

博士論文

重み付き非線形コンパクトスキームを用いた
衝撃波と壁近傍渦の干渉の数値シミュレーション

電気通信大学大学院 電気通信研究科

左 志峰

2014年3月

重み付き非線形コンパクトスキームを用いた
衝撃波と壁近傍渦の干渉の数値シミュレーション

論文審査委員

(主査) 電気通信大学 教授 前川 博

電気通信大学 教授 宮寄 武

電気通信大学 教授 大川 富雄

電気通信大学 准教授 Matuttis Hans-Georg

東京理科大学 教授 山本 誠

重み付き非線形コンパクトスキームを用いた
衝撃波と壁近傍渦の干渉の数値シミュレーション

著作権所有者

左 志峰

Computational Aeroacoustics of the interaction between a shock and a near-wall vortex using a weighted compact nonlinear scheme

Abstract

Shock wave and vortex are two basic elements of compressible flow. Mutual interactions between shock waves and vortices occur in supersonic turbulence flow, which make the flow very complicated and difficult to understand. The interaction of a shock wave and a single vortex can be seen as a simplified model of shock turbulence interaction, which is one of the major sources of noise and has received much attention. In particular, a number of vortices exist near the surfaces of modern helicopters and high-speed aircraft. The interaction between a shock wave with a near-wall vortex is an important phenomenon in aerodynamics and aeroacoustics. However, the flows involve both low and high Mach regions as well as discontinuities. Another issue is how to handle the influence of the boundary layer near the surface. Thus, it remains little understood so far. In the present study, as a first step, we study the interaction of a shock wave with a single near-wall vortex to increase understanding of the near-field development of flow structures and the sound generation due to this interaction.

The use of computational techniques in the area of acoustics is known as computational aeroacoustics (CAA) and has shown great promise in recent years. When traditional difference schemes and compact finite difference schemes are applied to aeroacoustic simulation of fluid fields with discontinuities, oscillations are encountered due to their linear property. Thus, weighted compact nonlinear schemes (WCNS) were proposed by using a weighted technique to compact high-order nonlinear schemes (CNS) and have received much attention for the high resolution and shock-capturing properties. Various flux splitting methods can be used in WCNS. In recent years, several all-speed versions of AUSM-family schemes, such as the simple low-dissipation AUSM (SLAU2), were developed for flows involving both low and high Mach number regions.

In the present study, the properties of four well-used flux splitting methods (FVS,

FDS, AUSM⁺, and SLAU2) are examined first. Based on this result, SLAU2 is chosen to calculate the interaction of a shock wave with a near-wall vortex.

The present paper is organized as follows:

Chapter 1 provides a detailed survey of the studies that have been performed on the subject of shock-vortex interaction. The evolution of numerical method and the theory of shock-vortex interaction are also provided.

Chapter 2 describes the numerical simulation methodology and Navier-Stokes Characteristic boundary Condition (NSCBC). The initial distributions of a Taylor vortex and the shock wave are also included.

In Chapter 3, the properties of four well-used flux splitting methods (FVS, FDS, AUSM⁺, and SLAU2) on a low-speed flow and a flow including both low and high Mach regions is compared.

In Chapter 4, we present the computational result of the interaction of a shock wave ($M_s=1.29$) with a near-wall vortex ($M_v=0.39$). The characteristic features of the flow fields and sound generation are discussed. The effects of the vortex-wall distance and the no-slip conditions on the sound field are also examined.

Chapter 5 provides concluding remarks and some future perspectives.

重み付き非線形コンパクトスキームを用いた 衝撃波と壁近傍渦の干渉の数値シミュレーション

概要

衝撃波と渦の干渉が、超音速航空機やロケットより発生する騒音の原因の一つであることはよく知られている。超音速流れでは多数の渦と複数の衝撃波が相互に干渉するため、流れ場は非常に複雑となり現象を理解するには多大な困難が伴う。超音速航空機やロケットなどの機体表面近くには渦構造が存在していることが知られており、その壁近傍圧縮性渦が衝撃波を通過する際の現象の解明は工学的観点から重要な研究である。しかし、衝撃波が存在する高速流れに対する低速流れ渦運動また表面近傍の境界層の影響をどのような計算方法で正確に取り扱えるか知られておらず、特に非定常問題では、これまでのところほとんど行われていない。さらに空気力学音響問題の観点からは、微弱な音響場と複雑変形衝撃波のダイナミクスを同時にとらえることは大きな困難がともなうと考えられている。本研究では、この複雑な流れ場を解明する第一歩として平面衝撃波と壁近傍の単独渦が干渉する流れ場についての数値計算を行う。

流体騒音の数値解析 (Computational Aeroacoustics, CAA) は、高精度計算法の開発とともに計算機性能の向上と並列計算の普及に伴って近年目覚ましい成果があげられた。微小な圧力変動である流体音を精度良く解析するには高精度の計算スキームが不可欠である。衝撃波は非常に急峻な圧力の跳びを伴う波である。数学的には、衝撃波は不連続的に圧力が変化する面で表される。近年、非線形スキームが構築され、数値振動を生じさせることなく高精度でその不連続波を捕えることに成功した。例えば、本研究で用いた重み付き非線形コンパクトスキーム (Weighted Compact Nonlinear Scheme, WCNS) や WENO スキームである。また、リーマンソルバーにおける流束評価法にも、全速度スキーム (All-Speed Scheme) と呼ばれ、低速流れにおける低散逸という性質を有する新しい近似リーマン解法が使えるようになった。本研究で用いた SLAU2 (Simple Low-dissipation AUSM) はそのひとつである。

このような背景のもと、本研究では新しい計算法の枠組みを開発し、WCNS と四つの流束評価法 (FVS と FDS と AUSM+ と SLAU2) の組み合わせの特性を詳細に調べた。その結果に基づき、低マッハ数から高マッハ数が共存する流れに優れた全速度スキーム SLAU2 を流束評価法として選んだ。衝撃波と壁近傍渦の干渉を研究対象とし、CAA として現象を詳細に解析した結果について報告する。

各章の概要は、以下のとおりである。

第 1 章では、衝撃波と渦の干渉研究の歴史と現状を概観し、数値計算法の発展と進化を述べる。空力音の理論を説明する。また、本論文の構成についても述べる。

第 2 章では、非定常圧縮性ナビエ・ストークス方程式の離散手法と NSCBC 境界条件を説明する。渦と衝撃波の初期分布も与える。

第 3 章では、低速流れおよび低マッハ数から高マッハ数流れが共存する流れ場を対象として、WCNS と複数の流束評価法 (FVS, FDS, ASUM⁺ と SLAU2) の組み合わせの計算結果を比較し、本研究で使われた SLAU2 の特性を述べる。

第 4 章では、中強度衝撃波 ($Ms=1.29$) と渦 ($Mv=0.39$) の干渉 DNS の結果を示す。まず、自由空間での干渉を計算し、これまでの実験値や理論値やこれまで計算結果との比較を示す。その後、壁近傍での干渉を計算し、衝撃波を含む流れ場の構造と騒音発生メカニズムおよび渦の変形を述べる。壁と渦の距離および滑りなし壁面条件の計算結果への影響についても議論する。

第 5 章では、本研究で得られた主要な成果を総括しており、今後の課題についても述べる。

目次

第 1 章 緒言	1
1.1 研究背景	1
1.2 空力音の理論	2
1.2.1 ライトヒル方程式	2
1.2.2 Ribner の線形理論	6
1.3 衝撃波と圧縮性渦の干渉のこれまでの研究	13
1.3.1 実験による衝撃波と圧縮性渦の干渉の研究	13
1.3.2 数値計算による衝撃波と圧縮性渦の干渉の研究	15
1.4 研究の目的	17
第 2 章 計算方法	19
2.1 垂直衝撃波の関係式	19
2.2 渦の方程式	20
2.3 支配方程式	21
2.4 時間積分法	23
2.5 空間微分項の離散化	23
2.5.1 重み付き非線形コンパクトスキーム	24
2.5.2 SLAU2 流束分割	27
2.5.3 中心コンパクトスキーム	28
2.6 境界条件	30
2.6.1 Navier-Stokes 特性境界条件 (NSCBC)	30
2.6.2 各種境界条件の設定	33
2.7 格子伸長	35
第 3 章 数値流束評価法の性能比較	37
3.1 近似リーマン解法	38
3.1.1 Flux Difference Splitting	38
3.1.2 Flux Vector Splitting	40
3.1.3 Advection Upstream Splitting Method	40
3.1.4 Simple Low-dissipation AUSM	41
3.2 数値例	42
3.2.1 低速流れ - 低マッハ数 Taylor 渦	42

3.2.2 低マッハ数から高マッハ数が共存する流れ - 衝撃波と強い渦の相互作用	46
3.3 まとめ	52
第 4 章 計算結果および考察	53
4.1 計算条件	53
4.2 自由空間の衝撃波と渦の干渉	56
4.2.1 音波の生成と伝播	56
4.2.2 音波の空間分布	59
4.2.3 実験値および文献値との比較	60
4.3 衝撃波と壁近傍渦の干渉	61
4.3.1 干渉の展開と音波の生成	61
4.3.2 音波の空間分布	65
4.3.3 渦と壁の距離の影響	67
4.3.4 Case B2-noslip の計算結果	72
第 5 章 結言	76
5.1 結論	76
5.2 今後の課題	78

参考文献

謝辞

第 1 章 緒言

1.1 研究背景

音波の研究には長い歴史があるが、古典的な理論では、音の発生源は音を伝える媒質とは別ものとして考察されてきた。しかし、流れ自体にも音源、散乱源、吸収源があるという見方が 20 世紀中ごろから明確になってきた[1]。流れから出る音(流体音)の例としては、ロケットや自動車の排気音(ジェット騒音)・ヘリコプタ騒音・新幹線のパンタグラフ騒音といった交通輸送機関の高速化に伴って生ずる騒音、空調機のファン騒音、ガスの爆発音など枚挙に限りが無い[2]。近年、航空機や新幹線の発展に伴い、騒音が社会的な問題となっている。寄与が最も大きい空力音の発生機構を解明し、騒音を低減する機体形状の設計や低騒音化装置の開発を行うには非常に重要である。

超音速・極超音速流れにおいて、流れの偏向に伴い衝撃波が発生する。衝撃波は非常に急峻な圧力の跳びを伴う波である。数学的には、衝撃波は不連続的に圧力が変化する面で表される[3]。渦は、“vortex motions are still described as the sinews and muscles of fluid motions”と言われているように、流体力学上さまざまな流れ場の基本的かつ重要な構成要素である。乱流も種々のスケールの渦で構成されている。衝撃波と渦の干渉が、超音速航空機やロケットより発生する騒音の原因の一つであることはよく知られている。超音速乱流場では多数の衝撃波と渦が相互に干渉するため、流れ場は非常に複雑となり現象を理解するには多大な困難が伴う。この複雑な流れ場を最も単純化したモデルとして、自由空間に平面衝撃波と単独渦が干渉する流れ場に関して、これまでに多くの実験的研究[4-6]や理論的研究[7-9]および数値計算[10-18]が行われてきている。

超音速航空機やロケットなどの機体表面近くには渦構造が存在している。物体の形状変化のところに渦が形成され、また円形噴流などの原因で作られた渦輪構造が平板に接近すると、2次渦や3次渦といった誘起渦が発生・成長することが一般に知られるようになった[19-21]。この壁近傍渦は人為的に作り出され、工学的に利用されているものもある。例えば、翼面上に多くの突起物を取り付けて渦を発生させ、境界層中の流れと外側の流れを混合させて剥離を防ぐ境界層制御に利用されている[22]。Doligalski ら[23]は壁近く渦の生成および渦と壁の相互作用を議論した。Luton ら[24]は、渦対と壁の干渉の3次元の数値計算により、2次渦の生成と変形および不安定性を示した。Kambe[25, 1]は渦運動による音波の放出についての調査を行った。2つの渦輪の正面衝突のときに放出される音波は四重極性、円柱の横を渦輪が通過するときに放射される音波は二重極性、エッジの横を通過する渦輪による放射は心臓形(cardioid)の方向分布となることを示した。超音速流れに対して、その壁近傍圧縮性渦が衝撃波を通過する際の現象の解明は工学的観点から重要な研究である。

しかしながら、衝撃波が存在する高速流れと渦運動の低速流れが同時に存在しており、特に表面近傍の境界層の影響をどのような方法で正確に取り扱えるかという難しい問題があるので、著者の知る限り、類似の研究はまだ行われていない。

一方、数値計算による音響場の研究は **Computational Aeroacoustics (CAA)** と呼ばれ、近年急速に発展しつつある[2]。位相誤差が小さいコンパクトスキーム[26]は少ないステンスルで高精度な計算を達成できるが、不連続性が存在する流れ場では、通常の差分法と同様に不連続近傍で数値振動が生じる[13]。その数値振動は、解を汚染し反射衝撃波や渦ショックレットなどの不連続性をもつ非定常波の解像に大きな障害となる。一方で、**Godunov**の定理にあるように衝撃波をとらえる単調性を維持することは高次精度スキームでは一般に困難であり、散逸的過大な1次スキームを使わずに衝撃波をとらえるためには何らかの非線形な方法が必要である。単調性を緩和して構築された **TVD (Total Variation Diminishing)** 安定性という概念を取り入れた計算法や、流束制限関数を内挿補間する過程を取り入れた **MUSCL** 法などは初期の非線形化スキームである[27]。一方、**ENO (Essentially Non-oscillatory)** 法と高次精度スキームを組み合わせる手法は爆轟波を高精度でとらえることに有効であることがわかり、**ENO** 法を基礎とした非線形スキームが発展した。さらに、**ENO** 法に重みを導入して **WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory Scheme)** 法[28]や **WCNS (Weighted Compact Nonlinear Scheme)** 法[29-35]が開発された。**WCNS** は、非線形コンパクトスキームに重み付き特性量補間計算を導入することにより、高精度で衝撃波を捕えることができる計算法である。**WCNS** は様々な流束評価法 (flux splitting method) が使える利点がある。近似リーマンソルバーとして **FDS (Flux Difference Splitting)** [36]や **FVS (Flux Vector Splitting)** [37, 38]や **AUSM+ (Advection Upstream Splitting Method)** [40]は衝撃波を鋭く捕えるが、低マッハ数領域を正しく計算できない欠点がある。これに対して、全速度スキーム (**All-Speed Scheme**) と呼ばれ、低速流れにおける低散逸という性質を有する流束評価法がいくつか提案された[43-47]。本研究では全速度スキームである **SLAU2 (Simple Low-dissipation AUSM)** [45]を用いた。

1.2 空力音の理論

空力音に関する一般的な理論はライトヒル方程式がある[1]。また、衝撃波と圧縮性渦の干渉には **Ribner** の線形理論がある[7]。本節では、この二つの理論を説明する。

1.2.1 ライトヒル方程式

空力音の理論は流体力学の方程式に基礎をおいている。流体の質量保存および運動量保存の法則から、省略なしにある一つの方程式が導かれる。それが波動方程式の形 (音源項を含む) をしていることが眼目である。流体の密度 ρ , 圧力を p , 速度を $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ とす

ると、粘性流体の基礎方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \quad (1.2)$$

で与えられる。ただし、 X_i は外力の i 成分で、 σ_{ij} は粘性応力テンソルである。また 2 重の下つき添え字については (上式では j)、 $j=1, 2, 3$ について和をとる。もし流体が非粘性で、微小変化が断熱的に起こるものとする、エネルギー式に代わるものとしてさらに、次の断熱関係式

$$\Delta p = c^2 \Delta \rho \quad (\Delta p \equiv p - p_0, \quad \Delta \rho \equiv \rho - \rho_0), \quad (1.3)$$

が加わる。ここで、 p_0, ρ_0 は基準 (静止状態) の圧力および密度を表す定数である。この式の係数 c は音速、熱力学的に次のように定義される：

$$c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s} = c(\rho, p), \quad c_0 = c(\rho_0, p_0).$$

ここで、 s は単位質量当りのエントロピーで、 $(\cdot)_s$ は s = 一定を意味する。

式 (1) に $\partial / \partial t$ を作用させる。また、式 (2) に $\partial / \partial x_i$ を作用させて $i=1, 2, 3$ について和をとり、(3) を使って $\nabla^2 p = c^2 \nabla^2 \rho$ とおく ($c=c_0$ を) を仮定)。両者に共通の項 $\partial^2 \rho v_i = \partial t \partial x_i$ を消去すると、

$$\partial_t^2 \rho - c_0^2 \nabla^2 \rho = \partial_i \partial_j T_{ij} - \partial_i X_i \quad (1.4)$$

を得る ($\nabla^2 = \partial^2 / \partial x_i^2$; Laplacian)。また、

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + (\Delta p - c_0^2 \Delta \rho) \delta_{ij} - \sigma_{ij} \quad (1.5)$$

δ_{ij} はクロネッカーデルタ)。式 (1.4) は一般化波動方程式で、右辺は音源などを表す。もし右辺が 0 なら、密度 ρ の波動が速さ c_0 で伝播することを表す単純な波動方程式となる。一般には状態方程式 $p=f(\rho, T)$ が課せられる。理想気体の状態方程式と音速は

$$p = R \rho T, \quad c = \sqrt{\gamma p / \rho} \quad (1.6)$$

である (T : 温度, R : 気体定数, γ : 比熱比)。

流体が非粘性で ($\sigma_{ij}=0$)、かつ式 (1.3) の断熱関係式を仮定すると、 T_{ij} は次の形に簡単化される：

$$T_{ij} = \rho v_i v_j \quad (1.7)$$

Lighthill は、式 (1.4) が空気力学的な音波の発生を表していると解釈し、そのような音波を Aerodynamic sound (空力音) と呼んだ。右辺の諸項のために、この式は音波の発生だけでなく、音が伝播しながら流される効果 (v_i による)。密度の非一様性 $\Delta\rho$ による散乱、外力による音の励起、さらには音波の非線形効果で運動を励起してエネルギーを失うことによる音の吸収までも含んでいる。省略はないので、何でも含まれるわけである。その意味で、式 (1.4) は acoustic analogy (音響類似) とよばれ、またライトヒル方程式と呼ばれている。

式 (1.4) のような非同次波動方程式の形の利点は、偏微分方程式の理論に従って解を積分形で表すことができることである。実際、式 (1.4) は

$$\rho(x, t) - \rho_0 = -\frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{1}{r} X_i(y, t_r) d^3 y + \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int \frac{1}{r} T_{ij}(y, t_r) d^3 y \quad (1.8)$$

と変換される。ただし、

$$r = |x - y|, \quad t_r = t - \frac{|x - y|}{c_0}$$

で、 \mathbf{x} は観測点、 \mathbf{y} は音源位置を表す。右辺第 1 項は 2 重極性、第 2 項は 4 重極性の波動を表している。このことは積分の前の空間微分の階数と関係している。実際、第 1 項の被積分関数の一つは

$$-\frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{X_1(y, t_r) d^3 y}{|x - y|}$$

と書ける ($i=1$ とした)。他方流体力学の理論では、点 \mathbf{y} に湧出量 $\mathbf{q}(t)$ (単位時間当り) の音源があると仮定すると、十分離れた点 \mathbf{x} での音波の密度変動は、 $\dot{q} = dq/dt$ として、

$$\Delta\rho(x, t) = \rho(x, t) - \rho_0 = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\dot{q}(y, t_r)}{|x - y|} \quad (1.9)$$

と表せる。これは湧きだしに起因し、等方的な単極音である。時刻 t に点 \mathbf{x} で観測される音波 $\Delta\rho(\mathbf{x}, t)$ は、 \mathbf{y} から \mathbf{x} に達するに要する時間 $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c_0$ だけ前に \mathbf{y} で発せられたものであることを t_r は表す。 t_r は遅延時間 (retarded time) と呼ばれる。

流体力学の基本的考察から、 $-\partial/\partial x_1$ の微分作用があると、 x_1 軸方向の 2 重極音 (acoustic dipole) を表し、その強さは上式では $X_1(y, t_r) d^3 y$ で与えられる。さらにもう一つ微分演算が加わると、4 重極音 (acoustic quadrupole) を表す。(1.8) 式の 4 重極音の強さは $T_{ij}(y, t_r) d^3 y$ である。

・遠方場

流れの領域を V , その代表スケールは長さが l , 速度が u とし, 時間スケールは $\tau = l/u$ と仮定すると, 発生する音波の波長は $\lambda \sim c\tau = c(l/u) = l/M$ の程度となろう. ただし, $M = u/c$ は流れのマッハ数. いま音源のスケール l は λ よりずっと小さいと仮定する ($l \ll \lambda \sim l/M$) と, $M \ll 1$ が要請される. そのとき, 音源関数 $T_{ij}(y, t)$, $X_i(y, t)$ の分布は局所的で, 分布はコンパクトといわれる. 音源領域 V がコンパクトの場合には, 次のような遠方場の簡潔な表現を得ることができる:

$$\rho_F = -\frac{1}{4\pi c_0^3} \frac{x_i}{r^2} \partial_t F_i(t_r) + \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{x_i x_j}{r^3} \partial_t^2 \bar{T}_{ij}(t_r). \quad (1.10)$$

ただし, $\rho(x, t) - \rho_0 \rightarrow \rho_F(|x| \rightarrow \infty)$ および

$$F_i(t) = \int_V X_i(y, t) d^3 y, \quad \bar{T}_{ij}(t) = \int_V T_{ij}(y, t) d^3 y. \quad (1.11)$$

F_i は外から流体に作用する力の合力を表す.

まとめれば, (a) 流体湧出量の局所的変動は単極音源となる, (b) 流体に作用する外力の変動は 2 重極音源となる, (c) 渦度分布の変動は 4 重極音源となる

・スケール則

遠方の音圧 $p_F = c_0^2 \rho_F$ に対し, 音の放射パワーは

$$P = \frac{4\pi^2 p_F^2}{\rho_0 c_0} = \frac{4\pi^2 c_0^3 \rho_F^2}{\rho_0}$$

で定義される. スケール則を得るために, 時間スケールを $\tau = l/u$ とし, 対応して $\partial_t \sim 1/\tau$ とする. さらに, 単極音の式 (1.9) に対しては $q \sim \rho_0 u l^2$, 2 重極音では $F_i \sim \rho_0 u / \tau$ (運動量変化), 4 重極音では $\bar{T}_{ij} \sim \rho_0 u^2$ とすると,

$$\partial_t q \sim \tau^{-1} \rho_0 u l^2 = \rho_0 u^2 l = A_m,$$

$$\partial_t F_i \sim \tau^{-1} (\rho_0 u / \tau) l^3 = \rho_0 u^3 l = A_d,$$

$$\partial_t^2 \bar{T}_{ij} \sim \tau^{-2} \rho_0 u^2 l^3 = \rho_0 u^4 l = A_q.$$

単極音 (monopole) のパワーを P_m , (1.10) 式の第 1 項 (dipole) のパワーを P_d , 第 2 項 (quadrupole) のそれを P_q とすると, 上より

$$P_m = (4\pi r^2 c_0^3 / \rho_0) \left(\frac{A_m}{4\pi c_0^2 r} \right)^2 \sim (\rho_0 / c_0) u^4 l^2, \quad (1.12)$$

$$P_d = (4\pi r^2 c_0^3 / \rho_0) \left(\frac{A_d}{4\pi c_0^3 r} \right)^2 \sim (\rho_0 / c_0^3) u^6 l^2, \quad (1.13)$$

$$P_q = (4\pi r^2 c_0^3 / \rho_0) \left(\frac{A_q}{4\pi c_0^4 r} \right)^2 \sim (\rho_0 / c_0^5) u^8 l^2. \quad (1.14)$$

となる．4重極放射の P_q の8乗則がここに得られた．さらに単極放射，2重極放射がそれぞれ u^4 ， u^6 に比例する性質も導かれた．

音の放射効率はこのように見積もることができる．音源となる流体の運動エネルギーは単位体積当たり $(1/2)\rho_0 u^2$ である．体積 $V = l^3$ への流（出）入体積を ul^2 とすると， V への運動エネルギー流入の割合は $W = \rho_0 u^3 l^2$ の程度である．音の放射効率を $\eta = P/W$ で定義すると， $M = u/c_0$ として

$$\eta_m \sim M^1, \quad \eta_d \sim M^3, \quad \eta_q \sim M^5 \quad (1.15)$$

を得る． $M \ll 1$ の場合は， $m \rightarrow d \rightarrow q$ の順に放射効率が下がるが， M が増加してくると，4重極放射の放射効率が急に上ってくる．

1.2.2 Ribner の線形理論

・記号

a	=渦核半径
b	\propto 円筒波面の局所厚さ， α'' と ϕ'' により変わる
c_A	=衝撃波上流の音速
c	=衝撃波下流の音速
G	= $G[(r'' - R)/b(\phi''); R/a; \phi'']$ ，円筒音波の径方向の分布を記述する関数
k, k', k''	=波数ベクトル．Fig. 1.1 に (k, α) ， (k', α') ， (k'', α'') がそれぞれ \overline{dq} ， $\overline{dq'}$ と \overline{dp} に垂直する
J	=ヤコビアン， $\partial\alpha/\partial\alpha''$
K_s	=正規化渦強さ
M	=衝撃波上流のマッハ数
M_1	=衝撃波下流のマッハ数

\hat{P}	$=\overline{dp}$ が \overline{dq} に対する伝達関数
p	$=(\mathbf{r}', \phi'')$ での無次元化圧力変動
q_{\max}	$=\Gamma/2\pi a$, 渦の最大速度
R	$=ct$, 円筒音波の公称半径
\mathbf{r}, ϕ	$=$ 入射せん断波の点の円柱座標
\mathbf{r}', ϕ''	$=$ 圧力波の点の円柱座標
U_A	$=$ 衝撃波上流の流速
U	$=$ 衝撃波下流の流速
W	$=$ Fig. 1.3 の仮想速度
Γ	$=$ 渦の循環
σ	$=(\mathbf{r}' - R)/b(\phi'')$, 正規化径座標

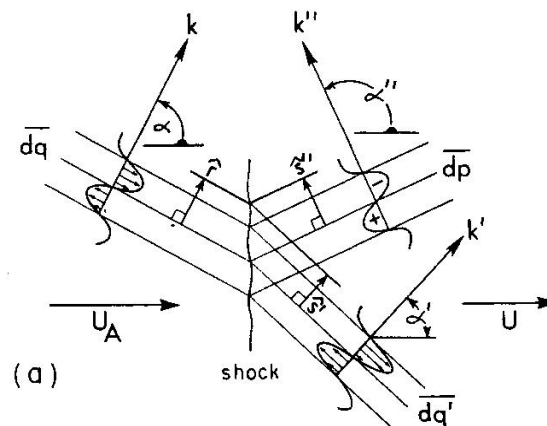


Fig. 1.1a Interaction of a sinusoidal shear flow with a shock. (Ribner 1985)

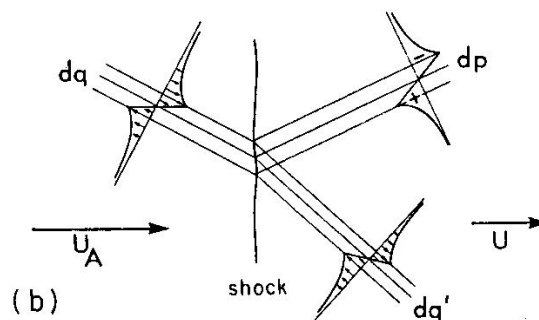


Fig. 1.1b Interaction of a special profile shear flow with a shock. (Ribner 1985)

・概説

Fig. 1.1a に示すように、斜め正弦せん断波と衝撃波の干渉は、屈折せん断エントロピー波と圧力波を生じる。それらも正弦波である「 \overline{dq} 」の角度により、二種類の圧力波がある。衝撃波との距離とともに減衰するエバネセント (evanescent) 波、と減衰しない非エバネ

セント (nonevanescent) 波」。これらの正弦波をフーリエ積分を用いて重ね合わせれば、任意分布の波と衝撃波の干渉が得られる。

1つの特別な例を Fig. 1.1b に示す。この特別な分布をもつ無数の弱いせん断波が車輪のスポークのような径方向に均一分布を仮定すると、その結果として、Fig. 1.2a に示すような核半径が a である渦の速度場を得る。

もし渦が移流されれば、成分のせん断波も移流される。Fig. 1.2b は衝撃波との干渉の前と干渉の後の略図である。ここで、音波を略す。衝撃波は通過した後、変形した渦が移流される。せん断波の焦点は変形した渦の中心である。

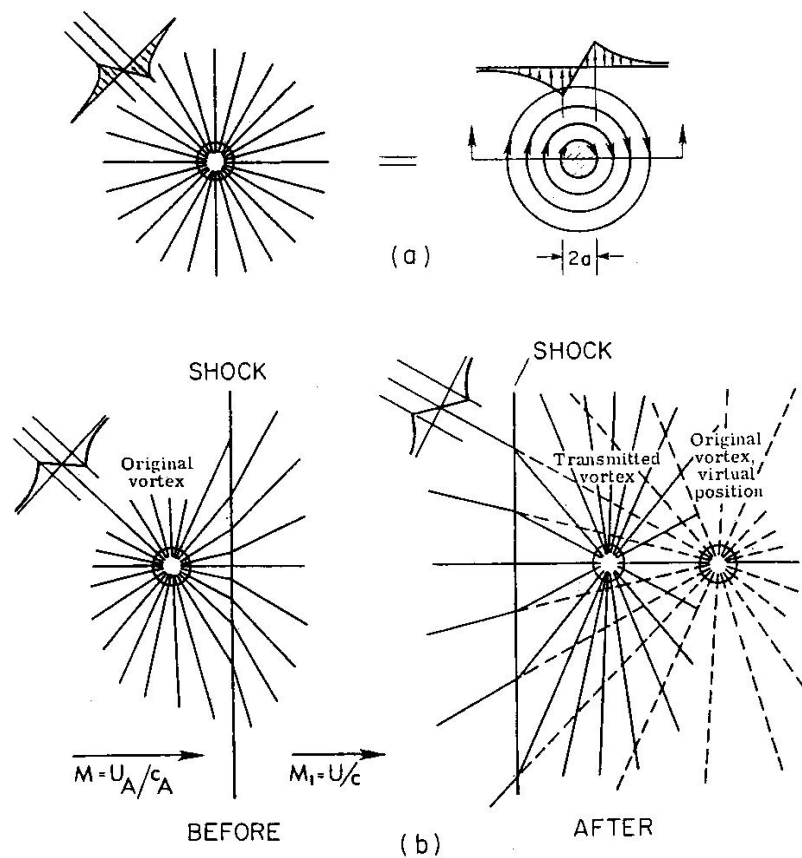


Fig. 1.2 a) Synthesis of vortex from radially disposed special profile shear flows (physical interpretation of Fourier integral); b) Convection of vortex through shock wave. “Focus” of refracted shear waves is transmitted vortex. (Ribner 1985)

干渉の後のせん断波を Fig. 1.3a に示す。衝撃波との傾きをある特定の角度 α'_{cr} より小さいと限定する。ここで衝撃波との干渉による音波の中心線を追加した。これらの平面波は非エバネセント波であり、衝撃波から特定の位置と角度で生じる。組み合わせて半径 $R=ct$ の円筒状包絡線を作る。

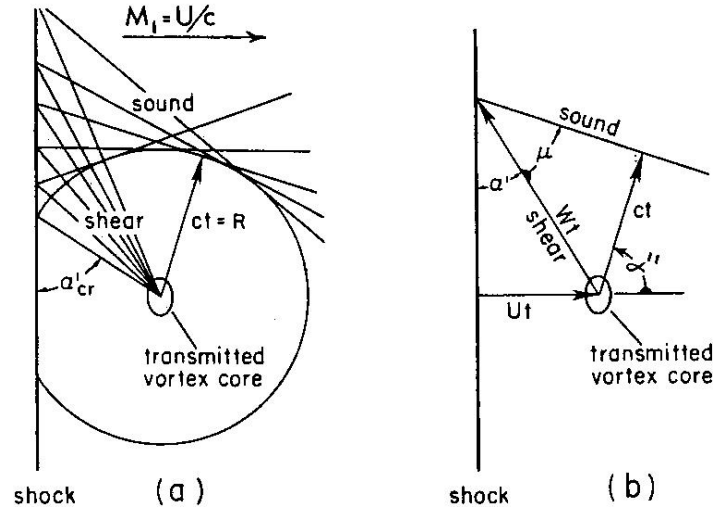


Fig. 1.3 Convection of vortex through a shock. Nonevanescent sound waves generated at shock (Fig. 1.1) are added to shear waves of Fig. 1.2b: a) formation of envelope of radius ct ; b) geometric basis and definition of virtual velocity W . (Ribner 1985)

Fig. 1.3b はこの包絡線の形成を明らかにする。 U を衝撃波下流の亜音速流の速度、 t を時間とさせる（ t は衝撃波が渦中心を通過するときに 0 とする）。 W はせん断波の傾角 α' で決定する超音速度である。 μ はその速度に関連するマッハ角である。 関係式 $\sin\mu=c/W$ は、音波と渦中心の距離が ct と等しいことを要求する。 W がせん断波の傾角とともに変わる。 それでも、この距離は ct のままである。 従って、特定分布の音波の中心線は半径 $R=ct$ の円の接線である（Fig. 1.3a）。

移流されるせん断波の角度 α' が α'_{cr} より大きい場合、 W は亜音速である（図の c は c_E に変わり、それは音速ではない）。 圧力波は異なる角度関係式を保ち、衝撃波下流の距離とともに指数的に減衰する。 これらのエバネセント波は包絡線に併合しなく、半径 R での圧力上昇に寄与しない。 定義によると、 W の超音速から亜音速への遷移は臨界のせん断波傾角 α'_{cr} で生じる。 従って、Fig. 4 の非エバネセント波の圧力積分は角度範囲 $0 \leq \alpha' \leq \alpha'_{cr}$ に関連するせん断波に限る。

・渦を斜めせん断波への分解

核半径 a 、時計回り循環 2π の柱状渦の速度分布は

$$\begin{aligned} u(r, \phi) &= \begin{cases} (r/a^2) \sin \phi & R < a \\ (1/r) \sin \phi & R > a \end{cases} \\ v(r, \phi) &= \begin{cases} -(r/a^2) \cos \phi & R < a \\ -(1/r) \cos \phi & R > a \end{cases} \end{aligned} \quad (1.16)$$

で与えられる。 ただし、 r は渦中心からの距離である。 二次元のフーリエ展開は次のように得られる：

$$\begin{aligned} u(r, \phi) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha \int_0^{\infty} \frac{J_1(ka)}{ka} \sin k\hat{r} dk \\ v(r, \phi) &= -\frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha \int_0^{\infty} \frac{J_1(ka)}{ka} \sin k\hat{r} dk \end{aligned} \quad (1.17)$$

ここで $\hat{r} = r \cos(\alpha - \phi)$ である。

被積分関数は水平線との傾斜角度 α で法線傾く成分の正弦せん断流（せん断波） dq (Fig. 1.1a) の速度成分 \overline{du} , \overline{dv} と解釈される。 \hat{r} は変化する定位相の記述平面である。渦の循環 2π から Γ まで一般化されれば、結果としてこの波の無次元化した速度は

$$\overline{dq}/U_A = (\Gamma/U_A \pi^2 ka^2) J_1(ka) \sin k\hat{r} d(ka) d\alpha \quad (1.18)$$

と書ける。

・せん断波と衝撃波の干渉による圧力波

せん断波と衝撃波の干渉は異なる傾角 α'' と波数 k'' の圧力波を生じる

$$\overline{dp} = -\hat{P}(\Gamma/U_A \pi^2 ka^2) J_1(ka) \sin(k''\hat{s}'' - \delta_p) d(ka) d\alpha \quad (1.19)$$

ここで、 \hat{r} に対応する相変数 \hat{s}'' が Fig. 1.1a で定義される。 p は無限遠方の圧力 p_∞ で割った圧力変動を示す。伝達関数 \hat{P} および位相シフト δ_p は Fig. 1.1a での圧力波とせん断波の関係を定量的に記述する。

式 (1.19) の k と α を k'' と α'' で書き直すと

$$d(ka) d\alpha = J(\alpha'') d(k''b) d\alpha'' \quad (1.20)$$

となる。ただし、 $J(\alpha'')$ はヤコビアン $\partial\alpha/\partial\alpha''$ である。長さ b は $k''b=ka$ を満たし、その幾何学的解釈が Fig. 1.4 に与えられる。衝撃波に沿う \overline{dq} と \overline{dp} は $k''\sin\alpha''=k\sin\alpha$ を要求する。すなわち、

$$b/a = k/k'' = \sin\alpha''/\sin\alpha \quad (1.21)$$

である。

式 (1.18) ka の 0 から ∞ までの積分は閉形式で評価できる。同様に、式 (1.20) を用いて式 (1.19) も $k''b$ で評価できる。その結果は

$$dp = -\hat{P}(\Gamma/U_A \pi^2 a) g(\rho) J(\alpha'') da \quad (1.22)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
g(\rho) &= \begin{cases} \rho & |\rho| \leq 1 \\ \left[\rho + (\rho/|\rho|)\sqrt{\rho^2 - 1} \right]^1 & |\rho| \geq 1 \end{cases} \\
\rho &\equiv \hat{s}^*/b(\alpha'') = (\hat{r}^* - R)/b(\alpha'') \\
\hat{r}^* &\equiv r'' \cos(\alpha'' - \phi'') \\
\sigma &\equiv \rho_{\alpha''=\phi''} \equiv (\hat{r}^* - R)/b(\alpha'')
\end{aligned} \tag{1.23}$$

式 (1.22) と (1.23) は Fig. 1.1b の右上に示した特別な圧力分布を表す.

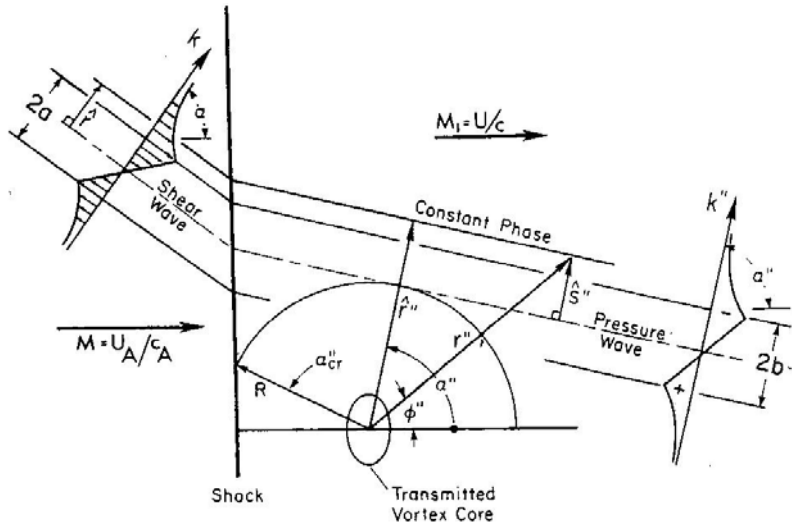


Fig. 1.4 Reversion to elementary shear wave→pressure wave/shock interaction of Fig. 1.1b, with more detail. (In Figs. 1.2, 1.3 waves like these, with a range of angle α and corresponding α'' , are superposed). (Ribner 1985)

・圧力波の重ね合わせ

傾角 α'' に対する二回目の積分を行う. この重ね合わせの圧力波 (音波) を Fig. 1.3a に示した. 式(1.22)が無効のエバネセント波を排除するため, 積分は $-|\alpha''_{cr}| \leq \alpha'' \leq |\alpha''_{cr}|$ に限定する. この積分は, 非エバネセント波の衝撃波下流の点 (r'', ϕ'') での圧力変動 p への貢献を表す. 以下の形をとる.

$$\frac{p(r'', \phi'')}{K_s} = \int_{-\alpha''_{cr}}^{\alpha''_{cr}} \hat{P}(\alpha'') J(\alpha'') g(\rho) d\alpha'' \tag{1.24}$$

K_s は正規化した渦強さ:

$$K_s = 2q_{\max} / \pi U_A$$

である. ここで, ρ はパラメータ σ と R/a に関して r'', ϕ'' と α'' (Fig. 1.4 の右側) に依存する. σ は円筒波の包絡線の公称半径 $R=ct$ から径方向の距離を ϕ'' に依存する長さ b で正規化したものである. α''_{cr} は波の法線傾角の臨界値であり, そこで W は音速 c と等しい.

伝達関数 $\hat{P}(\alpha'')$ は正 α'' の範囲（反時計回り）だけ定義されている．渦流の反対称性は，式（1.24）の被積分関数も同様に反対称性を有することを確保する．従って，式（1.24）での積分は以下のように再公式化され，正 α に限られる．

$$\frac{p(r'', \phi'')}{K_s} = - \int_0^{\alpha_{cr}} \hat{P}(\alpha'') g(\rho)_{\phi''} d\alpha'' + \int_0^{\alpha_{cr}} \hat{P}(\alpha'') J(\alpha'') g(\rho)_{-\phi''} d\alpha'' \quad (1.25)$$

2 番目の積分では， ρ が「式（1.23）で定義される」 ϕ'' ではなく $-\phi''$ で評価される．

・予測方程式のフォーマット

$R/a \rightarrow \infty$ を近似すると，圧力場は以下のような漸近の形になる．

$$p = 2^{1/2} K_s \left(\frac{a}{R} \right)^{1/2} \tilde{G} \left(\frac{r'' - R}{b(\phi)} \right) \left(\frac{b}{a} \right)^{1/2} P(\phi'') J(\phi'') \quad (1.26)$$

const radial circumferential
(for fixed $R=ct$)

即ち，ある強さの衝撃波に対して，唯一の円周と半径方向の因子を生じる． $R/a \rightarrow \infty$ の近似がなければ，因数分解が現れない．しかし，一般解「式（1.24）」を書き直すと，式（1.26）のような形になれる．

$$p = 2^{1/2} K_s \left(\frac{a}{R} \right)^{1/2} G \left(\frac{r'' - R}{b(\phi)}; \frac{R}{a}; \phi'' \right) \left(\frac{b}{a} \right)^{1/2} P(\phi'') J(\phi'') \quad (1.27)$$

const radial circumferential

ここで，

$$G \left(\frac{r'' - R}{b(\phi)}; \frac{R}{a}; \phi'' \right) \equiv \frac{p[Eq.(1.24)]}{2^{1/2} K_s (1/R)^{1/2} (b/a)^{1/2} \hat{P}(\phi'') J(\phi'')} \quad (1.28)$$

は無次元化した径方向の圧力分布である．

要約すると，式（1.27）と（1.28）は式（1.25）の積分の数値評価に基づく．それらの式は渦が衝撃波を通過することによって生じる円筒状音波を表現する．円周方向の因子は唯一である．半径方向の圧力分布 G は， \tilde{G} と違って，唯一ではない．それは，与えられた流れマッハ数に対して， R/a と ϕ'' 両方に依存する．パラメータ $R=ct$ は波の公称半径である． a は渦の初期核半径， K_s は渦強さの大きさである． G ， b/a ， \hat{P} と J はすべて上流マッハ数あるいは等価の衝撃波強さにある程度依存することを示す．

・補足-方程式と定義

ここでリストされる方程式は非エバネセント波 (Fig. 4 の W が音速より大きい) の範囲だけ有効である. 比熱比 γ は 1.4 とする.

M = 指定する

α'' = 指定する

M = $6M^2/(5+M^2)$

M_1 = $(5+M^2)^{1/2}/(7M^2-1)^{1/2}$

$$\bar{W} = \frac{W}{c} = \left[1 + \left(\frac{M_1 + \cos \alpha''}{\sin \alpha''} \right)^2 \right]^{1/2}$$

μ = $\sin^{-1}(1 - \bar{W})$

α' = $\alpha'' - \mu$

α = $\tan^{-1}(m \tan \alpha')$

b/a = $\sin \alpha'' / \sin \alpha$ (下付き ϕ や ϕ'' は $\alpha'' = \phi''$ での評価を意味する)

$$\hat{P}(\alpha'') = -\frac{7m\Gamma \csc \alpha'}{6m-1}$$

$\hat{P}(\phi'') = \hat{P}(\alpha'')$ ($\alpha'' = \phi''$ に対する)

$$\Pi = \frac{\sin \alpha \sin \mu}{m \sin \alpha''} \left[\left(\frac{C' + GF'}{E' + GD} \right) D' - F' \right]$$

C' = $(1/3)m - 2[1 + (m-1)\sin^2 \alpha']$

D' = $(m-1)[1 + (m-1)\sin^2 \alpha']$

E' = $(m-1)F' / 2 - [1 + (2/3)m] \cot \alpha'$

F' = $(m-1)\sin 2\alpha'$

G = $-\cot \alpha''$

$$J(\alpha') = \frac{(\sin^2 \alpha) \tan \alpha'}{m \sin^2 \alpha' (\tan \alpha' + \tan \mu)}$$

$J(\phi'') = J(\alpha'')$ ($\alpha'' = \phi''$ に対する)

1.3 衝撃波と圧縮性渦の干渉のこれまでの研究

渦と衝撃波の干渉の問題は、流体力学の基礎的問題で古くから音響学的な観点から多くの実験、数値計算による研究が行われてきた. 全てを網羅することはできないが、現在重要とされているものを取り上げる.

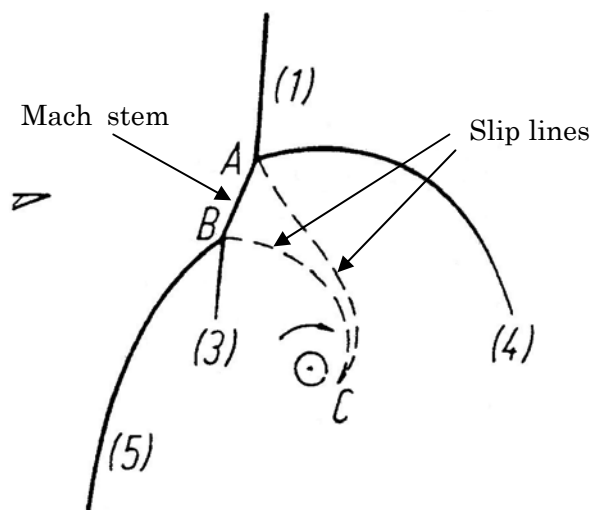
1.3.1 実験による衝撃波と圧縮性渦の干渉の研究

Hollingsworth ら(1955)[4]は衝撃波管を用いて、平面衝撃波と円柱渦の干渉について調査

し、その干渉により 1 つの円筒状の音響パルス (acoustic pulse) が発生することを示した。その渦を中心とする音波は希薄領域と圧縮領域が交互に現れることが観察された。スパークシュリーレン装置とマッハツェンダー干渉計を使って、Dosanjh ら(1965)[5]は音波の円周方向の分布を測定した。4 つの交互に現れる希薄領域と圧縮領域、即ち、音波は四重極性をもつことを発見した。



a) Mach-Zehnder Interferogram



b) Schematic diagram

Fig. 1.5 Experimental results observed by Naumman and Hermanns (1973).

Naumann ら(1973)[6]は渦の平面衝撃波への影響を調べた。平面衝撃波が干渉により大きく変形されることが観察された。強い衝撃波と強い渦の干渉の後、マッハ構造がはっきり見えた。Fig. 1.5a は彼らの撮った画像である。概略図を Fig. 1.5b に示す。マッハ反射なので、2つの反射衝撃波 (3) と (4) が形成された。平面衝撃波面は2つの屈折衝撃波 (1) と (5) および Mach stem で構成されており、2つの分岐点 (triple point, A と B) から発するスリッライン (slip lines) が現れ、渦と繋がっていることがわかった。

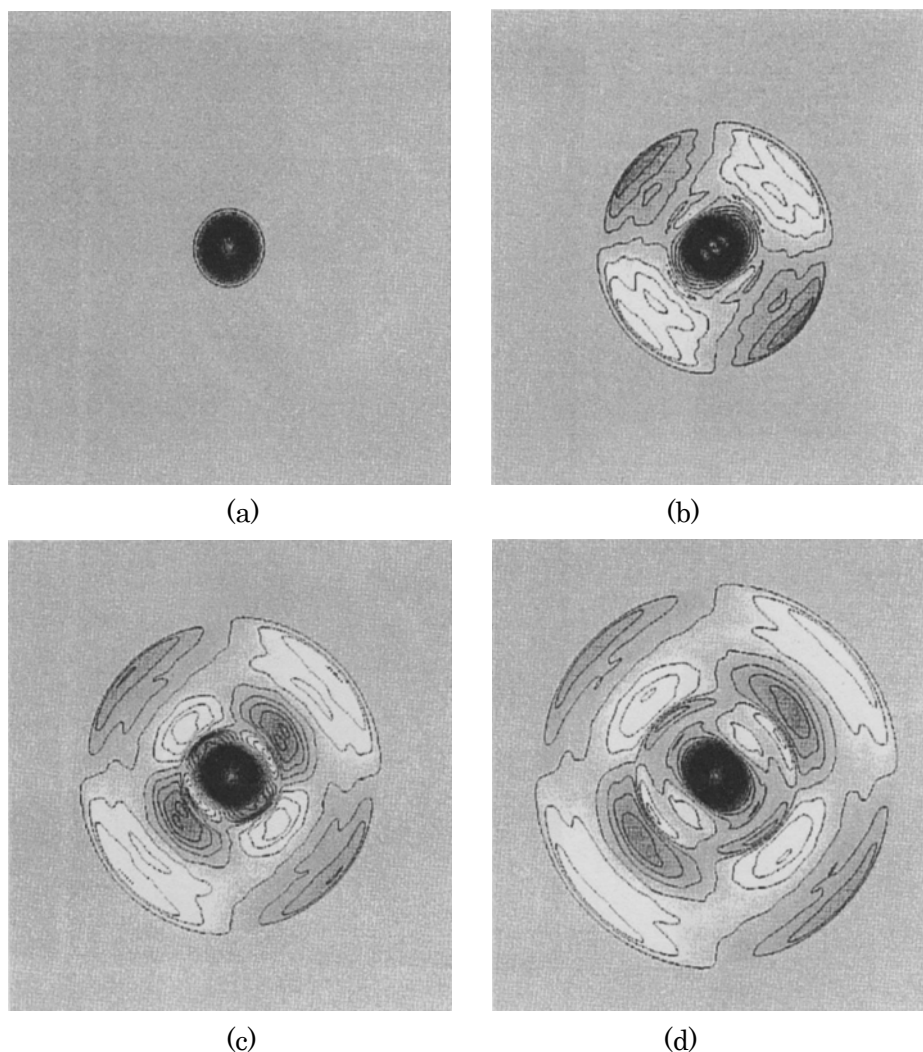


Fig. 1.6 Numerical results obtained by Ellzey and Henneke (1997).

1.3.2 数値計算による衝撃波と圧縮性渦の干渉の研究

これまでに見てきた数多くの実験による研究とともに、数値計算もコンピュータ環境の急速な発展とともに、衝撃波と渦の干渉の解明に当たり重要なツールのひとつとなった。Ellzey ら(1995)[10, 11]は、二次元非定常圧縮性 Euler 方程式を用いた数値計算により、衝撃波と渦の強さの影響を調べた。衝撃波と渦の強さにより、マッハ反射 (Mach reflection)

あるいはレギュラー反射 (regular reflection) が発生することを示した。干渉により、まず、プリカーサ (precursor) が発生、その後ろに第二音波が発生する；2 つの音波は四重極性をもつことも発見した。Ellzey ら(1997)[12]は楕円渦を用いて音波の起源を調査した。Fig. 1.6 に示すように、楕円渦のまわりに四重極性をもつ音波が形成されるので、音波生成には衝撃波歪曲・渦変形の両方が重要であることを結論した。

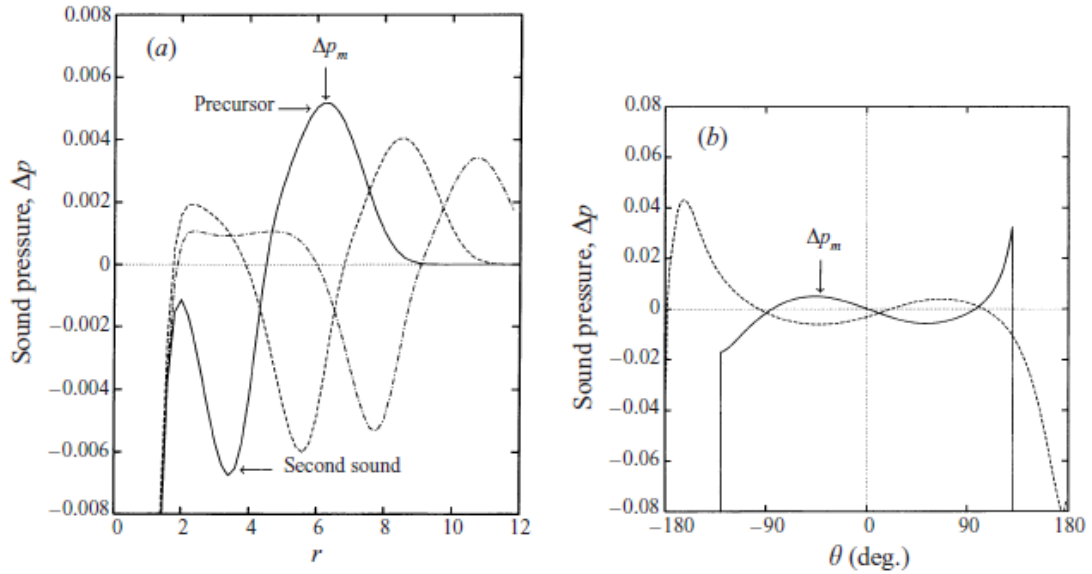


Fig. 1.7 Numerical results obtained by Inoue and Hattori (1999).

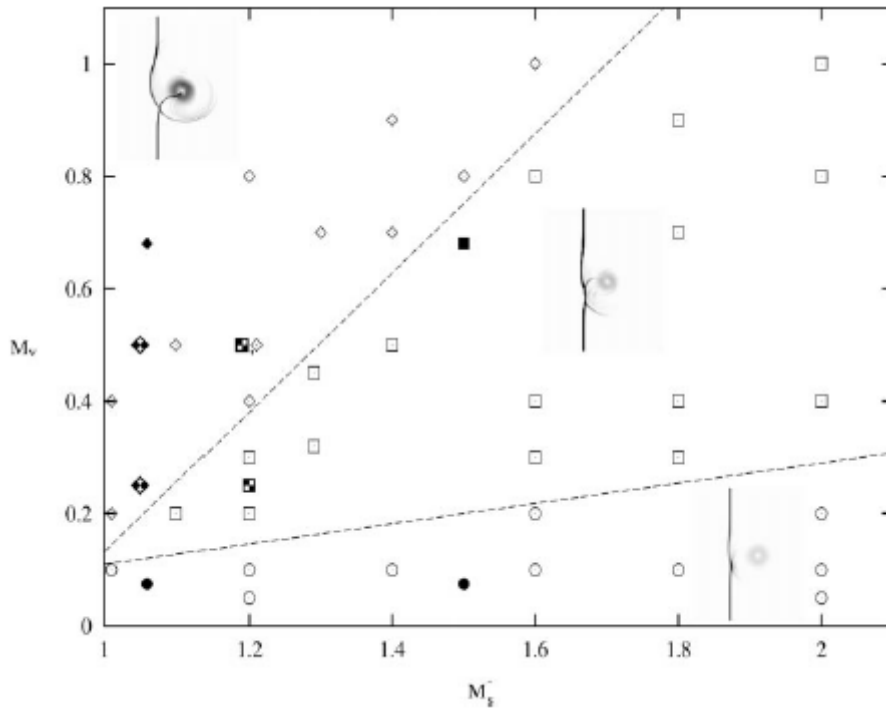


Fig. 1.8 Numerical result obtained by Grasso and Pirozzoli (2000).

Inoue ら(1999)[13]は 6 次精度コンパクト Padé スキームで二次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式を用いた数値計算により，四重極性をもつプリカーサと第二音波の発生を確認し，Fig. 1.7 に示すような径方向と円周の音波の分布を得た．その後，Inoue ら(2000)[14]はもっと広い計算領域で，四重極性をもつ第三音波を観察した．Grasso ら(2000)[15]は，WENO(weighted essentially non-oscillatory)スキームを使って，衝撃波変形に基づき，干渉を Fig. 1.8 に示すような「弱い干渉，レギュラー反射とマッハ反射」三種類に分類した．Zhang ら(2005)[16]は衝撃波 ($M_s=1.2, 1.05$) と強い渦 ($M_v=0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 1.0$) の干渉を研究し，Fig. 1.9 に示すような渦度の変化を得られ，干渉は多段階 (multistage) の特性が現れることを示した．さらに，数値計算による衝撃波と渦輪の干渉の解析もたくさん実施した[13, 17, 18]．

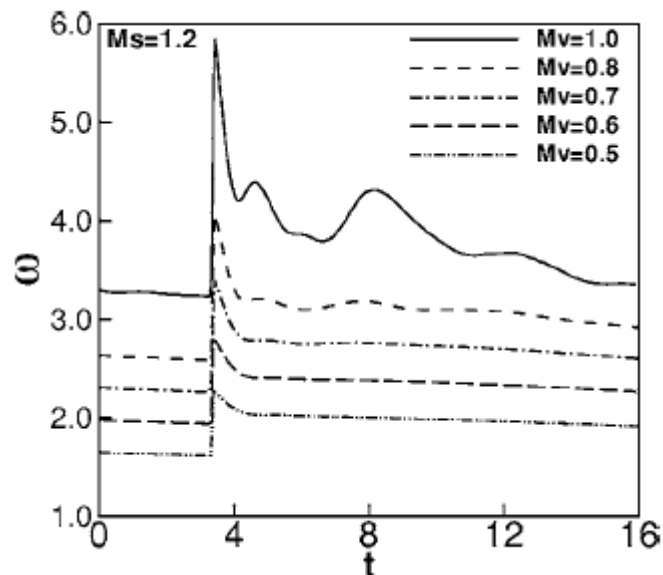


Fig. 1.9 Numerical result obtained by Zhang et al (2005).

1.4 研究の目的

本研究では，WCNS をベースとし，代表的な流束評価法の性能を把握するため，低速流れおよび低マッハ数から高マッハ数流れが共存する流れ場を対象として，グリッド解像度と計算収束性を十分検討した直接数値シミュレーション (DNS, Direct Numerical simulation) を用いて調査する．これは壁面近傍渦と衝撃波を解析するための計算流体力学手法の研究である．ロバストで低散逸性を要求される CAA の計算法の中で，非定常な衝撃波のダイナミクスや渦運動と干渉による音響場を同時に高精度で解く計算法の開発である．

次に，開発した計算法を使ってこれまでほとんど研究されてこなかった衝撃波と壁近傍

の渦の問題を取り扱い、中強度衝撃波 ($M_s=1.29$) と壁近傍渦 ($M_v=0.39$) の干渉を詳しく調査する。次の 2 点を研究の目的として、現象を解析した結果について報告する。

- ・ 衝撃波と壁近傍渦の干渉による複雑干渉場を理解すること。
- ・ 音波発生メカニズムを解明すること。

各章の概要は、以下のとおりである。

第 2 章では、非定常圧縮性ナビエ・ストークス方程式の離散手法と NSCBC 境界条件を説明する。渦と衝撃波の初期分布も与える。

第 3 章では、低速流れおよび低マッハ数から高マッハ数流れが共存する流れ場を対象として、WCNS と複数の流束評価法 (FVS, FDS, ASUM+ と SLAU2) の組み合わせの計算結果を比較し、本研究で使われた SLAU2 の特性を述べる。

第 4 章では、中強度衝撃波 ($M_s=1.29$) と渦 ($M_v=0.39$) の干渉 DNS の結果を示す。まず、自由空間での干渉を計算し、これまでの実験値や理論値やこれまで計算結果との比較を示す。その後、壁近傍での干渉を計算し、衝撃波を含む流れ場の構造と騒音発生メカニズムおよび渦の変形を述べる。壁と渦の距離および滑りなし壁面条件の計算結果への影響についても議論する。

第 5 章では、本研究で得られた主要な成果を総括しており、今後の課題についても述べる。

第2章 計算方法

2.1 垂直衝撃波の関係式

衝撃波は超音速流れで起こり，衝撃波を通して流れは超音速から亜音速になる．運動エネルギーの一部が熱エネルギーになって温度上昇および圧力上昇を起こす．衝撃波の前方が大気圧の空気である場合極めて薄くサブミクロンのオーダーである．普通の流れを扱うときには衝撃波を不連続面と考えてよい．本研究では，Fig. 2.1 で示すような静止した気体中を速度 U_s で伝播する衝撃波を考える[48, 49]．

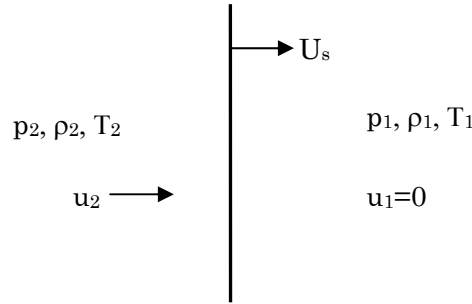


Fig. 2.1 Schematic diagram of a normal shock wave

衝撃波の伝播マッハ数 $M_s = U_s/c_1$ (c_1 は衝撃波前方の音速である) を用い，衝撃波前後の密度，圧力と温度の比は

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_s^2}{2 + (\gamma - 1)M_s^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_s^2 - 1) \quad (2.2)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + 2\frac{\gamma - 1}{(\gamma + 1)^2} \frac{\gamma M_s^2 + 1}{M_s^2} (M_s^2 - 1) \quad (2.3)$$

と表せる．ここで， $\gamma(=1.4)$ は比熱比である．衝撃波後方の速度 u_2 は以下となる．

$$u_2 = 2 \frac{M_s^2 - 1}{(\gamma + 1)M_s^2} U_s \quad (2.4)$$

2.2 渦の方程式

圧縮性粘性非定常渦の解析解は今まで知られていない[50]. 本研究では, Taylor によって与えられた周速度成分のみをもつ軸対称性渦を圧縮性渦の初期条件として用いた[13]. 初期渦の速度分布は以下のように与えられる.

$$u_{\theta}\left(\frac{r}{R_v}\right) = -M_v \frac{r}{R_v} \exp\left[\left(1 - \left(\frac{r}{R_v}\right)^2\right)/2\right], \quad (2.5)$$

$$u_r = 0.$$

したがって, 渦度は以下のように表される.

$$\omega\left(\frac{r}{R_v}\right) = -M_v \left(2 - \left(\frac{r}{R_v}\right)^2\right) \exp\left[\left(2 - \left(\frac{r}{R_v}\right)^2\right)/2\right] \quad (2.6)$$

ここで, 速度成分は無限遠方の音速 c_{∞} によって無次元化されている. R_v は渦半径であり, 本研究で $R_v = 5\text{mm}$ とした. その理由は計算結果の章で議論する. 渦のマッハ数以下のように定義される.

$$M_v = \frac{u_{\theta \max}}{c_{\infty}} \quad (2.7)$$

$u_{\theta \max}$ は渦の最大周速度である. 圧力と密度の初期分布に対して, 以下の条件を満たすと仮定する.

$$p/\rho^{\gamma} = \text{constant}$$

$$dp/d\left(\frac{r}{R_v}\right) = \rho u_{\theta}^2 / \left(\frac{r}{R_v}\right) \quad (2.8)$$

結果的に, 圧力と密度は

$$p\left(\frac{r}{R_v}\right) = \frac{1}{\gamma} \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M_v^2 \exp\left(1 - \left(\frac{r}{R_v}\right)^2\right)\right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (2.9)$$

$$\rho\left(\frac{r}{R_v}\right) = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M_v^2 \exp\left(1 - \left(\frac{r}{R_v}\right)^2\right)\right]^{1/(\gamma-1)} \quad (2.10)$$

と与えられる．ここで，密度 ρ と圧力 p は無限遠方の密度 ρ_∞ と音速 c_∞ によって無次元化されている．Inoue ら[13]の結果が示すように， $r/R_v=4$ のところに渦の影響は無視できるほど小さくなる．

2.3 支配方程式

本研究で用いた支配方程式はデカルト座標系で記述された二次元非定常圧縮性 Navier-Stokes 方程式である[51, 52]．なお，本項ではテンソル表記の例にならい，添え字に関して Einstein の総和則を適用し，同一項に同じ添え字が二つ現れる際にはその総和をとるものとした．また，添え字 i, j は，1 のときは x 方向の成分，2 のときは y 方向の成分としている．無次元化した支配方程式は保存型で以下のように表される．

・連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.11)$$

・運動量方程式

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.12)$$

・エネルギー方程式

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial[(E_t + p)u_i]}{\partial x_i} = \frac{\partial(u_j \tau_{ij})}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (2.13)$$

ここで， t は時間， x, y は空間座標， u, v はそれぞれ x, y 方向速度， ρ は密度， p は圧力である．流れの全エネルギー E_t は，流れの内部エネルギー及び運動エネルギーの和で定義される．

$$E_t = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{\rho(u^2 + v^2)}{2} \quad (2.14)$$

τ は粘性応力テンソルであり，次式で表される．

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix} = \frac{\mu}{\text{Re}} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

μ は粘性係数である．また， q_i は熱流束ベクトルであり，プラント数 Pr が一定であると仮定すると次式で表される．

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = -\frac{\mu}{(\gamma-1)M^2 \text{Re} \text{Pr}} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

T は温度であり， $\text{Pr}(=0.7)$ はプラント数である．レイノルズ数 Re と代表マッハ数 M は，渦の核半径 R_v ，渦の最大周速度 $u_{\theta\max}$ ，無限遠方の動粘性係数 v_∞ を用い以下のように定めた．代表マッハ数 M は渦のマッハ数を設定した．

$$\text{Re} = \frac{u_{\theta\max} R_v}{v_\infty} \quad (2.17)$$

$$M = M_v = \frac{u_{\theta\max}}{c_\infty} \quad (2.18)$$

方程式を閉じるため，以下の2式を導入した．

$$\mu = \frac{1.0 + C_T}{T + C_T} T^{\frac{3}{2}} \quad (2.19)$$

$$p = \rho RT \quad (2.20)$$

式(2.19)はサザーランドの法則，式(2.20)は理想気体の状態方程式である．ここで， C_T は定数で $C_T=117/(273.15+20)$ であり， R は気体定数である．また，局所音速 c は，以後に用いる計算手法で必要とするので，ここで付記する．

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (2.21)$$

支配方程式は以下に示すように無次元化されている.

$$\begin{aligned} t &= \frac{t^*}{R_\nu^* c_\infty^*}, & x &= \frac{x^*}{R_\nu^*}, & y &= \frac{y^*}{R_\nu^*}, & u &= \frac{u^*}{c_\infty^*}, & v &= \frac{v^*}{c_\infty^*}, \\ \rho &= \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*}, & \mu &= \frac{\mu^*}{\mu_\infty^*}, & p &= \frac{p^*}{\rho_\infty^* (c_\infty^*)^2}, & T &= \frac{T^*}{T_\infty^*} \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.4 時間積分法

非定常現象を取り扱うためには高精度な時間積分法を用いる必要があるため, 本研究では4次精度ルンゲ・クッタスキーム(4th order Runge-Kutta Method)を用いた[30].

例として, 次式で表される1次元移流方程式の第 n ステップから第 $n+1$ ステップへの時間進行を示す.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = R(U) \quad (2.23)$$

4次精度ルンゲ・クッタスキームによる時間進行は以下の4段階で構成される.

$$U^{n+1/4} = U^n + \frac{1}{2} \Delta t R(U^n) \quad (2.24)$$

$$U^{n+2/4} = U^n + \frac{1}{2} \Delta t R(U^{n+1/4}) \quad (2.25)$$

$$U^{n+3/4} = U^n + \Delta t R(U^{n+2/4}) \quad (2.26)$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{3} \left(-U^n + U^{n+1/4} + 2U^{n+2/4} + U^{n+3/4} \right) + \frac{1}{6} \Delta t R(U^{n+3/4}) \quad (2.27)$$

物理量 U の上添字はステップ数 (分数は中間ステップ数) を表している. また, Δt は時間刻みである.

2.5 空間微分項の離散化

数値振動を生じなく衝撃波を捕え渦運動を解像するためには, 計算流体力学の進展において高精度な差分スキームを非線形方法に用いる必要があることが理解されるようになった. 特に微細な渦運動の解析には渦構造を数値粘性によって散逸させないことが重要であ

る．そのため本研究では，空間微分項の離散化において，移流項に対しては 5 次精度陽的重み付き非線形コンパクトスキーム (Weighted Compact Nonlinear Scheme ; WCNS-E-6) [32] と SLAU2 (Simple Low-dissipation AUSM (Advection Upstream Splitting Method)) [45] 流束分割を用いた．粘性項には 6 次精度中心コンパクト有限差分スキーム (Central Compact Scheme ; CCS-6) [26] を用いた．以下に WCNS, SLAU2, CCS について説明する．

2.5.1 重み付き非線形コンパクトスキーム

WCNS (Weighted Compact Nonlinear Scheme) は，圧縮性流体計算の分野において衝撃波をより高精度で捕えるために，コンパクトスキームを基本として開発された計算スキームである．Lele の提案したコンパクトスキーム[26]は，計算対象が滑らかな分布をしていれば，通常の差分法に対し少ないステンシル (コンパクト・ステンシル) で同程度の精度を達成できるが，精度以上に解像度が高いことが知られている．この特徴は，渦運動が存在する比較的なめらかな流れ場をとらえるためには非常に大切である．しかしながら，不連続の存在する流れ場では，通常の差分法と同様に不連続近傍で数値振動を生じてしまう．そこで，Deng ら[29, 30]は ENO の考え方を導入し，特性量補間計算を ENO スイッチにより不連続と滑らかな場を切り替えて計算する方法を提案した．そして，Deng らは Jung&Su が提案した WENO スキームの重みの考えたかを取り入れ，非線形コンパクトスキームに重み付き特性量補間計算を導入することにより WCNS を構築し，数値振動を生じさせることなく高解像度性の特徴を保持し衝撃波を捕えることに成功した．

以下では，簡単のために一次元の Euler 方程式をもとに WCNS について説明する．

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \quad (2.28)$$

式(2.29)は空間的に離散化すると

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_j = -E'_j \quad (2.29)$$

となる．ここで， U は保存量， E は数値流束， E' は E の空間微分を示す．コンパクトスキームを用いて E' を以下のように与える．

$$\begin{aligned} & \kappa E'_{j-1} + E'_j + \kappa E'_{j+1} \\ &= \frac{a}{h} (\tilde{E}_{j+1/2} - \tilde{E}_{j-1/2}) + \frac{b}{h} (\tilde{E}_{j+3/2} - \tilde{E}_{j-3/2}) + \frac{c}{h} (\tilde{E}_{j+5/2} - \tilde{E}_{j-5/2}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

ただし, h は格子幅, a, b は κ をパラメータとする定数である. また, j は格子点番号であり, $j+1/2$ 点は中間位置を表す. 式 (2.30) では $\kappa=0$, $a=75/64$, $b=-25/384$ と $c=3/640$ のとき 6 次精度陽的なスキームとなる. \tilde{E} はセル境界の数値流束であり, 2.5.2 で述べる流束分割スキームで評価する.

以下に, 重み付き補間の概要を示す. j 点における流束関数のヤコビアン行列 $A=\partial E/\partial U$ について, $p(=1,2,3)$ 番目の固有値に対する左固有ベクトル \boldsymbol{l}^p および右固有ベクトル \boldsymbol{r}^p を考える. 区間 $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ における重み付き補間は, \boldsymbol{l}^p と U_j の内積で与えられる特性変数

$$Q_{j,p} = \boldsymbol{l}^p \cdot U_j \quad (2.31)$$

に対して行われる. 簡単のために以下では添字 p を省略する. j 点まわりに, 5 点からなるステンシル $[j-2, j-1, j, j+1, j+2]$ を考える. これら 5 点の中から左, 中, 右側の各々 3 点を用いて, 3 次精度の補間式を求める.

$$\tilde{Q}_{Lj+1/2}^k = Q_j + \frac{h}{2} f_j^k + \frac{1}{8} h^2 s_j^k \quad (2.32)$$

$$\tilde{Q}_{Rj-1/2}^k = Q_j - \frac{h}{2} f_j^k + \frac{1}{8} h^2 s_j^k \quad (2.33)$$

ただし, $k=1, 2, 3$ である. また, f_j^k および s_j^k は, 各々 Q_j の 1 階微分 Q_j' および 2 階微分 Q_j'' に $O(h)$ に対応し, 以下の式で与えられる.

$$\begin{aligned} f_j^1 &= \frac{1}{2h} (Q_{j-2} + 4Q_{j-1} + 3Q_j) \\ f_j^2 &= \frac{1}{2h} (Q_{j+1} - Q_{j-1}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} f_j^3 &= \frac{1}{2h} (-3Q_j + 4Q_{j+1} - Q_{j+2}) \\ s_j^1 &= \frac{1}{h^2} (Q_{j-2} - 2Q_{j-1} + Q_j) \\ s_j^2 &= \frac{1}{h^2} (Q_{j-1} - 2Q_j + Q_{j+1}) \\ s_j^3 &= \frac{1}{h^2} (Q_j - 2Q_{j+1} + Q_{j+2}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

式(2.34)および(2.35)に対し, 重み係数 $\omega_{L(R)k}$ をかけて線形結合することにより, セル境界に

おける特性変数の補間値 $\tilde{Q}_{L(R)j\pm 1/2}^\omega$ を得る.

$$\tilde{Q}_{Lj+1/2}^\omega = \sum_{k=1}^3 \omega_{Lk} \tilde{Q}_{Lj+1/2}^k \quad (2.36)$$

$$\tilde{Q}_{Rj-1/2}^\omega = \sum_{k=1}^3 \omega_{Rk} \tilde{Q}_{Rj-1/2}^k \quad (2.37)$$

ここで重み係数を次のように定義する

$$\omega_{Lk} = \frac{\beta_{Lk}}{\sum_{m=1}^3 \beta_{Lm}}, \quad \omega_{Rk} = \frac{\beta_{Rk}}{\sum_{m=1}^3 \beta_{Rm}} \quad (2.38)$$

ただし,

$$\beta_{Lk} = \frac{C_{Lk}}{(\varepsilon + IS_k)^2}, \quad \beta_{Rk} = \frac{C_{Rk}}{(\varepsilon + IS_k)^2} \quad (2.39)$$

$$IS_k = (hf_j^k)^2 + (h^2 s_j^k)^2 \quad (2.40)$$

$$C_{L1} = C_{R3} = \frac{1}{16}, \quad C_{L2} = C_{R2} = \frac{10}{16}, \quad C_{L3} = C_{R1} = \frac{5}{16} \quad (2.41)$$

であり, ε は分母が 0 にならないために導入された小さな値である。解が滑らかな領域では、重み係数は最適値 $C_{L(R)k}$ に一致して、式(2.36)および(2.37)は 5 次精度の補間式となる。また、 IS_k は 3 次精度補間式の滑らかさの指標である。衝撃波のような不連続が生じるところでは、 IS_k は大きな値をとり、勾配の重み係数は 0 に近づくために数値振動が回避される。

最後に、固有変数の補間値 $\tilde{Q}_{L(R)j\pm 1/2}^\omega$ と右固有ベクトル \mathbf{r}^p の線形和をとることにより、セル境界の左右における保存量の補間値を得る。

$$\tilde{U}_{Lj+1/2} = \sum_{p=1}^3 \tilde{Q}_{Lj+1/2,p}^\omega \mathbf{r}^p \quad (2.42)$$

$$\tilde{U}_{Rj-1/2} = \sum_{p=1}^3 \tilde{Q}_{Rj-1/2,p}^\omega \mathbf{r}^p \quad (2.43)$$

2.5.2 SLAU2 流束分割

2.5.1 節で示した WCNS は、様々な流束評価法 (flux splitting method) が使えるといった利点がある。本研究では近年開発された全速度スキーム (All-Speed Scheme) のひとつの SLAU2 (Simple Low-dissipation AUSM) [45]を用いた。

以下は式(2.11-14)の二次元 Navier-Stokes 方程式をもとに SLAU2 について示す。セル境界における数値流束を $F_{1/2}$ と表記すると、

$$F_{1/2} = \frac{\dot{m} + |\dot{m}|}{2} \Psi^+ + \frac{\dot{m} - |\dot{m}|}{2} \Psi^- + \tilde{p} N \quad (2.44)$$

$$\Psi = (1, u, v_y, H)^T, \quad N = (0, n_x, n_y, 0)^T \quad (2.45)$$

と書け、添字+, -はそれぞれセル境界の左(L)と右(R)を表している。

式(2.45)の圧力流束 \tilde{p} は

$$\tilde{p} = \frac{p_L + p_R}{2} + \frac{f_p^+ - f_p^-}{2} (p_L - p_R) + \frac{1}{c_{1/2}} \sqrt{\frac{u_L^2 + v_L^2 + u_R^2 + v_R^2}{2}} (f_p^+ + f_p^- - 1) \frac{p_L + p_R}{2} \quad (2.46)$$

$$f_p^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 \pm \text{sign}(M)), & \text{if } |M| \geq 1 \\ \frac{1}{4} (M \pm 1)^2 (2 \mp M), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.47)$$

$$M = \frac{V_n}{c_{1/2}} = \frac{un_x + vn_y}{c_{1/2}} \quad (2.48)$$

$$c_{1/2} = \bar{c} = \frac{c_L + c_R}{2} \quad (2.49)$$

であり、質量流束 \dot{m} は

$$\dot{m} = \frac{1}{2} \left\{ \rho_L \left(V_{nL} + |\bar{V}_n|^+ \right) + \rho_R \left(V_{nR} - |\bar{V}_n|^- \right) - \frac{\chi}{c_{1/2}} \Delta p \right\} \quad (2.50)$$

$$\chi = (1 - \hat{M})^2 \quad (2.51)$$

$$\hat{M} = \min \left(1.0, \frac{1}{c_{1/2}} \sqrt{\frac{u_L^2 + v_L^2 + u_R^2 + v_R^2}{2}} \right) \quad (2.52)$$

$$|\bar{V}_n|^+ = (1-g)|\bar{V}_n| + g|V_{nL}|, \quad |\bar{V}_n|^- = (1-g)|\bar{V}_n| + g|V_{nR}| \quad (2.53)$$

$$|\bar{V}_n| = \frac{\rho_L |V_{nL}| + \rho_R |V_{nR}|}{\rho_L + \rho_R} \quad (2.54)$$

$$g = -\max[\min(M_L, 0), -1] \cdot \min[\max(M_R, 0), 1] \in [0, 1] \quad (2.55)$$

である．

2.5.3 中心コンパクトスキーム

一般的な陽的中心差分スキームは，打ち切り誤差に対して n 次の精度を得ようとするとき， $n+1$ 点のステンシルが必要となる．それに比べ，CCS は少ない参照点数で所望の精度を達成できる陰的な差分スキームである．また，CCS は空間打ち切り精度が陽的中心差分と同一であっても，より高い波数解像度を持つ．

CCS による 1 階微分の離散化は一般に次式で表される．

$$\begin{aligned} & \beta f'_{j-2} + \alpha f'_{j-1} + f'_j + \alpha f'_{j+1} + \beta f'_{j+2} \\ &= c \frac{f_{j+3} - f_{j-3}}{6h} + b \frac{f_{j+2} - f_{j-2}}{4h} + a \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h} \end{aligned} \quad (2.56)$$

ここで $j (1 \leq j \leq N)$ は格子点番号， N_x は分割数， f_j 現在の関数の値，求めたい微分値を f'_j ， h は格子点間の微小距離を表し， α ， β ，および a ， b ， c は精度を決定するパラメータである．式(2.56)を N_x 個連立させ，3 重または 5 重対角行列解法により同一方向の全点の微分値を求める．

本研究では，各係数は次の値を用いる 6 次精度 3 重対角スキームによって離散化した．

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = 0, \quad a = \frac{14}{9}, \quad b = \frac{1}{9}, \quad c = 0 \quad (2.57)$$

周期境界を課さない場合，境界点 ($j=1, N$) と境界内隣点 ($j=2, N_x-1$) では 6 次精度 CCS を用いるための参照点が存在しないため，他のスキームを用いる必要がある．境界内隣点では 4 次精度 Padé スキームを用いた．このとき，各係数は次の通りである．

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta = 0, \quad a = \frac{3}{2}, \quad b = 0, \quad c = 0 \quad (2.58)$$

また，境界点では4次精度片側コンパクトスキームを用いた．

$$f_1' + \alpha f_2' = \frac{af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4}{h} \quad (2.59)$$

$$f_N' + \alpha f_{N-1}' = \frac{af_N + bf_{N-1} + cf_{N-2} + df_{N-3}}{h} \quad (2.60)$$

各係数は次の通りである．

$$\alpha = 3, \quad a = -\frac{17}{6}, \quad b = \frac{3}{2}, \quad c = \frac{3}{2}, \quad d = -\frac{1}{6} \quad (2.61)$$

1 階微分と同様に，2 階微分の離散化は一般的に次式で表される．

$$\begin{aligned} & \beta f_{j-2}'' + \alpha f_{j-1}'' + f_j'' + \alpha f_{j+1}'' + \beta f_{j+2}'' \\ &= c \frac{f_{j+3} - 2f_j + f_{j-3}}{9h^2} + b \frac{f_{j+2} - 2f_j + f_{j-2}}{4h^2} + a \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{h^2} \end{aligned} \quad (2.62)$$

式(2.62)の各係数は，所望の打ち切り精度が得られるように決定する．本研究では，1 階微分と同じ離散化精度である 6 次精度中心コンパクトスキームを用いる．このとき，以下に示される係数を用いる．

$$\alpha = \frac{2}{11}, \quad \beta = 0, \quad a = \frac{12}{11}, \quad b = \frac{3}{11}, \quad c = 0 \quad (2.63)$$

境界内隣点では各係数は次のように定め，4 次精度 Padé スキームを用いた．

$$\alpha = \frac{1}{10}, \quad \beta = 0, \quad a = \frac{6}{5}, \quad b = 0, \quad c = 0 \quad (2.64)$$

また，境界点では4次精度片側コンパクトスキームを用いた．

$$f_1'' + \alpha f_2'' = \frac{af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4}{h^2} \quad (2.65)$$

$$f_N'' + \alpha f_{N-1}'' = \frac{af_N + bf_{N-1} + cf_{N-2} + df_{N-3}}{h^2} \quad (2.66)$$

各係数は以下で与えられる．

$$\alpha = 11, \quad a = 13, \quad b = -27, \quad c = 15, \quad d = -1 \quad (2.67)$$

2.6 境界条件

数値シミュレーションでは、現実の空間に比べ計算機で取り扱える領域が有限であるため、計算領域を打ち切る必要がある。しかし、計算領域を打ち切ることによって、現実には存在しない境界が生じ、計算領域内に現実には存在しない反射波が発生することになる。したがって、物理的に意味のある計算を行うためには、適切な境界条件を与える必要がある。こうした境界面からの反射を抑制する手法として、Navier-Stokes Characteristic Boundary Condition（以下、NSCBC）が提案されている[53]。NSCBCは、支配方程式から特性波に関する方程式を導き、計算領域外部からの特性波を内部領域の特性波で推測し、非現実的な反射波を大幅に抑制する。

2.6.1 Navier-Stokes 特性境界条件（NSCBC）

NSCBCは、支配方程式から導かれた特性波に関する方程式を用いて特性波が満たすべき条件を推定し、その上で物理量を決定することによって領域内部に反射する波を抑制する手法である。

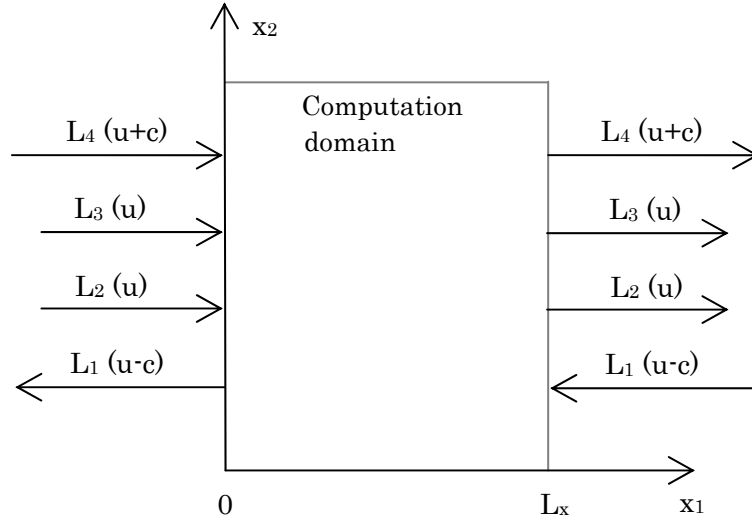


Fig. 2.2 Waves leaving and entering the computational domain through an inlet plane ($x_1=0$) and an outlet plane ($x_1=L$) for a subsonic flow.

Fig. 2.2 は x 方向の境界条件を考える際の特性波の計算領域への出入を表す。特性波解析を用い支配方程式である Navier-Stokes 方程式 (2.11) ～ (2.13) における x 方向に伝播する波に関する項を修正すると次式が得られる。本項でも、ベクトル \mathbf{d} 、特性波の振幅 L_i お

よび特性速度 λ_i 以外の添え字に関して、1のときが x 方向の成分、2のときが y 方向の成分としている。

・連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + d_1 + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} = 0 \quad (2.68)$$

・運動量方程式

$$\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial t} + u_1 d_1 + \rho d_3 + \frac{\partial(\rho u_1 u_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial \tau_{1j}}{\partial x_j} \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial(\rho u_2)}{\partial t} + u_2 d_1 + \rho d_4 + \frac{\partial(\rho u_2 u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial \tau_{2j}}{\partial x_j} \quad (2.70)$$

・エネルギー方程式

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{u_k u_k}{2} d_1 + \frac{d_2}{\gamma - 1} + \rho u_1 d_3 + \rho u_2 d_4 + \frac{\partial[(E_t + p)u_2]}{\partial x_2} = \frac{\partial(u_j \tau_{ij})}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (2.71)$$

$d_1 \sim d_4$ は特性波解析から得られ、次式で表される。

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c^2} \left[L_2 + \frac{1}{2}(L_4 + L_1) \right] \\ \frac{1}{2}(L_4 + L_1) \\ \frac{1}{2\rho a}(L_4 - L_1) \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(a^2 \rho u_1)}{\partial x_1} + (1 - \gamma)\mu \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

$L_1 \sim L_4$ は特性波解析から得られ、次式で表される。

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} - \rho c \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \\ \lambda_2 \left(c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \\ \lambda_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \lambda_4 \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho c \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

特性速度は以下のように表される.

$$\lambda_1 = u_1 - c \quad (2.74)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = u_1 \quad (2.75)$$

$$\lambda_4 = u_1 + c \quad (2.76)$$

特性速度より, u_1 が音速以上か以下かによって特性波の流入, 流出の様子が変化することがわかる. 流入境界では, $u_1 \geq c$ ならばすべての特性速度が正であるから特性波の流出がないのに対し, $u_1 < c$ ならば特性速度が負のものが 1 つあるため特性波が 1 つ流出する. 流出境界では, $u_1 \geq c$ ならばすべての特性速度が正であるから特性波の流入がないのに対し, $u_1 < c$ ならば特性速度が負のものが 1 つあるため特性波が 1 つ流入する.

同様に, x_2 方向の境界条件について考える. 支配方程式(2.11)~(2.13)を以下のように修正する.

• 連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + d_1 = 0 \quad (2.77)$$

• 運動量方程式

$$\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1 u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_1} + u_1 d_1 + \rho d_3 = \frac{\partial \tau_{1j}}{\partial x_j} \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial(\rho u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_2 u_1)}{\partial x_1} + u_2 d_1 + \rho d_4 = \frac{\partial \tau_{2j}}{\partial x_j} \quad (2.79)$$

• エネルギー方程式

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial[(E_t + p)u_1]}{\partial x_1} + \frac{u_k u_k}{2} d_1 + \frac{d_2}{\gamma - 1} + \rho u_1 d_3 + \rho u_2 d_4 = \frac{\partial(u_j \tau_{ij})}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (2.80)$$

$d_1 \sim d_4$ は特性波解析から得られ、次式で表される．

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c^2} \left[L_2 + \frac{1}{2}(L_4 + L_1) \right] \\ \frac{1}{2}(L_4 + L_1) \\ \frac{1}{2\rho c}(L_4 - L_1) \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(c^2 \rho u_2)}{\partial x_2} + (1 - \gamma)\mu \frac{\partial p}{\partial x_2} \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

$L_1 \sim L_4$ は特性波解析から得られ、次式で表される．

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \left(\frac{\partial p}{\partial x_2} - \rho c \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \\ \lambda_2 \left(c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_s} - \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) \\ \lambda_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \lambda_4 \left(\frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho c \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

特性速度は以下のように表される．

$$\lambda_1 = u_2 - c \quad (2.83)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = u_2 \quad (2.84)$$

$$\lambda_4 = u_2 + c \quad (2.85)$$

x_1 方向と同様に、 u_2 が音速以上か以下かによって流入、流出の様子が変化するが、本研究では y 方向の境界で滑り断熱壁面と滑り無し断熱壁面の NSCBC を適用する．

2.6.2 各種境界条件の設定

境界上で計算領域から流出する特性波の大きさは以上の計算によって求めることができるが、計算領域外から流入する特性波の大きさを計算することできない．そのため NSCBC

では Local One-dimensional Inviscid Relation (以下, LODI) を用い, 内部領域の特性波から外部領域の特性波を推定する.

・流入境界への適用

$x_1=0$ に, 流入境界は次のように与えられる. 速度および温度が定常値として与えるため, NSCBC によって修正された Navier-Stokes 方程式の運動量方程式, 式(2.69)~(2.70)とエネルギー方程式, 式(2.71)は計算不要となり, 連続の式のみを計算すればよい. また, LODI の関係より, 反射波の振幅が以下のように定まる.

$$L_4 = L_1 \quad (2.86)$$

$$L_2 = \frac{1}{2}(\gamma - 1)(L_4 + L_1) \quad (2.87)$$

これらを用い式(2.68)を計算すると密度の時間変化を求めることができる.

・亜音速完全無反射流出境界への適用

$x_1=L_x$ の流出境界では密度, 速度, 温度に制約がないため式(2.73)をすべて用いる必要がある. 反射波の振幅を

$$L_1 = 0 \quad (2.88)$$

とし, 計算領域外からの波を除外した. L_2, L_3, L_4 は計算領域内部から求めることができ, L_1 と併せて式(2.68)~(2.71)を計算すると各流束の時間変化を求めることができる.

・滑り断熱壁面境界への適用

$x_2=0$ と $x_2=L_y$ に滑り断熱壁面条件がある場合, 法線速度 u_2 が 0 であるため, 式(2.79)は計算不要となる. また, $u_2=0$ より,

$$L_2 = L_3 = 0 \quad (2.89)$$

である. LODI より,

$$L_1 = L_4 \quad (2.90)$$

とする. L_4 は計算領域内部から計算する. 断熱滑りの条件により,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 \quad (2.91)$$

$$q_y = 0 \quad (2.92)$$

これらを用い式(2.77)～(2.80)を計算すると各変数の時間変化を求めることができる。

・滑り無し断熱壁面境界への適用

滑り壁面では速度 u_1, u_2 が 0 であるため, 式(2.78)～(2.79)は計算不要となる。また, $u_2=0$ より,

$$L_2 = L_3 = 0 \quad (2.93)$$

である。LODI より,

$$L_1 = L_4 \quad (2.94)$$

とする。 L_4 は計算領域内部から計算する。断熱の条件により,

$$q_y = 0 \quad (2.95)$$

これらを用い式(2.77)～(2.80)を計算すると各変数の時間発展形式を求めることができる。

2.7 格子伸長

滑り無し断熱壁面境界を用いたケースでは, 十分な格子解像度を確保するため, 壁面付近に格子が集まるように y 座標に対して格子伸長を行った[54]。

次式で表される関数によって格子伸長を行った。

$$y_{GS} = C_{GS2} \left[\tanh(C_{GS1}y - C_{GS1}L_y) - \tanh(-C_{GS1}L_y) \right] \quad (2.96)$$

y は等間隔格子における座標値, y_{GS} は不等間隔格子における座標値, L_y は y 方向の計算領域長さである。また, C_{GS1}, C_{GS2} は伸長の様子を決定するパラメータで, 本研究では $C_{GS1}=0.065, C_{GS2}=21.189$ とした。Fig. 2.3 に格子間隔の変化を示す。縦軸は格子間隔, 横軸は格子点番号である。

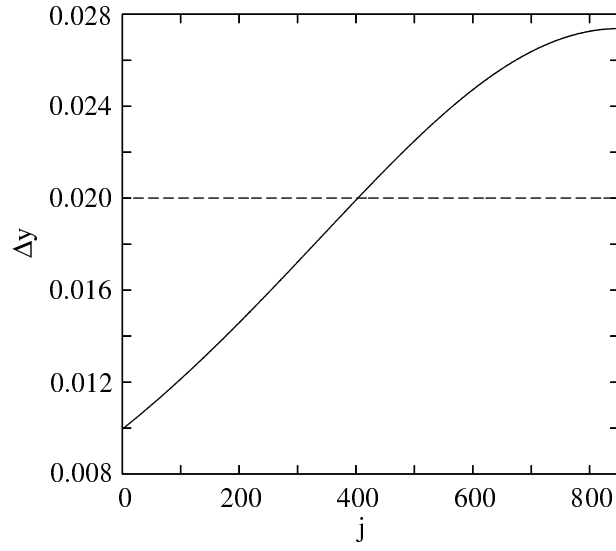


Fig. 2.3 Changes in grid spacing.
 ——Stretched grid, ---Equally spaced grid

また，格子伸長を行ったことにより， y 方向の空間微分を以下のように補正した．

$$\frac{\partial f}{\partial y_{GS}} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y_{GS}} = \frac{\partial f}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial y_{GS}}{\partial y} \quad (2.97)$$

第 3 章 数値流束評価法の性能比較

近年の計算流体力学(CFD)においては, 低マッハ数から高マッハ数まで共存する流れにおいても, 圧縮性の解法が用いられるようになってきている. 例としては, 本研究の衝撃波と渦の干渉や斜め衝撃波と境界層の干渉など工学的に重要な解析が挙げられる. ただし, このような計算においては, 解法を適切に選ばないと, 収束性が劣化したり, 解に大きな誤差が生じたりする事が知られている. これらの問題を回避するため, これまでに様々な手法が提案されている. その中で, 全速度スキーム (All-Speed Scheme) と呼ばれ, 低速流れにおける低散逸という性質を有する流束評価法がいくつか提案された.

本章では, 代表的な, いくつかの流束評価法を用いて低速流れの数値計算を行い, 精度を比較する. 使用した数値計算法を表 3.1 と表 3.2 にまとめる.

Table 3.1 Numerical method for assessment of flux splitting schemes

支配方程式		二次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式
空間離散化	移流項	5 次精度陽的 WCNS + 表 3.2 に示す流束評価スキーム
	粘性項	6 次精度中心コンパクト有限差分スキーム
時間発展		4 次精度ルンゲ・クッタスキーム

Table 3.2 Flux splitting schemes for comparison

流束評価法	全速度スキーム
Steger-Warming FVS (Flux Vector Splitting, 1981)	×
Roe's FDS (Flux Difference Splitting, 1981)	×
AUSM+ (Advection Upstream Splitting Method, 1996)	×
SLAU2 (Simple Low-dissipation AUSM, 2013)	○

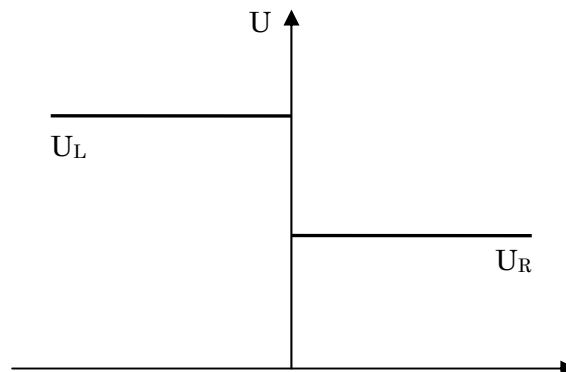


Fig. 3.1 Schematic diagram of a Riemann problem

3.1 近似リーマン解法

リーマン問題は任意の双曲型の連立方程式に対して考えることのできる古典的な初期値問題である．初期値として Fig. 3.1 に示すように $x=0$ の左である一定値 U_L をとり， $x=0$ の右で一定値 U_R をとる．リーマン問題の厳密解を得るには反復計算が必要となる．そこで，厳密解に代わってよい近似解を見つけることにより，適切な解を求めることにする．この計算法は一般に近似リーマン解法と呼ばれる．

ここでは，一次元の Euler 方程式をもとに近似リーマン解法について説明する．

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

ここで U は保存量の変数， F は流束のベクトルで，

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ (E + p)u \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

と定義される．ヤコビ行列 $A = \partial F / \partial U$ を用いて，

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (3.3)$$

という形に書き直すことができる．式(3.1)は，流束差を用いて

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2}) \quad (3.4)$$

と形式的に書ける．ここで， n は時間ステップを表し， j は格子点番号である．

3.1.1 Flux Difference Splitting

Flux Difference Splitting (FDS) は Roe によって提案された近似リーマン解法である [36]．このスキームでは一次精度の数値流束は

$$\tilde{F}_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left[F(\tilde{U}_R) + F(\tilde{U}_L) - |\tilde{A}| (\tilde{U}_R - \tilde{U}_L) \right]_{j+1/2} \quad (3.5)$$

ただし，

$$\left| \tilde{A} \right|_{j+1/2} = R_{j+1/2} \left| \Lambda \right|_{j+1/2} R_{j+1/2}^{-1} \quad (3.6)$$

で表される． Λ はヤコビ行列 A の対角行列である．

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = R^{-1} A R \quad (3.7)$$

ここで,

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c \quad (3.8)$$

は行列 A の固有値であり, $c = (\gamma p / \rho)^{1/2}$ は音速である．なお, 固有行列は

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u - c & u & u + c \\ H - uc & u^2 / 2 & H + uc \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(b_1 + \frac{u}{c} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} + b_2 u \right) & \frac{1}{2} b_2 \\ 1 - b_1 & b_2 u & -b_2 \\ \frac{1}{2} \left(b_1 - \frac{u}{c} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} - b_2 u \right) & \frac{1}{2} b_2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

ただし,

$$H = \frac{e + p}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} u^2$$

$$b_1 = \frac{u^2}{2} \frac{\gamma - 1}{c^2}, \quad b_2 = \frac{\gamma - 1}{c^2}$$

となる．式(3.7)～(3.10)の量は Roe の平均を用いて評価される．

$$\rho_{ave} = \sqrt{\rho_L \rho_R} \quad (3.11)$$

$$u_{ave} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3.12)$$

$$H_{ave} = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3.13)$$

$$c_{ave}^2 = (\gamma - 1) \left(H_{ave} - \frac{1}{2} u_{ave}^2 \right) \quad (3.14)$$

3.1.2 Flux Vector Splitting

ここで, Steger と Warming の Flux Vector Splitting (FVS) [37]を説明する. 流束ベクトルを単純に $F^+(U)$ と $F^-(U)$ に分解する.

$$\tilde{F}_{j+1/2} = F^-(\tilde{U}_{Rj+1/2}) + F^+(\tilde{U}_{Lj+1/2}) \quad (3.15)$$

流束のヤコビ行列 A^\pm の固有値からなる対角行列を 2 つに分解することにより得られる.

$$\Lambda^\pm = \frac{\Lambda \pm |\Lambda|}{2}, \quad A^\pm = R \Lambda^\pm R^{-1} \quad (3.16)$$

式(3.15)の数値流束は

$$F^\pm = A^\pm U \quad (3.17)$$

で計算する.

その後, van Leer はこの Steger と Warming の FVS では, 固有値が符号を変えるところで 2 つの流束が微分可能でないことが, 音速点で問題を与えるとして, 別の流束ベクトル分離を提案した[38]. 彼の分離は,

$$F^\pm = \frac{\rho c}{4} (M \pm 1)^2 \left| \begin{array}{c} 1 \\ \frac{2c}{\gamma} \left(\pm 1 + \frac{\gamma-1}{2} M \right) \\ \frac{2c^2}{\gamma^2 - 1} \left(1 \pm \frac{\gamma-1}{2} M \right)^2 \end{array} \right| \quad (3.18)$$

と書ける. ここに M は局所的なマッハ数である.

3.1.3 Advection Upstream Splitting Method

Liou & Steffen は流束を移流項と圧力項に分離することで Advection Upstream Splitting Method (AUSM) を提案した[39]. その後に, AUSM 系スキーム族まで発展した[40-45]. ここに, Liou 自身の AUSM+法[40]について述べる. 数値流束を流れによって

運ばれる移流項と音波による擾乱伝播の圧力項の 2 つに分けて考える．すなわち，

$$\tilde{F}_{j+1/2} = F_{j+1/2}^{(c)} + P_{j+1/2} \quad (3.19)$$

ただし，

$$F_{j+1/2}^{(c)} = c_{j+1/2} \left[\frac{1}{2} m_{j+1/2} (\phi_L + \phi_R) - \frac{1}{2} |m_{j+1/2}| (\phi_R - \phi_L) \right] \quad (3.20)$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho H \end{pmatrix}, \quad P_{j+1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_{j+1/2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

ここで音速の中間値 $c_{j+1/2}$ は

$$c_{j+1/2} = \min(\tilde{c}_L, \tilde{c}_R), \quad \tilde{c} = c^* / \max(c^*, |u|) \quad (3.22)$$

$$c^* = \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1} H \quad (3.23)$$

であり，質量流束 $m_{j+1/2}$ と圧力流束 $p_{j+1/2}$ は

$$m_{j+1/2} = f_M^+ + f_M^-, \quad p_{j+1/2} = f_p^+ p_L + f_p^- p_R \quad (3.24)$$

$$f_M^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2}(M \pm |M|), & \text{if } |M| > 1, \\ \pm \frac{1}{4}(M \pm 1)^2 \pm \frac{1}{8}(M^2 - 1)^2, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.25)$$

$$f_p^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 \pm \text{sign}(M)), & \text{if } |M| \geq 1, \\ \frac{1}{4}(M \pm 1)^2(2 \mp M) \pm \frac{3}{16}M(M^2 - 1)^2, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.26)$$

である．

3.1.4 Simple Low-dissipation AUSM

本研究で採用された Simple Low-dissipation AUSM (SLAU2) [45]は全速度スキームの

1 つであり，AUSM 系スキームでもある．第二章の 2.5.2 節で説明した．

3.2 数値例

本節では，低速流れおよび低マッハ数から高マッハ数が共存する流れを対象として，前に述べた各近似リーマン解法の性能を調べるため，数値計算を行う．その結果を基に，WCNS+SLAU2 の優位性を示す．垂直衝撃波と渦は第 2 章の 2.1 と 2.2 節で述べた関係式を用いた．

3.2.1 低速流れ - 低マッハ数 Taylor 渦

渦の保存性は非定常流解析にとって非常に重要である．それは数値散逸によって大きく影響される．各近似リーマン解法の低速非定常流れに対する性能を確認するため，弱い Taylor 渦の解析を行った．計算条件は下記である．

- ・ 渦マッハ数 $M_v=0.1$
- ・ 渦核半径 $R_v=5\text{mm}$
- ・ 渦回転方向 時計回り
- ・ 渦の最大周速度に基づくレイノルズ数 $Re=1.1\times 10^4$
- ・ 計算領域 $x: [-10, 10]$, $y: [-10, 10]$
- ・ 渦の初期位置 $(0, 0)$

支配方程式の時間は渦核半径と無限遠方の音速によって無次元化されている．直交等間隔格子 (uniform grid) を用い，格子幅 $\Delta x=\Delta y=0.04$ とする． x と y 方向の境界には周期条件を課している．この例では，渦は弱い，レイノルズ数 $Re=1.1\times 10^4$ は十分高いから，粘性の影響は小さいと考えられる．

Fig. 3.2 に十分時間が経過した後 ($t=16$) の渦中心を通る線 ($y=0$) の圧力変動 $\Delta p=(p-p_0)/p_0$ の分布を示す． p_0 は無限遠方の圧力である．FVS 法は圧力変動の減衰が大きく，過度の人工粘性が生じることが分かる．この不必要な数値粘性のため，境界層のような低速粘性流れに本来の物理現象が再現されないなどの欠点がある．その理由で，FVS 法は粘性計算に向かない．FDS 法は密度および圧力の正值性が破れることが理論的に示されている[55]．AUSM+法 FVS 法に比べ数値粘性がかなり改善されたが，まだ大きすぎる．SLAU2 法は数値粘性が小さく，良好な結果が得られた．

Fig. 3.3 に圧力変動 $\Delta p=(p-p_0)/p_0$ の等高線を示し，各流束評価法の弱い渦の保存性を考察する．FVS 法の数値粘性は非常に大きいことが分かった．本研究ではデカルト座標の直交等間隔格子を用いた．渦中心からみれば，格子幅は 0° と 90° で一番小さく， $\pm 45^\circ$ で一番大きい．Roe's FDS 法と AUSM+法は，渦の形が四角のように変形してしまい， $\pm 45^\circ$ を持つ線に対称であり，格子生成法に依存性があることが分かった．それに対して，SLAU2 法の渦

形状の保存性は非常に良いことを示した。

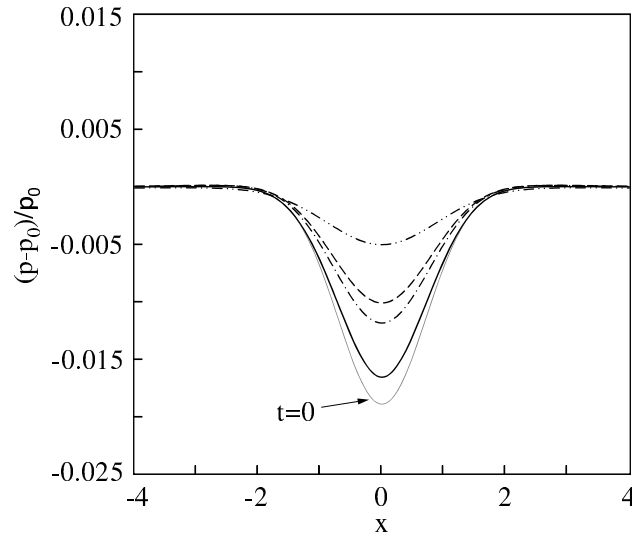


Fig. 3.2 Pressure distribution of $(p-p_0)/p_0$ along $y=0$ for a weak Taylor vortex ($M_v=0.1$, $\Delta x=\Delta y=0.04$) at $t=16$. ----FVS; - · - · -FDS; ---AUSM⁺ and ——SLAU2.

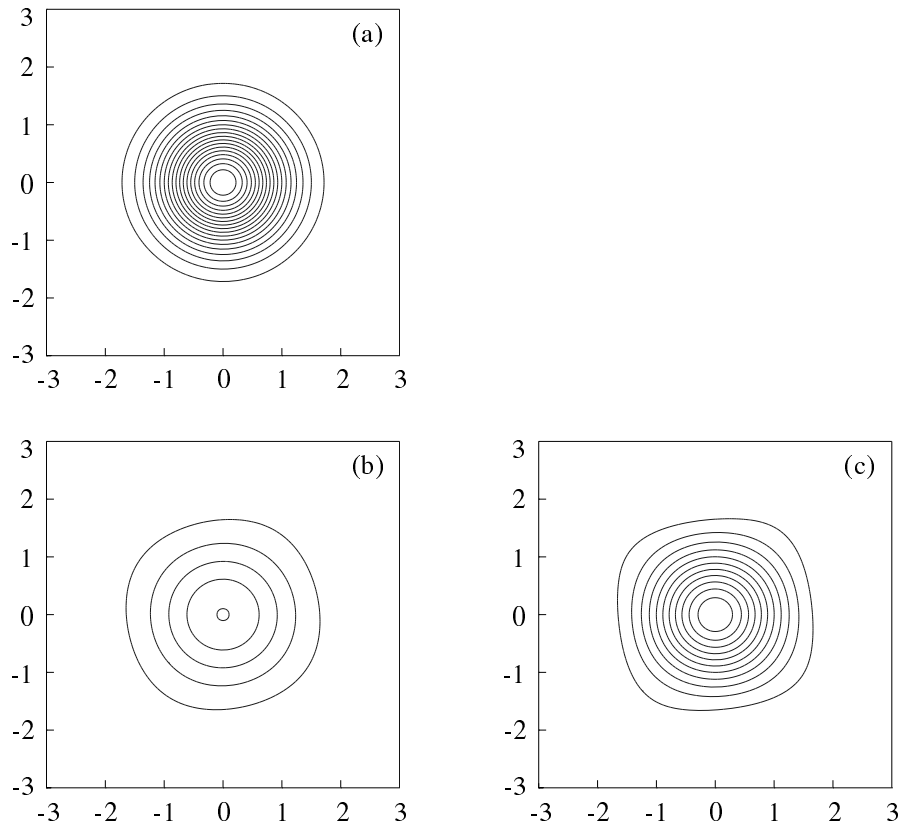


Fig. 3.3 Pressure contour plots of $(p-p_0)/p_0$ for a weak Taylor vortex ($M_v=0.1$) at $t=16$. The contour levels are from -0.019 to -0.001 with an increment of 0.001.

(a) Initial condition; (b) FVS; (c) FDS; (d) AUSM⁺ and (e) SLAU2.

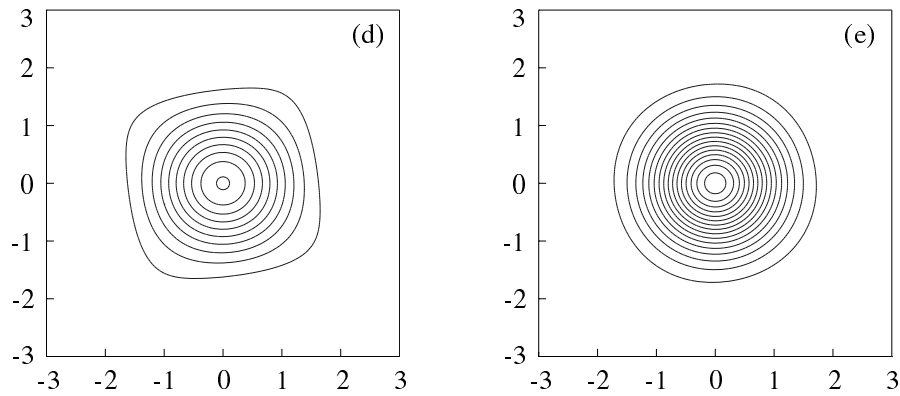


Fig. 3.3 Continued.

各近似リーマン解法のグリッド解像度を調べるため，細かい格子 ($\Delta x = \Delta y = 0.02$) を用いて再計算した．時刻 $t=16$ の時，渦中心を通る圧力変動 Δp の分布を Fig. 3.4 に示す．また，Fig. 3.5 は渦中心の Δp の変化である．横軸は格子幅である．格子が細かくなると，全ての方法の解は良くなったことがわかる．しかし，格子幅が 0.01 であっても，FVS 法の減衰はまだ大きい，SLAU2 は格子幅 0.02 と 0.01 での解の差がほとんどないことを示した．即ち，数値粘性が小さい SLAU2 法は格子幅への依存性が低く，粗い格子でも比較的精度の良い解析が行えることが確認された．

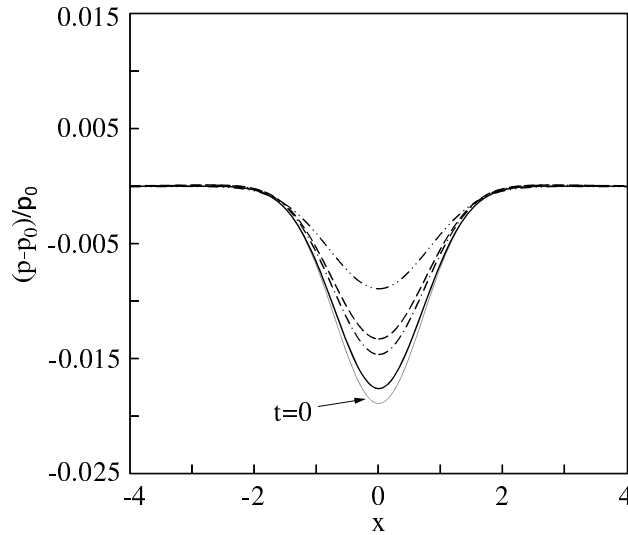


Fig. 3.4 Pressure distribution of $(p-p_0)/p_0$ along $y=0$ for a weak Taylor vortex ($M_v=0.1$, $\Delta x=\Delta y=0.02$) at $t=16$. ----FVS; ----FDS; ---AUSM+ and ——SLAU2.

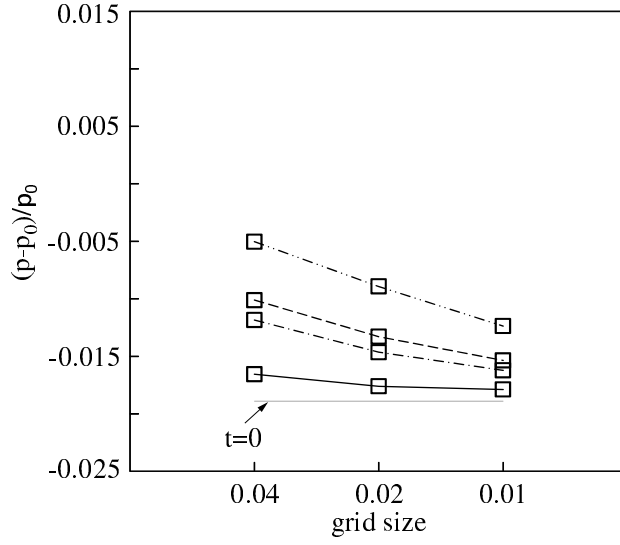


Fig. 3.5 Grid sensitivity study for a weak Taylor vortex ($M_v=0.1$) at $t=16$.

---FVS; ----FDS; ---AUSM+ and ——SLAU2.

このマッハ数 0.1 の非圧縮性流れに対して、渦度輸送方程式は二次元流れの場合には次のようになる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (3.27)$$

ただし ω は渦度の紙面に垂直な成分で

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.28)$$

である。今回の場合、移流項はゼロであり、渦度は拡散により最大値が減少し一様化していくことになる。すなわち、式(3.27)は

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (3.29)$$

と書け、拡散方程式になる。

ここで、格子幅は 0.125 を設定し、式(3.29)の拡散項の二階微分には 6 次精度中心コンパクト有限差分スキーム、時間積分には 4 次精度ルンゲ・クッタスキームを用いて計算した。渦の初期分布は式(2.6)を用いた。その計算結果は解析解と同等と見なせ、渦中心の渦度の時間経過は、Fig. 3.6 の一番下の灰色線で示した。FVS と FDS と AUSM+ と SLAU2 法の

渦度は Navier-Stokes 方程式を用いた計算結果である．SLAU2 法は解析解とよく一致していることがわかった．

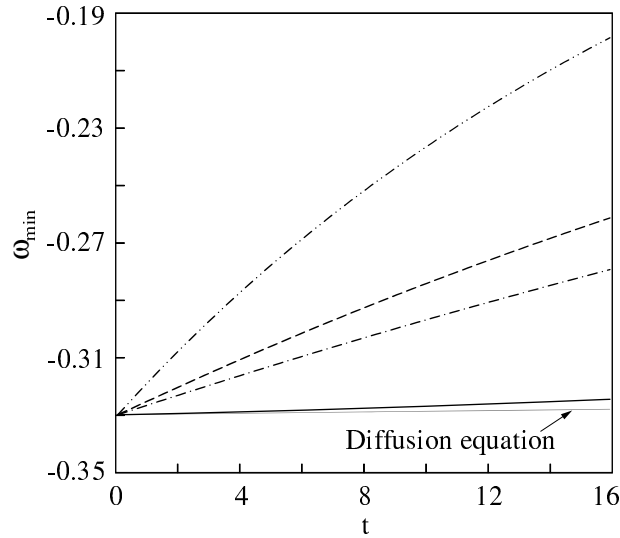


Fig. 3.6 Evolution of the vorticity at the vortex center ($M_v=0.1$, $\Delta x=\Delta y=0.02$).

····FVS; -·-·FDS; ---AUSM+ and ——SLAU2.

3.2.2 低マッハ数から高マッハ数が共存する流れ - 衝撃波と強い渦の相互作用

ここでは，低マッハ数から高マッハ数が共存する流れに対する各リーマン解法の性能を確認するため，衝撃波と強い渦の相互作用の計算を行った．本研究のパラメータ ($M_s=1.29$, $M_v=0.39$) をカバーするよう，また，参考文献[16]と比較できるように，下記の計算条件を設定した．

- ・ 衝撃波マッハ数 $M_s=1.3$
- ・ 渦マッハ数 $M_v=0.8$
- ・ 渦核半径 $R_v=5\text{mm}$
- ・ 渦回転方向 時計回り
- ・ 渦の最大周速度に基づくレイノルズ数 $Re=9.1\times 10^4$
- ・ 計算領域 $x: [-11, 17]$, $y: [-15, 15]$
- ・ 渦の初期位置 $(0, 0)$
- ・ 衝撃波の初期位置 $x=-4$

式 (2.4) により，衝撃波後方の速度のマッハ数は 0.4423 である．従って，この例のマッハ数変化範囲は 0～1.2423 である．

支配方程式の時間は渦核半径と無限遠方の音速によって無次元化されている．直交等間隔格子を用い，格子幅 $\Delta x=\Delta y=0.02$ とする．また， x 方向の境界には NSCBC の流入と流出

条件を用い、 y 方向の境界には周期条件を課している。

流れ場の時間経過をシャドウグラフで Fig. 3.7 に示す。ここで不連続に敏感な密度のラプラジアン ($\nabla^2 \rho = \partial^2 \rho / \partial x^2 + \partial^2 \rho / \partial y^2$) を用いた。干渉の初期段階において、平面衝撃波の上と下の部分 (S1 と S2) は渦の周りに回折され S 字曲線になる (Fig. 3.7a)。続いてマッハ反射の発生に伴って、2 つの反射衝撃波 (MR1 と MR2) が形成される。平面衝撃波には 2 つの分岐点 (triple point, T1 と T2) が生じ、その間に Mach stem (MS) と呼ばれる部分が現れる (Fig. 3.7b)。S1 は右下に向かって進んで、2 つの分岐点は 1 つ (T) になる (Fig. 3.7c)。その後、反射衝撃波 MR3 が形成され、三つの反射衝撃波が三角形になる (Fig. 3.7d)。Mach stem (MS) は再び現れ、S1 と S2 と平面衝撃波を構成する。Fig. 3.7e で、分岐点 T1 と T4 から発するスリップライン (slip line, SL) がはっきり見える。最後は、Mach stem (MS) が加速され、衝撃波面は再び平面に近くなる。

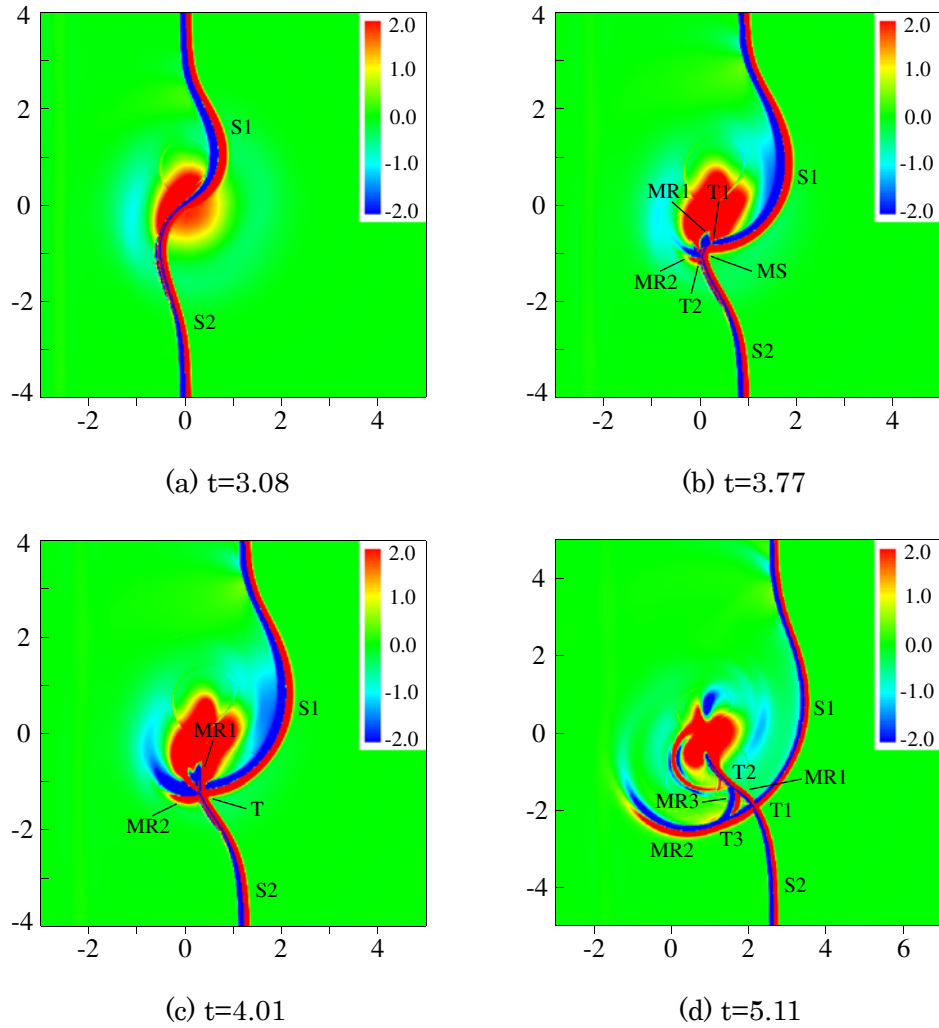


Fig. 3.7 Computational shadowgraph of the flow structure.

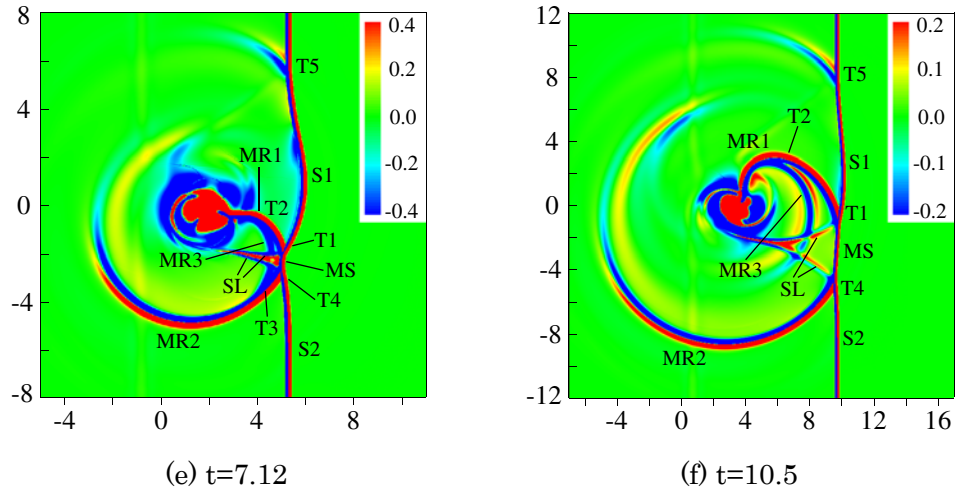


Fig. 3.7 Continued.

Fig. 3.8 に音圧 $\Delta p = (p - p_s)/p_s$ の空間分布を示す。 p_s は衝撃波背後で干渉領域から十分離れた場所での圧力である。 流体音の圧力変動は微小であるため、数値計算で直接捉えるには、高い精度が要求される。 等圧力線図の赤線部分が $\Delta p > 0$ の圧縮領域、青線部分は $\Delta p < 0$ の希薄領域をそれぞれ表している。 衝撃波が渦と干渉することにより、衝撃波は渦の誘起速度によって変形され、四重極性をもつプリカーサ（precursor）が発生する（Fig. 3.8a）。 続いて反射衝撃波の形成に伴って、プリカーサの背後にはプリカーサとは極性が反転した四重極性をもつ第二の音波が発生する（Fig. 3.8b）。 その後、変形された渦の周りには四重極性をもつ第三の音波が発生することが示されている（Fig. 3.8c）。 三つの音波はいずれも時間とともに渦から離れる方向に伝播してゆき、音圧のピーク値は渦中心からの距離とともに減衰して行く。

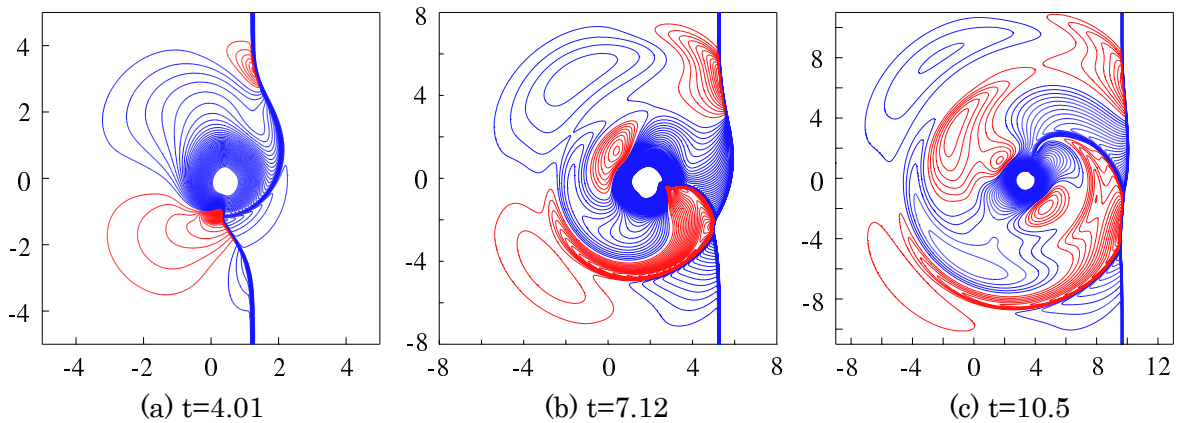


Fig. 3.8 Sound pressure field (— $\Delta p > 0$, — $\Delta p < 0$). The contour levels are from -0.66 to 0.84 with an increment of 0.015 for (a), and from -0.42 to 0.156 with an increment of 0.006 for (b) and (c).

Fig. 3.9 に渦中心の渦度の時間発展を示す．WCNS+SLAU2 法で計算した結果は Zhang らの計算結果[16]（本論文の Fig. 1.9 の上から二番目の破線）と非常に良く一致する．すなわち，渦が非常に強いので，衝撃波との干渉による渦の変形は多段階（multistage）の特性が現れる．ここで強調したいのは，本研究では WCNS+SLAU2 で高レイノルズ数（ $Re=9.1 \times 10^4$ ）でも Zhang らの低レイノルズ数（ $Re=800$, $\Delta x_s=0.00365$ ）より 5.5 倍粗い格子幅を用いたということである．それに対して，FDS と AUSM+法の結果は，衝撃波が渦中心を通過した後，ほぼ同じである．その多段階の特性がある程度再現されるが，SLAU2 法と比較すれば鮮明さに劣る．FVS 法は過度の数値粘性でその特性が完全になくなる．

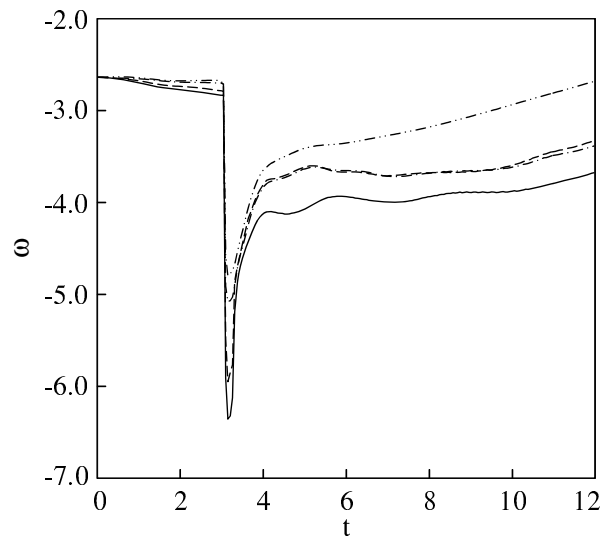
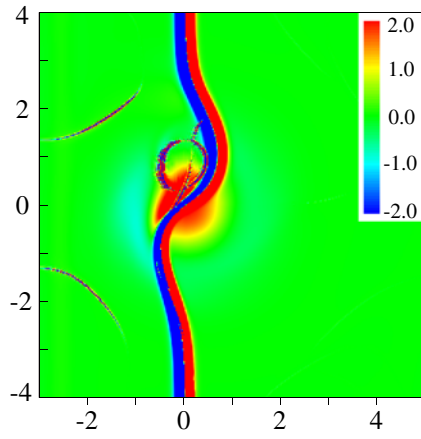


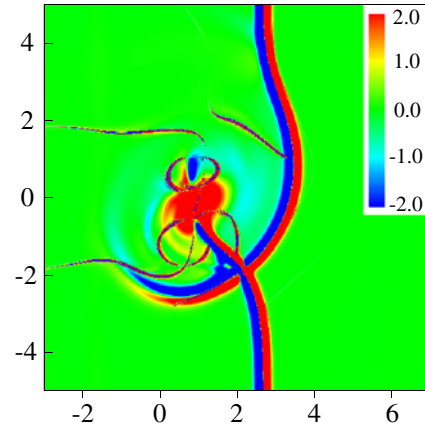
Fig. 3.9 Evolution of the vorticity at the vortex center.
FVS; -.-FDS; ---AUSM+ and ——SLAU2.

ここで，比較のため，FVS 法で計算したシャドウグラフを Fig. 3.10 に示す．衝撃波の後と渦の周りに，たくさんの非物理的な振動が現れ，MR3 とスリップラインの表現も良くない．また，他の計算法の結果と比べて，衝撃波面が非常に粗く，数値粘性が大きいことを示した．

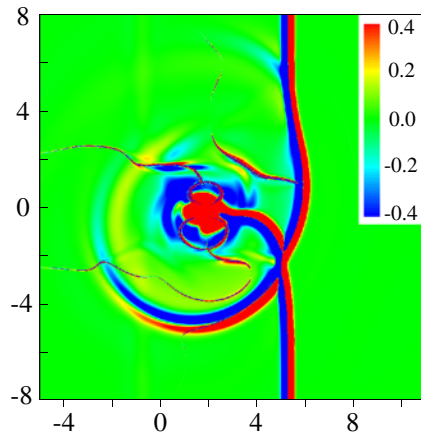
FDS 法の計算結果を Fig. 3.11 に示す．FVS 法より数値振動が少なくなり，早期の優れた近似リーマン解法であるといえる．しかし，渦の保存性が良くないから，時刻 $t=3.08$ の図に示したように，渦が四角のように変形してしまう．まだ，時刻 $t=10.5$ の図には， $x \approx 0.5$ のところに x 軸に垂直な黄色い線が現れる．本研究では，衝撃波前後の条件を設定するとき，格子点 j で衝撃波後方の値を設定し， $j+1$ で直ちに衝撃波前方の値を設定する方法を用いた．この黄色い線は，FDS 法を使えば少し振動が起こったことを示した．詳細は参考文献[45]を参照していただきたい．それに対して，Fig. 3.6f に示したように，SLAU2 法ではその振動がない．



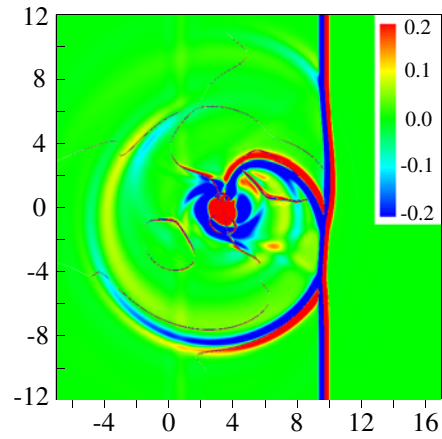
(a) $t=3.08$



(b) $t=5.11$

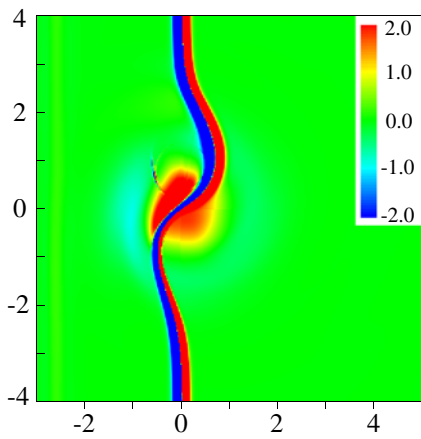


(c) $t=7.12$

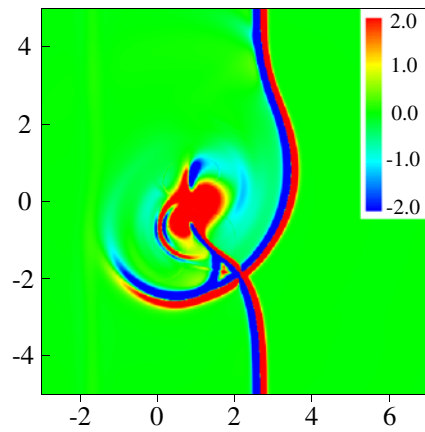


(d) $t=10.5$

Fig. 3.10 Computational shadowgraph of the flow structure using FVS.

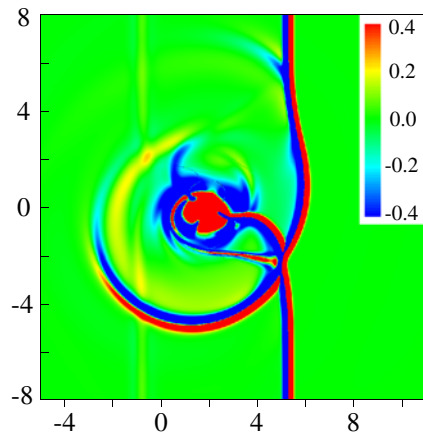


(a) $t=3.08$

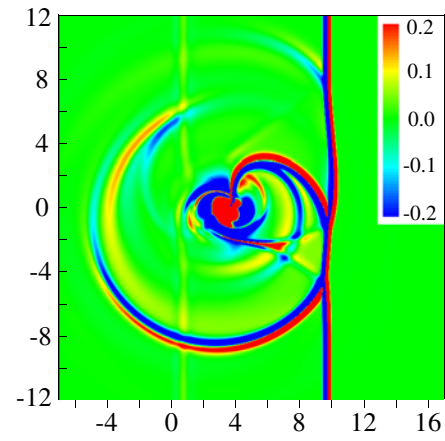


(b) $t=5.11$

Fig. 3.11 Computational shadowgraph of the flow structure using FDS.

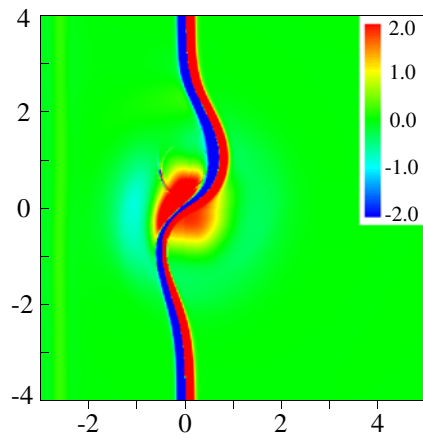


(c) $t=7.12$

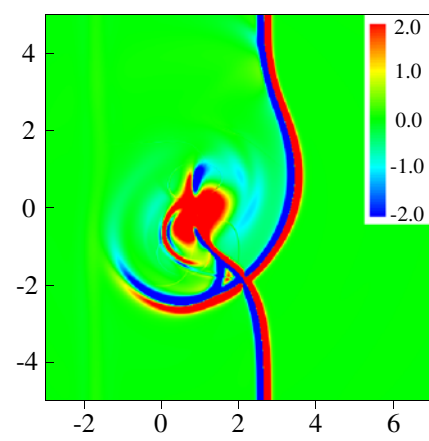


(d) $t=10.5$

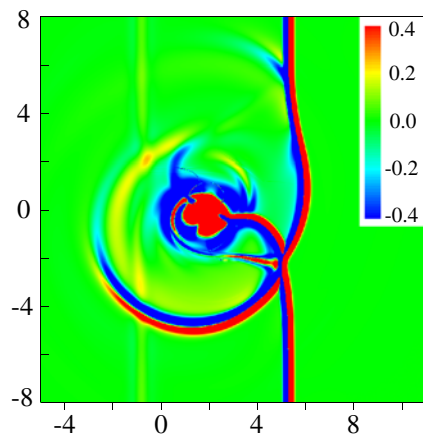
Fig. 3.11 Continued.



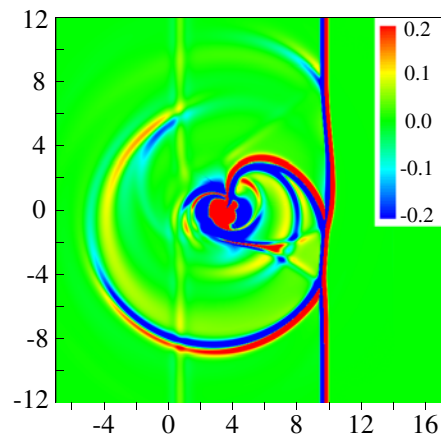
(a) $t=3.08$



(b) $t=5.11$



(c) $t=7.12$



(d) $t=10.5$

Fig. 3.12 Computational shadowgraph of the flow structure using AUSM⁺.

AUSM+法の計算結果を Fig. 3.12 に示す. FDS 法とよく似ている. 即ち, 渦が四角になり, x 軸に垂直な黄色い線の数値振動が現れることがわかる.

3.3 まとめ

本研究では, 衝撃波と渦が研究対象で低速流れと高速流れが共存している. 衝撃波の不連続は WCNS の強みである. 低速流れを正しく解析には, 流束評価法を適切に選ばなければならない.

低速流れおよび低マッハ数から高マッハ数が共存する流れの直接数値計算により, 四つの流束評価法 (FVS と FDS と AUSM+ と SLAU2) の特性を詳細に調べた. 以下の知見を得た.

- ・流束評価法の計算結果への影響は大きい. 空間微分は同じ 5 次精度陽的 WCNS でも, 異なる流束評価法で得た結果の違いは著しい.
- ・FVS 法の数値粘性が大きく, 渦の減衰に与える影響は小さくない. 低速流れと高速流れが共存する計算例の密度場のラプラシアンを計算すると, 微細な数値振動が現れる. 過度の数値粘性で, 流れの特性をなくなる可能性がある. また, 精度の良い解析を得るため, 細かい格子が必要となる.
- ・FDS と AUSM+法の数値粘性は FVS 法を用いた場合より小さく, 密度場のラプラシアンにおいて数値振動もほとんどない. ただし, 格子生成法により渦形状の保存性に劣る場合があるため, 低速渦流れの計算には不十分であり, 流れの特性を正しく表現できない可能性がある.
- ・SLAU2 は低速流れでも高速流れでも精度良く計算でき, 渦の保存性も非常に良い. 格子幅への依存性も低く, 粗い格子でも比較的精度の良い解析が行える. また, 他の全速度スキーム (例えば, AUSM+-up[43]や LDFSS2001[45]) と比べて, 一様流マッハ数のような参照パラメータが含まれていない利点がある.

以上の理由で, 本研究では, 空間微分の移流項に対しては 5 次精度陽的重み付き非線形コンパクトスキーム WCNS-E-5 と SLAU2 流束分割法を採用した.

第4章 計算結果および考察

4.1 計算条件

本研究の計算モデルは、Fig. 4.1 に示すように、平面衝撃波が左から右へ進行し、壁近傍渦と干渉するようにとった。渦の回転方向は時計回りである。計算領域は、渦核半径を基準長さとして、 $x_{\text{down}} \leq x \leq x_{\text{up}}$ とした。また、衝撃波前面の音速を基準速さとして、衝撃波のマッハ数 $M_s=1.29$ 、渦のマッハ数 $M_v=0.39$ とした。衝撃波と渦のマッハ数は Dosanjh ら(1965) [5]の実験と同じように設定した。衝撃波後方のパラメータが第二章 2.1 節で説明した関係式で計算され、Table 4.1 に与えられた。渦は第二章 2.2 節で説明した Taylor 渦であり、によって解析された渦その初期分布を Fig. 4.2 に示す。

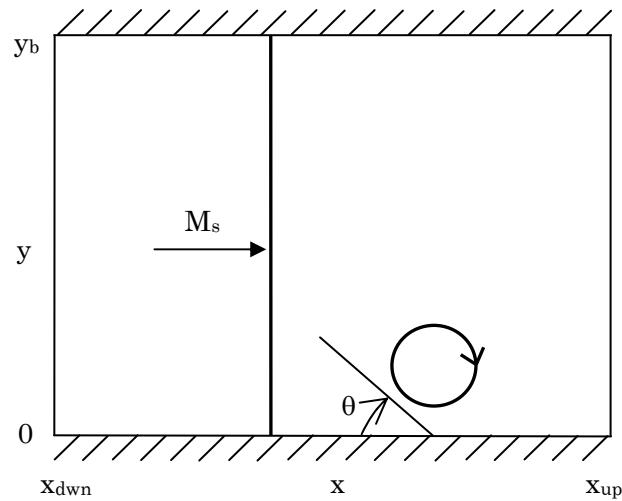


Fig. 4.1 Schematic diagram of the flow model.

Table 4.1 Initial flow quantities upstream of a shock for $M_s=1.29$

圧力比	密度比	速度
1.775	1.498	0.429

Table 4.2 Typical core radii of the vortex

	R_v (mm)
本研究	5.0
Ellzey ら [10]	7.5
Experiment [5]	2.77

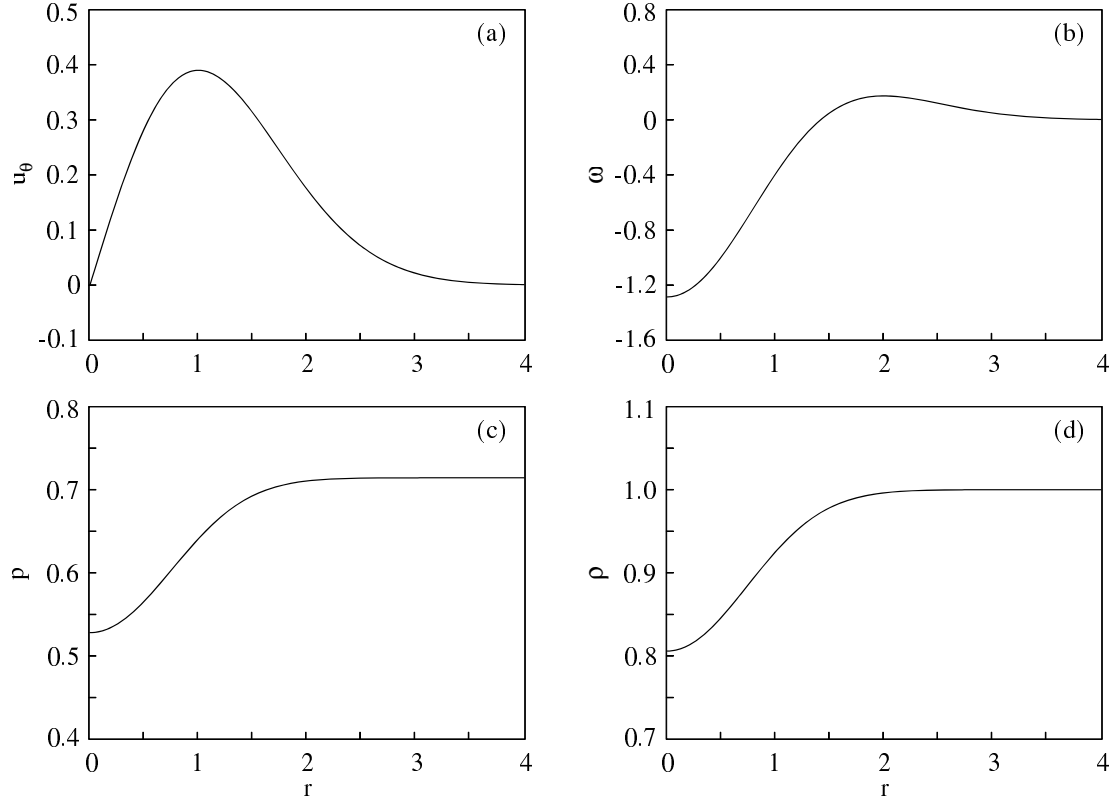


Fig. 4.2 Initial distributions of flow quantities around a vortex for $M_v=0.39$.

(a) Tangential velocity u_θ , (b) vorticity ω , (c) pressure p , (d) density ρ .

平面衝撃波の初期位置は $x=-6$ に置いた．渦の初期位置は， $(0.0, d_{vw})$ に置いた．ここで d_{vw} は渦と壁の距離である．渦核半径 R_v を 5mm とした．参考として，Tab. 4.2 にこれまでの実験と数値計算で用いられた渦核半径を示した．渦核半径の大きさはこれまで研究された渦の大きさ程度であり（Ellzey らの渦と Dosanjh らの渦の大きさの中間である），この大きさは衝撃波の進行とともに発達する壁面境界層の厚さよりはるかに大きな渦である．本研究では，4.3.4 節で述べるように，境界層の十分外に存在する計算モデルを用いた．渦の最大周速度に基づくレイノルズ数 $Re=4.43 \times 10^4$ と設定した．これまでに実験で計測された大きさのレンジのレイノルズ数であり，中心コンパクトスキームを用いた DNS[13] や WENO[18] で計算された渦のレイノルズ数 ($Re=800$) と比較して十分大きい．

基礎方程式には二次元非定常圧縮性 Navier-Stokes 方程式を用いる．空間微分の移流項には 5 次精度陽的 WCNS と SLAU2 流束分割法，粘性項には 6 次精度コンパクトスキーム CCS を使い，時間進行には 4 次精度の Runge-Kutta 法を用いた．境界条件は， $x=x_{\text{down}}$ において亜音速流入条件， $x=x_{\text{up}}$ において亜音速完全無反射流出条件， $y=y_b$ において断熱滑り壁面条件， $y=0$ において断熱滑り壁面条件あるいは断熱滑りなし壁面条件をそれぞれ用いた．

本研究の渦と衝撃波の初期配置について少し説明する．Fig. 4.1 に示すように，衝撃波と

渦が接触しはじめる時間を決めるため渦と衝撃波の距離を設定する必要がある．また，渦と壁との距離がもう一つの重要なパラメータである．渦と衝撃波との距離は，伝播する衝撃波に関する予備計算によって断熱滑りなし壁面において発達する境界層の発達の様子を観察し，渦が境界層厚さより十分大きい条件を検討することができる．また，渦と壁面との相互作用による音波発生までの時間と衝撃波が渦と干渉する時間との間隔を設定する必要があるが，渦と衝撃波の距離を渦の数倍とすることによって二つの条件が満たされるように設定した．渦と壁との距離は渦と壁の相互作用の強さに影響を与えるパラメータであるので，衝撃波と渦の距離を設定した後，壁から渦中心での距離を計算パラメータとした．壁の近くに渦を設置する初期設定は以下のように行った．

まず，第二章の 2.1 と 2.2 節で述べた衝撃波と渦の分布を壁面も含むすべての格子に設定した．その後，壁面には境界条件を課した．すなわち，滑り壁面には $u_y=0$ ，滑りなし壁面には $u_x=u_y=0$ をした．この初期設定で渦と壁の相互作用がすぐに引き起こされるので，初期流れ場は非定常となる．ただし，非物理的な取り扱いは導入されていない．この流れ場のモデルは以下のプロセスで説明できる．自由空間の渦流れ場が 1 つの slip/no-slip 平板によって一部分離される．そこで d_{vw} は平板と渦中心との距離を表す．平板上の格子点では u_y (slip wall) あるいは u_x と u_y (no-slip wall) が 0 になり，他の格子点はまだ影響を受けていない．その主要な渦構造が平板上に存在する流れ場が本研究の初期状態である．その後，衝撃波は左から来て渦と相互作用する．

本研究では 5 つのケースを考察した．そのパラメータが Table 4.3 に与えられた．Case A の y 方向 ($-14 \leq x \leq 14$) において周期境界条件を用いたため， d_{vw} は無限大に相当する．Case B1-B3 の y 方向 ($y=0$ と $y=y_b$) において断熱滑り壁面条件を課した．実際に，伝播衝撃波後方の壁面上には境界層が発達することがよく知られている．境界層理論では，本研究の衝撃波が $x=10$ の平面に達する時， $x=-10$ での境界層の排除厚さ δ が 0.3mm 未満である．この数値は Case B3 の d_{vw} よりも十分小さい．すなわち，本研究では渦が境界層から十分離れるところに置かれた．流れ場への滑りなし壁面の影響は，Case B2-noslip で衝撃波管を使って調べた．本研究では，Case B2-noslip の y 方向を除いて，直交等間隔格子 ($\Delta x=\Delta y=0.02$) を用いた．

Table 4.3 Parameters used for simulation

	x_{down}	x_{up}	y_b	d_{vw}
Case A	-11	14		∞
Case B1	-11	16	21	3.0
B2	-11	14	17	2.0
B3	-11	14	17	1.5
Case B2-noslip	-33	12	17	2.0

4.2 自由空間の衝撃波と渦の干渉

本節では，自由空間の衝撃波と渦の干渉（Case A）を解析した結果について報告する．渦の初期位置は（0.0, 0.0）である．流れ場のモデル図を Fig. 4.3 に示す．

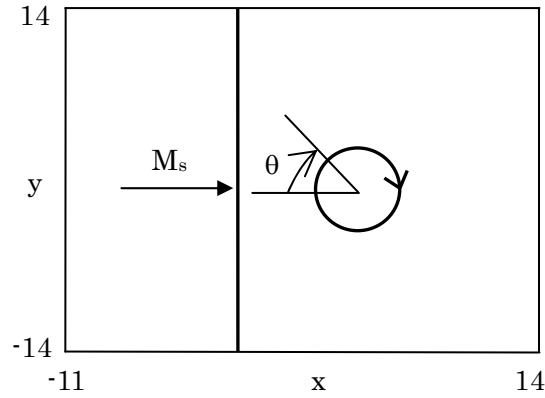


Fig. 4.3 Flow model for Case A.

4.2.1 音波の生成と伝播

音圧 $\Delta p = (p - p_s)/p_s$ の生成と伝播の様子を Fig. 4.4 に示す． p_s は衝撃波背後で干渉領域から十分離れた場所での圧力である．衝撃波上流の無限遠方の Δp_∞ は-0.4366 である．典型的な時刻の流れ場の様子をシャドウグラフで Fig. 4.5 に与える．ここでも不連続とスリップライン（slip line）に敏感である密度のラプラジアン（ $\nabla^2 \rho = \partial^2 \rho / \partial x^2 + \partial^2 \rho / \partial y^2$ ）を用いた．

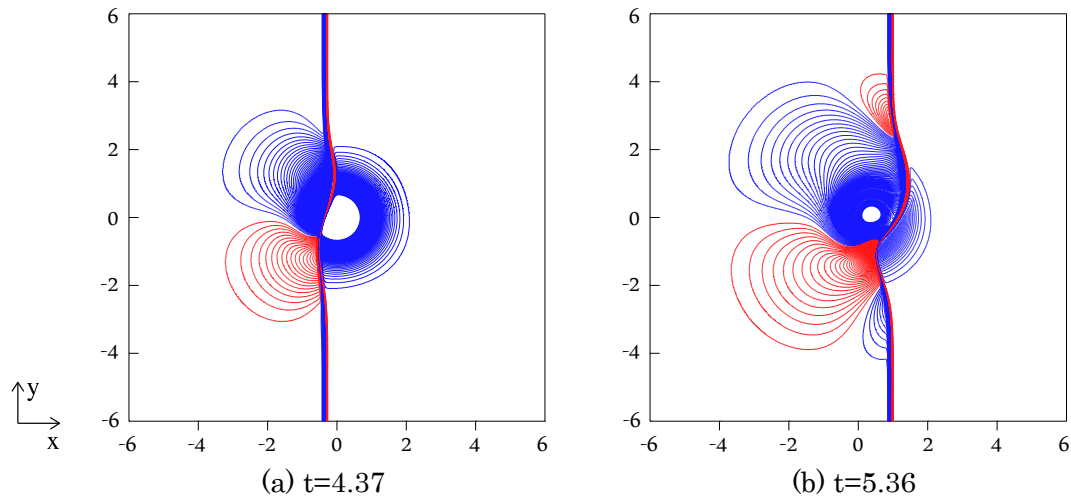


Fig.4.4 Time evolution of the sound pressure Δp for Case A ($d_{vw} = \infty$). The contour levels are from -0.5286 to -0.3446 upstream of the shock (— $\Delta p > -0.4366$, — $\Delta p < -0.4366$) with an increment of 0.002, and from -0.245 to 0.35 behind the shock (— $\Delta p > 0$, — $\Delta p < 0$) with an increment of 0.0035.

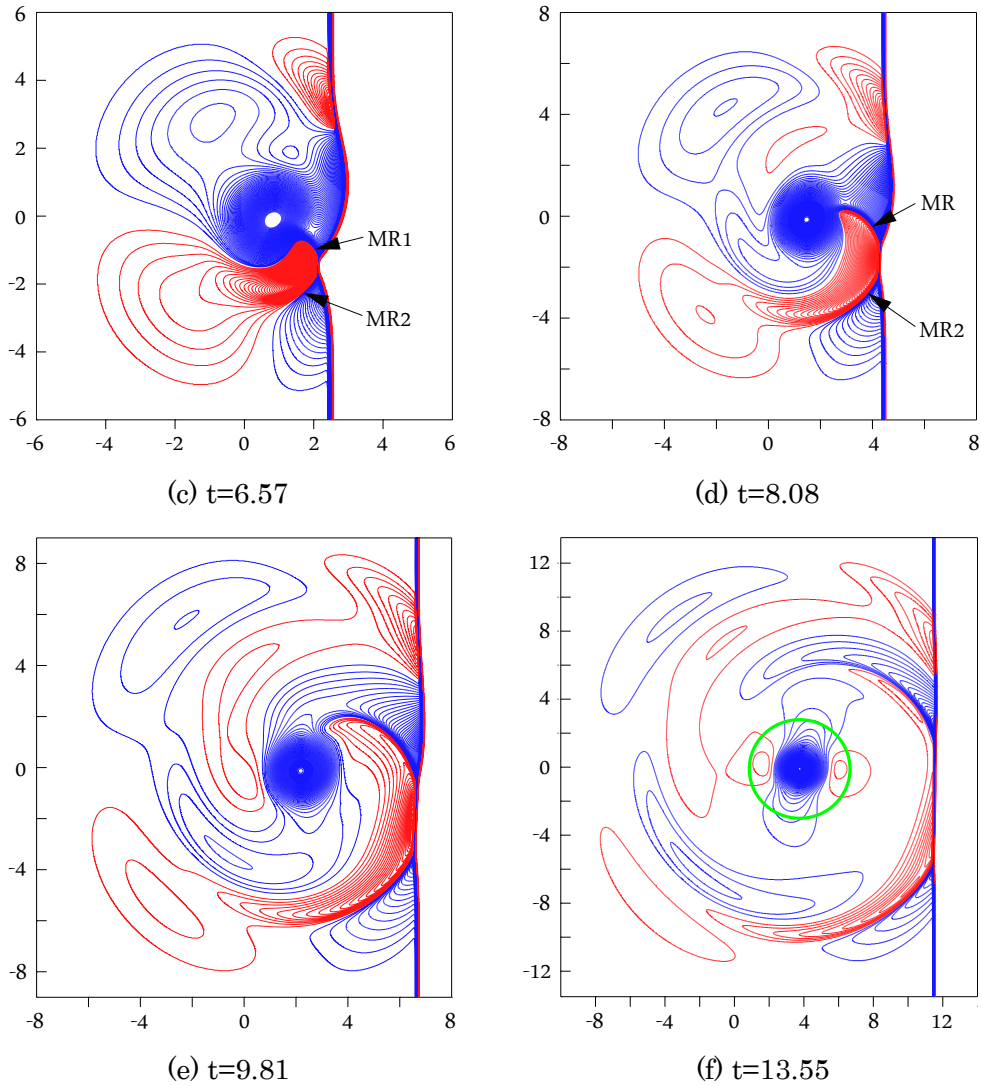


Fig.4.4 Continued.

Fig. 4.4a に示すように、衝撃波は渦の外側部分と干渉すると、渦の回転により流れが加速する部分と減速する部分が発生する．そのため S 形状の屈折衝撃波は形成される．加速されている側は圧力が下降（希薄領域）、減速されている側は圧力が上昇（圧縮領域）する．すなわち、まずはプリカーサ（precursor）が発生する．衝撃波が渦中心を通過するにつれて、もう 1 つの希薄領域が圧縮領域の外側に現れ、同時にもう 1 つの圧縮領域が希薄領域の外側に現れる．これは、プリカーサが初期の二重極性から四重極性に変わることを示す（Fig. 4.4b）．その四重極性は、プリカーサの円周方向に 2 つの希薄領域と 2 つの圧縮領域が交互に現れることを指す．

その後、衝撃波は渦の流れ場から出てきて、マッハ反射が発生する（Fig 4.5a）．Fig. 4.4c と 4.5b に示すように、平面衝撃波面には 2 つの分岐点(triple point, T1 と T2)と Mach stem (MS) が生じ、その後ろに 2 つの反射衝撃波（MR1 と MR2）が現れる．平面衝撃波は二

つの屈折衝撃波 (S1 と S2) と Mach stem (MS) で構成されている. 分岐点 T1 と T2 から発する二つのスリップライン (slip line, SL) が渦と繋がっている. この流れ場の特性は Naumann らの実験結果とよく一致している[6] (本論文の Fig. 1.5). 彼らは強い衝撃波と強い渦の干渉を考察し, 二つの反射衝撃波と二つのスリップラインを観察した. 二つの反射衝撃波 MR1 と MR2 はそれぞれ上と下へと伸びる. 渦の回転方向が時計回りであるため, MR2 の強さと伝播速度は MR1 より大きい (Fig. 4.4d と Fig. 4.5c). プリカーサの内側にはプリカーサと極性が反転した四重極性をもつ第二音波が発生する (Fig. 4.4d).

最後に, Mach stem (MS) が加速され, 衝撃波面は再び平面に近くなる (Fig. 4.5d). 渦の周りに四重極性をもつ第三音波が発生する. この第三音波が変形された渦により放出され, そのメカニズムについて Ellzey らは楕円渦を使って調べた[12]. 楕円渦 (本研究で圧縮された渦に相当する) は四重極性の音波の原因であることがわかった (本論文の Fig. 1.6). また, これらの音波は円筒状に伝播していることが Fig. 4.4f よりわかる.

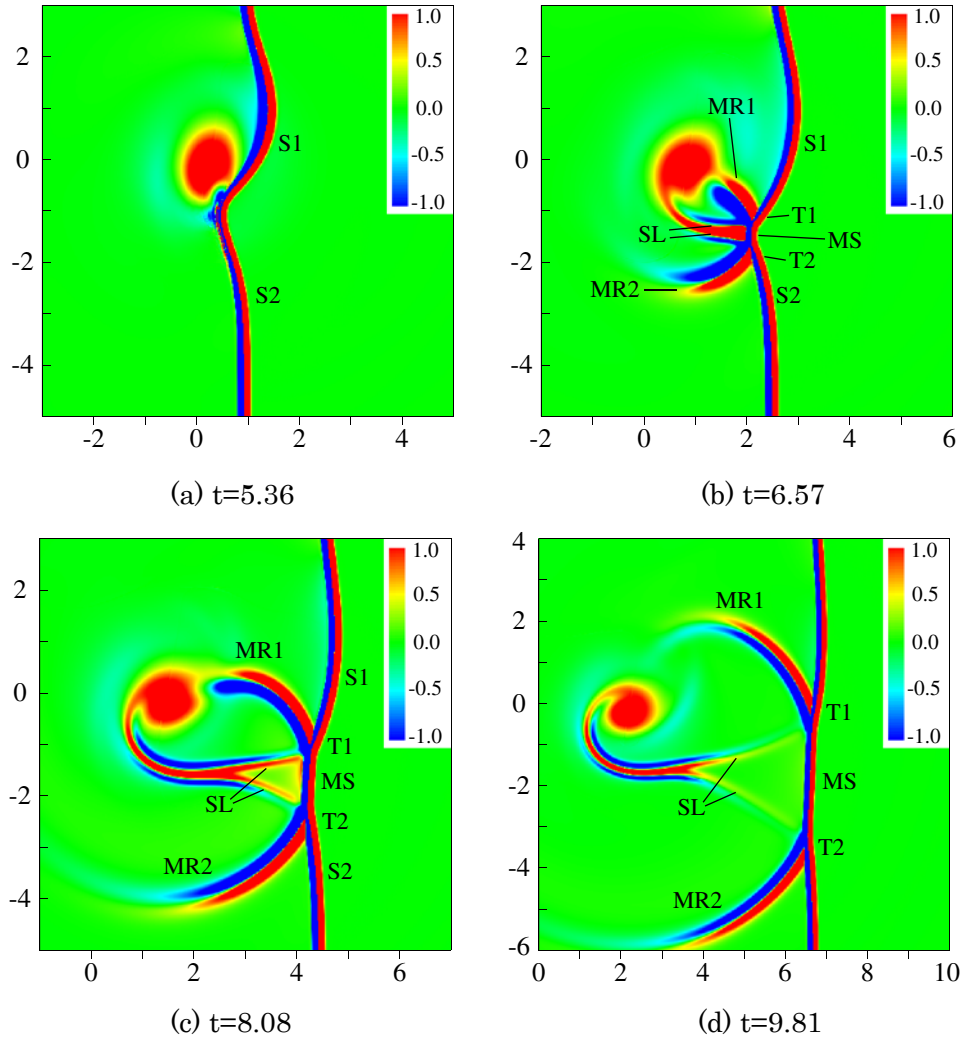


Fig. 4.5 Computational shadowgraph of the flow structure for Case A ($d_{vw}=\infty$).

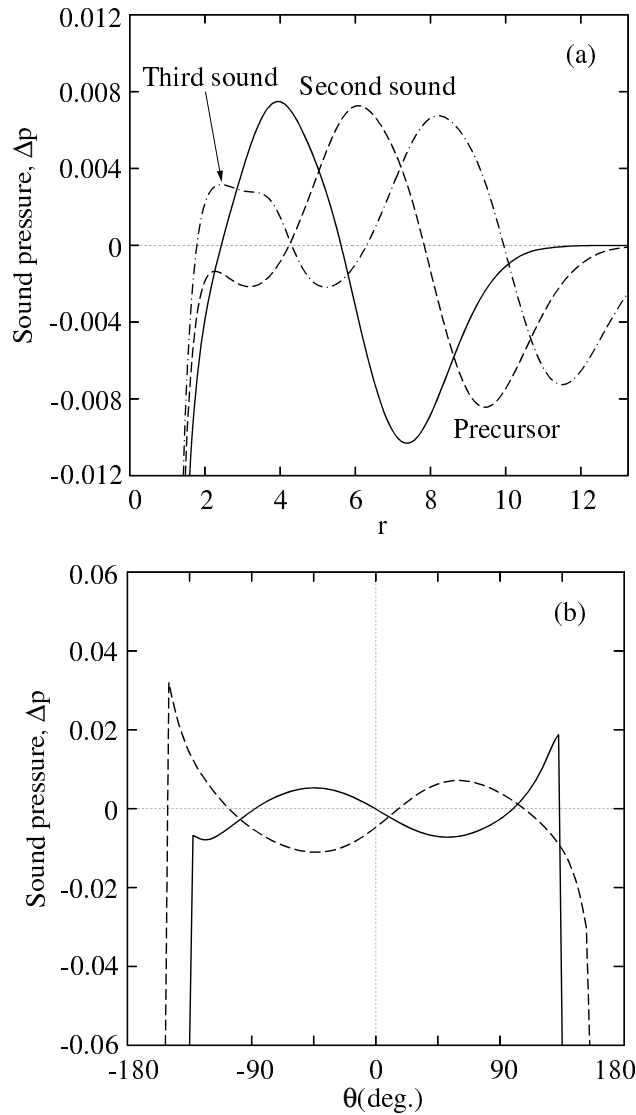


Fig.4.6 Radial and circumferential distributions of the sound pressure Δp for Case A.

(a) Radial distribution along $\theta = 45^\circ$. — $t = 9.81$, --- $t = 11.68$, -.- $t = 13.55$.

(b) Circumferential distribution at $t = 13.55$. — precursor ($r = 11.3$),
--- second sound ($r = 8.7$).

4.2.2 音波の空間分布

Fig. 4.6a は $\theta = 45^\circ$ に沿って渦中心からの距離 r に対する音圧 Δp の径方向の分布である。 θ の定義は Fig.4.3 に与えられる。プリカーサも第二音波も時間とともに渦中心から径方向へと伝播していき、両者の音圧のピーク値は徐々に減衰して行くことがわかる。 $t = 13.55$ のとき、第三音波が現れる。

Fig. 4.6b は $t = 13.55$ のとき、プリカーサと第二音波の音圧 Δp の円周方向の分布である。二つの音波は四重極性をもち、第二音波の圧力変動はプリカーサと符号が反転することが

わかる．この結果は，Ellzey ら[10]の非粘性 Euler 方程式の計算結果および Inoue ら[13]の Navier-Stoke 方程式の計算結果（本論文の Fig. 1.7）とよく一致している．

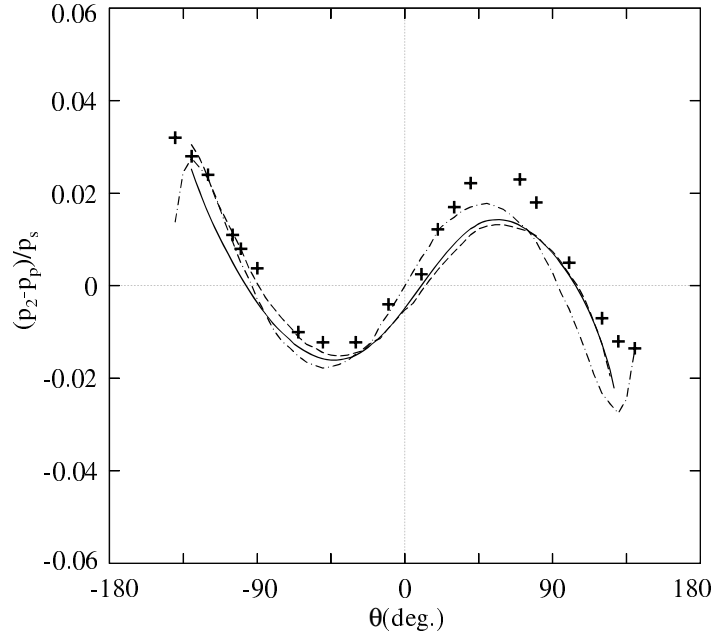


Fig. 4.7 Comparison of the present result (—Re=160,000) with experiment (Dosanjh and Weeks 1965, +), theory (Ribner 1985, ----), and a previous Navier-Stokes result (Inoue and Hattori, 1999, Re=800 -.-).

4.2.3 実験値および文献値との比較

WCNS+SLAU2 の計算結果を他の研究結果と比較するため，Dosanjh らの実験と同じ初期条件（Re=160,000）の計算も実行した．Fig. 4.7 には，圧力変動 $(p_2 - p_p)/p_s$ の円周方向の分布の本研究の計算結果，Dosanjh らの実験値，Ribner の理論値および Inoue らの数値結果（Re=800）の比較を示す． p_2 と p_p はそれぞれプリカーサと第二音波の音圧である．Dosanjh らと Ribner の結果は Ellzey らの論文[10]の Figure 8 から再作成のものである．正角度での実験値のピーク値は負角度のピーク値より大きくなる．その理由は，実験で作った渦が対称性を欠くことである[10]．本研究は実験値とよく一致していることがわかる．また，異なる渦モデルで，理論値とは少し違いが出てくる[11]．参照のため，プリカーサと第二音波の音圧の円周方向分布を Fig. 4.8 に与える．

Inoue らの数値計算では，線形の 6 次精度コンパクト Padé スキームを用いた[13]．衝撃波面の数値振動を抑えるため，衝撃波を $x=0$ に固定した座標系を採用し，その近くに余分な格子を追加した．本研究では，WCNS 非線形の特性的のおかげで，等間隔格子を用い，進行衝撃波を振動なく捕えることに成功した．すなわち，WCNS を使って，より一般的な流体問題を解析できるようになった．ここで，これまでいくつかの研究で使われた衝撃波近くの格子幅を Tab. 4.4 に示す．本研究は高レイノルズ数（Re=160,000）でも Inoue らの低

レイノルズ数 ($Re=800$) より 8 倍粗い格子幅を用いた. Fig. 4.4 と 4.7 に示したように, 衝撃波がきれいに捕られ, 音響場が定量的に正確に計算できた.

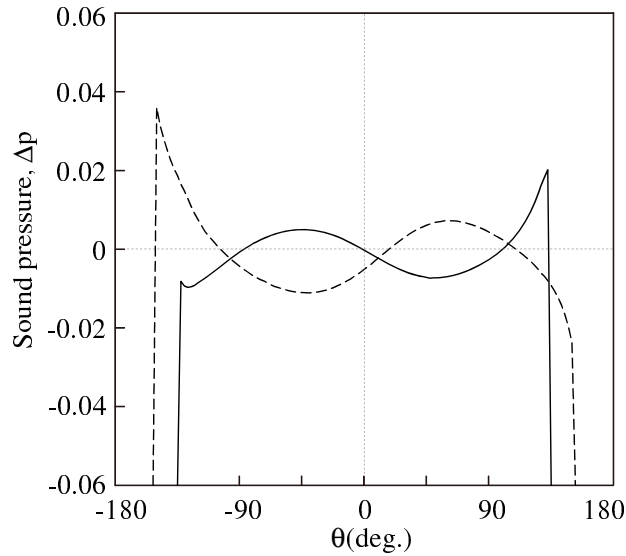


Fig. 4.8 Circumferential distributions of the sound pressure Δp at $t=11.08$.

—precursor ($r=11.0$), ---second sound ($r=8.6$).

Table 4.4 Typical mesh sizes near the shock wave

	WCNS (this study)	Padé scheme (Inoue ら[13])	WENO scheme (Zhang ら[16])
$\Delta x/R_v$	0.02	0.0025	0.00365

4.3 衝撃波と壁近傍渦の干渉

本節では, 衝撃波と壁近傍渦の干渉 (Case A) を解析した結果について報告する. 流れ場の構造と騒音発生のメカニズムを述べる. 渦と壁面の距離および滑りなし境界条件の流れ場への影響も考察する.

4.3.1 干渉の展開と音波の生成

Case B1 ($d_{vw}=3.0$) の音圧 $\Delta p=(p-p_s)/p_s$ の生成と伝播の様子を Fig. 4.9 に示す. また, 典型的な時刻の流れ場の様子をシャドウグラフで Fig. 4.10 に与える.

Fig. 4.9a に示すように, 衝撃波と渦の干渉の前に, 1つの弱い希薄領域 ($x<0$) と1つの弱い圧縮領域 ($x>0$) が渦と壁のあいだに現れる. この二重極性をもつ音波は渦と壁の相互作用により発生する. しかし, このケースでは, 渦と壁の距離がまだ大きいので, その音波が無視できるほど小さい.

衝撃波と渦の干渉の早期では、Case A と同じように、平面衝撃波は渦の誘起速度により変形される．同時に、初期の二重極性のプリカーサが発生する (Fig. 4.9b)．その後、四重極性になり、その円周方向には 2 つの希薄領域と 2 つの圧縮領域が交互に現れる (Fig. 4.9c)．プリカーサは渦の径方向に伸びて行く (Fig. 4.9d)．下の圧縮領域が壁に反射され、流れ場に戻る (Fig. 4.9e)．プリカーサは 2 つの希薄領域と 1 つの圧縮領域で構成されるようになる (Fig. 4.9f-4.9j)．

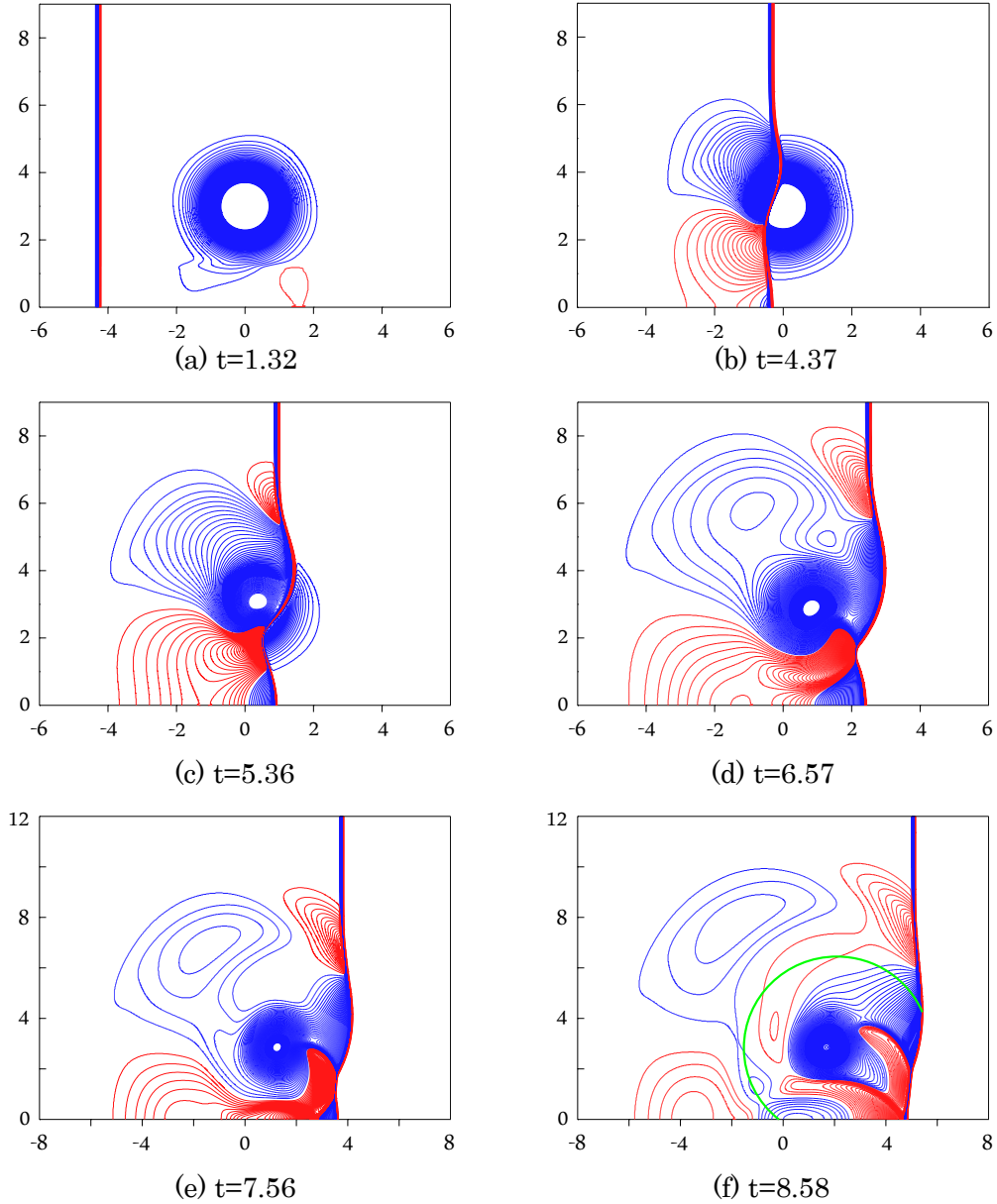


Fig. 4.9 Time evolution of the sound pressure Δp for Case B1 ($d_{vw}=3.0$). The contour levels are from -0.5286 to -0.3446 upstream of the shock ($\text{—}\Delta p > -0.4366$, $\text{—}\Delta p < -0.4366$) with an increment of 0.002 , and from -0.245 to 0.35 behind the shock ($\text{—}\Delta p > 0$, $\text{—}\Delta p < 0$) with an increment of 0.0035 .

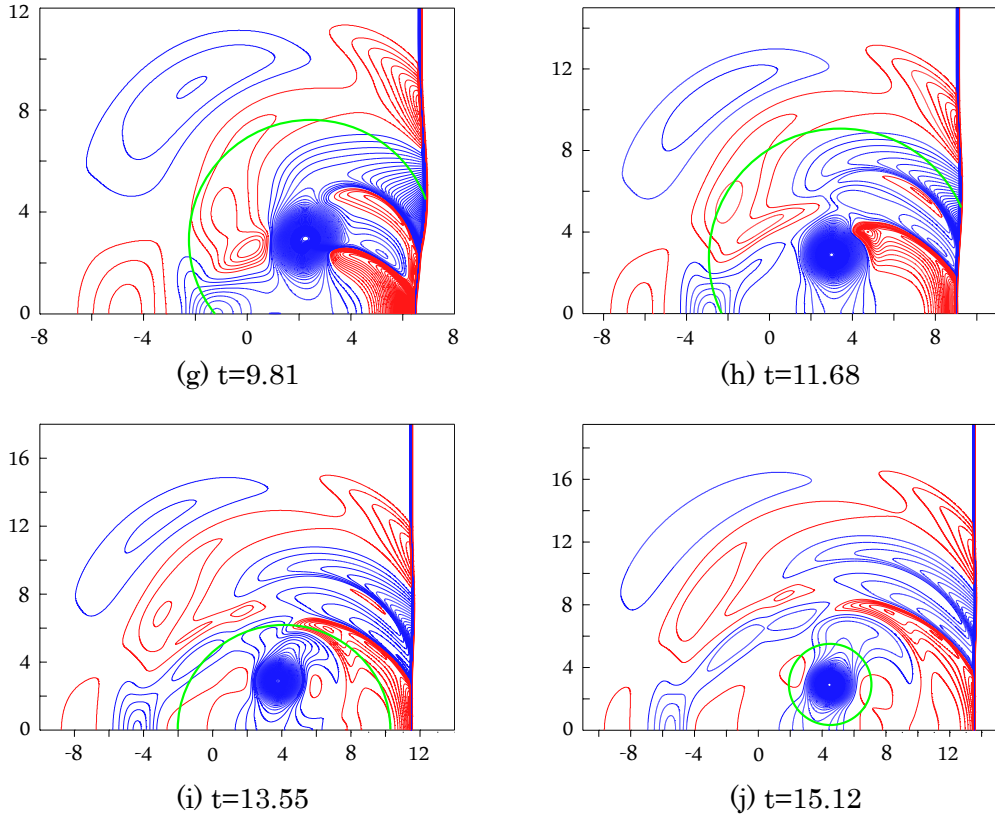


Fig. 4.9 Continued.

その後、衝撃波は渦の流れ場から出てきて、Case A と同じ、マッハ反射が発生し二つの反射衝撃波（MR1 と MR2）が現れる（Fig. 4.10a と 4.10b）. MR2 は渦の径方向に伸びて行き、壁に反射される（Fig. 4.9e と 4.10c）. 反射された MR2 と壁の間に 1 つの希薄領域が現れる（Fig. 4.9f）. それはプリカーサ背後の圧縮領域ともう 1 つの希薄領域とともに、Fig. 4.9f-4.9h に緑の円弧で示した第二音波を形成する．第二音波の円周方向での分布はプリカーサと極性が反転することがわかる．この結果は Inoue らの論文[13]の Figure 10 の上半部とよく一致している．彼らは衝撃波と回転方向が対向する軸対称渦輪の干渉を調べた．渦輪の中心線に y 方向の速度が打ち消し、本研究の滑り壁面での $u_y=0$ に相当する．プリカーサも第二音波も衝撃波と渦の干渉により形成されるので、両方とも渦中心から径方向に伝播することがわかる．

反射された MR2 は渦に向いて伸び（Fig. 4.10d）、二回目の衝撃波（MR2）と渦の干渉が発生する（Fig. 4.9g と 4.10e）. MR2 が渦を通過した後、1 つの弱い圧縮領域が壁近くの第二音波の希薄領域の後ろに現れ、Fig. 4.9i に緑の円弧で示した第三音波を構成する．第三音波の円周方向での分布はプリカーサと同じである．Fig. 4.4 の Case A の結果と比べれば、この第三音波は本研究で新しい発見の音波であることがわかる．第三音波は MR2 と渦の干渉により形成されるので、プリカーサおよび第二音波と違って、壁を中心に径方向に伝播する．

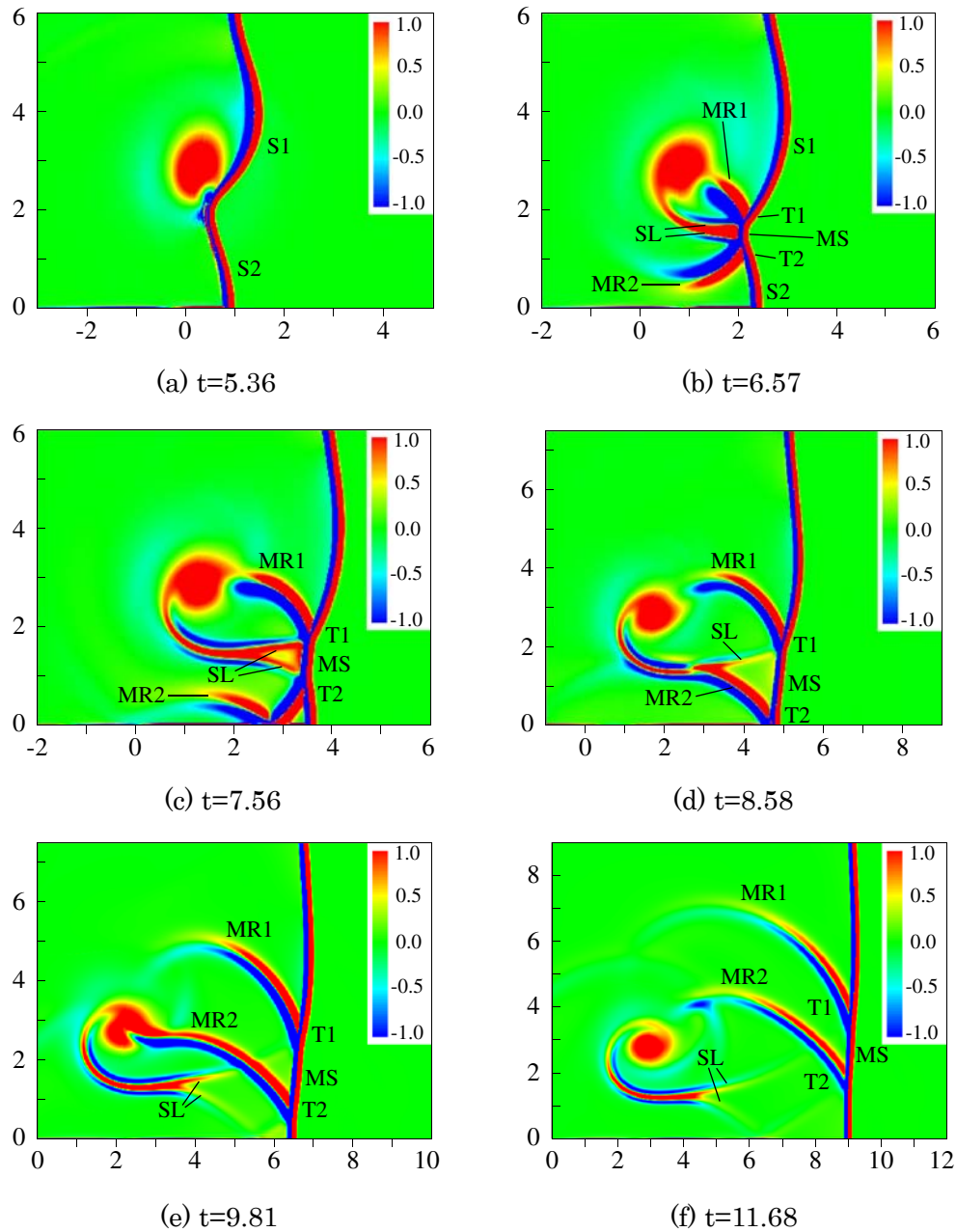


Fig. 4.10 Computational shadowgraph of the flow structure for Case B1 ($d_{vw}=3.0$).

最後に、反射された MR2 は上方に伝播して行く (Fig. 4.10f). 流れ場は圧縮された渦によって支配され、Fig. 4.9j に緑の円で示した四重極性をもつ第四音波が発生する. それは Case A の第三音波に対応する (Fig. 4.4f). Fig. 4.9b-4.9e と 4.10a-4.10c により、平面衝撃波が渦との干渉のあいだに、大きく変形されたことがわかる. その後、壁近くの部分が反射された MR2 によって加速され、衝撃波面は再び平面に近くなる (Fig. 4.9f-4.9j と 4.10d-4.10f).

渦度 ($\omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$) の時間経過を Fig. 4.11 に示す．初期渦度が円型だった渦は，衝撃波との干渉により，楕円型に圧縮される (Fig. 4.11a)．衝撃波が通過した後，渦度の負の部分は徐々に時計回りに回転することがわかる (Fig. 4.11b と 4.11c)．

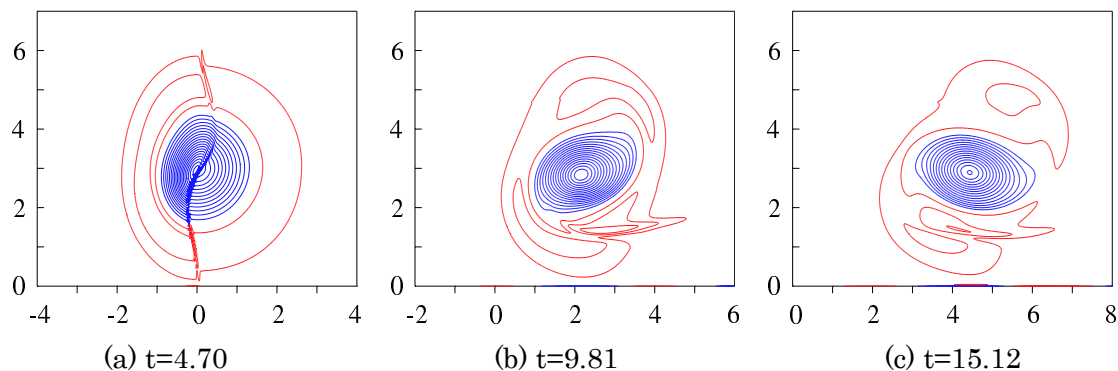
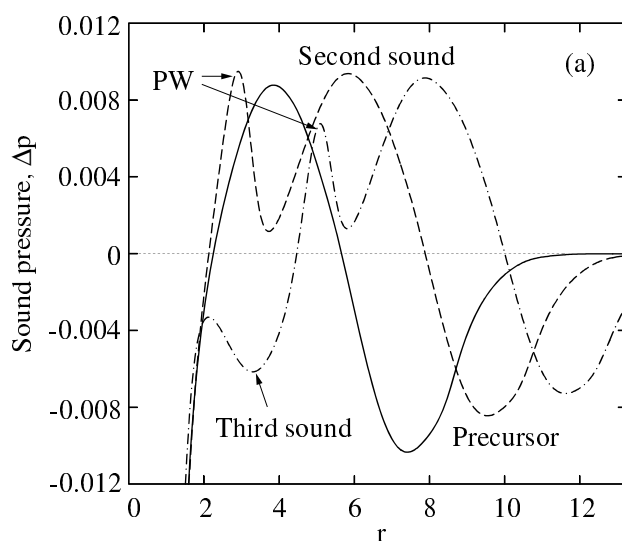


Fig.4.11 Time evolution of vorticity for Case B1 ($d_{vw}=3.0$). The contour levels are from -2.2 to 0.5 with an increment of 0.1 (— $\omega > 0$, — $\omega < 0$).

4.3.2 音波の空間分布

Fig. 4.12a は $\theta=45^\circ$ に沿って渦中心からの距離 r に対する音圧 Δp の径方向の分布である． θ の定義は Fig. 4.1 に与えられる．プリカーサも第二音波も時間とともに渦中心から径方向へと伝播して行く．プリカーサの音圧のピーク値は徐々に減衰する．しかし，第二音波のピーク値は反射された MR2 が渦を通過する間に増幅する．その後，再び減衰に転じることがわかる ($t=11.68$)．また， $t=11.68$ と $t=13.55$ の時，第二音波の後ろにもう 1 つの圧力上昇 (PW) が生じ．それは反射された MR2 により生成されたものである．第三音波の希薄領域は $t=13.55$ の時に現れる．



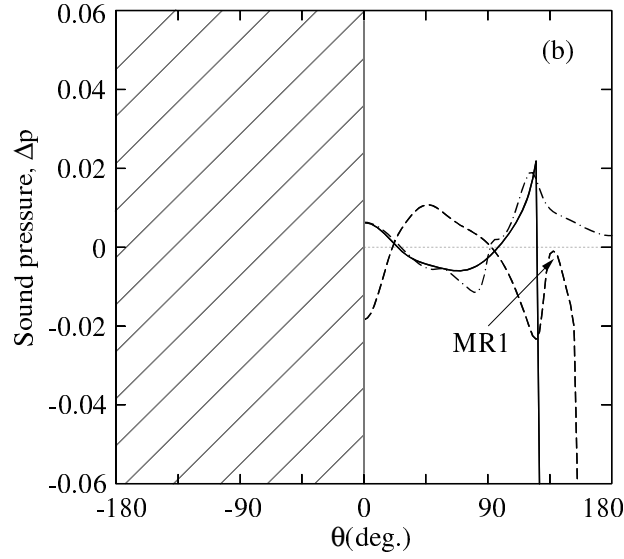


Fig. 4.12 Radial and circumferential distributions of the sound pressure Δp for Case B1.

(a) Radial distribution along $\theta=45^\circ$. — $t=9.81$, --- $t=11.68$, - · - $t=13.55$.

(b) Circumferential distribution at $t=13.55$. — precursor ($r_x=11.4$, $r_y=14.2$),
 --- second sound ($r_x=8.2$, $r_y=11.1$), and - · - third sound ($r=5.9$).

Fig. 4.1 に示した原点が壁面にある座標系を用いて、 $t=13.55$ の時に上記三つの音波の音圧 Δp の円周方向の分布を Fig. 4.12b に示す。第三音波の分布は円型であるが、プリカーサと第二音波は渦中心から伸びているので、原点を壁面においたため、発生した音波は楕円形状のように見える。第二音波の極性はプリカーサと反転する、第三音波はプリカーサと同じ極性をもつことがわかる。

Case B1 の流れ場の特性を Fig. 4.13 に示す。渦と壁の距離が比較的大きいので、音波は二回の衝撃波と渦の干渉により放出される。

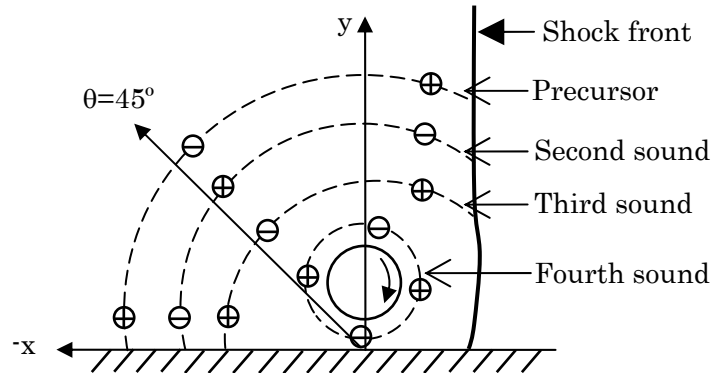


Fig. 4.13 Characteristic nature of sound generation for Case B1.

⊕: compression region, ⊖: rarefaction region.

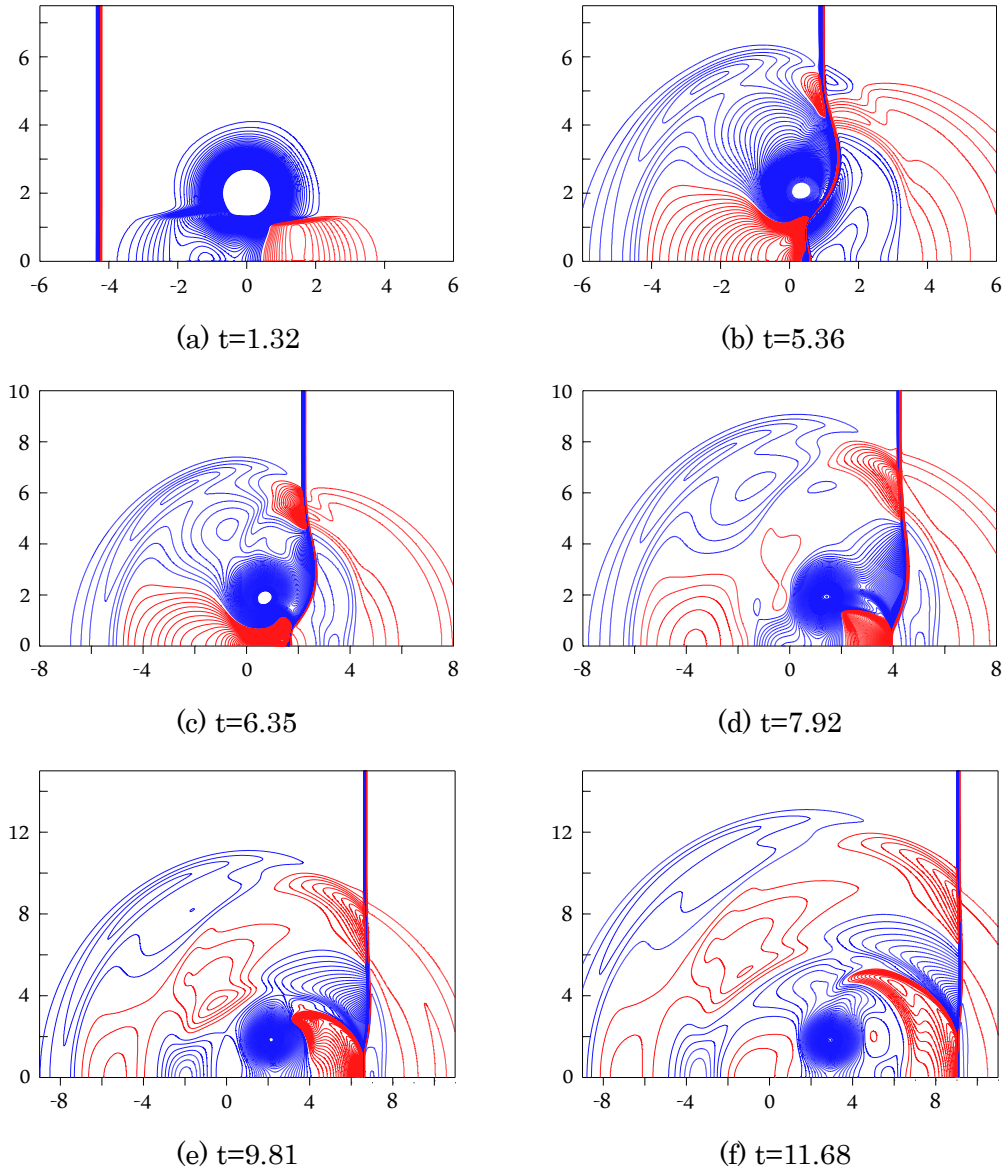


Fig. 4.14 Time evolution of the sound pressure Δp for Case B2 ($d_{vw}=2.0$). The contour levels are from -0.5286 to -0.3446 upstream of the shock (— $\Delta p > -0.4366$, — $\Delta p < -0.4366$) with an increment of 0.002 , and from -0.245 to 0.35 behind the shock (— $\Delta p > 0$, — $\Delta p < 0$) with an increment of 0.0035 .

4.3.3 渦と壁の距離の影響

Case B2 ($d_{vw}=2.0$) の音響場の時間経過を Fig. 4.14 に示す。流れ場の模様をシャドウグラフで Fig. 4.15 に与える。このケースでは、渦と壁の距離は非常に小さい。Fig. 4.14a に示すように、渦と壁の相互作用により強い希薄領域と圧縮領域が現れる。衝撃波が希薄領域と干渉した後、1つの弧状の希薄領域がプリカーサの前方に形成される (Fig. 4.14b)。その圧縮領域が衝撃波面の前方に圧力変動として径方向に伸びて行く。衝撃波は渦の流れ場

を通過した後、マッハ反射が発生する (Fig. 4.14c と 4.15a). 反射された MR2 は二回目の衝撃波 (MR2) と渦の干渉を引き起こす (Fig. 4.14d と 4.15b). 分岐点 T2 は上に向き, T1 と会う (Fig. 4.15c). 最後は, MR1 と MR2 ほぼ 1 つになる (Fig. 4.15d). Case B1 と同じ, プリカーサは 2 つの希薄領域と 1 つの圧縮領域で構成される. 第二音波の極性はプリカーサと反転する. 第三音波はプリカーサと同じ極性をもつ (Fig. 4.14f).

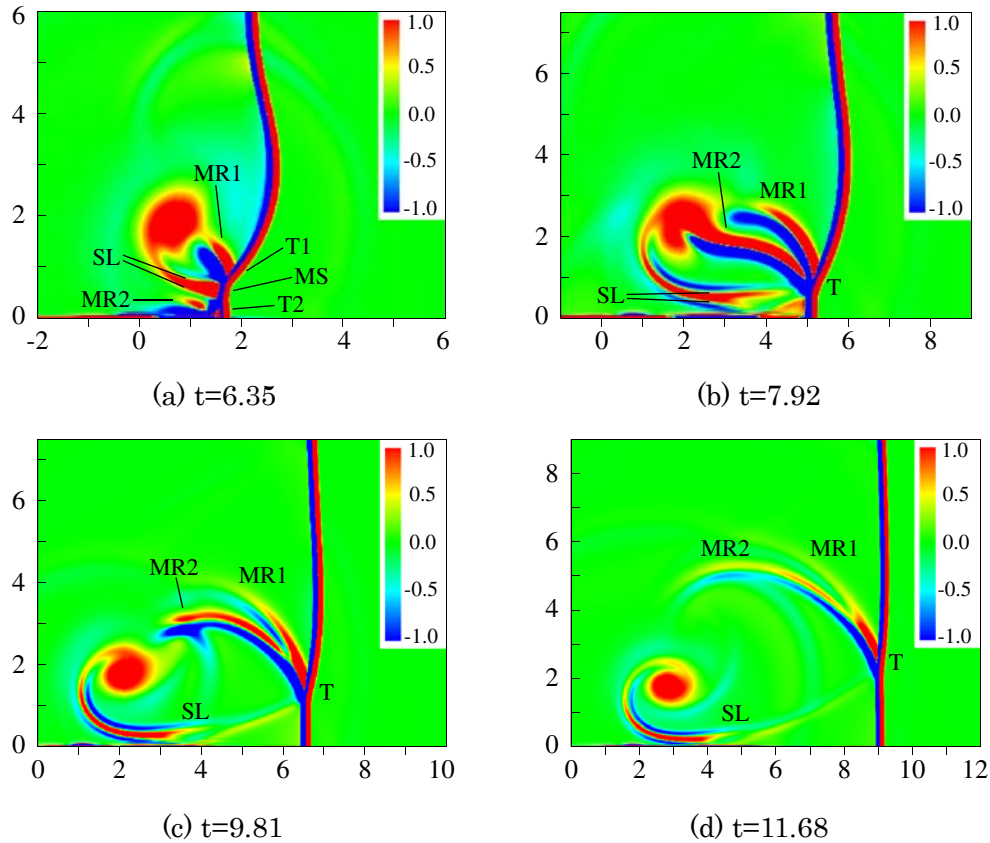


Fig. 4.15 Computational shadowgraph of the flow structure for Case B2 ($d_{vw}=2.0$).

渦と壁の相互作用により発生する音波を調べるため, 衝撃波を除いて Case B2 を再計算した. 初期段階の音響場の様子は Fig. 4.14a と同じである. 渦の回転方向が時計回りであるため, 渦左側の流体粒子は壁から離れて左上に移動する. 右側の流体粒子は壁に向いて移動する. だから, 渦と壁の間の左側に希薄領域, 右側に圧縮領域が発生する. それは Fig.4.4a に示した二重極性のプリカーサとよく似ている. 衝撃波の場合と異なり渦は壁の中に入れないから, この二つの領域は渦の側に現れる. この音波は壁を中心に径方向へと伸びて行く (Fig. 4.16a-4.16c). 最後に, 二重極性を持つ音波が二回観察される (Fig. 4.16d). ただし, 渦カップリングの計算結果にも示されているように, 渦マッハ数が大きくなる場合は観察される音波の数は大きくなることが知られており, 渦周速度が大きくなり渦変形が顕著になればもっと多くの音波が観察されることが予想される.

Fig. 4.17 は Case B2 の流れ場の特性である．渦と壁の距離が小さいので，音波場は衝撃波と渦の干渉および渦と壁の相互作用により放出される圧力変動の組み合わせである．

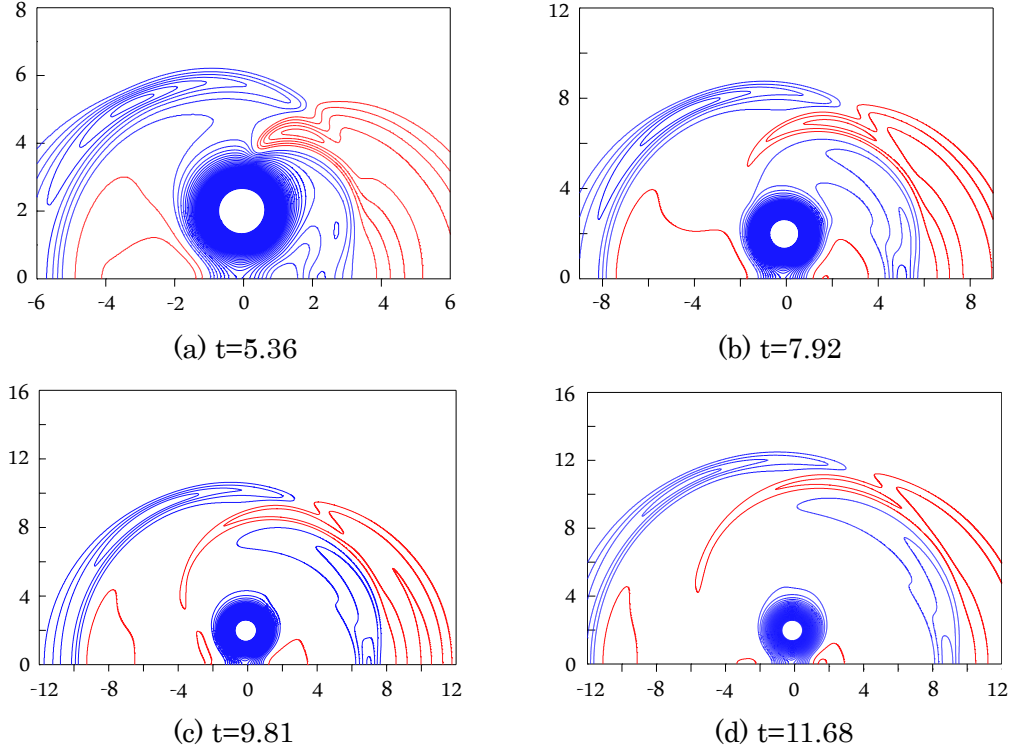


Fig. 4.16 Time evolution of the sound pressure Δp produced by the vortex-wall interaction ($d_{vw}=2.0$). The contour levels are from -0.5286 to -0.3446 (— $\Delta p > -0.4366$, — $\Delta p < -0.4366$) with an increment of 0.002.

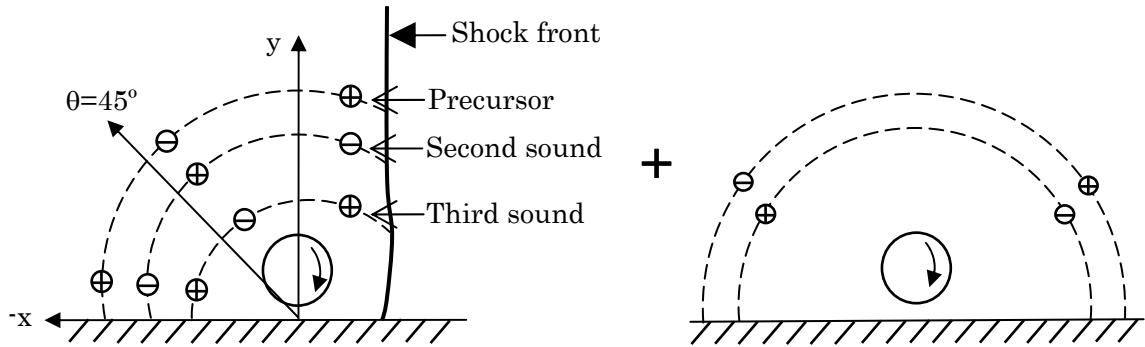


Fig. 4.17 Characteristic nature of sound generation for Case B2.
⊕: compression region, ⊖: rarefaction region.

渦と壁の距離がもっと小さい Case B3 ($d_{vw}=1.5$) の計算結果を Fig. 4.18 と Fig. 4.19 に示す．渦と壁の相互作用によりもっと激しい二重極性を持つ音波は現れる．その強い音波

によって、渦の変形も発生する (Fig. 4.18a). その音波は壁を中心に径方向へ伸びて行き、その様子をシャドウグラフでも観察できる (Fig. 4.19a と 4.19b に SW で示す). MR2 は形成されたら、すぐ壁から反射される (Fig. 4.18c と 4.19b). 二つの反射衝撃波 (MR1 と MR2) は合併して1つの上に向く衝撃波になる (Fig. 4.18c-4.18f および Fig. 4.19c と 4.19d). 音波の径方向と円周方向の分布は Case B2 と似ている.

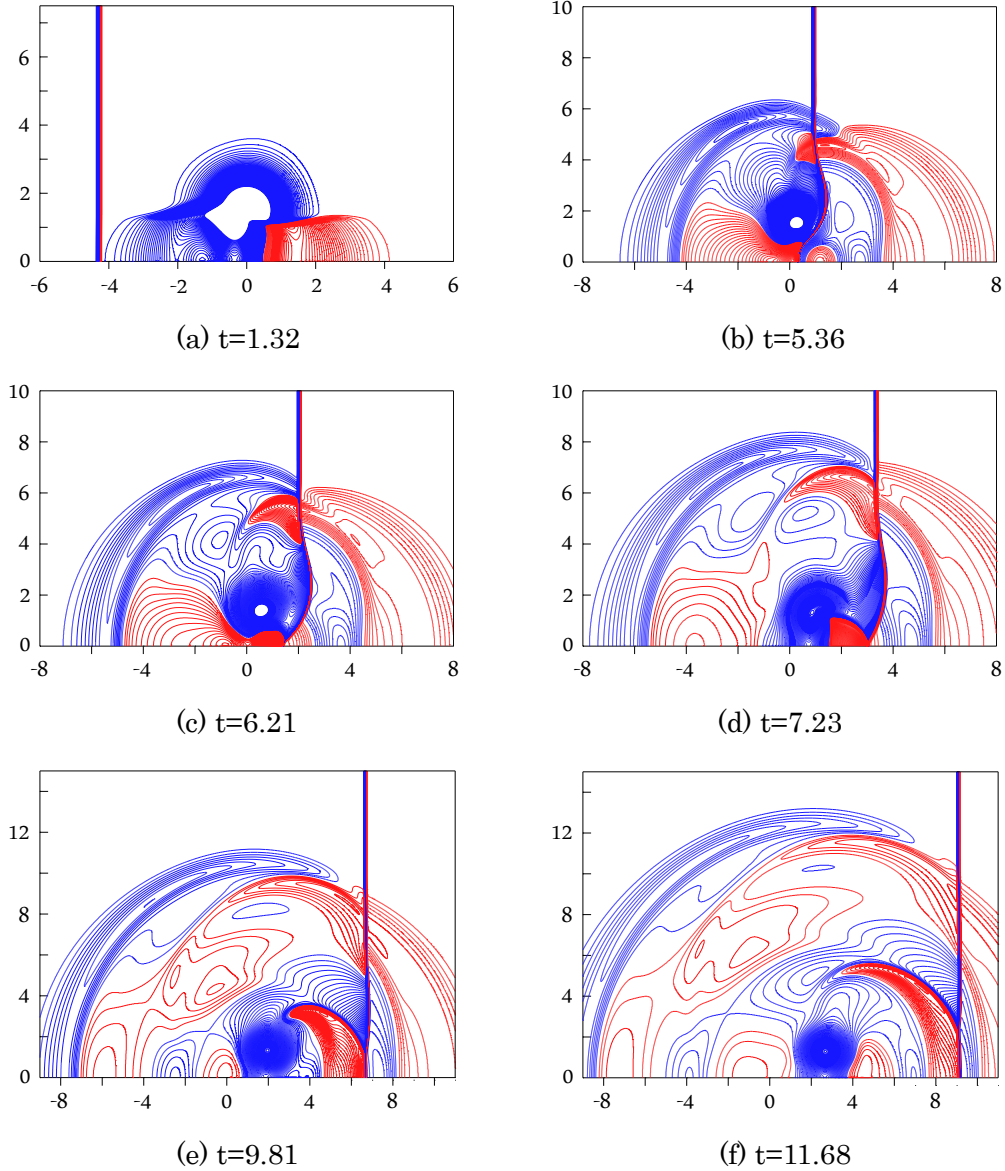


Fig.4.18 Time evolution of the sound pressure Δp for Case B3 ($d_{vw}=1.5$). The contour levels are from -0.5286 to -0.3446 upstream of the shock (— $\Delta p > -0.4366$, — $\Delta p < -0.4366$) with an increment of 0.002, and from -0.245 to 0.35 behind the shock (— $\Delta p > 0$, — $\Delta p < 0$) with an increment of 0.0035.

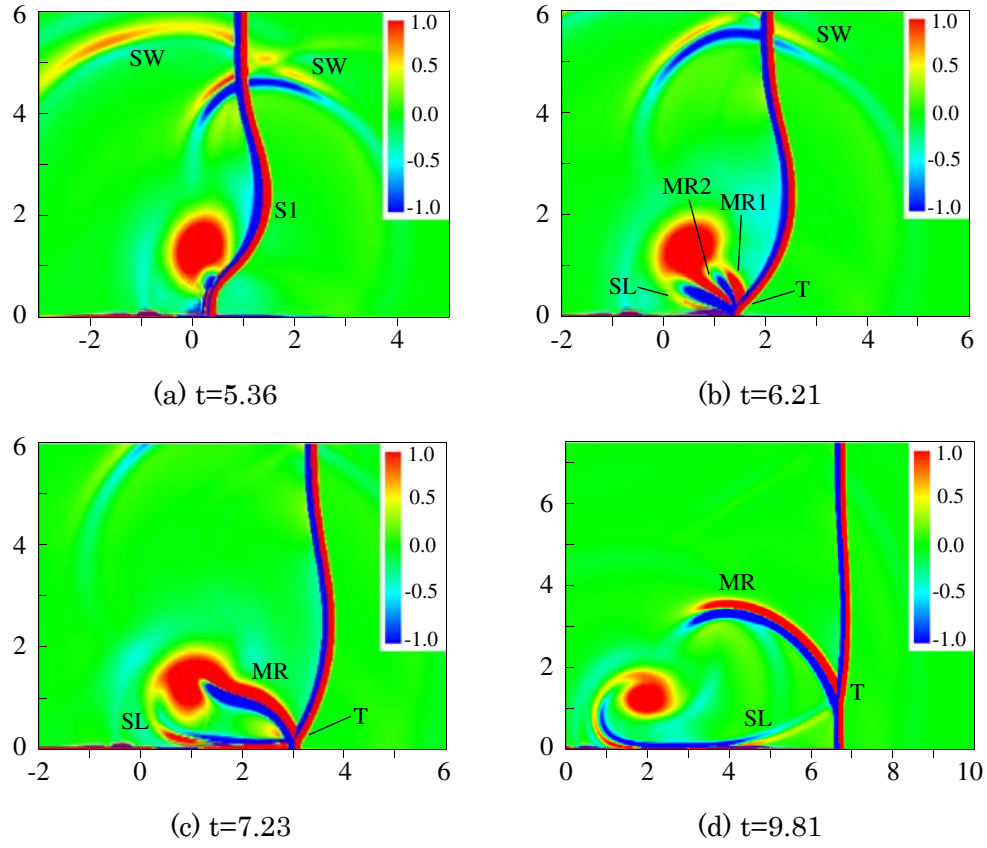


Fig.4.19 Computational shadowgraph of the flow structure for Case B3 ($d_{vw}=1.5$).

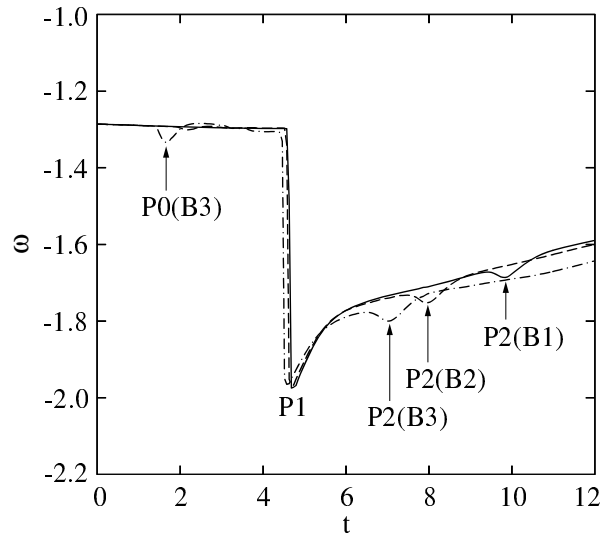


Fig.4.20 Vorticity of the vortex center for different cases.

—Case B1, ---Case B2, -.-Case B3.

Case B1-B3 の渦中心の渦度の時間経過を Fig. 4.20 に示す. P1 は平面衝撃波が渦中心を通過する時に渦度の変化を示す. 平面衝撃波より MR2 が非常に弱いので, 渦中心と干渉する時, 渦度の変化 (P2) は小さい. Case B1 ($d_{vw}=3.0$) で MR2 と渦の干渉は Case B2 ($d_{vw}=2.0$) より遅い. Case B2 ($d_{vw}=2.0$) は Case B3 ($d_{vw}=1.5$) より遅い. また, $t \approx 1.6$ に Case B3 でもう 1 つの渦度上昇 (P0) が現れる. それは渦と壁の距離 (d_{vw}) が小さい時, 渦変形が発生することを示す.

Fig. 4.21 は $t=11.68$ に, $\theta=45^\circ$ に沿って渦中心からの距離 r に対する Case A および Case B1-B3 の音圧 Δp の径方向の分布の比較である. Case B2 と B3 では, 渦と壁の相互作用による希薄領域がまず現れ, プリカーサよりはるかに大きい. 渦と壁の距離の逓減により, 第二音波は強くなり, 変形される. Case B3 で第三音波の半径は Case B2 より大きい. Case B1 では第三音波がまだ現れてない. これは, Fig. 4.20 と同様に, 渦と壁の距離が MR2 と渦の干渉の時刻を決定することを示す.

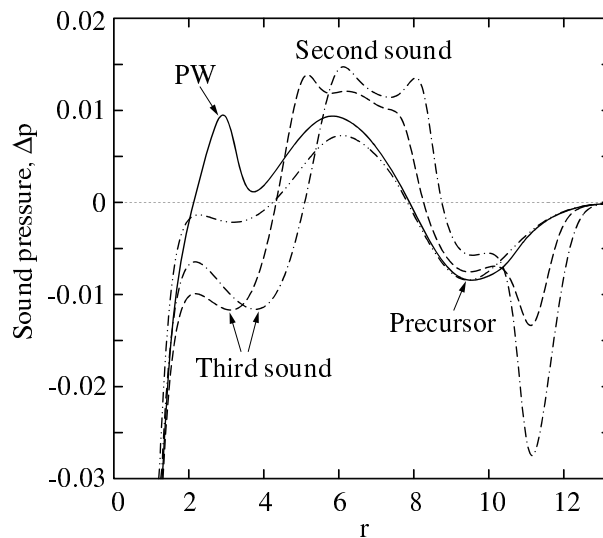


Fig.4.21 Radial distributions of the pressure variation Δp along $\theta=45^\circ$ at $t=11.68$.

·····Case A, —Case B1, ---Case B2, -·-·-Case B3.

4.3.4 Case B2-noslip の計算結果

滑りなし壁面の流れ場への影響を考察するため, 下の壁面 $y=0$ で断熱滑りなし壁面条件を用いて Case B2-noslip を計算した. 上の壁面の影響を排除するには $y=17$ で断熱滑り壁面条件を課した. 摩擦の存在で, 垂直な衝撃波と滑りなし壁面の干渉を正しく計算するのは非常に難しいことが本研究の予備計算からわかった. この理由で, 本研究では衝撃波管を用いた. しかし, 注意しなければならないのは衝撃波管に接触不連続があることである. 時刻 $t=9.81$ の時, $y=15$ に沿う密度と圧力の分布を Fig. 4.22 に示す. 圧力分布の 1 つの不連続に対して, 密度の不連続は 2 つあることがわかる. 後で示すように, その接触不連続

は計算音響場に少しの影響を与える．このケースでは， x 方向で周期境界条件と等間隔格子を用いた．滑りなし壁面の近くに十分な解像度を保つため，第二章の 2.6 節で説明した格子伸長を行った．格子幅は下の壁面の $\Delta y/R_v=0.00998$ から上の壁面の $\Delta y/R_v=0.02737$ である．計算結果は Fig. 4.23 に示す．Case B2 の結果 (Fig. 4.14) と比較すると，滑りなし壁面条件は全体の音響場への影響が小さいとわかる．

Fig. 4.24 には時刻 $t=9.81$ の時，Case B2 と B2-noslip の渦度の等高線を示す．Case B2-noslip では，壁近くに境界層の発達で渦度の変動が現れる．しかし，渦まわりの流れ場に，両ケースの違いはほとんどない．すなわち，滑りなし壁面の渦変形と全体の流れ場への影響が無視できることがわかる．

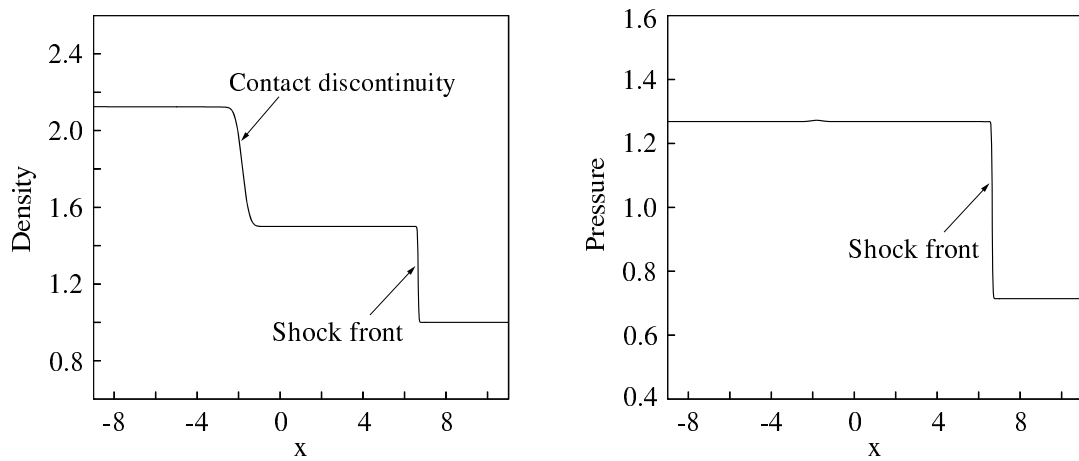


Fig. 4.22 Density and pressure distributions along $y=15$ at $t=9.81$ for Case B2-noslip ($d_{vw}=2.0$).

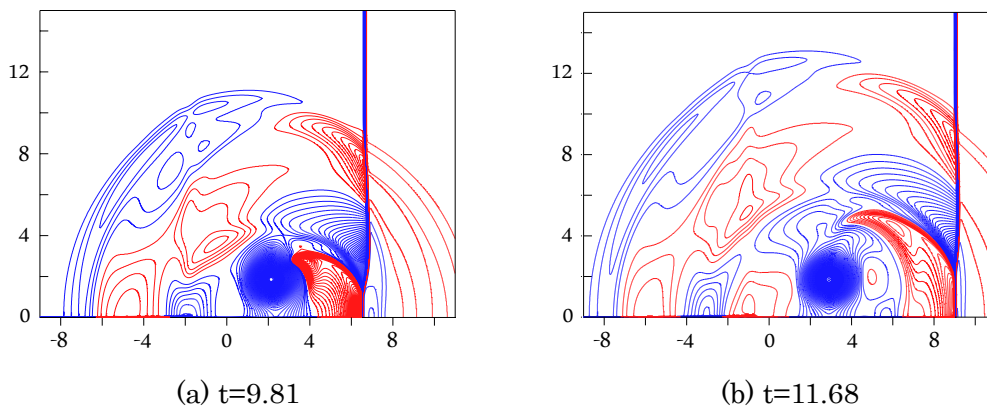


Fig. 4.23 Time evolution of the sound pressure Δp for Case B2-noslip ($d_{vw}=2.0$). The contour levels are from -0.5286 to -0.3446 upstream of the shock (— $\Delta p > -0.4366$, — $\Delta p < -0.4366$) with an increment of 0.002 , and from -0.245 to 0.35 behind the shock (— $\Delta p > 0$, — $\Delta p < 0$) with an increment of 0.0035 .

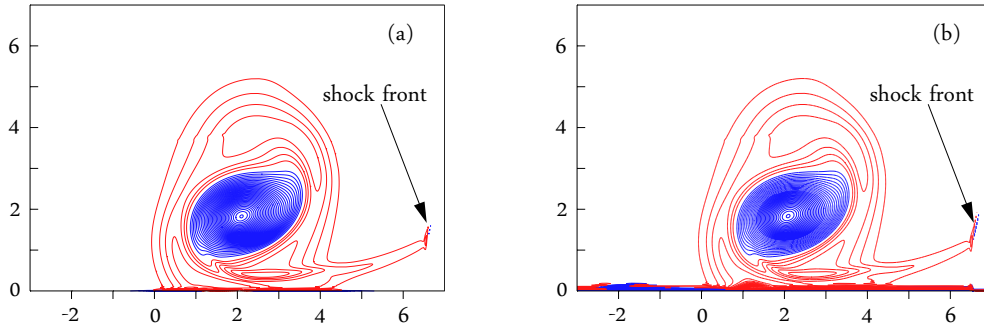


Fig. 4.24 Contours of vorticity at $t=9.81$. The contour levels are from -5 to 2.8 with an increment of 0.05 ($\omega > 0$, $\omega < 0$). (a) Case B2, (b) Case B2-noslip.

Shariff らの研究[56]によれば、物体表面のせん断応力の変動は二重極性の音源である。Nakashima ら[57]は渦輪と滑りなし壁面の衝突により放出される音波を研究し、壁せん断応力と速度分布が二重極性の音波発生 of の信頼できる予測に重要であることを示した。このケースでは、衝撃波が渦を通過する時、壁表面の激しい速度変動を発生する。その速度変動は Fig.4.25 に示す壁表面のせん断応力を引き起こす。

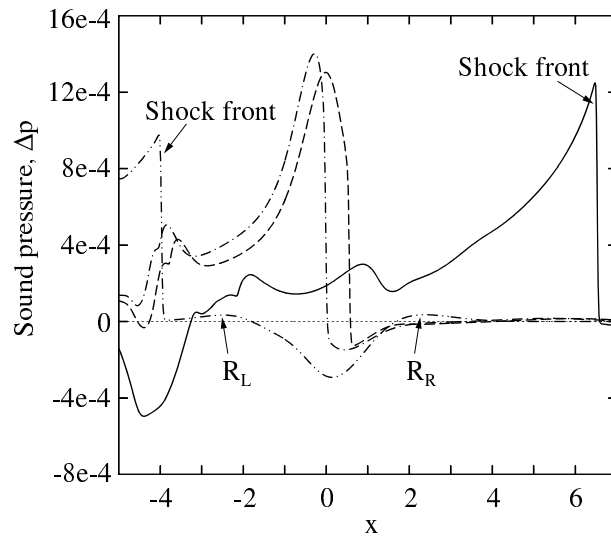


Fig. 4.25 Instantaneous wall shear stress divided by $\rho_\infty c_\infty^2$.
 \cdots - $t=1.57$, $- \cdot -$ - $t=4.81$, $---$ - $t=5.36$, $---$ - $t=9.81$.

時刻 $t=1.57$ の時 (二点鎖線), 衝撃波面の後ろに正のせん断応力が現れ, 渦の領域は負のせん断応力が生じる. 壁近くに渦からの誘導速度で, 渦の両側に小さいながら正のせん断応力 (R_L と R_R) が現れる. 次に, 衝撃波が渦の流れ場に入り, 壁せん断応力は急速に増加する (一点鎖線と破線). その後, 壁せん断応力のピーク値は徐々に減衰して行く (実線). すなわち, 衝撃波と壁近傍渦の干渉は壁せん断応力の変動を起こす. それは本研究の第三

の音源である．しかし，Shariff らの研究[56]を参照すると，壁せん断応力の変動により生じた音波の大きさは $10^{-3} \sim 10^{-4}$ だけのことがわかる．従って，この音波は，衝撃波と渦の干渉および渦と壁の相互作用により放出された音波と比べて非常に小さい．

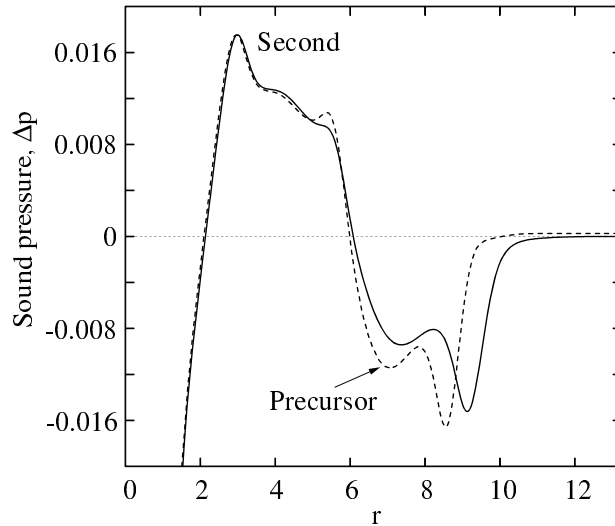


Fig. 4.26 Radial distributions of the sound pressure Δp along $\theta=45^\circ$ at $t=9.81$.

—Case B2, ---Case B2-noslip.

時刻 $t=9.81$ の時に Case B2 と B2-noslip の音圧 Δp の径方向の分布を Fig. 4.26 に示す．両ケースの第二音波にはほとんど違いはない．しかし，Case B2-noslip のプリカーサは Case B2 より強くなり，しかもその半径は小さくなることがわかる．この現象の原因は先に説明した接触不連続である．プリカーサは径方向へと伸びて行き，接触不連続において圧縮されるからである．

第5章 結言

本論文は、衝撃波と乱流境界層との干渉に見られるように、圧縮性流体現象の応用上重要な衝撃波と様々な壁面近傍の渦運動が共通して観察される流れにおける問題を解析する計算法の研究と、基礎的研究として、これまでのところほとんど研究されていない衝撃波と壁近傍渦の干渉に着目して、流れ場の発達と音波の発生および渦の変形についての議論を進めた。衝撃波・渦干渉流れ場の解析手法として、二次元非定常圧縮性ナビエ・ストークス方程式を支配方程式とする高解像度で数値散逸の非常に小さなシミュレーションを構成した。移流項の離散化は WENO 法と比べ渦保存性・一様流保存性が優れた重み付き非線形コンパクトスキーム (WCNS) と低速流れにおいて低散逸な全速度流束分割スキーム SLAU2 を用いた。粘性項は中心コンパクトスキームを用いて計算した。

5.1 結論

本研究では、進行衝撃波が研究対象の 1 つである。数値振動を生じさせることなく高精度で非定常な衝撃波を捕えるために、物理量の不連続性をとらえることに優れた WCNS を採用した。また、低マッハ数の領域も有する渦運動も研究対象の 1 つである。圧縮性流れの解法においては流束評価法を適切に選ぶ必要があり、最新の近似リーマンソルバーの研究では、流束評価法によっては収束性が劣化し、解に大きな誤差が生じる可能性があることが示された。例えば、極超音速流れにおける衝撃波の不安定性に由来するカーバンクル現象など、これまで困難とされた大きな曲率で変形する強い衝撃波の捕獲の高精度化を研究し、高次で波面を鮮明にとらえることができる手法を検討した。また、低速から高速の領域まで存在する十分な解像度で流れ場をとらえる計算法を研究した。

第 3 章では、代表的な流束評価法の性能を把握するため、低速流れおよび低マッハ数から高マッハ数流れが共存する流れ場を対象として、数値計算を実施した。これは壁面近傍渦と衝撃波を解析するための計算流体力学手法の研究である。以下に、得られた知見をまとめる。

- ・ 流束評価法の計算結果への影響は大きい。空間微分は同じ 5 次精度陽的 WCNS でも、異なる流束評価法で得た結果の違いは著しい。
- ・ FVS 法の数値粘性が大きく、渦の減衰に与える影響は小さくない。低速流れと高速流れが共存する計算例の密度場のラプラシアンを計算すると、微細な数値振動が現れる。過度の数値粘性で、流れの特性をなくなる可能性がある。また、精度の良い解析を得るため、細かい格子が必要となる。
- ・ FDS と AUSM+法の数値粘性は FVS 法を用いた場合より小さく、密度場のラプラシア

ンにおいて数値振動もほとんどない。ただし、格子生成法により渦形状の保存性に劣る場合があるため、低速渦流れの計算には不十分であり、流れの特性を正しく表現できない可能性がある。

- ・ SLAU2 は低速流れでも高速流れでも精度良く計算でき、渦の保存性も非常に良い。格子幅への依存性も低く、粗い格子でも比較的精度の良い解析が行える。また、他の全速度スキーム（例えば、AUSM⁺-up[43]や LDFSS2001[45]）と比べて、一様流マッハ数のような参照パラメータが含まれていない利点がある。

第 4 章では、3 章で低マッハ数から高マッハ数が共存する流れに優れた全速度スキーム SLAU2 を用いて、衝撃波と壁近傍渦の干渉の直接数値計算を実施した。以下に、得られた知見を述べる。

- ・ 衝撃波と壁近傍渦の干渉に関する三つの音源が存在することを解明した。(1) 衝撃波と渦の干渉による四重極音源；(2) 渦と壁の干渉による二重極音源；(3) 壁せん断応力の変動による二重極音源。
- ・ 渦と壁の距離が比較的大きい場合（渦中心と壁の距離 $d_{vw}=3.0R_v$, R_v は渦のコア半径）、まず初期の二重極性から四重極性へ変わったプリカーサが現れ、渦の径方向へと伝播していく。下方の圧縮領域が壁に反射され、流れ場に戻るから、プリカーサが二つの圧縮と一つの希薄領域へ変わる。その後、衝撃波は渦領域を通し、マッハ反射が発生、二つの反射衝撃波（MR1 と MR2）が形成される。MR2 が壁へ伸び、反射される。プリカーサの背後にはプリカーサとは極性が反転した第二音波が現れる。プリカーサと第二音波は衝撃波と渦の干渉により形成されるので、渦を中心にして円形に伝播していく。壁から反射された衝撃波 MR2 は渦へ伸び、二回目の衝撃波と渦の干渉が発生する。第二音波の背後にはプリカーサと同じ極性をもつ第三音波が現れる。第三音波は衝撃波 MR2 と渦の干渉により形成されるので、壁を中心にして伝播する様子が観察された。この第三音波の発生機構は本研究の新しい知見の一つである。最後に、圧縮された渦により四重極性をもつ第四音波を発生する。渦と壁の距離が比較的大きいので、音波は主に衝撃波と渦の干渉から放出される。
- ・ 渦と壁の距離が小さい場合（ $d_{vw}=2.0R_v$ と $1.5R_v$ ）、渦と壁の相互作用により、二重極性を持つ音波が発生する。この音波は壁を中心に径方向へと伸びて行く。最後に、二重極性を持つ音波が二回観察される。衝撃波は、まずこの渦と壁の相互作用による音波の膨張領域と干渉する。プリカーサ前に位置する弧状の膨張領域を形成する。その音波の圧縮領域は衝撃波前の圧力変動として現れる。 $d_{vw}=3.0R_v$ のと同様に、プリカーサは 2 つの希薄領域と 1 つの圧縮領域で構成される。第二音波の極性はプリカーサと反転する。第三音波はプリカーサと同じ極性をもつ。反射衝撃波 MR2 と渦の干渉のタイミングは渦中心と壁の距離によって決まる。音場は、衝撃波と渦の干渉から放出された音波および渦と壁の相互作用により放出された音波で構成される。
- ・ 音源 3 の存在は滑りなし条件を用いたケースによって確認された。その音波は、本研

究における計算パラメータでは音源 1 と音源 2 からの音波と比べ無視できるほど小さいので、全体の音場への影響はほとんどない。

5.2 今後の課題

本研究において、衝撃波のマッハ数 $M_s=1.29$ 、渦のマッハ数 $M_v=0.39$ とした。衝撃波と壁近傍渦の干渉に関する流れ場の発展と音波発生メカニズムを解明した。代表的なケース研究ではあるが、様々な渦運動形態を用いることも必要である。また、もっと広範囲なマッハ数の衝撃波と渦に関して詳細な検討はより多くの知見を与えることが期待される。

本論文では、衝撃波と単独渦の 2 次元的干渉だけを研究した。壁近傍では、たくさんの渦が存在しているので、衝撃波と渦輪干渉も今後の課題である。また、渦輪の回転方向、壁との距離と角度（垂直か斜めか）、衝撃波との距離と角度などたくさんのケースを詳しく調べることによって、3 次元渦運動と衝撃波との干渉に対する知見を得る基礎研究を進展させることが大切である。

その他、本研究において、渦領域を平板によって分離する計算モデルを用いて、渦と壁面の相互作用によって二重極性を持つ音波が発生することがわかった。 $M_v=0.39$ の場合、その音波は二回観察されたが、もっと広範囲な渦マッハ数に対する調べ、壁近傍渦と衝撃波との干渉についてより深い知見を得ることが期待できる。

衝撃波と壁近傍の低速渦との干渉を計算することをきっかけに、現在進展している圧縮性流れの最新計算法を研究することによって、柔軟性に優れている WCNS スキームを基礎とした計算法は発展しつつある近似リーマンソルバーの研究成果を将来においても取り入れることが期待される。

参考文献

- [1] 神部勉, 流れと音の物理, ながれ, Vol. 20 (2001), pp. 174-186.
- [2] 井上督, ながれから出る音の直接数値シミュレーション, ながれ, Vol. 20 (2001), pp. 187-195.
- [3] 高山和喜, 衝撃波のおはなし, 日本規格協会 (1990).
- [4] M. A. Hollingsworth and E. J. Richards, "A schlieren study of the interaction between a vortex and a shock wave in a shock tube," *Aeronaut. Res. Council. Rep.* 17985, FM 2323 (1955).
- [5] D. S. Dosanjh and T. M. Weeks, "Interaction of a starting vortex as well as a vortex street with a traveling shock wave," *AIAA J.* **3**, 216 (1965).
- [6] A. Naumann and E. Hermanns, "On the interaction between a shock wave and a vortex field," *AGARD Conf. Proc.* **131**, 23-1 (1973).
- [7] H. S. Ribner, "Cylindrical sound wave generated by shock-vortex interaction," *AIAA J.* **23**, 1708 (1985).
- [8] T. M. Weeks and D. S. Dosanjh, "Sound generation by shock-vortex interaction," *AIAA J.* **5**, 660 (1967).
- [9] M. J. Lighthill, "On the energy scattered from the interaction of turbulence with sound or shock waves," *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **49**, 531 (1953).
- [10] J. L. Ellzey, M. R. Henneke, J. M. Picone, and E. S. Oran, "The interaction of a shock with a vortex: shock distortion and the production of acoustic waves," *Phys. Fluids* **7**, 172 (1995).
- [11] J. L. Ellzey and M. R. Henneke, "The acoustic wave from a shock-vortex interaction: Comparison between theory and computation," *Fluid Dyn. Res.* **27**, 53 (2000).
- [12] J. L. Ellzey and M. R. Henneke, "The shock-vortex interaction: the origins of the acoustic wave," *Fluid Dyn. Res.* **21**, 171 (1997).
- [13] O. Inoue and Y. Hattori, "Sound generation by shock-vortex interactions," *J. Fluid Mech.* **380**, 81 (1999).
- [14] O. Inoue, "Propagation of sound generated by weak shock-vortex interaction," *Phys. Fluids* **12**, 1258 (2000).
- [15] F. Grasso and S. Pirozzoli, "Shock-wave-vortex interactions: Shock and vortex deformations, and sound production," *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **13**, 421 (2000).
- [16] S. Zhang, Y.-T. Zhang, and C.-W. Shu, "Multistage interaction of a shock wave and a strong vortex," *Phys. Fluids* **17**, 116101 (2005).
- [17] O. Inoue and Y. Takahashi, "Successive generation of sounds by shock-strong

- vortex interaction,” *Phys. Fluids* **12**, 3229 (2000).
- [18] S. Zhang, S. Jiang, Y.-T. Zhang, and C.-W. Shu, “The mechanism of sound generation in the interaction between a shock wave and two counter rotating vortices,” *Phys. Fluids* **21**, 076101 (2009).
- [19] 豊田国昭, 噴流の渦, ながれ, Vol. 24 (2005), pp. 151-160.
- [20] H. Yamada, T. Kohsaka, H. Yamabe, and T. Matsui, “Flow field produced by a vortex ring near a plane wall,” *J. Phys. Soc. Jpn.*, **51**, 1663 (1982).
- [21] C. C. Chu, C. T. Wang, and C. S. Hsieh, “An experimental investigation of vortex motions near surfaces,” *Phys. Fluids A* **5** 662 (1993).
- [20] 牧野光雄, 航空力学の基礎 (第 2 版), 産業図書 (1989), pp. 162-163.
- [23] T. L. Doligalski, C. R. Smith, and J. D. A. Walker, “Vortex interactions with walls,” *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26**, 573 (1994).
- [24] J. A. Luton and S. A. Ragab, “The three-dimensional interaction of a vortex pair with a wall,” *Phys. Fluids* **9**, 2967 (1997).
- [25] K. Kambe, “Acoustic emissions by vortex motions,” *J. Fluid Mech.* **173**, 643 (1986).
- [26] S. K. Lele, “Compact finite difference schemes with spectral-like resolution,” *J. Comput. Phys.* **103**, 16 (1992).
- [27] 藤井孝藏, 流体力学の数値計算法, 東京大学出版会, (1994).
- [28] X. Liu, S. Osher, T. Chan, “Weighted essentially non-oscillatory schemes,” *J. Comput. Phys.* **115**, 200 (1994).
- [29] X. G. Deng and H. Maekawa, “Compact high-order accurate nonlinear schemes,” *J. Comput. Phys.* **130**, 77 (1997).
- [30] X. G. Deng and H. Zhang, “Developing high-order weighted compact nonlinear schemes,” *J. Comput. Phys.* **165**, 22 (2000).
- [31] G.-S. Jiang and C.-W. Shu, “Efficient implementation of weighted ENO schemes,” *J. Comput. Phys.* **126**, 202 (1996).
- [32] T. Nonomura and K. Fujii, “Effects of difference scheme type in high-order weighted compact nonlinear schemes,” *J. Comput. Phys.* **228**, 3533 (2009).
- [33] S. Zhang, S. Jiang, and C.-W. Shu, “Development of nonlinear weighted compact schemes with increasingly higher order accuracy,” *J. Comput. Phys.* **227**, 7294 (2008).
- [34] T. Nonomura, N. Iizuka, and K. Fujii, “Freestream and vortex preservation properties of high-order WENO and WCNS on curvilinear grids,” *Comput. Fluids* **39**, 197 (2010).
- [35] X. Deng, M. Mao, G. Tu, H. Liu, and H. Zhang, “Geometric conservation law and applications to high-order finite difference schemes with stationary grids,” *J.*

- Comput. Phys.* **230**, 1100 (2011).
- [36] P. L. Roe, "Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes," *J. Comput. Phys.* **43** 357 (1981).
 - [37] J. L. Steger and R.F. Warming, "Flux-vector splitting of the gasdynamics equations with application to finite-difference methods," *J. Comput. Phys.* **40**, 263 (1981).
 - [38] B. Van Leer, "Flux-vector splitting for the Euler equations," *Lect. Notes Phys.* **170**, 507 (1982).
 - [39] M.-S. Liou and C. J. Steffen Jr., "A new flux splitting scheme," *J. Comput. Phys.* **107**, 23 (1993).
 - [40] M.-S. Liou, "A sequel to AUSM: AUSM+," *J. Comput. Phys.* **129**, 364 (1996).
 - [41] Y. Wada, M.-S. Liou, "An accurate and robust flux splitting scheme for shock and contact discontinuities," *SIAM J. Sci. Comput.*, **18**, 633 (1997).
 - [42] K.H. Kim, C. Kim, O. Rho, "Methods for the accurate computations of hypersonic flows I. AUSMPW+ scheme," *J. Comput. Phys.* **174** 38 (2001).
 - [43] M.S. Liou, "A Sequel to AUSM, Part II: AUSM+-up for all speeds," *J. Comput. Phys.* **214** 137 (2006).
 - [44] E. Shima and K. Kitamura, "Parameter-free simple low-dissipation AUSM-family scheme for all speeds," *AIAA J.* **49**, 1693 (2011)
 - [45] K. Kitamura and E. Shima, "Towards shock-stable and accurate hypersonic heating computations: A new pressure flux for AUSM-family schemes," *J. Comput. Phys.* **245**, 62 (2013).
 - [46] X.-S. Li and C.-W. Gu, "An All-Speed Roe-type scheme and its asymptotic analysis of low Mach number behaviour," *J. Comput. Phys.* **227** 5144 (2008).
 - [47] F. Rieper, "A low-Mach number fix for Roe's approximate Riemann solver" *J. Comput. Phys.* **230** 5263 (2011).
 - [48] 鈴木立之, 圧縮性流体力学－原理と展開法, パワー社, (2004).
 - [49] J. D. Anderson, "Modern compressible flow - with historical perspective, third edition," McGraw-Hill higher education, pp. 86-98, (2003).
 - [50] T. Colonius, S.K. Lele, and P. Moin, "The free compressible viscous vortex," *J. Fluid. Mech.* **230**, 45 (1991).
 - [51] 前川博, 対話とシミュレーションムービーでまなぶ－流体力学, 共立出版会社, (2002).
 - [52] 前川博, 山本誠, 石川仁, 例題でわかる基礎・演習－流体力学, 共立出版会社, (2005).
 - [53] T. J. Poinot and S. K. Lele, "Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows," *J. Comput. Phys.* **101**, 104 (1992).
 - [54] 松原洋輔, 超音速境界層に関する計算流体力学的研究－乱流遷移に及ぼす上流攪乱の影響, 電気通信大学修士論文, (2010).

- [55] B. Einfeldt, C. D. Munz, P. L. Roe, and B. Sjogreen, “On godunov-type methods near low densities,” *J. Comput. Phys.* **92**, 273 (1991).
- [56] K. Shariff and M. Wang, “A numerical experiment to determine whether surface shear-stress fluctuations are a true sound source,” *Phys. Fluids* **17**, 107105 (2005).
- [57] Y. Nakashima and O. Inoue, “Sound generation by a vortex ring collision with a wall,” *Phys. Fluids* **20**, 126104 (2008).

謝辞

本論文をまとめるにあたり、終始暖かい激励とご指導、ご鞭撻を頂いた電気通信大学前川教授に心より感謝申し上げます。前川教授には、筆者の電気通信大学在学中より、流体力学研究に関してご指導をいただきました。研究を進めるための環境を整備いただき、計算流体力学研究の道に導いていただいたことに深甚の謝意を表します。また、研究を進めるにあたり、貴重なご助言を頂いた前川研究室の皆さまに感謝します。 **Mattuttis Hans-Georg** 准教授には論文投稿の際に英語の指導をしていただいたこと大変感謝しております。

論文審査にご参画いただきました、電気通信大学 宮寄武教授、大川富雄教授、**Matuttis Hans-Georg** 准教授、東京理科大学 山本誠教授には、お忙しい中、大変貴重なご指導ご助言をいただきましたこと、心より感謝申し上げます。

筆者の電気通信大学に入学したからの4年間、日本学生支援機構（JASSO）により経済的な支援をいただきました。ここに記して感謝の意を表します。

最後に、いつも心の支えになってくれた家族に感謝します。特に、どのような状況においても応援してくれた素晴らしい妻に心から感謝します。

本論文を構成する主要論文及び参考論文

主要論文

1. Computational study of the interaction between a shock and a near-wall vortex using a weighted compact nonlinear scheme
Zhifeng Zuo and Hiroshi Maekawa
Fluid Dynamics Research **46** 015508 doi:10.1088/0169-5983/46/1/015508
2014 年 2 月
2. Computational Aeroacoustics by the Near Wall Vortex-Shock Interaction Using WCNS
Zhifeng Zuo and Hiroshi Maekawa
Eighth International Conference on Flow Dynamics, Paper ICFD2011-1296, Sendai, Japan, November 9-11 (2011)
3. Application of a High-Resolution Compact Finite Difference Method to Computational Aeroacoustics of Compressible Flows
Zhifeng Zuo and Hiroshi Maekawa
Proceedings of ASME-JSM-KSME Joint Fluids Engineering Conference, Paper AJK2011-15009 (Keynote, pp1-10), Hamamatsu, Japan, July 24-29 (2011).

参考論文

1. 重み付非線形コンパクトスキームと SLAU2 による高解像度計算
佐藤翔平, 左志峰, 井上洋平, 前川博
第 27 回数値流体力学シンポジウム, 名古屋, 12 月 17-19 日 (2013)
2. WCNS を用いた衝撃波と壁近傍渦の干渉の数値シミュレーション
左志峰, 前川博
第 26 回数値流体力学シンポジウム, 東京, 12 月 18-20 日 (2012)
3. 衝撃波と壁近傍渦の相互作用による音波の放出
左志峰, 前川博
日本流体力学会年会 2011 講演要旨集, 東京, 9 月 7-9 日 (2011)
4. 高解像度コンパクト差分の圧縮性流れの空力非線形音響問題への応用
前川博, 左志峰, 渡辺大輔
京都大学数理解析研究所 研究集会 (科学技術計算アルゴリズムの数理的基盤と展開),
京都, 6 月 (2010)