平衡点の安定性について述べる．

3.1 問題設定

扱う対象は次の自励系である．

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), 0 < t < \infty, \\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \end{gathered} \tag{3.1}$$

なお，(3.1) は平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ を持つものとする．すなわち $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = 0$ である．

また，ある点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を初期値とする (3.1) の解軌道を $\varphi(t, \boldsymbol{x})$ と書く．

3.2 平衡点の安定性

(3.1) の右辺は考えている領域で $C^r (r \geq 1)$ 級とし，平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ における $\boldsymbol{f}$ のヤコビ行列を $D\boldsymbol{f}^* := D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ とおく．$D\boldsymbol{f}^*$ の全ての固有値の実部が全て非零，つまり正負のどちらかである場合，平衡点 $\boldsymbol{x}$ は双曲型であるという．逆に，一つでも固有値に 0 を含む場合，平衡点は非双曲型であるという．
双曲型平衡点は，$D\boldsymbol{f}^*$ の固有値実部の正負によって以下の 3 種類に分別される．

(1) 固有値実部が全て負の場合
このとき平衡点は吸引点とよばれ，安定である．平衡点近傍で平衡点に流入するフローを持つ．

(2) 固有値実部が全て正の場合
このとき平衡点は湧出点とよばれ, 不安定である．平衡点近傍で平衡点から流出するフローを持つ．

(3) 正と負の固有値実部を持つ場合
このとき平衡点は鞍点 (saddle) とよばれ，不安定である．平衡点近傍において，ある方向からは流入し，ある方向からは流出するフローを持つ．

サドル型平衡点は，$t \to \infty$ で平衡点に収束する安定多様体と，$t \to -\infty$ で平衡点に収束する不安定多様体を持つ．いま．$D\boldsymbol{f}^*$ の実部正の固有値の数と，実部負の固有値を数をそれぞれ u, s とおく．u, s の値は, それぞれ不安定多様体の次元と安定多様体の次元に一致する．特に，実部正の固有値に対する固有ベクトルは不安定多様体の，実部負の固有値に対する固有ベクトルは安定多様体の平衡点における接ベクトルとなる [9].

4 Lyapunov 関数

Lyapunov 関数は位相空間上の点の位置で決まるスカラー値関数であり，力学系に従って点が動く際にその値が減少するという性質を持つものである．その性質から力学系の解の解析の強力なツールである．本章では自励系における (局所)Lyapunov 関数の定義，そして双曲型平衡点における局所 Lyapunov 関数の構成方法とその応用について説明する．扱う対象は (3.1) である．

4.1 Lyapunov 関数の定義

定義 4.1. $\boldsymbol{x}^*$ を含む領域 $D_L \subset \mathbb{R}^n$ での広義 Lyapunov 関数とは，次の条件を満たす C^1 級関数 $L : D_L \to \mathbb{R}$ を指す.

1. $\boldsymbol{x} \in D_L$を通る $\forall\varphi(t, \boldsymbol{x})$ に対し, $\frac{d}{dt}L(\varphi(t, \boldsymbol{x}))|_{t=0} \leq 0$
2. $L(\varphi(t, \boldsymbol{x}))|_{t=0} = 0 \Rightarrow \varphi(t, \boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}^*$
3. $\boldsymbol{x} \in D_L \backslash \{\boldsymbol{x}^*\}$ を通る $\forall\varphi(t, \boldsymbol{x})$ に対し, $L(\varphi(t, \boldsymbol{x}))|_{t=0} \geq 0$
   また，広義 Lyapunov 関数であってしかも次の条件を満たせば，L は $\boldsymbol{x}^*$ の近傍 D_L での (狭義)Lyapunov 関数という.
4. $\boldsymbol{x} \in D_L \backslash \{\boldsymbol{x}^*\}$ を通る $\forall\varphi(t, \boldsymbol{x})$ に対し, $\frac{d}{dt}L(\varphi(t, \boldsymbol{x}))|_{t=0} < 0$

上述の Lyapunov 関数では平衡点が安定な場合のみ定義される．それは，Lyapunov 関数は平衡点の安定性解析や吸引領域を同定するためのツールとして用いることに主眼を置かれていたためだと考えられる．

4.2 局所 Lyaunov 関数の定義

本論文における Lyapunov 関数の構成は平衡点近傍の軌道の，より詳細な解析のためのツールとして用いることを想定しており，したがって不安定な平衡点についても定義できるようにしたい．そこで，4.1 節の Lyapunov 関数を以下のように条件を緩和し定義を拡張する．

定義 4.2. $\boldsymbol{x}^*$ を含む領域 $D_L \subset \mathbb{R}^n$ での Lyapunov 関数とは，次の条件を満たす C^1 級関数 $L : D_L \to \mathbb{R}$ を指す．

1. $\frac{d}{dt}L(\varphi(t,\boldsymbol{x}))|_{t=0} = 0 \Rightarrow \varphi(t,\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}^*$
2. $\boldsymbol{x} \in D_L \backslash \{\boldsymbol{x}^*\}$ を通る $\forall\varphi(t,\boldsymbol{x})$ に対し，$\frac{d}{dt}L(\varphi(t,\boldsymbol{x}))|_{t=0} < 0$

本論文では，定義 4.2 の Lyapunov 関数を扱い，Lyapunov 関数の局所的な構成，いわば「局所 Lyapunov 関数」を目指す．

4.3 双曲型平衡点近傍における局所 Lyapunov 関数の構成

(3.1) の平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ が双曲型平衡点ならば，$\boldsymbol{x}^*$ 近傍における局所 Lyapunov 関数が 2 次形式で構成可能であり，精度保証による構成法も知られている [7, 8]. 本節では，[7] に基づいた構成方法を記述する．

4.3.1 2 次形式の導出

以下の手順で局所 Lyapunov 関数の候補となる 2 次形式を求める．

1. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$ における $\boldsymbol{f}$ のヤコビ行列を $D\boldsymbol{f}^*$ と置く．これが正則行列によって対角化可能であるとし，Λ を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を並べた対角行列，X を対応する固有ベクトルを並べた行列とする. ただし，$\lambda_k(k = 1, \cdots, n)$ の実部は非零であると仮定する．このとき，
$$\Lambda = X^{-1}D\boldsymbol{f}^*X$$
とする．ただし，Λ と X の算定には精度保証付き数値計算で計算する必要はなく，通常の浮動小数点演算を用いる．なお，対角化可能でない場合についてはジョルダン標準形を用いて同様の議論ができる [15].

2. 行列 I^* を, ベクトル $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ を対角成分とする対角行列とする．ただし，$i_k(1 \le k \le n)$ は
$$i_k = \begin{cases} 1, \text{if } \ \mathrm{Re}(\lambda_\mathrm{k}) < 0 \\ -1, \text{if } \ \mathrm{Re}(\lambda_\mathrm{k}) > 0 \end{cases}$$
と定める．なお，平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ は双曲型であるので，$\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$ である．

3. 実対称行列 Y を以下のように算定する．
$$\hat{Y} = X^{-H}I^*X^{-1}$$
$$Y = \mathrm{Re}(\hat{\mathrm{Y}})$$
ただし，X^{-H} は行列 X の共役転置の逆行列であり，この算定も浮動小数点演算を用いて行う．

4. Lyapunov 関数の候補として，次の 2 次形式を定義する．
$$L(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^T Y (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \tag{4.1}$$
精度保証で用いる際には，Y の代わりに $\frac{Y+Y^T}{2}$ を用いるなどの方法で，Y の対称性を確保する．

4.3.2 $L(\boldsymbol{x})$ の妥当性

上記の方法で構成した関数 (4.1) が平衡点を含む領域で局所 Lyapunov 関数の要件を満たすための十分条件を導き，また双曲型平衡点の十分小さな近傍ではこの条件を満たしていることを示す．解軌道 $\boldsymbol{x}(t)$ を引数とした $L(\boldsymbol{x}(t))$ を t で微分すると，

$$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})^T Y(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T Y \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{4.2}$$

となる．なお，$\boldsymbol{x}(t)$ を $\boldsymbol{x}$ と明記している．ここで，

$$\boldsymbol{g}(s) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^* + s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)), s \in [0,1]$$

を考える．

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{f} = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^* + s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)$$

および $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$ となることから，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \int_0^1 D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^* + s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*))ds(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)$$

を得る．これを積分型平均値の定理と呼ぶ．ただし $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{x}$ におけるヤコビ行列である．これより，$L(\boldsymbol{x}(t))$ の時間微分 (4.2) は実 2 次形式に準ずる形

$$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T \int_0^1 (D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^* + s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*))^T Y + YD\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^* + s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)))ds(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)$$

で表されることになる．いま，$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}^* + s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*))$ とおき，実対称行列 $A(\boldsymbol{z})$ を

$$A(\boldsymbol{z}) := D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})^T Y + YD\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$$

で定める．$\boldsymbol{x}^*$ と $\boldsymbol{x}$ を結ぶ線分上の任意の点 $\boldsymbol{z}$ について $A(\boldsymbol{z})$ が負定値であれば，$\boldsymbol{x}$ に対して $\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{x}) < 0$ となる．以上より，平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ に関する星型領域 D_L，すなわち次の条件

- $\boldsymbol{x}^* \in D_L$
- $\boldsymbol{x} \in D_L$ に対し任意の $0 \le s \le 1$ について $\boldsymbol{x}^* + s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) \in D_L$

を満たす領域において任意の $\boldsymbol{z} \in D_L$ に対して $A(\boldsymbol{z})$ が負定値であることが，$L(\boldsymbol{x})$ が D_L で Lyapunov 関数となるための十分条件となる．
次に，$\boldsymbol{z}$ が平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ の近傍にあるとき $A(\boldsymbol{z})$ が負定値となることを示す．2 次形式 $y = \boldsymbol{x}^T A(\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ を固定するごとに $\boldsymbol{z}$ について連続であるため，$y = \boldsymbol{x}^T A(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{x}$ が任意の $\boldsymbol{x}$ に対して負値であることを示せばよい．したがって，$A(\boldsymbol{x}^*)$ の負定値性を示せばよい．一般に，エルミート行列 H，実ベクトル $\boldsymbol{z}$ に対して $\boldsymbol{z}^T H\boldsymbol{z}$ は実数である．さらに

$$\boldsymbol{z}^T H \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^T \mathrm{Re(H)} \boldsymbol{z}$$

となる．これより

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T((D\boldsymbol{f}^*)^T Y + YD\boldsymbol{f}^*)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T((D\boldsymbol{f}^*)^T \hat{Y} + \hat{Y}D\boldsymbol{f}^*)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) \tag{4.3}$$

となる．したがって，$A(\boldsymbol{x}^*)$ の代わりに $A^* := (D\boldsymbol{f}^*)^H \hat{Y} + \hat{Y}D\boldsymbol{f}^*$ の負定値性を調べればよい．$\hat{Y}$ および Λ の定義を用いて

$$\begin{aligned} A^* &= (D\boldsymbol{f}^*)^H X^{-H} I^* X^{-1} + X^{-H} I^* X^{-1} D\boldsymbol{f}^* \\ &= X^{-H}\Lambda^H I^* X^{-1} + X^{-H} I^* \Lambda X^{-1} \\ &= X^{-H}(2(\mathrm{Re})(\Lambda)\mathrm{I}^*)\mathrm{X}^{-1} \\ &= -2X^{-H}|\mathrm{Re}(\Lambda)|\mathrm{X}^{-1} \end{aligned} \tag{4.4}$$

と変形できる．ここで $|\mathrm{Re}(\Lambda)|$ は行列 $\mathrm{Re}(\Lambda)$ の各成分の絶対値を取った行列を表す．これより，A^* は負定値のエルミート行列をもつことがわかる．したがって，$\boldsymbol{x}^*$ の十分小さな近傍では

$$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{x}) < 0 \ \ (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^*),$$
$$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{x}) = 0.$$

となり，$L(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}^*$ の近傍で Lyapunov 関数の要件を満たすことが示された．

4.3.3 Lyapunov 関数の定義域の検証

構成した Lyapunov 関数が定義される領域を検証する．平衡点に関する星型領域 D_L を取り，この領域に対して Lyapunov 関数の要件を満たすかを確認する．まず，領域 D_L を平衡点近傍の領域 D_{L1} と，それ以外の領域 D_{L2} に分ける．さらに，D_{L1}，D_{L2} を適当な小領域に分割する．これらについて，次の検証条件の成立を確認する．

Stage1. 領域 D_{L1} の検証

D_{L1} を分割した各小領域を区間ベクトル $[\boldsymbol{x}]$ で包含し，さらに $A([\boldsymbol{x}])$ の負定値性を精度保証法で以下の手順により検証する．

1. $[\boldsymbol{x}]$ の中心ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする．行列 $A(\boldsymbol{x})$ を浮動小数点演算で算定し，その対角化を近似的に行う．すなわち，

$$\Lambda = X^{-1}A(\boldsymbol{x})X$$

となる行列 X を算定する．

2. 精度保証法によって区間行列 $X^{-1}A([\boldsymbol{x}])X$ を算定し，その成分を $[a]_{ij}$ と置く．
3. この区間行列にゲルシュゴーリンの定理を適用する．すなわち，各 $i = 1, \cdots, n$ について

$$[a]_{ii} + \sum_{j \neq i} |[a]_{ij}| < 0$$

を精度保証で検証する．

Stage2. 領域 D_{L2} の検証

$$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})^T Y(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^T Y \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

が負値になることを，各小領域において区間演算で直接確認する．

以上より領域 D_L において Lyapunov 関数が定義できることが検証される．この領域 D_L を Lyapunov 領域という．

検証方法 Stage1 が重要であることに注意されたい．理由として，の 2 点あり，関数 L は $\boldsymbol{x}^*$ 近傍で定義域を検証できなければ局 Lyapunov 関数と言えないこと，また検証方法 Stage2 では主に丸め誤差の問題からして平衡点近傍で検証条件が成立の確認ができないことが分かっていること挙げられる．

4.4 双曲型平衡点近傍で構成された局所 Lyapunov 関数の応用

Lyapunov 関数は，大域的な安定性解析のために用いられており，大域的な Lyapunov 関数の構成は盛んであった [3,13]. その一方で局所 Lyapunov 関数の構成は注目されなかった. 理由として，双曲型平衡点近傍での定性的な振る舞いはヤコビ行列の固有値で決まることがわかっており，定性理論の観点からして，定義域の存在がわかれば十分だとされていたためだと考えられる. また，定義域の特定方法がなかったことも原因に挙げられる.

しかしながら，近年精度保証により定義域の特定が可能となり，現在では局所 Lyapuov 関数は力学系解析の強力なツールとして利用されている. 例えば，ホモクリニック軌道・ヘテロクリニック軌道のような時間無限大の極限を含む現象の解析 [4,5] や，有限時間爆発解の解析 [6] に使われている. すなわち，局所 Lyapunov 関数の構成は解析的に難しい問題を解く武器となる．現状では，局所 Lyapunov 関数の構成方法は双曲型平衡点に対してのみ存在する. 非双曲型平衡点においても構成方法を確立できれば，力学系解析の「より」解析的に難しい問題を解く重要な役割を果たすことが期待できる.

4.5 非双曲型平衡点に対する問題点

第 4.3 節で記した局所 Lyapunov 関数の構成方法は非双曲型平衡点に対しては適用できない．その理由を本節で説明する．(3.1) の右辺 $\boldsymbol{f}$ について $\boldsymbol{x}^*$ 周りの Taylor 展開は

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = D\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T H^*(f_1)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) \\ (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T H^*(f_2)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T H^*(f_n)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|x\|^3) \tag{4.5}$$

と書ける．$H^*(f_i)(1 \le i \le n)$ は $\boldsymbol{x}^*$ における f_i のヘッセ行列であり，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdot, x_n)^T$ とおくと

$$H^*(f_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_n x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{x}^*)}{\delta x_n^2} \end{pmatrix}$$

となる．ここで，第 4.3 節にしたがって局所 Lyapunov 関数の候補関数 L :

$$L(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T Y(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)$$

を構成するとする．このとき，関数 L の時間微分は

$$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})^T Y(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T Y\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

であり，さらに Y は対称行列であるため，

$$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{x}) = 2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T Y\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

と書ける．ここで (5.3) を代入すると

$$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{x}) = 2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T Y D\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T Y \begin{pmatrix} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T H^*(f_1)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) \\ (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T H^*(f_2)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T H^*(f_n)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|x\|^4) \tag{4.6}$$

となる．

$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{x}^*) = 0$ は明らかであり，関数 L が $\boldsymbol{x}^*$ における局所 Lyapunov 関数となるためには，$\boldsymbol{x}^*$ の除外閉近傍 $U_\varepsilon^* = \{\boldsymbol{x} \mid 0 < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\| \leq \varepsilon\}$ で $\frac{d}{dt}L < 0$ となればよい．しかし，$\boldsymbol{x}^*$ が非双曲型平衡点ならばそれは成立しない．(4.6) の 2 次項

$$DL_2 := 2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T Y D\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)$$

について (4.3),(4.4) を用いれば

$$\begin{aligned} DL_2(\boldsymbol{x}) &= 2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T Y D\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) \\ &= (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T (Y D\boldsymbol{f}^* + (D\boldsymbol{f}^*)^T Y)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) \\ &= -2X^{-H}|\mathrm{Re}(\Lambda)|\mathrm{X}^{-1} \end{aligned} \tag{4.7}$$

となる．非双曲型の仮定より λ の対角成分に 0 が含まれるため，(4.7) は非正定値である．よって，次の条件を満たす $\boldsymbol{x}^*$ の閉近傍 $U_\delta^* = \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\| \leq \delta \leq \varepsilon\}$ が存在する．

$$\forall \boldsymbol{x} \in U_\delta, \mathrm{supDL}_2([\boldsymbol{x}]) > 0 \tag{4.8}$$

$\mathrm{supDL}_2([\boldsymbol{x}])$ は $DL_2([\boldsymbol{x}])$ に対して区間演算による精度保証を行った場合に得られる区間値の上端を表す．(4.8) が成立する要因は主に丸め誤差である．さらに (4.6) の 3 次項

$$DL_3(\boldsymbol{x}) := (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)Y \begin{pmatrix} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T H^*(f_1)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) \\ (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T H^*(f_2)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T H^*(f_n)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) \end{pmatrix}$$

に対して，集合 $V^- = \{\boldsymbol{x} \mid DL_3(\boldsymbol{x}) < 0 \wedge \boldsymbol{x} \in U_\delta(\boldsymbol{x}^*) \backslash \{\boldsymbol{x}^*\}\}$ 上の任意の点 $\boldsymbol{v}^-$ を考える．このとき，$\boldsymbol{v}^+ := 2\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{v}^-$ については

$$DL_3(\boldsymbol{v}^+) = (-\boldsymbol{v}^- + \boldsymbol{x}^*)^T Y \begin{pmatrix} (-\boldsymbol{v}^- + \boldsymbol{x}^*)^T H^*(f_1)(-\boldsymbol{v}^- + \boldsymbol{x}^*) \\ (-\boldsymbol{v}^- + \boldsymbol{x}^*)^T H^*(f_2)(-\boldsymbol{v}^- + \boldsymbol{x}^*) \\ \vdots \\ (-\boldsymbol{v}^- + \boldsymbol{x}^*)^T H^*(f_n)(-\boldsymbol{v}^- + \boldsymbol{x}^*) \end{pmatrix} = -DL_3(\boldsymbol{v}^-) > 0$$

となる．また $\boldsymbol{v}^+ \in U_\delta(\boldsymbol{x}^*) \backslash \{\boldsymbol{x}^*\}$ であるため，集合 $V^+ = \{\boldsymbol{x} \mid DL_3(\boldsymbol{x}) > 0 \wedge \boldsymbol{x} \in U_\delta(\boldsymbol{x}^*) \backslash \{\boldsymbol{x}^*\}\}$ が空集合とならない．したがって，(4.8) を満たす $U_\delta(\boldsymbol{x}^*)$ と V^+ の存在を考えれば，$\boldsymbol{x}^*$ の除外近傍では $\frac{d}{dt}L < 0$ を精度保証では検証できない．

以上の理由から，第 4.3 節の方法では非双曲型平衡点近傍における局所 Lyapunov 関数を原理的に構成できない．

5 非双曲型平衡点近傍における局所 Lyapunov 関数の構成

本章では，本論文の主題である，3 次元の自励系における非双曲型平衡点での局所 Lyapunov 関数の構成方法および定義域の検証方法を提案する．本論文で提案する方法は，力学系において基礎的な理論である標準形定理を利用している．全ての系において適用できるものではないが，手法そのものは勿論，適用可能な条件についても体系化されている．また提案した方法によって構成される局所 Lyapunov 関数は，第 4.3 節で記した双曲型平衡点での局所 Lyapunov 関数とは形式が異なる．それに合わせて，第 4.3 節と異なる定義域の検証方法を紹介する [22]．

5.1 問題設定

本論文では次のような3次元の自励系を対象とする．

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), 0 < t < \infty, \qquad (5.1)$$
$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

また，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ は考えている領域で $C^r(r \geq 4)$ 級とし，平衡点 $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = 0$，が存在するものとする．さらに，(5.1) について平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ が非双曲型であるものとする．(5.1) について $\boldsymbol{x}^*$ を原点に平行移動し，原点における $\boldsymbol{f}$ のヤコビ行列の固有空間に基底を取り直す．Taylor 展開を行えば

$$\dot{\boldsymbol{v}} = J\boldsymbol{v} + F(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3, J : \text{実ジョルダン標準形} \qquad (5.2)$$

とできる．なお，F は $\boldsymbol{f}$ とは異なることに注意されたい．

本論文の主題である局所 Lyapunov 関数の構成については，(5.2) を問題とすることが本質的であり，よって (5.2) における，非双曲型平衡点である原点の近傍における局所 Lyapunov 関数の構成方法について考える．

5.2 標準形定理

非双曲型平衡点近傍での局所 Lyapunov 関数の構成方法を考えるにあたって，標準形定理を利用する [16,22]．本節では，標準形定理について [16] を参考に記す．

最初に，$F(\boldsymbol{v})$ を Taylor 展開して，(5.2) を

$$\dot{\boldsymbol{v}} = J\boldsymbol{v} + F_2(\boldsymbol{v}) + F_3(\boldsymbol{v}) + F_4(\boldsymbol{v}) + \cdots + F_{r-1}(\boldsymbol{v}) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{v}\|^r) \qquad (5.3)$$

に書き直す．ここで，$F_i(\boldsymbol{v})(2 \leq i \leq r-1)$ は $F(\boldsymbol{v})$ の Taylor 展開の i 次の項を表す．
座標変換

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + h_2(\boldsymbol{u}) \qquad (5.4)$$

を導入する．この操作を標準形変換あるいは近恒等変換と呼ぶ [17,18] が，ここでは標準形変換と呼ぶことにする．ここで，$h_2(\boldsymbol{u})$ は $\boldsymbol{u}$ の2次の項である．(5.4) を (5.3) に代入して

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{v}} &= (I + Dh_2(\boldsymbol{u}))\dot{\boldsymbol{u}} \\ &= J\boldsymbol{u} + Jh_2(\boldsymbol{u}) + F_2(\boldsymbol{u} + h_2(\boldsymbol{u})) + F_3(\boldsymbol{u} + h_2(\boldsymbol{u})) + \cdots + F_{r-1}(\boldsymbol{u} + h_2(\boldsymbol{u})) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{u}\|^r)\end{aligned}$$

を得る．I は 3×3 単位行列を，$Dh_2(\boldsymbol{u})$ は $h_2(\boldsymbol{u})$ のヤコビ行列を表す．

ここで

$$F_j(\boldsymbol{u} + h_2(\boldsymbol{u})) = F_j(\boldsymbol{u}) + \hat{F}_{j+1}(\boldsymbol{u}) + \cdots + \hat{F}_{2j}(\boldsymbol{u}),\ 2 \leq j \leq r-1$$

となる．なお，$\hat{F}_i(\boldsymbol{u})(j+1 \leq i \leq 2j)$ は i 次の項である．

これより

$$(I + Dh_2(\boldsymbol{u}))\dot{\boldsymbol{u}} = J\boldsymbol{u} + Jh_2(\boldsymbol{u}) + F_2(\boldsymbol{u}) + \hat{F}_3(\boldsymbol{u}) + \cdots \hat{F}_{r-1}(\boldsymbol{u}) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{u}\|^r) \qquad (5.5)$$

となる．

十分小さな $\boldsymbol{u}$ に対して $(I + Dh_2(\boldsymbol{u}))^{-1}$ が存在し，次のように級数展開できる．

$$(I + Dh_2(\boldsymbol{u}))^{-1} = I - Dh_2(\boldsymbol{u}) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{u}\|^2) \qquad (5.6)$$

(5.6) を (5.5) に代入して

$$\dot{\boldsymbol{u}} = J\boldsymbol{u} + Jh_2(\boldsymbol{u}) - Dh_2(\boldsymbol{u})J\boldsymbol{u} + F_2(\boldsymbol{u}) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{u}\|^3) \tag{5.7}$$

を得る．$h_2(\boldsymbol{u})$ は $\boldsymbol{u}$ についての任意の 2 次項であり，したがって (5.7) の 2 次項

$$\tilde{F}_2(\boldsymbol{u}) := Jh_2(\boldsymbol{u}) - Dh_2(\boldsymbol{u})J\boldsymbol{u} + F_2(\boldsymbol{u}) \tag{5.8}$$

は $h_2(\boldsymbol{u})$ の任意性によって「ある程度の範囲」で操作できる．

(5.4) による標準形変換は 2 次の項のみ操作することができる．より高次の項も操作できるようにするには，座標変換の式を

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \sum_{m=2}^{j} h_m(\boldsymbol{u}),\ 2 \leq j \leq r-1 \tag{5.9}$$

とすればよい．$h_i(\boldsymbol{u})(2 \leq i \leq j)$ は $\boldsymbol{u}$ の任意の i 次項である．このとき，(5.4) の場合と同様の代数的操作を施すと，

$$\dot{\boldsymbol{u}} = J\boldsymbol{u} + \tilde{F}_2^r(\boldsymbol{u}) + \cdots + \tilde{F}_j^r(\boldsymbol{u}) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{u}\|^{j+1}) \tag{5.10}$$

が導かれる．ここで，$\tilde{F}_i^r(\boldsymbol{u})(2 \leq i \leq j)$ は標準形変換によって変形された $\boldsymbol{u}$ の i 次の項を意味する．(5.10) を標準形と呼び，(5.3) が (5.10) に変換できることを標準形定理と呼ぶ．

標準形は変換式 (5.9) の非線形項 $\sum_{m=2}^{j} h_m(\boldsymbol{u})(2 \leq m \leq j)$ の任意性によって「ある程度の範囲」で操作できる．また，問題設定上，3 次元の系に対して標準形定理の操作を行なっているが，系がより高次元であっても成立する．

5.3 局所 Lyapunov 関数の構成の方針

本論文で提案する構成方法は標準形定理を利用する．方針として，まずは局所 Lyapunov 関数の候補関数 L をあらかじめ設定し，さらに与えられた系に対して局所 Lyapunov 関数が容易に考えられる標準形を探す．同時に局所 Lyaounov 関数を構成するための十分条件を求める．そして，その標準形への変換式を算出し，考えられた局所 Lyapunov 関数を座標変換前の変数で表すことをめざす．

まず 2 次元の場合について，標準形定理との関連性がより明確となるように先行研究 [22] での扱いを変更して記述する．次にこの手法を 3 次元の場合に適用し，一部のケースについては一般の n 次元の場合でもそのまま適用可能であることも示す．

まず (5.2) について 3 次までの展開を考える．

$$\dot{\boldsymbol{v}} = J\boldsymbol{v} + \boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{v}) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{v}\|^4), \tag{5.11}$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^T P_1 \boldsymbol{v} \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}^T P_n \boldsymbol{v} \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^T \hat{P}_1(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{v} \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}^T \hat{P}_n(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{v} \end{pmatrix},$$

$P_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$: 実対称行列, $\hat{P}_n(\boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\boldsymbol{u}$ についての 1 次の項を成分に持つ実対称行列

ここで 3 次までの非線形変換

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u}), \tag{5.12}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^T Q_1 \boldsymbol{u} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}^T Q_n \boldsymbol{u} \end{pmatrix}, \boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}^T \hat{Q}_1(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{u} \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}^T \hat{Q}_n(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{u} \end{pmatrix}$$

$Q_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$: 実対称行列, $\hat{Q}_n(\boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\boldsymbol{u}$ についての 1 次の項を成分に持つ実対称行列

を導入する．これが5.2節で述べた標準形変換である．$\boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{u})$ は (5.2) によって定まるが，$\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u})$ は任意に取れることに注意されたい．(5.12) を (5.11) に代入する．
このとき (5.11) は次のように書くことができる．

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{u}} =& J\boldsymbol{u} + J\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u}) - D\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})J\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{u}) \\ &+ J\boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u}) - D\boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u})J\boldsymbol{u} - D\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})(J\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u}) - D\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})J\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{u})) + \quad 2\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})^T P_1 \boldsymbol{u} \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})^T P_n \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \\ &+ \boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{u}) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{u}\|^3) \end{aligned} \tag{5.13}$$

ここで，局所 Lyapunov 関数の候補関数を L :

$$L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^T Y \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{R}^{n\times n} : \text{実対称行列} \tag{5.14}$$

とする．ここで定める局所 Lyapunov 関数はサドルを含めた不安定な平衡点も扱うこととし，$L(\boldsymbol{u})$ は正値を取るとは限らないことに注意されたい．このとき $L(\boldsymbol{u})$ の時間微分は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{u}(t)) &= (\boldsymbol{a}^T + 2\boldsymbol{u}^T Y)\dot{\boldsymbol{u}} \\ &= (\boldsymbol{a}^T + 2\boldsymbol{u}^T Y)(J\boldsymbol{u} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{u}\|^2) \\ &= \boldsymbol{a}^T J\boldsymbol{u} + (\|\boldsymbol{u}\|^2)\end{aligned} \tag{5.15}$$

と書ける．このとき平衡点 $\boldsymbol{u}^*$ の近傍において，$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{u}(t)) \le 0$ であるために，$\boldsymbol{a}^T J = \boldsymbol{0}$ であることが必要である．すなわち J が正則であれば $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$，$J$ が正則でなければ J の右固有値が 0 に対応する固有ベクトルに $\boldsymbol{a}$ をとることが必要十分である．具体的には $\boldsymbol{a}$ は次のように定まる．
J は正則でないこととその形から，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^n$ のうち

$$\boldsymbol{e}_i^T J = \boldsymbol{0}^T$$

となるものが存在する．これを満たす i の集合を $I \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ と置き，

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad a_j = 0 \quad \text{for} \quad j \notin I$$

と定める．

標準形変換については，(5.2) の非線形項 $F(\boldsymbol{v})$ だけでなく，J にも依ることがわかる [22]．したがって，次節では J 毎に分類して標準形変換を考え，さらにそれぞれの場合の (5.14) で示した局所 Lyapunov 関数を構成するための十分条件を求める．

なお，十分条件については，$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{u})$ の 4 次項まで考えるとし，それ以上については考えていない．

5.4 $n = 2$ の場合の構成方法

ここでは，主題に入る前に先行研究による，$n = 2$ の場合の問題 (5.2) の原点近傍における局所 Lyapunov 関数の構成方法についてまとめたものを記す [22]．先行研究と異なるのは，より標準形定理に忠実に変数変換を行なっている点である．

(5.11),(5.12) に対し，

$$\boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^T P_1 \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v}^T P_2 \boldsymbol{v} \end{pmatrix}, \qquad P_i = \begin{pmatrix} p_{i1} & p_{i3} \\ p_{i3} & p_{i2} \end{pmatrix}, p_{ij} \in \mathbb{R}, i \in \{1,2\}, j \in \{1,3\}$$

$$\boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^T \hat{P}_1(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v}^T \hat{P}_2(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{v} \end{pmatrix}, \hat{P}_i(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{p}_{i1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{p}_{i2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_{ij} = \begin{pmatrix} p_{ij1} \\ p_{ij2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, i, j \in \{1,2\}$$

$$\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^T Q_1 \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u}^T Q_2 \boldsymbol{u} \end{pmatrix}, \qquad Q_i = \begin{pmatrix} q_{i1} & q_{i3} \\ q_{i3} & q_{i2} \end{pmatrix}, q_{ij} \in \mathbb{R}, i \in \{1,2\}, j \in \{1,2,3\}$$

$$\boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}^T \hat{Q}_1(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{q}^T \hat{Q}_2(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{u} \end{pmatrix}, \hat{Q}_i(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{q}_{i1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{q}_{i2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{q}_{ij} = \begin{pmatrix} q_{ij1} \\ q_{ij2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, i, j \in \{1,2\}$$

と定める．

次に問題設定に対する捉え方について説明する．J については非双曲型の仮定から

$$J_1 = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix}, J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

の 4 通りが考えられる．

J_1 は 2 つある固有値のうち 1 つが 0 である場合，J_2 は 2 つとも固有値 0 かつ対角化可能でない場合，J_3 はヤコビ行列の固有値が純虚数の場合，J_4 は 2 つとも固有値 0 かつ対角化可能な場合を示している．

5.4.1　J_1 の場合

5.3 節より，

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

となる．このとき，(5.13),(5.15) より，

$$\frac{d}{dt} L(\boldsymbol{u}(t)) = \boldsymbol{u}^T \left(a_2 P_2 + J^T \hat{Y} + \hat{Y} J \right) \boldsymbol{u} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{u}\|^3), \ \hat{Y} = Y - a_2 Q_2$$

と書ける．$a_2, \hat{Y}$ は任意に取ることができることに注意されたい．

このとき，$J^T \hat{Y} + \hat{Y} J$ の第 $(2,2)$ 成分が 0 となるため，P_2 の第 $(2,2)$ 成分が 0 でなければ，

$$a_2 P_2 + J^T \hat{Y} + \hat{Y} J$$

が負定値となるように，$a_2, \hat{Y}$ を決めることができ，これが局所 Lyapunov を構成するための十分条件である．

5.4.2　J_2 の場合

J_1 の場合と同様に議論することができ，5.3 節より，

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり，$J^T \hat{Y} + \hat{Y} J$ の第 $(1,1)$ 成分が 0 となるため，P_1 の第 $(1,1)$ 成分が 0 でなければ，

$$a_1 P_1 + J^T \hat{Y} + \hat{Y} J, \ \hat{Y} = Y - a_1 Q_1$$

が負定値となるように，$a_2, \hat{Y}$ を決めることができ，これが局所 Lyapunov を構成するための十分条件である．

5.4.3　J_3 の場合

5.3 節より，J_3 は正則なので，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ である．

ここでは，計算を簡易化するため，$\rho=1$ とする．

このとき，(5.13),(5.15) より，

$$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{u}(t))=\boldsymbol{u}^T\left(J^TY+YJ\right)\boldsymbol{u}+\mathcal{O}(\|\boldsymbol{u}\|^3), \tag{5.16}$$

となるが,

$$Y:=\begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_3 & y_2 \end{pmatrix}, y_1,y_2,y_3\in\mathbb{R}$$

とおいたとき,

$$J^TY+YJ=\begin{pmatrix} 2y_3 & y_2-y_1 \\ y_2-y_1 & -2y_3 \end{pmatrix}$$

となり，J^TY+YJ は非正定値また非負定値となる．

このままでは，平衡点近傍において局所 Lyapunov 関数の定義を満たせないため

$$Y=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},\ \alpha\in\mathbb{R}$$

とおく．

このとき $J^TY+YJ=O$ となるので,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{u}(t)) =&2\alpha\boldsymbol{u}^T\dot{\boldsymbol{u}}\\ =&2\alpha(J\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})-D\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})J\boldsymbol{u}+\boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{u})\\ &+J\boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u})-D\boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u})J\boldsymbol{u}-D\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})(J\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})-D\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})J\boldsymbol{u}+\boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{u}))+2\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})^TP_1\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})^TP_2\boldsymbol{u}\end{pmatrix}\\ &+\boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{u}))\end{aligned} \tag{5.17}$$

となる．

今，(5.17) に 2 次項は存在しない．したがって，局所 Lyapunov 条件の定義より，(5.17) に 2 次より大きい奇数次項はあってはならないため，(5.17) の 3 次項を消去する必要がある．

すなわち，$\boldsymbol{u}^T(J\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})-D\boldsymbol{q}^{(2)}J\boldsymbol{u})=0$ となる必要がある．

したがって

$$J\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})-D\boldsymbol{q}^{(2)}J\boldsymbol{u}+\boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{u})=0 \tag{5.18}$$

となるような $\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})$ を求めれば良い．

$$\begin{aligned}(5.18)\Leftrightarrow&\begin{cases}\boldsymbol{u}^T(-Q_2-(J^TQ_1+Q_1J)+P_1)\boldsymbol{u}=0\\ \boldsymbol{u}^T(Q_1-(J^TQ_2+Q_2J)+P_2)\boldsymbol{u}=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}P_1=Q_2+J^TQ_1+Q_1J\\ P_2=-Q_1+J^TQ_2+Q_2J\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}J^TPJ_1=J^TQ_2J+-(J^TQ_1+Q_1J)\\ J^TPJ_2=-J^TQ_1J+-(J^TQ_2+Q_2J)\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}Q_1=-\frac{1}{3}(P_2+2J^TP_2J+(J^TP_1+P_1J))\\ Q_2=\frac{1}{3}(P_1+2J^TP_1J+(J^TP_2+P_2J))\end{cases}\end{aligned}$$

この Q_1, Q_2 を用いた変換により，(5.17) の 3 次項を消去できる．すなわち，$\boldsymbol{u}^T(J\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u}) - D\boldsymbol{q}^{(2)}J\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{u})) = 0$ となる．

続いて，(5.17) の 4 次項が負定値となるような標準形変換および局所 Lyapuov 関数を構成するための十分条件を見出す．
(5.17) の 4 次項は

$$2\alpha\boldsymbol{u}^T(J\boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u}) - D\boldsymbol{q}^{(3)}J\boldsymbol{u} + \hat{\boldsymbol{p}}^{(3)}), \tag{5.19}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}^{(3)}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{u}) + 2\begin{pmatrix} (\boldsymbol{q}^{(2)})^T P_1 \\ (\boldsymbol{q}^{(2)})^T P_2 \end{pmatrix}\boldsymbol{u}$$

となる．
この (5.19) に対して，全ての 3 次のベクトル値関数の基底

$$\hat{\boldsymbol{q}}_i^{(3)}(\boldsymbol{u}) \quad ,(i = 1, 2, \cdots, 8) \tag{5.20}$$

を考える．
そして，(5.20) を (5.19) に代入した 4 次のスカラー値関数

$$h_i^{(4)}(\mathbf{u}) := \boldsymbol{u}^T(J\hat{\boldsymbol{q}}_i^{(3)}(\boldsymbol{u}) - D\hat{\boldsymbol{q}}_i^{(3)}(\boldsymbol{u})J\boldsymbol{u})$$

のうち，一次独立な基底を選択する．
この場合，4 次のスカラー値関数の基底は一意には決まらないが，例として

$$u_1^3u_2,\ u_1u_2^3,\ u_1^4 - 3u_1^2u_2^2,\ u_2^4 - 3u_1^2u_2^2 \tag{5.21}$$

を選択する．
これに対応する 3 次のベクトル値関数の基底は

$$\hat{\boldsymbol{q}}_i^{(3)}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} u_1^3 \\ 0 \end{pmatrix}, -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ u_2^3 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 0 \\ u_1^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2^3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

である．

そこで適当な $\boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u})$ を選んで

$$\boldsymbol{u}^T(J\boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u}) - D\boldsymbol{q}^{(3)}J\boldsymbol{u}) = k_1u_1^3u_2 + k_2u_1u_2^3 + \gamma(u_1^4 - 3u_1^2u_2^2) + \omega(u_1^4 - 3u_1^2u_2^2),\ k_1, k_2, \gamma, \omega \in \mathbb{R}$$

と表せる．k_1, k_2, γ, ω は任意に取ることができることに注意されたい．

まず $\gamma = \omega = 0$ として，

$$\boldsymbol{u}^T(J\boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u}) - D\boldsymbol{q}^{(3)}J\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}^T\hat{\boldsymbol{p}}^{(3)}(\boldsymbol{u}) = au_1^4 + bu_2^4 + cu_1^2u_2^2,\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

となるように k_1, k_2 を決めて固定する．さらに γ, ω を取り直すように $\boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u})$ を再選択する．このとき

$$(a+\gamma)u_1^4 + (b+\omega)u_2^4 + (c - 3(\gamma+\omega))u_1^2u_2^2 \tag{5.23}$$

を得る．γ, ω は任意に取れるので，(5.23) における γ, ω を制御して，局所 Lyapunov 関数が構成できる $\boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u})$ を求める．今回，α が任意にとれるので，この場合局所 Lyapunov 関数を構成するには，(5.23) が負値もしくは正値となれば十分である．

ここで

$$\begin{cases} t := a + \gamma,\ s := b + \omega,\ d := 3(a+b) + c, \\ x := u_1^2,\ y := u_2^2 \end{cases}$$

とおき，(5.23) を式変形すると

$$f(x,y) := t(x+\sqrt{\frac{s}{t}}y)^2 + (d-3(t+s))xy - \sqrt{ts}xy \tag{5.24}$$

とかける．

(5.24) は，$x, y > 0$ の範囲で，実数として考えているため，t, s は $ts > 0$ の範囲で任意に取れることに注意されたい．

以上より (5.24) が $x, y > 0$ の範囲で，正または負の値をとればよい．したがって，考慮する条件は

- $t, s > 0$ のとき、$d > 3(t+s) + 2\sqrt{ts}$ より，t, s は $t, s > 0$ 上で任意なので，限りなく小さく値を取ることができ，$d > 0$ が条件がとなる．このとき α は負の値に定める．
- $t, s < 0$ のとき、$d < 3(t+s) - 2\sqrt{ts} < 4\sqrt{ts}$ より，t, s は $t, s < 0$ 上で任意なので，$d < 0$ が条件となる．($\because$ 相加平均・相乗平均の大小関係)．このとき α は正の値に定める．

である

したがって，2 つの条件をまとめると，局所 Lyapunov 関数を構成するための十分条件は $d \neq 0$ であることがわかる．

5.4.4　J_4 の場合

5.3 節より

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

となり，さらに $J^T\hat{Y} + \hat{Y} = O$ となるため

$$\sum_{i=1}^{2} a_i P_i$$

が負定値であることが，局所 Lyapunov を構成するための十分条件である．a_i は任意に取れることに注意されたい．

5.5　$n = 3$ の場合の構成方法

ここでは，本論文の主題である $n = 3$ の場合の問題 (5.2) の原点近傍における局所 Lyapunov 関数の構成方法について記す．

(5.11),(5.12) に対し，

$$\boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^T P_1 \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v}^T P_2 \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v}^T P_3 \boldsymbol{v} \end{pmatrix}, \qquad P_i = \begin{pmatrix} p_{i1} & p_{i4} & p_{i5} \\ p_{i4} & p_{i2} & p_{i6} \\ p_{i5} & p_{i6} & p_{i3} \end{pmatrix}, p_{ij} \in \mathbb{R}, i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2,\cdots,6\}$$

$$\boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^T \hat{P}_1(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v}^T \hat{P}_2(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v}^T \hat{P}_3(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{v} \end{pmatrix}, \hat{P}_i(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{p}_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{p}_{i2} & \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{p}_{i4} \\ 0 & \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{p}_{i4} & \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{p}_{i3} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{p}_{ij} = \begin{pmatrix} p_{ij1} \\ p_{ij2} \\ p_{ij3} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_{i4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} p_{i41} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, i, j \in \{1,2,3\}$$

$$\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^T Q_1 \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u}^T Q_2 \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u}^T Q_3 \boldsymbol{u} \end{pmatrix}, \qquad Q_i = \begin{pmatrix} q_{i1} & q_{i4} & q_{i5} \\ q_{i4} & q_{i2} & q_{i6} \\ q_{i5} & q_{i6} & q_{i3} \end{pmatrix}, q_{ij} \in \mathbb{R}, i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2,\cdots,6\}$$

$$\boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^T \hat{Q}_1(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u}^T \hat{Q}_2(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u}^T \hat{Q}_3(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{u} \end{pmatrix}, \hat{P}_i(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{q}_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{q}_{i2} & \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{q}_{i4} \\ 0 & \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{q}_{i4} & \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{q}_{i3} \end{pmatrix},$$

$$q_{ij} = \begin{pmatrix} q_{ij1} \\ q_{ij2} \\ q_{ij3} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_{i4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} q_{i41} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, i, j \in \{1,2,3\}$$

と定める．

次に問題設定に対する捉え方について説明する．J については非双曲型の仮定から

$$J_5 = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_6 = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_7 = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_{11} = \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho \\ 0 & \rho & 0 \end{pmatrix}, J_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho \\ 0 & \rho & 0 \end{pmatrix}, \rho, \eta \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \tag{5.25}$$

の 8 通りが考えられる．

J_5 は 3 つある固有値のうち一つが 0 である場合，J_6 は 3 つある固有値のうち 2 つが 0 である場合，J_7 は 3 つある固有値のうち 2 つが固有値 0 かつ対角化可能でない場合，J_8 は 3 つある固有値のうち 1 つが固有値 0 で残り 2 つが固有値 0 かつ対角化可能でない場合，J_9 は 3 つある固有値のうち 2 つとも固有値 0 かつ対角化可能な場合，J_{10} は 3 つある固有値のうち 3 つとも固有値 0 かつ対角化可能な場合，J_{11} は 3 つある固有値のうち 2 つの固有値が純虚数の場合，J_{12} は 3 つある固有値のうち 2 つの固有値が純虚数で残り 1 つが 0 の場合を示している．本論文では $J_1 \sim J_8$ それぞれの場合について，上記の方針に従った局所 Lyapunov 関数の構成方法を記す.

5.5.1 J_5, J_7, J_9 の場合

5.3 節から，J の形により，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ に対して，

$$\boldsymbol{a}^T = a_i \boldsymbol{e}_i^T, (i = 1, 2, 3) \tag{5.26}$$

となるものが考えられる．
このとき (5.13),(5.15) より

$$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{u}(t)) = \boldsymbol{u}^T(a_iP_i + J^T\hat{Y} + \hat{Y}J)\boldsymbol{u} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{u}\|^3), \qquad (5.27)$$
$$\hat{Y} = Y - a_iQ_i$$

このとき，$J^T\hat{Y} + \hat{Y}J$ の第 (i,i) 成分が 0 となるため，P_i の第 (i,i) 成分が 0 でなければ，

$$a_iP_i + J^T\hat{Y} + \hat{Y}J$$

が負定値となるように，$a_i, \hat{Y}$ を決めることができ，これが局所 Lyapunov を構成するための十分条件である．

5.5.2 J_6, J_8 の場合

5.3 節から，J の形により，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j$ に対して，

$$\boldsymbol{a}^T = a_i\boldsymbol{e}_i^T + a_j\boldsymbol{e}_j^T,\ (i,j \in \{1,2,3\}, i < j) \qquad (5.28)$$

となるものも考えられる．
このとき，(5.13),(5.15) より

$$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{u}(t)) = \boldsymbol{u}^T\left(a_iP_i + a_jP_j + J^T\hat{Y} + \hat{Y}J\right)\boldsymbol{u} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{u}\|^3), \qquad (5.29)$$
$$\hat{Y} = Y - a_iQ_i - a_jQ_j$$

となる．
このとき，$J^T\hat{Y} + \hat{Y}J$ は J の形により，$k,l \in \{i,j\}$ として，第 (k,l) 成分が 0，それ以外の成分は任意に取ることができる．
したがって，$a_iP_i + a_jP_j$ の第 (k,l) 成分を取り出して作る $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 行列が負定値であれば，$a_iP_i + a_jP_j + J^T\hat{Y} + \hat{Y}J$ は負定値となるように取ることができ，これが局所 Lyapunov を構成するための十分条件である．

5.5.3 J_{10} の場合

5.3 節より

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

となる．
さらに $J^T\hat{Y} + \hat{Y} = 0$ となるため

$$\sum_{i=1}^{3} a_iP_i$$

が負定値であることが，局所 Lyapunov を構成するための十分条件である．a_i は任意に取れることに注意されたい．

5.5.4 J_{11} の場合

5.3 節より，J_{11} は正則なので，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ である．

ここでは，計算を簡易化するため，$\eta=\rho=1$ とする．

また

$$J^{(2)} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y^{(2)} := \begin{pmatrix} y_2 & y_6 \\ y_6 & y_3 \end{pmatrix}, Y := \begin{pmatrix} y_1 & y_4 & y_5 \\ y_4 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$Y^{(2)}$}} \\ y_5 & & \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

とおく．

すると

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0} & J^{(2)} \end{pmatrix}$$

と書ける．

このとき，(5.13),(5.15) より

$$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{u}(t)) = \boldsymbol{u}^T \left(J^T Y + YJ\right)\boldsymbol{u} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{u}\|^3), \tag{5.31}$$

となるが,

$$J^T Y + YJ = \begin{pmatrix} 2y_1 & y4+y5 & y_5-y_4 \\ y4+y5 & 2y_6 & y_3-y_2 \\ y_5-y_4 & y_3-y_2 & -2y_6 \end{pmatrix}$$

となり，非正定値また非負定値となる．

このままでは，平衡点近傍において局所 Lyapunov 関数の定義を満たせないため

$$Y = \begin{pmatrix} \alpha(1+\beta) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

とおく．

このとき，$\boldsymbol{u}^T(J^TY+YJ)\boldsymbol{u} = 2\alpha(1+\beta)u_1^2$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{u}(t)) =& 2\boldsymbol{u}^T Y \dot{\boldsymbol{u}} \\ =& 2\alpha(1+\beta)u_1^2 + 2\alpha\left(\boldsymbol{u}^T + \beta(u_1,0,0)^T\right)\left(J\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u}) - D\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})J\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{u})\right. \\ & + J\boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u}) - D\boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u})J\boldsymbol{u} - D\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})\left(J\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u}) - D\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})J\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{u})\right) + 2\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})^T P_1 \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})^T P_2 \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \\ & \left. + \boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{u})\right) \end{aligned} \tag{5.32}$$

となる．これは 2 次，3 次，4 次の項を含んでいる．

今，(5.32) に u_2, u_3 についての 2 次の項は存在しない．したがって，局所 Lyapunov 関数の定義が成立するためには，(5.32) に u_1^2 を含んでいない 3 次の項はあってはならないため，(5.32) の 3 次項，すなわち，$\left(\boldsymbol{u}^T + \beta(u_1,0,0)^T\right)(J\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u}) - D\boldsymbol{q}^{(2)}J\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{u}))$ のうち，u_1^2 を含んでない 3 次の項は消去する必要がある．

ここで，u_1^2 を含む，$\boldsymbol{u}$ についての 3 次の式を $R^{(3)}$ と書く．
したがって，

$$\left(\boldsymbol{u}^T+\beta(u_1,0,0)^T\right)\left(J\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})-D\boldsymbol{q}^{(2)}J\boldsymbol{u}+\boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{u})\right)=R^{(3)} \tag{5.33}$$

となるような $\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})$ を求めれば良い．
計算を簡易化するため，5.4.3 節の計算結果を利用できる部分は利用する．
この節で登場する行列は $\mathbb{R}^{3\times 3}$ であったが，右下 4 成分を抜き出した $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 行列を次のように書く．

$$M^{[2]}:=\{[m_{ij}],i,j\in\{2,3\}\mid M=[m_{ij}],i,j\in\{1,2,3\}\}$$

(5.33) 式は

$$\begin{aligned}
(5.33)\Leftrightarrow(\boldsymbol{u}^T+\beta(u_1,0,0)^T)&\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}^T(Q_1-(J^TQ_1+Q_1J)+P_1)\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{u}^T(-Q_3-(J^TQ_2+Q_2J)+P_2)\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{u}^T(Q_2-(J^TQ_3+Q_3J)+P_2)\boldsymbol{u}\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}\boldsymbol{u}^Tu_1(1+\beta)(Q_1-(J^TQ_1+Q_1J)+P_1)\boldsymbol{u}+\\ \boldsymbol{u}^Tu_2(-Q_3-(J^TQ_2+Q_2J)+P_2)\boldsymbol{u}+\\ \boldsymbol{u}^Tu_3(Q_2-(J^TQ_3+Q_3J)+P_2)\boldsymbol{u}\end{cases}
\end{aligned} \tag{5.34}$$

と書ける．
さらに

$$\begin{cases}①:=(1+\beta)(Q_1-(J^TQ_1+Q_1J)+P_1)\\ ②:=-Q_3-(J^TQ_2+Q_2J)+P_2\\ ③:=Q_2-(J^TQ_3+Q_3J)+P_2\end{cases} \tag{5.35}$$

とおく．ここで，5.4.3 節の計算結果と

$$(J^TQ_i+Q_iJ)^{[2]}=\left((J^{[2]})^TQ_i^{[2]}+Q_i^{[2]}J^{[2]}\right) \tag{5.36}$$

の事実を使えば

$$\begin{cases}Q_2^{[2]}=-\frac{1}{3}\left(P_3^{[2]}+2(J^{[2]})^TP_3^{[2]}J^{[2)]}+(J^{[2]})^TP_2^{[2]}+P_2^{[2]}J^{[2]})\right)\\ Q_3^{[2]}=\frac{1}{3}\left(P_2^{[2]}+2(J^{[2]})^TP_2^{[2]}J^{[2]}+(J^{[2]})^TP_3^{[2]}+P_3^{[2]}J^{[2]})\right)\end{cases} \tag{5.37}$$

とおくことで，

$$\begin{cases}②^{[2]}=O\\ ③^{[2]}=O\end{cases} \tag{5.38}$$

となる．
(5.37) を (5.34) に代入すると

$$(5.34)\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{u}^Tu_1(1+\beta)(Q_1-(J^TQ_1+Q_1J)+P_1)\boldsymbol{u}+\\ \boldsymbol{u}^Tu_2\begin{pmatrix}-q_{31}-2q_{21}+p_{21} & -q_{34}-q_{24}-q_{25}+p_{24} & -q_{35}-q_{25}+q_{24}+p_{25}\\ -q_{34}-q_{24}-q_{25}+p_{24} & 0 & 0\\ -q_{35}-q_{25}+q_{24}+p_{25} & 0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{u}+\\ \boldsymbol{u}^Tu_3\begin{pmatrix}q_{21}-2q_{31}+p_{21} & q_{24}-q_{34}-q_{34}+p_{24} & q_{25}-q_{35}+q_{34}+p_{35}\\ q_{24}-q_{34}-q_{35}+p_{34} & 0 & 0\\ q_{25}-q_{35}+q_{34}+p_{35} & 0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{u}\end{cases} \tag{5.39}$$

となる．

ここで，(5.39) は 3 つの 2 次形式の足し算となっているが，各行列の成分が，(5.39) が生み出す 3 次項の係数となっている．また，$\frac{d}{dt}L$ に u_1^2 についての 2 次項がすでにあるため，u_1^2 を含む 3 次項は残っていても局所 Lypunov 関数を構成することはできる．すわなち，$\frac{d}{dt}L$ が負定値となるように取れるということである．

したがって，計算を簡易化するため，P_i の成分がかかる u_1^2 を含む 3 次項を消去しないこととする．

すなわち，u_1^2 を含む 3 次の項にかかる Q_i の成分を $\bar{q}_{ij}$ と定め，

$$\bar{q}_{ij} = 0, i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2,\cdots,6\}$$

とおく．

その場合

$$(5.39) \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{u}^T u_1(1+\beta)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{14} & p_{15} \\ p_{14} & & \\ p_{14} & \multicolumn{2}{c}{Q_1^{[2]} - ((J^{[2]})^T Q_1^{[2]} + Q_1^{[2]} J^{[2]}) + P_1^{[2]}} \\ & & \end{pmatrix}\boldsymbol{u} + \\ \boldsymbol{u}^T u_2 \begin{pmatrix} p_{21} & -q_{34}-q_{24}-q_{25}+p_{24} & -q_{35}-q_{25}+q_{24}+p_{25} \\ -q_{34}-q_{24}-q_{25}+p_{24} & 0 & 0 \\ -q_{35}-q_{25}+q_{24}+p_{25} & 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{u} + \\ \boldsymbol{u}^T u_3 \begin{pmatrix} p_{31} & q_{24}-q_{34}-q_{35}+p_{24} & q_{25}-q_{35}+q_{34}+p_{35} \\ q_{24}-q_{34}-q_{35}+p_{34} & 0 & 0 \\ q_{25}-q_{35}+q_{34}+p_{35} & 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{u} \end{cases} \tag{5.40}$$

とかける．

このとき，(5.40) は 3 つの 2 次形式の足し算となっていて，u_1 を含まない 3 次の項の係数が消えるような $(1+\beta)\left(Q_1^{[2]} - ((J^{[2]})^T Q_1^{[2]} + Q_1^{[2]} J^{[2]})\right)$ を求める．

方程式は

$$\begin{aligned} &(1+\beta)\left(Q_1^{[2]} - ((J^{[2]})^T Q_1^{[2]} + Q_1^{[2]} J^{[2]})\right) \\ &= -P_1^{[2]} + \begin{pmatrix} -2p_{24}+2q_{24}+2q_{25}+2q_{35} & -p_{25}-p_{34}-2q_{24}+q_{25}+q_{34}+2q_{35} \\ -p_{25}-p_{34}-2q_{24}+q_{25}+q_{34}+2q_{35} & -2p_{35}-2q_{25}+2q_{35}-2q_{34} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.41}$$

となっていて，これを満たす $Q_1^{[2]}$ を取れば，(5.40) の u_1^2 を含まない 3 次項を消去することができる．

さらに，計算を簡易化するために，$q_{24} = q_{25} = q_{34} = q_{35} = 0$ とおくと，(5.41) は

$$(1+\beta)(Q_1^{[2]} - ((J^{[2]})^T Q_1^{[2]} + Q_1^{[2]} J^{[2]})) = -P_1^{[2]} + \begin{pmatrix} -2p_{24} & -p_{25}-p_{34} \\ -p_{25}-p_{34} & -2p_{35} \end{pmatrix} \tag{5.42}$$

となり，これを $Q_1^{[2]}$ について解けばよい．ここで

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_3 \\ s_3 & s_2 \end{pmatrix} := -P_1^{[2]} + \begin{pmatrix} -2p_{24} & -p_{25}-p_{34} \\ -p_{25}-p_{34} & -2p_{35} \end{pmatrix}$$

とおき，$Q_1^{[2]}$ について解くと

$$Q_1^{[2]} = \begin{pmatrix} \frac{3s_1+2(s_2+s_3)}{5} & \frac{-s_1+s_2+s_3}{5} \\ \frac{-s_1+s_2+s_3}{5} & \frac{2s_1+3s_2-2s_3}{5} \end{pmatrix} \frac{1}{1+\beta} \tag{5.43}$$

となる．

これまでの操作をまとめると，

$$\begin{cases} Q_1^{[2]} = \begin{pmatrix} \frac{3s_1+2(s_2+s_3)}{5} & \frac{-s_1+s_2+s_3}{5} \\ \frac{-s_1+s_2+s_3}{5} & \frac{2s_1+3s_2-2s_3}{5} \end{pmatrix} \frac{1}{1+\beta} \\ Q_2^{[2]} = -\frac{1}{3}\left(P_3^{[2]} + 2(J^{[2]})^T P_3^{[2]} J^{[2]} + (J^{[2]})^T P_2^{[2]} + P_2^{[2]} J^{[2]}\right) \\ Q_3^{[2]} = \frac{1}{3}\left(P_2^{[2]} + 2(J^{[2]})^T P_2^{[2]} J^{[2]} + (J^{[2]})^T P_3^{[2]} + P_3^{[2]} J^{[2]}\right) \end{cases} \tag{5.44}$$

とおき，計算を簡易化するために他の Q_i 成分は 0 とおけば，$(\boldsymbol{u}^T + \beta(u_1, 0, 0)^T)(J\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u}) - D\boldsymbol{q}^{(2)}J\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{u}))$ は u_1^2 を含まない 3 次の項が消え，u_1^2 を含む 3 次の項だけで表される．

以上の変換より，

$$\left(\boldsymbol{u}^T + \beta(u_1, 0, 0)^T\right)\left(J\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u}) - D\boldsymbol{q}^{(2)}J\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{u})\right) = R^{(3)}$$

となる．

続いて，(5.32) の 4 次項が負定値となるような標準形変換および局所 Lyapuov 関数を構成するための十分条件を見出す．

(5.32) の 4 次項は

$$2\alpha\left(\boldsymbol{u}^T + \beta(u_1, 0, 0)^T\right)\left(J\boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u}) - D\boldsymbol{q}^{(3)}J\boldsymbol{u} + \hat{\boldsymbol{p}}^{(3)}(\boldsymbol{u}) - D\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})\left(J\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u}) - D\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})J\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{u})\right)\right), \tag{5.45}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}^{(3)}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{u}) + 2\begin{pmatrix} (\boldsymbol{q}^{(2)})^T P_1 \\ (\boldsymbol{q}^{(2)})^T P_2 \\ (\boldsymbol{q}^{(2)})^T P_3 \end{pmatrix}\boldsymbol{u}$$

である．

この (5.45) に対して，全ての 3 次のベクトル値関数の基底

$$\hat{\boldsymbol{q}}_i^{(3)}(\boldsymbol{u}), \quad (i = 1, 2, \cdots, 30) \tag{5.46}$$

を考える．

そして，(5.46) を (5.45) に代入した 4 次のスカラー値関数

$$h_i^{(4)}(\mathbf{u}) := (\boldsymbol{u}^T + \beta(u_1, 0, 0)^T)\left(J\hat{\boldsymbol{q}}_i^{(3)}(\boldsymbol{u}) - D\hat{\boldsymbol{q}}_i^{(3)}(\boldsymbol{u})J\boldsymbol{u}\right)$$

のうち，u_1^2 を含まない 4 次のスカラー値関数の基底を選択する．なぜなら，これから，選択した基底を用いて，余分な 4 次の項を消去するわけだが，$\frac{d}{dt}L$ の 2 次の項には u_1^2 が含まれていて，u_1^2 を含む 4 次の項はその影響を抑えることができるので，残しても構わない．ここが 5.4.3 節との違いである．
この場合，u_1^2 を含まない 4 次のスカラー値関数の基底は一意には決まらないが，例として

$$u_1u_2^3,\ u_1u_3^3,\ u_2^3u_3, u_2u_3^3,\ u_1u_2^2u_3,\ u_1u_2u_3^2,\ u_2^4 - 3u_2^2u_3,\ u_3^4 - 3u_2u_3^3 \tag{5.47}$$

を選択する．
これに対応する 3 次のベクトル値関数の基底は 22 個ある．

今，適当な $\boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u})$ を選んで，

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{u}^T + \beta(u_1, 0, 0)^T)\left(J\boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u}) - D\hat{\boldsymbol{q}}^{(3)}(\boldsymbol{u})J\boldsymbol{u}\right) \\ &= k_1u_1u_2^3 + k_2u_1u_3^3 + k_3u_2^3u_3 + k_3u_2u_3^3 + k_5u_1u_2^2u_3 + k_6u_1u_2u_3^2 + \gamma(u_2^4 - 3u_2^2u_3) + \omega(u_3^4 - 3u_2u_3^3), \\ &k_1, \cdots, k_6, \gamma, \omega \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

となる，$k_1, \cdots, k_6 \gamma, \omega$ を任意に選択できる．そこで，まず $\gamma = \omega = 0$ として，

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{u}^T + \beta(u_1, 0, 0)^T)\left(J\boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u}) - D\hat{\boldsymbol{q}}^{(3)}(\boldsymbol{u})J\boldsymbol{u}\right) + \\
&(\boldsymbol{u}^T + \beta(u_1, 0, 0)^T)\left(\hat{\boldsymbol{p}}^{(3)}(\boldsymbol{u}) - D\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})\left(J\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u}) - D\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u})J\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{u})\right)\right) \\
&= au_2^4 + bu_3^4 + cu_2^2u_3^2 + G^{(3)}(u_1^2, u_2, u_3)
\end{aligned}$$

となるように，$k_1, \cdots, k_6$ を決めて固定する．$G^{(3)}(u_1^2, u_2, u_3)$ は u_1^2 を含む 3 次の項である．さらに γ, ω を取り直すように $\boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u})$ を再選択する．このとき

$$(a+\gamma)u_2^4 + (b+\omega)u_3^4 + (c - 3(\gamma+\omega))\, u_2^2u_3^2 + G^{(3)}(u_1^2, u_2, u_3) \tag{5.48}$$

とを得る．γ, ω は任意に取れることに注意されたい．
今回，α が任意にとれるので，この場合局所 Lyapunov 関数を構成するには，(5.48) が負値もしくは正値となれば十分である．

ここで

$$\begin{cases} t := a+\gamma,\ s := b+\omega,\ d := 3(a+b)+c, \\ x := u_1^2,\ y := u_2^2 \end{cases}$$

とおき，(5.48) を式変形すると

$$f(x,y) := t(x + \sqrt{\frac{s}{t}}y)^2 + (d - 3(t+s))xy - \sqrt{ts}xy \tag{5.49}$$

とかける．

ただし，(5.49) は，$x, y > 0$ の範囲で，実数として考えているため，t, s は $ts > 0$ の範囲で任意に取れることに注意されたい．

以上より (5.49) が $x, y > 0$ に範囲で，正または負の値をとればよい．したがって，考慮する条件は

- $t, s > 0$ のとき、$d > 3(t+s) + 2\sqrt{ts}$ より，t, s は $t, s > 0$ 上で任意なので，限りなく小さく値を取ることができ，$d > 0$ が条件がとなる．このとき α は負の値に定め，$1+\beta$ は正の値に定める．
- $t, s < 0$ のとき、$d < 3(t+s) - 2\sqrt{ts} < 4\sqrt{ts}$ より，t, s は $t, s < 0$ 上で任意なので，$d < 0$ が条件となる．($\because$ 相加平均・相乗平均の大小関係)．このとき α は正の値に定め，$1+\beta$ は負の値に定める．

である

したがって，2 つの条件をまとめると，局所 Lyapunov 関数を構成するための十分条件は $d \neq 0$ であることがわかる．

5.5.5 J_{12} の場合

5.3 節より，

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．このとき (5.13),(5.15) より，

$$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{u}(t)) = \boldsymbol{u}^T\left(a_1P_1 + J^T\hat{Y} + \hat{Y}J\right)\boldsymbol{u} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{u}\|^3),\ \hat{Y} = Y - a_2Q_2$$

と書ける．$a_2, \hat{Y}$ は任意に取ることができることに注意されたい．

$$\text{このとき}, J^TY + YJ = \begin{pmatrix} 0 & y5 & -y_4 \\ y5 & 2y_6 & y_3 - y_2 \\ -y_4 & y_3 - y_2 & -2y_6 \end{pmatrix}$$

となり，$a_1P_1 + J^T\hat{Y} + \hat{Y}J$ を必ずしも負定値となるようにコントロールすることはできない．
したがって

$$a_1P_1$$

が負定値であることが，局所 Lyapunov を構成するための十分条件である．a_1 は任意に取れることに注意されたい．

5.6 逆変換

5.3 節に従って，局所 Lyapunov 関数を構成した後，(5.2) に適用できる形に局所 Lyapunov 関数を再構成する必要がある．具体的には逆変換

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{v}) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{v}\|^4) \tag{5.50}$$

を $L(\boldsymbol{u})$ および (5.2) に代入する操作を行う．
このとき，(5.2) および $\mathrm{L}(\boldsymbol{u})$ は次のように書ける．

$$\dot{\boldsymbol{v}} = J\boldsymbol{v} + \boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{v}) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{v}\|^4), \tag{5.51}$$

$$L(\boldsymbol{u}) = L(\boldsymbol{v}) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{v}\|^7) \tag{5.52}$$

さらに，(5.51) に対しては，高次項 $\mathcal{O}$ は平衡点近傍では影響しないと切り落として考える．
すなわち

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{v}} = J\boldsymbol{v} + \boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{v}) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{v}\|^4), \\ &\tilde{L}(\boldsymbol{v}) \end{aligned} \tag{5.53}$$

に対して，$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{v})$ を考え，これに対し精度保証を用いて，負値であることを検証する．

5.7 定義域の検証方法

局所 Lyapunov 関数は平衡点近傍で定義域を検証できなければならない. 第 4.3 節で記した方法 Stage1 では局所 Lyapunov 関数は 2 次形式で導出されており，そして，2 次形式であることを利用して，行列の負値性を確認することで定義域を検証している．一方，第 5 節の方法で構成された局所 Lyapunov 関数 (5.3) は 4 次以上の高次多項式であり，その検証方法を用いることはできない．検証方法の詳細は [22] を参照されたい．ここでは，[22] にも記載されている検証方法に利用する定理について紹介する．

定理 5.1. 係数 $c_\alpha \in \mathbb{R}$ を持つ $2m$ 次同次式

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\alpha|=2m} c_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

を考える．なお，α は全次数を表す．このとき

$$\forall \boldsymbol{y} \in \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}, f(\boldsymbol{y}) < 0 \Rightarrow \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \boldsymbol{0}, f(\boldsymbol{x}) < 0$$

が成立する．

この定理を精度保証に応用するため，次の系を与える．

定理 5.1 の系 5.1. 以下では区間係数 $[c_\alpha] \in \mathbb{IR}$ をもつ $2m$ 次同次式

$$f_I(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\alpha|=2m} c_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{IR}^n$$

を考える．このとき

$$\forall \boldsymbol{y} \in \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}, sup f(\boldsymbol{y}) < 0 \Rightarrow \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \boldsymbol{0}, f_I(\boldsymbol{x}) < 0$$

が成立する．

6 数値例

5.5 節の問題をのように分類し，それぞれの場合についての局所 Lyapunov 関数の構成方法記した．本章ではこれを用いて，実際に 3 次元の自励系が持つ非双曲型平衡点に対する局所 Lyapunov 関数の構成を行いその有用性を確かめる．なお，定義域の検証に必要となる区間演算は $MATLAB$ 上で精度保証を行うためのパッケージである $INTLAB(version10.2)$ を利用した [20]．

6.1 J_{11} の場合に該当する 3 次元の数値例

J_{11} にあたる非双曲型平衡点をもつ 3 次元の系を数値例とし，5.3 節に従って，局所 Lyapunov 関数を構成し，さらに精度保証を用いて，定義域を検証した．

数値例

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} + \begin{pmatrix} 0 \\ (v_1 + 2v_2)^2 + 5(v_2 v_3^2 + v_2^3) \\ 5(v_2^2 v_3 + v_3^3) \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

このとき

$$\boldsymbol{q}^{(2)}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(4u_2u_3 - 4u_3^2 - 6u_2^2) \\ \frac{1}{3}8u_2u_3 \\ \frac{1}{3}(4u_2^2 + 8u_3^2) \end{pmatrix}, \boldsymbol{q}^{(3)}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{45}(61u_2^3 - 6u_3^3) \\ \frac{1}{45}(14u_1u_2^2 - 276u_2^3) \\ -\frac{4}{15}u_1u_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}, Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．

これに対し，次の関数 L

$L(\boldsymbol{v}) = -2v_1^2 - v_3^2 - v_2^2 - \frac{16}{3}v_3^3 - \frac{24}{5}v_1v_2^2 + \frac{16}{5}v_1v_2v_3 + 8v_2^2v_3 - \frac{16}{5}v_1v_3^2 + \frac{272}{45}v_1v_2^3 - \frac{16}{15}v_1v_3^3 - \frac{1888}{225}v_3^4 - \frac{3808}{225}v_2^4 + \frac{64}{25}v_2v_3^3 - \frac{4352}{225}v_2^2v_3^2 + \frac{96}{25}v_2^3v_3 - \frac{224}{135}v_1v_2^3v_3 + \frac{32}{45}v_1v_2^2v_3^2 + \frac{64}{45}v_1v_3^4 - \frac{32}{75}v_3^5 + \frac{32}{75}v_2v_3^4 - \frac{16}{25}v_2^2v_3^3 + \frac{976}{225}v_2^3v_3^2 + \frac{2128}{75}v_2^4v_3 + \frac{488}{75}v_2^5 - \frac{196}{2025}v_1^2v_2^4 - \frac{16}{225}v_1^2v_3^4 + \frac{2576}{675}v_1v_2^5 - \frac{8}{225}v_3^6 + \frac{488}{675}v_2^3v_3^3 - \frac{83618}{2025}v_2^6$

が局所 Lyapunov 関数となる．L の時間微分については

$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{v}) = -4v_1^2 - 2v_1^2v_2 - \frac{32}{5}v_1^2v_3 - \frac{314}{25}v_3^4 - \frac{596}{25}v_2^2v_3^2 + \frac{6976}{75}v_2^3v_3 - \frac{154}{25}v_2^4 - \frac{16}{15}v_1v_3^3 - \frac{16}{5}v_1v_2v_3^2 + \frac{176}{3}v_1v_2^2v_3 - \frac{1456}{45}v_1v_2^3 + \frac{144}{5}v_1^2v_2v_3 - \frac{192}{5}v_1^2v_2^2 + \frac{1088}{225}v_1^2v_2^3 + \frac{16}{5}v_1^3v_3 - \frac{48}{5}v_1^3v_2 + \frac{5968}{75}v_3^5 + \frac{128}{25}v_2v_3^3 - \frac{64}{75}v_2v_3^4 + \frac{2984}{15}v_2^2v_3^3 - \frac{60784}{225}v_2^3v_3^2/225 + \frac{1280}{9}v_2^4v_3 - \frac{54544}{225}v_2^5 - \frac{1376}{45}v_1v_3^4 + \frac{3488}{75}v_1v_2v_3^3 - \frac{51536}{225}v_1v_2^2v_3^2 + \frac{52544}{675}v_1v_2^3v_3 - \frac{167344}{675}v_1v_2^4 + \frac{64}{25}v_1^2v_3^3 - \frac{8704}{225}v_1^2v_2v_3^2 + \frac{288}{25}v_1^2v_2^2v_3 + \frac{4208}{225}v_1^2v_2^2v_3^2 + \frac{190288}{2025}v_1^2v_2^3v_3 + \frac{272}{15}v_1^3v_2^2 - \frac{7552}{45}v_3^6 + \frac{3824}{75}v_2v_3^5 - \frac{124904}{225}v_2^2v_3^4 +$

$$\frac{3072}{25}v_2^3v_3^3-\frac{6040}{9}v_2^4v_3^2-\frac{9376}{45}v_2^6-16v_1v_3^5+\frac{128}{75}v_1v_2v_3^4-\frac{528}{25}v_1v_2^2v_3^3+\frac{33392}{225}v_1v_2^3v_3^2+\frac{280112}{675}v_1v_2^4v_3+\frac{151616}{675}v_1v_2^5+\frac{64}{225}v_1^2v_3^4-\frac{352}{225}v_1^2v_2v_3^3+\frac{65488}{2025}v_1^2v_2^4+\frac{64}{45}v_1^3v_2v_3^2-\frac{224}{45}v_1^3v_2^2v_3-\frac{32}{3}v_3^7+\frac{32}{3}v_2v_3^6-\frac{80}{3}v_2^2v_3^5+\frac{1072}{9}v_2^3v_3^4+\frac{157952}{225}v_2^4v_3^3+\frac{2440}{9}v_2^5v_3^2+\frac{2128}{3}v_2^6v_3-\frac{559144}{675}v_2^7+\frac{256}{9}v_1v_3^6+\frac{128}{3}v_1v_2^2v_3^4-\frac{16544}{675}v_1v_2^3v_3^3+\frac{128}{9}v_1v_2^4v_3^2-\frac{896}{27}v_1v_2^5v_3-\frac{205808}{225}v_1v_2^6+\frac{488}{225}v_1^2v_2^2v_3^3-\frac{64}{45}v_1^2v_2^2v_3^4-\frac{350284}{2025}v_1^2v_2^5-\frac{784}{2025}v_1^4v_2^3+\frac{35504}{2025}v_1^3v_2^4-\frac{16}{15}v_3^8-\frac{16}{15}v_2^2v_3^6+\frac{976}{45}v_2^3v_3^5+\frac{525508}{675}v_2^5v_3+\frac{976}{45}v_2^5v_3^3-\frac{167236}{135}v_2^6v_3^2-\frac{167236}{135}v_2^8+\frac{2576}{27}v_1v_2^5v_3^2+\frac{2576}{27}v_1v_2^7-\frac{64}{45}v_1^2v_3^6-\frac{784}{405}v_1^2v_2^4v_3^2-\frac{784}{405}v_1^2v_2^6$$

となる．

これに対し，5.7 節の検証方法を使って，局所 Lyapunov 関数が成立する定義域 D_L の検証を行なった結果，上の関数 L は少なくとも

$$D_L = \{\boldsymbol{v} \mid -0.0006 \leq v_1 \leq 0.0006, -0.0006 \leq v_2 \leq 0.0006, -0.0006 \leq v_3 \leq 0.0006\} \tag{6.2}$$

の範囲で局所 Lyapunov 関数となることがわかった．

また，$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{v}) = \frac{d}{dt}L_1(\boldsymbol{v}) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{v}\|^5)$ としたとき，$\frac{d}{dt}L_1(\boldsymbol{v})$ に対しても，同様に局所 Lyapunov 関数が成立する定義域 D_{L1} の検証を行なった結果，少なくとも

$$D_{L1} = \{\boldsymbol{v} \mid -0.0006 \leq v_1 \leq 0.0006, -0.0006 \leq v_2 \leq 0.0006, -0.0006 \leq v_3 \leq 0.0006\} \tag{6.3}$$

の範囲で局所 Lyapunov 関数となることがわかった．

7　まとめと展望

5.3 節によって構成した局所 Lyapunov が非常に狭い範囲ではあるが，成立することを検証することができた．

また，5.3 節では，座標変換を 3 次項の非線形変換までしか考えていない．さらに高次の座標変換を用いれば，計算は煩雑になるが，5.3 で定めた局所 Lyapunov 関数を構成するための十分条件をもっと緩くできる可能性がある．

将来的には数式処理システムと絡めて，高次元の場合のときの局所 Lyapunov 関数の構成の導出について進めていきたい. また，高次元の場合，非双曲型平衡点近傍で局所 Lyapunov 関数が構成できたとしても，双曲型と同じ利用方法では，有効に活用できない可能性がある．その活用方法についても今後模索していきたい．

8　参考文献

参考文献

[1] Steven H.Strogatz，[田中久陽，中尾裕也，千葉逸人 訳]: “’ ストロガッツ 非線形ダイナミクスとカオス:数学的基礎から物理・生物・化学・工学への応用まで ”，丸善出版，2017.

[2] 郡宏, 森田喜久: “ 生物リズムと力学系 ”， 共立出版, 2011.

[3] H. スミス， P. ウォルトマン著, 竹内康弘監訳: “ 微生物の力学系:ケモスタット理論を通じて ”, 日本評論社, 2004.

[4] K.Nitta and N.Yamamoto: “ On numerical verification of homoclinic orbits in high dimensional dynamical systems ”, SCAN2018: Book of Abstracts, pp110-111, 2018.

[5] 山野駿: “ 連続力学系におけるホモクリニック軌道の精度保証による検証について ”, 平成 27 年度電気通信大学大学院情報理工学研究科修士論文, 2016

[6] A. Takayasu, K. Matsue, T. Sasaki, K. Tanaka, M. Mizuguchi, and S. Oishi: ”Nu- merical validation of blow-up solutions of ordinary differential equations”, J. Com- put. Appl. Math., Vol.314, pp.10-29, 2017.

[7] K.Matsue, T.Hiwaki and N.Yamamoto: “On the construction of Lyapunov func- tions with computer assistance”, Jornal of Computational and Applied Mathemat- ics, vol319, pp385-412, 2017.

[8] 三宅智弘: “精度保証による Lyapunov 関数の構成とその拡張”, 平成 28 年度電気通信大学情報理工学研究科修士論文, 2017.

[9] 中尾充宏, 山本野人: “精度保証付き数値計算”, 日本評論社, pp.1-34, 1998.

[10] 大石進一編著: “精度保証付き数値計算の基礎”, コロナ社, 2018.

[11] 柏木雅英: “kv - C++ による精度保証付き数値計算ライブラリ”, http://verifiedby.me/kv/, 2018/11/29 アクセス.

[12] C. ロビンソン著, [國府寛司, 柴山健伸, 岡宏枝 訳]: “力学系 (上・下)”, シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社, 2001.

[13] J. ラサール, S. レフシェッツ著, 山本稔訳: “リヤプノフの方法による安定性理論”, 産業図書株式会社, 1975.

[14] M.W.Hirsch, S.Smale, R.L.Devaney 著, [桐木紳, 三波篤郎, 谷川清隆, 辻井正人 訳]: “力学系入門: 微分方程式からカオスまで 原著第 2 版”, 2007.

[15] 張替将人: “常微分方程式の解の漸近挙動に関する数値的検証法”, 平成 24 年度電気通信大学大学院情報理工学研究科修士論文, 2013.

[16] S. ウィギンス著, 丹羽敏雄監訳: “非線形の力学系とカオス”, シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社, 2000.

[17] 小川知之: “非線形現象と微分方程式:パターンダイナミクスの分岐解析”, サイエンス社, pp.29-45, 2010.75

[18] 桑村雅隆: “パターン形成と分岐理論:自発的パターン発生の力学系入門”, 共立出版, 2015.

[19] Y.A.Kuznetsov: “Elements of Applied Bifurcation Theory”, 3rd ed., Springer- Verlag New York, pp.84-99, 2004.

[20] S.M.Rump: “INTLAB - INTerval LABoratory”, http://www.ti3.tu- harburg.de/rump/intlab/, 2018/12/23 アクセス.

[21] Rand R.H, Armbruster D: “Perturbation Methods, Bifurcation Theory and Com- puter Algebra”, Springer-Verlag New York, 1987.

[22] 寺坂元: “非双曲型平衡点近傍における局所 Lyapunov 関数の精度保証による構成”, 平成 30 年度電気通信大学大学院情報理工学研究科修士論文, 2019.

9 謝辞

本研究を行うにあたって，電気通信大学大学院情報理工学研究科の山本野人先生にご懇切なるご指導および助言いただきましたこと，感謝いたします．また学位論文を審査して頂いた伊東裕也先生に感謝申し上げます．