

修士論文の和文要旨

研究科・専攻	大学院 情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻 博士前期課程		
氏名	古戸 慎一郎	学籍番号	1731137
論文題目	交換型不安定性に対するせん断流れの非線形効果について		

要旨

流体やプラズマ中の密度勾配に対して、背景に形成されたせん断流れの効果についての研究が近年精力的に行われている。特に交換型不安定性を引き起こす密度勾配に対して垂直なせん断流れがあるとき、線形理論において特定の条件を満たす場合において交換型不安定性を抑制する効果があることが確認されている。

本研究では、非線形性を入れたときの線形理論との比較を行うために、せん断流れのある2次元非圧縮性を仮定して簡略化した渦度方程式と密度の連続の式を導出し、せん断流れによる交換型不安定性の非線形シミュレーションを行った。数値解法には、空間の離散化に擬スペクトル法を用い、時間積分は3次の Adams-Bashforth 法と2次の後退差分法を組み合わせで使用した。また、2次元の流体シミュレーションを高速に行うために GPU を用いた並列計算でシミュレーションを行った。

はじめに、せん断流れがない場合の交換型不安定性の非線形な振る舞いについて粘性率の大きさを変更しながら調べた。その後、せん断流れを入れて非線形シミュレーションを行った。まず、初期擾乱が単一の波数で表される場合について調べた結果、単一の波数の波では線形問題になることが確認できた。次に、複数の波の重ね合わせを初期擾乱として持つ線形安定な条件での非線形シミュレーションを行い、線形には安定であっても有限振幅のゆらぎによる非線形効果が卓越し、亜臨界乱流が発生することを観測した。この乱流は線形揺動が過渡的に成長することによって2次的な Kelvin-Helmholtz 不安定性が発生することにより引き起こされる。線形安定な条件において非線形性によって不安定となって発生する乱流を亜臨界乱流と呼ぶ。亜臨界乱流はその発生のための初期擾乱の大きさにしきい値を持ち、しきい値以下の擾乱は減衰し安定化するという特徴を持つ。最後に、せん断流れの強さと初期擾乱の振幅を変えて複数のシミュレーションを行い、線形安定な領域と亜臨界乱流になる領域のしきい値を調べた。

交換型不安定性に対する
せん断流れの非線形効果について

学籍番号 1731137 - 古戸 慎一郎

指導教員 龍野 智哉 准教授

指導教員 緒方 秀教 教授

2019年3月14日

目次

1	はじめに	3
2	数理モデル	4
2.1	支配方程式の導出	4
2.2	境界条件	10
2.3	擬スペクトル法による空間の離散化	11
2.4	時間積分法	18
2.5	数理モデルの規格化	26
3	せん断流れがない場合の交換型不安定性	28
3.1	交換型不安定性の線形成長率	28
3.2	シュミット数の違いによる変化	29
3.3	粘性率を変化させたときの交換型不安定性の振る舞い	33
4	せん断流れがある場合の交換型不安定性	41
4.1	交換型不安定性のせん断流れによる線形安定性について	41
4.2	初期擾乱が単一波で表されるとき振る舞い	42
4.3	線形安定条件におけるせん断流れのある非線形シミュレーション	44
4.4	亜臨界乱流	50
5	まとめ	58

1 はじめに

流体の密度勾配と逆向きに力を受けている状態を考える．例として，密度の低い流体の上に密度の高い流体があり，下向きに重力がかかっているような場合である．このとき，密度の高い流体は重力によって下向きに移動しようとし，密度の低い流体は浮力によって上方向に移動しようとする．もし，流体の層が水平であれば力が釣り合うが，その界面に摂動があるとその微小な乱れから変化が成長していく．この現象を交換型不安定性と呼ぶ [1]．

交換型不安定性は流体やプラズマ中で良く見られる現象である．核融合プラズマの研究では，磁場やレーザー光を利用してプラズマを一定の領域内に閉じ込めるという操作を行う．しかし，様々な要因によってプラズマが領域内から出て行ってしまうという問題があり，その主な要因の一つとして交換型不安定性が挙げられる．このような問題を解決するために，交換型不安定性に対する背景に形成されたせん断流れの効果についての研究が近年進められている [2, 3, 4]．特に交換型不安定性を引き起こす密度勾配に対して垂直なせん断流れがあるとき，線形理論において特定の条件を満たす場合交換型不安定性を抑制する効果があることが確認されている [2, 3]．核融合プラズマの分野においても不安定性に対するせん断流れの効果についての研究がなされている [5, 6]．

本研究の目的は，線形安定な条件に対して非線形性を考慮に入れた場合にせん断流れが持つ交換型不安定性の抑制効果が線形理論 [2] における場合と変化するかを検証することである．線形安定な条件においても非線形性によって不安定となって乱流が起こる場合がある．このように非線形性によって生じた乱流を亜臨界乱流と呼ぶ [7, 8]．亜臨界乱流はその発生のための初期摂動の大きさにしきい値を持つという特徴があり，しきい値以下の摂動は減衰し安定化するが，しきい値を超えると不安定となる．この亜臨界乱流の特徴を踏まえて，非線形性を入れたシミュレーションを行い線形理論との違いを調べる．

本研究では，せん断流れのある交換型不安定性の非線形数値シミュレーションを行った．ここで，今回はグリッド数を大きく取って解像度の細かいシミュレーションを行うために GPU を用いた並列計算で行った．GPU には多くのプロセッサが搭載されており，個々のプロセッサの性能は低いが高い並列性を備えている [9, 10]．

第 2 節では，はじめに現象の支配方程式を導出し，シミュレーションを行うための離散化について議論する．第 3 節では，せん断流れがない場合の交換型不安定性に関する非線形シミュレーションの振る舞いについて調べる．第 4 節では，せん断流れを入れて交換型不安定性に対して，線形安定な条件における非線形性の影響や亜臨界乱流について非線形

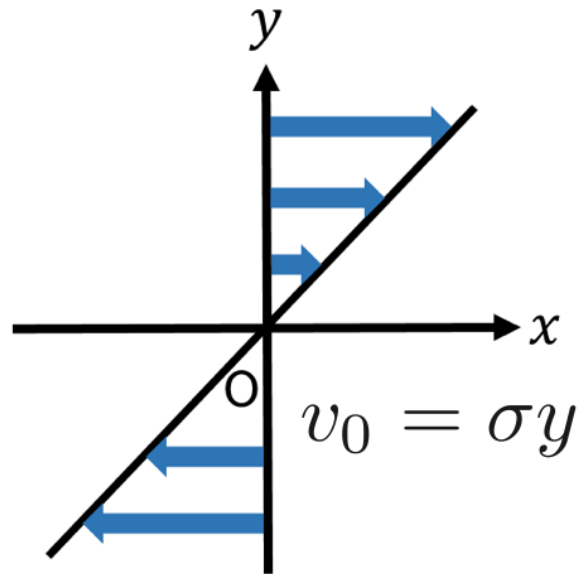


図 1: せん断流れの概略図．矢印の向きがせん断流れの向きを，矢印の長さがせん断流れの速さを示している．

数値シミュレーションを行った結果について述べる．最後に，第 5 節で全体のまとめと今後の展望について記載する．

2 数理モデル

図 1 のように y 軸に比例する速度を有し， x 軸に平行に流れるせん断流れが存在する 2 次元非圧縮性流体運動の支配方程式を導出する．図 1 の v_0 はせん断流れの速度である．青い矢印の長さが速さを表しており矢印が長い程速い流れである．また，矢印の方向がせん断流れの向きを示している．

2.1 支配方程式の導出

2.1.1 渦度方程式

3 次元空間の流体の運動を表す Navier-Stokes 方程式は次のように表される．

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (2.1)$$

ただし，時刻 t ，位置 \boldsymbol{x} として速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})$ ，密度 $\rho(t, \boldsymbol{x})$ ，圧力 $p(t, \boldsymbol{x})$ ，動粘性係数 ν ，重力加速度 $\boldsymbol{g} = (0, -g, 0)^T$ である．ここで， T は転置を表す．

はじめに，密度 ρ について背景密度 ρ_0 とそのゆらぎ ρ_1 を導入し

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (2.2)$$

と表す．同様に，圧力 p についても背景密度 ρ_0 に対する圧力 $p_0(y)$ とそのゆらぎ $p_1(t, \boldsymbol{x})$ を導入し

$$p = p_0 + p_1 \quad (2.3)$$

と表す．ここで，重力 \boldsymbol{g} が $-y$ 方向にのみ働いているため圧力 p_0 は y の関数である．また， $\nabla p_0 = (0, -\rho_0 g, 0)^T$ より静止平衡では

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 \quad (2.4)$$

である．密度と圧力のゆらぎ ρ_1, p_1 が平衡量 ρ_0, p_0 よりも十分小さく

$$\rho_0 \gg \rho_1 \quad (2.5)$$

$$p_0 \gg p_1 \quad (2.6)$$

であるとして、Boussinesq 近似 [11] を用いる．仮定から ρ_1 と p_1 の 2 次以上の項を無視すると，式 (2.1) の圧力項と外力項の和は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \nabla p + \boldsymbol{g} &= -\frac{1}{\rho_0 + \rho_1} \nabla p + \boldsymbol{g} \\ &\approx -\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0^2}\right) (\nabla p_0 + \nabla p_1) + \boldsymbol{g} \\ &\approx -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 - \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 + \boldsymbol{g} \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \boldsymbol{g} \end{aligned} \quad (2.7)$$

と近似される．ただし，第 3 行の計算には式 (2.4) を用いた．よって，Navier-Stokes 方程式 (2.1) は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 + \nu \Delta \boldsymbol{v} + \frac{\rho_1}{\rho_0} \boldsymbol{g} \quad (2.8)$$

となる．

次に，式 (2.8) の両辺に回転 ($\nabla \times$) を作用させると

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{v}) + \nabla \times ((\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v}) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \times (\nabla p_1) + \nu \nabla \times \Delta \boldsymbol{v} + \nabla \times \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \boldsymbol{g}\right) \quad (2.9)$$

となる．ここで，本研究では2次元の非圧縮流れを考えるため

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)^T, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.10)$$

である．さらに，ベクトル公式

$$\nabla \times \nabla f = 0 \quad (2.11)$$

より，式(2.9)の右辺第1項は0となるので

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla \times ((\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) = \nu \nabla \times \Delta \mathbf{v} + \nabla \times \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \mathbf{g} \right) \quad (2.12)$$

となる．はじめに，式(2.12)の左辺第2項について考える．式(2.11)と以下のベクトル公式

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{A} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (2.13)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (2.14)$$

および非圧縮性の仮定を用いると

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) &= \nabla \times \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})) \\ &= -\nabla \times (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})) \\ &= -\mathbf{v}(\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v})) + (\nabla \times \mathbf{v})(\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ &\quad -((\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\nabla \times \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v})) - ((\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \nabla)\mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.15)$$

となる．また，式(2.12)の右辺第1項はラプラシアンと回転を入れ替えることで $\nu \Delta(\nabla \times \mathbf{v})$ と表せる．よって，式(2.12)は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v})) - ((\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \nabla)\mathbf{v} \\ = \nu \Delta(\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla \times \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \mathbf{g} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

と書き直せる．

ここで，せん断流れが x 軸と平行の方向に流れ， y 軸に関して直線的に変化し時間変化しないとする．すると，せん断流れの速度 v_0 は定数 σ を用いて

$$\mathbf{v}_0 = (\sigma y, 0, 0)^T \quad (2.17)$$

と書ける．以降， $v_0 = \sigma y$ と記述する．さらに， \mathbf{v}_1 を

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \quad (2.18)$$

として全渦度 $\nabla \times v$ からせん断流れによる渦度 $\nabla \times v_0$ を除いたものを渦度 ω とする .
このとき , ω は

$$\omega \equiv \nabla \times v_1 = \nabla \times v - \nabla \times v_0 \quad (2.19)$$

である . よって , 式 (2.19) を変形すると

$$\nabla \times v = \omega + \nabla \times v_0 = \omega - \sigma e_z \quad (2.20)$$

となる . ここで , e_z は z 方向の単位ベクトルである . ω を定義したことで , 式 (2.16) は式 (2.20) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + (v \cdot \nabla)(\omega - \sigma e_z) - v(\nabla \cdot (\omega - \sigma e_z)) - ((\omega - \sigma e_z) \cdot \nabla)v \\ = \nu \Delta(\omega - \sigma e_z) + \nabla \times \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} g \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

と表すことができる . さらに , 式 (2.21) の z 成分のみをとると , 2次元流れを考えているため

$$v \cdot e_z = 0 \quad (2.22)$$

より , 式 (2.21) の左辺第 2 項から第 4 項はそれぞれ

$$(v \cdot \nabla)(\omega - \sigma e_z) \cdot e_z = (v \cdot \nabla)(\omega_z - \sigma) \quad (2.23)$$

$$-v(\nabla \cdot (\omega - \sigma e_z)) \cdot e_z = 0 \quad (2.24)$$

$$-((\omega - \sigma e_z) \cdot \nabla)v \cdot e_z = 0 \quad (2.25)$$

となる . ただしここで , $\omega_z := \omega \cdot e_z$ と定義した . また , 式 (2.21) の右辺第 2 項の z 成分をとると

$$\nabla \times \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} g \right) \cdot e_z = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \quad (2.26)$$

となる . よって式 (2.21) の z 成分は

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + (v \cdot \nabla)(\omega_z - \sigma) = \nu \Delta \omega_z - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \quad (2.27)$$

である .

次に , v_1 に関する流れ関数 ϕ を考える . 2次元流れより $v_1 = (v_{1x}, v_{1y}, 0)^T$ なので , v_1 と ϕ の関係は

$$v_1 = \nabla \phi \times e_z = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial x}, 0 \right)^T \quad (2.28)$$

である．この流れ関数 ϕ を用いて式 (2.27) の左辺第 2 項を展開し変形すると

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\omega_z - \sigma) &= (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1) \cdot \nabla \omega_z \\
 &= v_0 \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v_{1x} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v_{1y} \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \\
 &= v_0 \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \\
 &= v_0 \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + \{\phi, \omega_z\}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

と表される．ここで， $\{f, g\}$ は Poisson 括弧と呼ばれ

$$\{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \tag{2.30}$$

である．

以上，式 (2.27)，(2.29) より渦度方程式

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + \{\phi, \omega_z\} = \nu \Delta \omega_z - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \tag{2.31}$$

が導出された．また，これ以降簡単のために渦度の z 成分 ω_z を単に ω と記述する．

2.1.2 渦度と流れ関数に関する Poisson 方程式

渦度と流れ関数に関する Poisson 方程式を導出する．式 (2.19)，(2.28) より

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times (\nabla \phi \times \mathbf{e}_z) = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z}, - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right)^T \tag{2.32}$$

である．ここで，式 (2.32) の両辺に \mathbf{e}_z との内積をとると

$$\omega = - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = -\Delta \phi \tag{2.33}$$

となる．よって，渦度と流れ関数に関する Poisson 方程式

$$\Delta \phi = -\omega \tag{2.34}$$

が導出された．

2.1.3 密度に関する連続の式

密度に関する連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.35)$$

である．式 (2.2) を用いて式 (2.35) を展開すると

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}) = 0 \quad (2.36)$$

となる．ここで，式 (2.36) の左辺第 1 項は

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \quad (2.37)$$

であり，左辺第 2 項は

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) &= \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1) \\ &= \frac{\partial(\rho_0 v_0)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ &= -\rho'_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.38)$$

となる．ただし， ρ'_0 は背景密度 ρ_0 の y 微分で重力加速度 g と共に不安定性を引き起こすパラメータ値である．Boussinesq 近似により以降は ρ'_0 を定数値として扱う．

また，左辺第 3 項は

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}) &= \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_0) + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_1) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 v_0) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_1 \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ &= v_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \rho_1}{\partial y} \\ &= v_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \{\phi, \rho_1\} \end{aligned} \quad (2.39)$$

である．

式 (2.35) の計算を行うと小さい構造が形成される．しかし，小さい構造が形成されるとシミュレーションを行うための解像度が足りなくなり計算が不安定になってしまう．そのため，この問題を回避するために κ を拡散係数とした密度のゆらぎ ρ_1 の拡散項 $\kappa \Delta \rho_1$ を加える．

以上で、密度に関する連続の式 (2.35) から

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \{\phi, \rho_1\} = \rho'_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \kappa \Delta \rho_1 \quad (2.40)$$

が導出された。

2.2 境界条件

本研究では、運動している流体が周期性を持っていると考え境界に周期性を考慮した条件を用いる。計算領域を

$$0 \leq x \leq L_x, \quad 0 \leq y \leq L_y \quad (2.41)$$

とする。

x 方向の境界は周期境界条件を用いる。周期境界条件では計算領域の両端での値が等しくなる。なので、 x 方向の境界 ($x = 0, L_x$) における関数 $f(t, x, y)$ についての周期境界条件を

$$f(t, 0, y) = f(t, L_x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, L_x, y) \quad (2.42)$$

と表すことができる。

せん断流れは x 軸に平行に流れ、 y 軸に関して直線的に変化する。そのため、 x 方向には単純な周期境界条件が適用できるが、 y 方向についてはせん断流れの速度が非周期的に変化しているため単純な周期境界条件が適用できない。なので、 y 方向に関してはせん断流れによるずれを考慮する必要がある。時刻 $t = 0$ で x 方向について周期境界条件を満たすためには

$$f(x, 0) = f(x, L_y) \quad (t = 0) \quad (2.43)$$

のようになる。 $f(x, y)$ の流体は時刻 t が経過すると、せん断流れによって $f(x + \sigma y t, y)$ まで移動している。そのため、 y 方向の境界条件はせん断流れによる移動量だけ領域を移動させればよいので

$$f(t, x, 0) = f(t, x + \sigma L_y t, L_y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(t, x, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, x + \sigma L_y t, L_y) \quad (t > 0) \quad (2.44)$$

と表すことができる。このように、せん断流れのずれを考慮した境界条件を Shearing Box 境界条件と呼ぶ [15]。

2.3 擬スペクトル法による空間の離散化

本研究では空間の離散化にスペクトル法を使用する [12, 13] . スペクトル法とは実空間上の関数をフーリエ級数展開し, 偏微分を計算するシミュレーション手法である . ここで非線形項の計算をスペクトル法で行う場合, 計算コストが高くなるという問題がある . この問題の解決のために, 高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform; FFT) を用いて非線形項の計算を実空間で行うことで計算にかかるコストを下げる方法がある . このように FFT を用いて非線形項の計算を行うことを擬スペクトル法と呼ぶ .

この節では, 渦度方程式 (2.31) と流れ関数に関する Poisson 方程式 (2.34) および密度の連続の式 (2.40) のスペクトル法による空間の離散化式の導出を行う .

せん断流れがないときの空間の離散化式

せん断流れを考慮しない場合の空間の離散化式を求める . 本研究では領域 $x \in [0, L_x]$, $y \in [0, L_y]$ において周期境界条件を仮定するので, 複素フーリエ級数展開は以下のように定義される .

$$\omega(x, y, t) = \sum_{l=-N_{k_x}}^{N_{k_x}} \sum_{m=-N_{k_y}}^{N_{k_y}} \hat{\omega}_{k_x, k_y}(t) e^{ik_x x} e^{ik_y y} \quad (2.45)$$

$$\phi(x, y, t) = \sum_{l=-N_{k_x}}^{N_{k_x}} \sum_{m=-N_{k_y}}^{N_{k_y}} \hat{\phi}_{k_x, k_y}(t) e^{ik_x x} e^{ik_y y} \quad (2.46)$$

$$\rho_1(x, y, t) = \sum_{l=-N_{k_x}}^{N_{k_x}} \sum_{m=-N_{k_y}}^{N_{k_y}} \hat{\rho}_{1, k_x, k_y}(t) e^{ik_x x} e^{ik_y y} \quad (2.47)$$

ただし, x, y 方向の切断波数を N_{k_x}, N_{k_y} と表し, x, y 各方向の波数を

$$k_x = \frac{2\pi l}{L_x} \quad (-N_{k_x} \leq l \leq N_{k_x}) \quad (2.48)$$

$$k_y = \frac{2\pi m}{L_y} \quad (-N_{k_y} \leq m \leq N_{k_y}) \quad (2.49)$$

とする .

はじめに, 渦度方程式 (2.31) の離散化式の導出を行う . 式 (2.45) , (2.46) を式 (2.31)

に代入すると左辺第 1 項は次のようになる .

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \sum_{l=-N_{k_x}}^{N_{k_x}} \sum_{m=-N_{k_y}}^{N_{k_y}} \frac{\partial \hat{\omega}_{k_x, k_y}}{\partial t} e^{ik_x x} e^{ik_y y} \quad (2.50)$$

左辺第 3 項の Poisson 括弧 $\{\phi, \omega\}$ は

$$\{\phi, \omega\} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (2.51)$$

である . そのため , スペクトル法を用いると

$$\begin{aligned} \{\phi, \omega\} = & \sum_{l=-N_{k_x}}^{N_{k_x}} \sum_{m=-N_{k_y}}^{N_{k_y}} ik_y \hat{\phi}_{k_x, k_y} e^{ik_x x} e^{ik_y y} \cdot \sum_{l=-N_{k_x}}^{N_{k_x}} \sum_{m=-N_{k_y}}^{N_{k_y}} ik_x \hat{\omega}_{k_x, k_y} e^{ik_x x} e^{ik_y y} \\ & + \sum_{l=-N_{k_x}}^{N_{k_x}} \sum_{m=-N_{k_y}}^{N_{k_y}} -ik_x \hat{\phi}_{k_x, k_y} e^{ik_x x} e^{ik_y y} \cdot \sum_{l=-N_{k_x}}^{N_{k_x}} \sum_{m=-N_{k_y}}^{N_{k_y}} ik_y \hat{\omega}_{k_x, k_y} e^{ik_x x} e^{ik_y y} \end{aligned} \quad (2.52)$$

と表せる . ここで , 式 (2.52) は一つの項を計算するためにおよそ $\mathcal{O}((N_{k_x} \cdot N_{k_y})^2)$ の計算が必要となり , このままでは計算に時間がかかる . そのため , この項の計算に擬スペクトル法を用いるが , その具体的な操作を示すと次のようになる .

1. 非線形項に対して FFT による逆変換を行って , 実空間に変換する .
2. 実空間のグリッド上で非線形項の計算を行う .
3. 非線形項の計算結果に対して FFT による順変換を行ってフーリエ空間に戻す .

しかし , この方法で非線形項を計算すると求めたい波数成分に他の高波数成分が重なってしまうエイリアシング誤差と呼ばれる誤差が生じてしまうことがある [?] . そこで , エイリアシング誤差を取り除くために計算に使用する波数の数に制限をかけてそれ以上の大きさの波数成分を無視するという方法を取る . この制限はもとの最大波数の $2/3$ までの波数をとるので , $2/3$ 則と呼ばれる [14] .

よって , 式 (2.52) の左辺第 3 項を擬スペクトル法を用いた離散化式で表すと

$$\begin{aligned} \{\phi, \omega\} = & \mathcal{F}^{-1} \left[ik_y \hat{\phi}_{k_x, k_y} \right] \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[ik_x \hat{\omega}_{k_x, k_y} \right] \\ & + \mathcal{F}^{-1} \left[-ik_x \hat{\phi}_{k_x, k_y} \right] \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[ik_y \hat{\omega}_{k_x, k_y} \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

となる . ただし , \mathcal{F} は 2 次元フーリエ順変換を , \mathcal{F}^{-1} は 2 次元フーリエ逆変換を表す . また , シミュレーションで計算する際には離散フーリエ変換を用いる . そのため , \mathcal{F} の計

算には高速フーリエ順変換, \mathcal{F}^{-1} の計算には高速フーリエ逆変換のアルゴリズムを使用する．ここで, 変換に FFT を用いることで一つの項を $\mathcal{O}((N_{k_x} \log N_{k_x}) \cdot (N_{k_y} \log N_{k_y}))$ の時間で計算することができる．

渦度方程式 (2.31) の右辺第 1 項, 第 2 項はそれぞれ

$$\nu \Delta \omega = \nu \sum_{l=-N_{k_x}}^{N_{k_x}} \sum_{m=-N_{k_y}}^{N_{k_y}} - (k_x^2 + k_y^2) \hat{\omega}_{k_x, k_y} e^{ik_x x} e^{ik_y y} \quad (2.54)$$

$$-\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = -\frac{g}{\rho_0} \sum_{l=-N_{k_x}}^{N_{k_x}} \sum_{m=-N_{k_y}}^{N_{k_y}} ik_x \hat{\rho}_{1, k_x, k_y} e^{ik_x x} e^{ik_y y} \quad (2.55)$$

である．ここで, 三角関数の直交性を利用し, 複素フーリエ級数展開を用いて表された渦度方程式の両辺に $e^{i\frac{2\pi l'}{L_x} x}, e^{i\frac{2\pi m'}{L_y} y}$ をかけて, $\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} dx dy$ で積分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\omega}_{k_x, k_y}}{\partial t} + \frac{1}{L_x L_y} \mathcal{F} \left[\mathcal{F}^{-1} \left[ik_y \hat{\phi}_{k_x, k_y} \right] \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[ik_x \hat{\omega}_{k_x, k_y} \right] \right] \\ + \frac{1}{L_x L_y} \mathcal{F} \left[\mathcal{F}^{-1} \left[-ik_x \hat{\phi}_{k_x, k_y} \right] \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[ik_y \hat{\omega}_{k_x, k_y} \right] \right] \\ = -\nu (k_x^2 + k_y^2) \hat{\omega}_{k_x, k_y} - \frac{g}{\rho_0} ik_x \hat{\rho}_{1, k_x, k_y} \end{aligned} \quad (2.56)$$

となる．以上で, 渦度方程式 (2.31) の空間に関する離散化式 (2.56) が得られた．ここで, せん断流れの項 $v_0 \frac{\partial \omega}{\partial x}$ を無視しているのは, 今はせん断流れがない場合を考えているためである．

次に, 流れ関数に関する Poisson 方程式の離散化式 (2.34) を導出する．式 (2.45), (2.46) を式 (2.34) に代入すると

$$\sum_{l=-N_{k_x}}^{N_{k_x}} \sum_{m=-N_{k_y}}^{N_{k_y}} - (k_x^2 + k_y^2) \hat{\phi}_{k_x, k_y} e^{ik_x x} e^{ik_y y} = \sum_{l=-N_{k_x}}^{N_{k_x}} \sum_{m=-N_{k_y}}^{N_{k_y}} -\hat{\omega}_{k_x, k_y} e^{ik_x x} e^{ik_y y} \quad (2.57)$$

となる．渦度方程式の場合と同様に, 三角関数の直交性を利用して式 (2.57) の両辺に $e^{i\frac{2\pi l'}{L_x} x}, e^{i\frac{2\pi m'}{L_y} y}$ をかけて, $\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} dx dy$ で積分すると

$$(k_x^2 + k_y^2) \hat{\phi}_{k_x, k_y} = \hat{\omega}_{k_x, k_y} \quad (2.58)$$

が得られる．よって, 流れ関数に関する Poisson 方程式の離散化式 (2.58) が求まった．

最後に，密度に関する連続の式 (2.40) の離散化式を導出する．式 (2.46) , (2.47) を式 (2.40) に代入すると次のようになる．

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \sum_{l=-N_{k_x}}^{N_{k_x}} \sum_{m=-N_{k_y}}^{N_{k_y}} \frac{\partial \hat{\rho}_{1_{k_x, k_y}}}{\partial t} e^{ik_x x} e^{ik_y y} \quad (2.59)$$

左辺第 3 項は Poisson 括弧 $\{\phi, \rho_1\}$ である．そのため，この項の計算には渦度方程式の離散化式導出の際と同様に擬スペクトル法を使用する．よって，

$$\begin{aligned} \{\phi, \rho_1\} = & \mathcal{F}^{-1} \left[ik_y \hat{\phi}_{k_x, k_y} \right] \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[ik_x \hat{\rho}_{1_{k_x, k_y}} \right] \\ & + \mathcal{F}^{-1} \left[-ik_x \hat{\phi}_{k_x, k_y} \right] \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[ik_y \hat{\rho}_{1_{k_x, k_y}} \right] \end{aligned} \quad (2.60)$$

である．また，右辺第 1 項と第 2 項はそれぞれ

$$\rho'_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} = \rho'_0 \sum_{l=-N_{k_x}}^{N_{k_x}} \sum_{m=-N_{k_y}}^{N_{k_y}} ik_x \hat{\phi}_{1_{k_x, k_y}} e^{ik_x x} e^{ik_y y} \quad (2.61)$$

$$\kappa \Delta \rho_1 = \kappa \sum_{l=-N_{k_x}}^{N_{k_x}} \sum_{m=-N_{k_y}}^{N_{k_y}} - (k_x^2 + k_y^2) \hat{\rho}_{1_{k_x, k_y}} e^{ik_x x} e^{ik_y y} \quad (2.62)$$

と表される．ここで，複素フーリエ級数展開を用いて表された密度の連続の式の両辺に $e^{i \frac{2\pi l'}{L_x} x}, e^{i \frac{2\pi m'}{L_y} y}$ をかけて， $\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} dx dy$ で積分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}_{1_{k_x, k_y}}}{\partial t} + \frac{1}{L_x L_y} \mathcal{F} \left[\mathcal{F}^{-1} \left[ik_y \hat{\phi}_{k_x, k_y} \right] \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[ik_x \hat{\rho}_{1_{k_x, k_y}} \right] \right] \\ + \frac{1}{L_x L_y} \mathcal{F} \left[\mathcal{F}^{-1} \left[-ik_x \hat{\phi}_{k_x, k_y} \right] \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[ik_y \hat{\rho}_{1_{k_x, k_y}} \right] \right] \\ = \rho'_0 ik_x \hat{\phi}_{k_x, k_y} - \kappa (k_x^2 + k_y^2) \hat{\rho}_{1_{k_x, k_y}} \end{aligned} \quad (2.63)$$

となる．以上で，密度に関する連続の式の離散化式 (2.63) が導出された．今はせん断流れがない場合を考えているため，せん断流れの項 $v_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial x}$ を無視している．

せん断流れを考慮した空間の離散化式

せん断流れによって，流体は常に一定の速度で流れている．そのため，Shearing Box 境界条件 (2.44) を考慮した離散化を行う必要がある．

せん断流れは x 軸に平行に σy の速度で流れているため，座標 (x, y) の流体は時刻 t 後に $(x + \sigma y t, y)$ の座標に移動している．空間の離散化にはこれを考慮した座標変換を行

う．座標変換 $(t, x, y) \mapsto (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y})$ を

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x - \sigma y t, \quad \tilde{y} = y \quad (2.64)$$

と定義する．座標変換により，各微分演算子は

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = -\sigma y \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = -\sigma t \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \quad (2.67)$$

と表される．また，この変換によってポアソン括弧は次のようになる．

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \\ &= \left(-\sigma t \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{y}} \right) \frac{\partial g}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} \left(-\sigma t \frac{\partial g}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial g}{\partial \tilde{y}} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial g}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial g}{\partial \tilde{y}} \\ &= \{\widetilde{f}, \widetilde{g}\} \end{aligned} \quad (2.68)$$

以上の変数変換を適用すると，渦度方程式 (2.31) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \tilde{t}} - \sigma y \frac{\partial \omega}{\partial \tilde{x}} + \sigma y \frac{\partial \omega}{\partial \tilde{x}} + \{\widetilde{\phi}, \omega\} &= \nu \left(\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(-\sigma t \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right) \omega - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial \tilde{x}} \\ \iff \frac{\partial \omega}{\partial \tilde{t}} + \{\widetilde{\phi}, \omega\} &= \nu \left((1 + \sigma^2 t^2) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} - 2\sigma t \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right) \omega - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial \tilde{x}} \end{aligned} \quad (2.69)$$

である．この渦度方程式 (2.69) をスペクトル法で離散化する．前節と同様の計算を行うと式 (2.69) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\omega}_{k_x, k_y}}{\partial \tilde{t}} + \mathcal{F} \left[\mathcal{F}^{-1} \left[i \tilde{k}_y(t) \widehat{\phi}_{k_x, k_y} \right] \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[i k_x \widehat{\omega}_{k_x, k_y} \right] \right] \\ + \mathcal{F} \left[\mathcal{F}^{-1} \left[-i k_x \widehat{\phi}_{k_x, k_y} \right] \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[i \tilde{k}_y(t) \widehat{\omega}_{k_x, k_y} \right] \right] \\ = -\nu \left(k_x^2 + \tilde{k}_y(t)^2 \right) \widehat{\omega}_{k_x, k_y} - \frac{g}{\rho_0} i k_x \widehat{\rho}_{1, k_x, k_y} \end{aligned} \quad (2.70)$$

となる．ただし， $\tilde{k}_y(t) = k_y - \sigma k_x t$ である．以上で，せん断流れのある渦度方程式の空間の離散化式 (2.70) が導出された．

次に，流れ関数に関する Poisson 方程式 (2.34) について考える．式 (2.34) に変数変換を適用すると

$$\left((1 + \sigma^2 t^2) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} - 2\sigma t \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right) \phi = -\omega \quad (2.71)$$

と表される．よって，式 (2.71) のスペクトル法による離散化式は

$$\left(k_x^2 + \tilde{k}_y(t)^2 \right) \hat{\phi}_{k_x, k_y} = \hat{\omega}_{k_x, k_y} \quad (2.72)$$

となる．以上で，せん断流れのある流れ関数に関する Poisson 方程式の離散化式 (2.72) が求まった．

最後に，密度に関する連続の式 (2.40) に変数変換を適用すると

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tilde{t}} + \{ \widetilde{\phi}, \rho_1 \} = \rho'_0 \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}} + \kappa \left((1 + \sigma^2 t^2) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} - 2\sigma t \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right) \rho_1 \quad (2.73)$$

である．したがって，式 (2.73) の擬スペクトル法による離散化式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}_{1, k_x, k_y}}{\partial t} + \mathcal{F} \left[\mathcal{F}^{-1} \left[i\tilde{k}_y(t) \hat{\phi}_{k_x, k_y} \right] \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[ik_x \hat{\rho}_{1, k_x, k_y} \right] \right] \\ + \mathcal{F} \left[\mathcal{F}^{-1} \left[-ik_x \hat{\phi}_{k_x, k_y} \right] \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[i\tilde{k}_y(t) \hat{\rho}_{1, k_x, k_y} \right] \right] \\ = \rho'_0 ik_x \hat{\phi}_{k_x, k_y} - \kappa \left(k_x^2 + \tilde{k}_y(t)^2 \right) \hat{\rho}_{1, k_x, k_y} \end{aligned} \quad (2.74)$$

となる．以上で，せん断流れのある密度に関する連続の式の離散化式 (2.74) が導出された．

最後に，シミュレーションプログラムにおける $\tilde{k}_y(t)$ の扱いについて述べる．

$$\tilde{k}_y(t) = k_y - \sigma k_x t \quad (2.75)$$

は波数 k_y の値に対して時刻 t が経つと $\sigma k_x t$ だけずれることを示している．プログラム内では，波数 k_x に対応した $\sigma k_x t$ の値を各時刻ごとに計算し， $\tilde{k}_y(t)$ の値が必要なときに k_y の値から $\sigma k_x t$ の値を引くという操作をしている．ここで，シミュレーションを進めていき t の値が大きくなると t に比例して $\tilde{k}_y(t)$ の値が大きくなり，プログラムのシステム上で扱える波数から外れた本来扱うことのできない波数を計算に含んでしまうという問題がある．この問題を回避するために，計算の途中で $\sigma k_x t$ の値を 0 にリセットする．このとき，値を 0 にリセットするだけでは計算が成り立たなくなってしまうのでリセットを行う前に波数 k_y に対応する振幅のデータを $\tilde{k}_y(t)$ の値に対応する配列要素に移動させるという処理を行う．波数 k_y に対応する振幅のデータはプログラム上では $\tilde{k}_y(t)$ の振幅とし

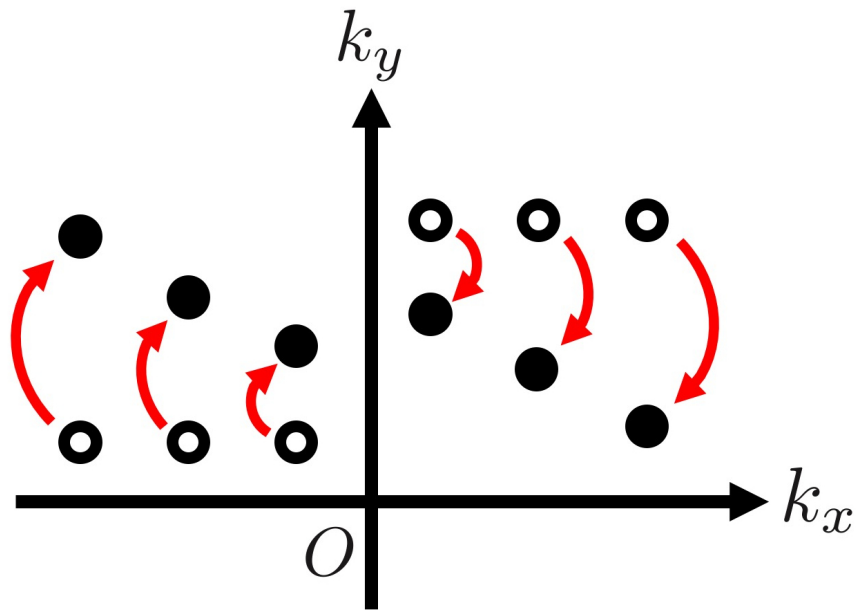


図 2: 波数の振幅データの移動についてのイメージ図．中抜きの丸が移動前の振幅データを示し，黒丸が移動後のデータを示す． $\sigma > 0$ のとき， k_x が正なら $-k_y$ 軸方向へ， k_x が負なら $+k_y$ 軸方向へ $|\sigma k_x t|$ だけ移動する．

て扱っているので，これを $\tilde{k}_y(t)$ に対応した配列要素に移動させることに問題はない．図 2 は波数の振幅データの移動に関するイメージ図である．図の中抜きの丸が移動前の振幅のデータを示す．これらのデータを赤矢印で示すように $\sigma k_x t$ だけ移動して $\tilde{k}_y(t)$ の値に等しい k_y の振幅とする．移動量は $|\sigma k_x t|$ で決まるので， k_x が高波数である程移動距離も長くなる．

一般に，プログラム内では配列要素に対応した波数 k_y の値が離散的に与えられており，任意のタイミングでリセットを行うことはできない．そのため， $k_x > 0$ なる最小の波数 $k_{x_{\min}} = 2\pi/L_x$ および， $k_y > 0$ なる最小の波数 $k_{y_{\min}} = 2\pi/L_y$ に着目し，計算時は $\sigma k_{x_{\min}} t \geq k_{y_{\min}}$ の条件を満たしたタイミングで全ての波数成分を $\sigma k_x t$ だけ移動する処理を行っている．

$\sigma k_x t$ の値のリセットに伴う振幅データの移動処理について箇条書きでまとめると以下のようなになる．

1. $\sigma k_{x_{\min}} t \geq k_{y_{\min}}$ の条件を満たすことを確認する．
2. 波数 k_y に対応する配列要素にある振幅のデータを $\tilde{k}_y(t)$ に対応する配列要素に移動する．

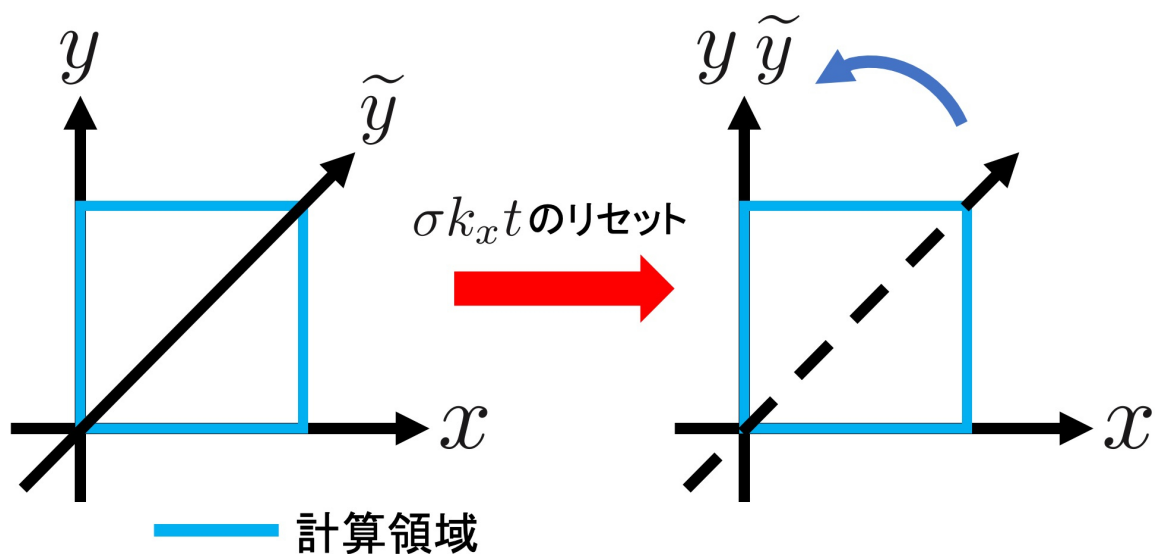


図 3: $\sigma k_x t$ のリセットに伴う \tilde{y} 軸の変化のイメージ図. $\sigma k_x t$ がリセットされることによって, \tilde{y} 軸の傾きもリセットされる.

3. $\sigma k_x t$ の値を 0 にリセットする.

この操作を実空間で考えてみる. このとき, 式 (2.64) の \tilde{y} 軸はせん断流れに沿って動く軸である. $t = 0$ で y 軸に重なっていた \tilde{y} 軸が時刻の経過と共に流れに沿って x 軸に近づいていく. この \tilde{y} 軸の動きが $\tilde{k}_y(t)$ の時間変化に対応している. そのため, $\sigma k_x t$ の値をリセットする操作は \tilde{y} 軸の傾きをリセットすることを意味している. 図 3 は $\sigma k_x t$ のリセットに伴う \tilde{y} 軸の変化のイメージ図である. $\sigma k_{x_{\min}} t \geq k_{y_{\min}}$ の条件を満たすタイミングは \tilde{y} 軸が計算領域を表す長方形の対角線に一致するときである. そのため, 図 3 のように計算領域の対角線に重なったら傾きがりセットされて計算が続く.

2.4 時間積分法

本研究におけるシミュレーションでは離散化された渦度方程式 (2.70) と連続の式 (2.74) の計算を行う際, 式 (2.70) の左辺第 2 項と第 3 項および右辺第 2 項, 式 (2.74) の左辺第 2 項と第 3 項および右辺第 1 項に陽解法である前進 Euler 法と 2 次の Adams-Bashforth 法 (AB2), 3 次の Adams-Bashforth 法 (AB3) を用いて計算する. また, 拡散項に該当する式 (2.70) の右辺第 1 項と式 (2.74) の右辺第 2 項には, 陰解法である後退 Euler 法と 2 次の後退差分法 (second order backward difference formula; BDF2) を用いる. この節

では，AB2，AB3 および BDF2 の概要の説明とこれらを組み合わせた時間積分の離散化式の導出を行う．

また，本シミュレーションでは各計算ステップの始めに以下のクーラン条件

$$\Delta t < \frac{Ch}{v_{\max}} \quad (2.76)$$

の判定を行い，時間刻み Δt が条件を満たす最大の値になるように変化させている．ただし， C はクーラン数を表し， h は格子幅でクーラン条件を判定する項が x 方向の移流か， y 方向の移流かでその値を

$$\begin{aligned} x \text{ 方向の移流} : h &= \frac{L_x}{N_x} \\ y \text{ 方向の移流} : h &= \frac{L_y}{N_y} \end{aligned} \quad (2.77)$$

とする．また， v_{\max} は Poisson 括弧の移流項にかかる速度の最大値を表しており

$$\begin{aligned} x \text{ 方向の移流} : v_{\max} &= \max_{\substack{0 \leq x \leq L_x \\ 0 \leq y \leq L_y}} \left| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right| \\ y \text{ 方向の移流} : v_{\max} &= \max_{\substack{0 \leq x \leq L_x \\ 0 \leq y \leq L_y}} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| \end{aligned} \quad (2.78)$$

である．よって，時間刻み Δt が時間ステップごとに異なる可能性があるため，AB2，AB3，BDF2 を計算する際にはその時間刻み Δt の変化に対応していく必要がある [16]．

Adams-Bashforth 法

Adams-Bashforth 法は，微分方程式を積分に置き換え Lagrange 補間多項式を用いて近似する方法である．まず， y に関する微分方程式として

$$\frac{dy}{dt} = f(t) \quad (2.79)$$

を考える．時間ステップを上付き添字 n で表すことにすると，この式は

$$y^{n+1} = y^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t) dt \quad (2.80)$$

と積分できる．ここで， t^n から t^{n+1} までの時刻における $f(t)$ の Lagrange 補間多項式を $\tilde{f}(t)$ とおくと，この $\tilde{f}(t)$ を用いて y^{n+1} を

$$y^{n+1} \approx y^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \tilde{f}(t) dt \quad (2.81)$$

と近似できる．

2 次の Adams-Bashforth 法を用いる場合は 1 次の Lagrange 補間多項式を，3 次の Adams-Bashforth 法を用いる場合は 2 次の Lagrange 補間多項式を使用する．具体的な AB2，AB3 の導出はこの後で行う．

2 次の後退差分法

2 次の後退差分法 (BDF2) を導出する．

始めに，時間刻み Δt について以下を定義する．

$$\Delta_0 = t^{n+1} - t^n, \quad \Delta_1 = t^n - t^{n-1} \quad (2.82)$$

式 (2.82) を用いて y^n と y^{n-1} の $t = t^{n+1}$ を中心とした Taylor 展開を Δt が 2 次の項まで表すと

$$y^n = y^{n+1} - \Delta_0 \left(\frac{dy}{dt} \right)^{n+1} + \frac{\Delta_0^2}{2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)^{n+1} + \mathcal{O}(\Delta_0^3) \quad (2.83)$$

$$y^{n-1} = y^{n+1} - (\Delta_0 + \Delta_1) \left(\frac{dy}{dt} \right)^{n+1} + \frac{(\Delta_0 + \Delta_1)^2}{2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)^{n+1} + \mathcal{O}((\Delta_0 + \Delta_1)^3) \quad (2.84)$$

である．次に， $\left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)^{n+1}$ の項を消すために式 (2.83) に $\frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0 \Delta_1}$ を，式 (2.84) に $\frac{\Delta_0}{\Delta_1(\Delta_0 + \Delta_1)}$ をかけて式 (2.83) - 式 (2.84) の計算をして整理すると

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)^{n+1} \approx \frac{2\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0(\Delta_0 + \Delta_1)} y^{n+1} - \frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0 \Delta_1} y^n + \frac{\Delta_0}{\Delta_1(\Delta_0 + \Delta_1)} y^{n-1} \quad (2.85)$$

となる．ここで，

$$\alpha_0 = \frac{2\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0(\Delta_0 + \Delta_1)}, \quad \alpha_1 = -\frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0 \Delta_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_0}{\Delta_1(\Delta_0 + \Delta_1)} \quad (2.86)$$

を用いて，式 (2.85) を

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)^{n+1} = \alpha_0 y^{n+1} + \alpha_1 y^n + \alpha_2 y^{n-1} \quad (2.87)$$

と表す．以上で，2 次の後退差分法 (BDF2) が導出された．

$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0$ が成り立つので，以降の説明の簡単のために式 (2.87) を

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)^{n+1} = -\alpha_1 (y^{n+1} - y^n) - \alpha_2 (y^{n+1} - y^{n-1}) \quad (2.88)$$

と変形しておく．

時間に関する離散化式

渦度方程式 (2.31) と密度の連続の式 (2.40) の計算において AB2, AB3 および BDF2 を使用する第 2 ステップと第 2 ステップ以降の時間に関する離散化式の導出を行う。ただし, せん断流れ v_0 を含む項に関しては 2.3 節で述べた変数変換によって取り扱う。

式 (2.31), (2.40) の ω, ρ_1 に該当する変数を $y(t)$ と表し, 陽解法を用いて計算する項を $\mathcal{N}(y)$, 陰解法を用いて計算する項を $\mathcal{L}(y)$ とすると方程式が

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \mathcal{N}(y) + \mathcal{L}(y) \quad (2.89)$$

と表せる。以降は式 (2.89) を用いて離散化式の導出を行う。

まず, 第 2 ステップにおける離散化式を導出する。第 2 ステップでは AB2 と BDF2 を組み合わせて計算している。ただし, 拡散係数である ν や κ の値が 0 の場合は AB2 のみの計算となる。はじめに, $\mathcal{N}(y)$ の項を AB2 から計算する。 $\mathcal{N}(y)$ は y を通じて時間 t の関数になっているので, $f(t) := \mathcal{N}(y(t))$ とおく。このとき, 式 (2.81) の $\tilde{f}(t)$ を (t^n, f^n) と (t^{n-1}, f^{n-1}) が与えられた 1 次の Lagrange 補間多項式とおけば式 (2.82) を用いて $\tilde{f}(t)$ は

$$\tilde{f}(t) = \frac{t - t^{n-1}}{t^n - t^{n-1}} f^n + \frac{t - t^n}{t^{n-1} - t^n} f^{n-1} = \frac{t - t^{n-1}}{\Delta_1} f^n - \frac{t - t^n}{\Delta_1} f^{n-1} \quad (2.90)$$

と表せる。ただし, $f^n = f(t^n) = \mathcal{N}(y(t^n))$ を表す。すると, $y^{n+1} - y^n$ は式 (2.90) を用いて式 (2.81) より

$$\begin{aligned} y^{n+1} - y^n &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \tilde{f}(t) dt \\ &= \frac{f^n}{\Delta_1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t - t^{n-1}) dt - \frac{f^{n-1}}{\Delta_1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t - t^n) dt \\ &= \frac{f^n}{\Delta_1} \left[\frac{1}{2} (t^{n+1} - t^{n-1})^2 - \frac{1}{2} (t^n - t^{n-1})^2 \right] - \frac{f^{n-1}}{\Delta_1} \left[\frac{1}{2} (t^{n+1} - t^n)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\Delta_1} \frac{1}{2} ((\Delta_0 + \Delta_1)^2 - \Delta_1^2) f^n - \frac{1}{\Delta_1} \frac{\Delta_0^2}{2} f^{n-1} \\ &= \frac{\Delta_0^2 + 2\Delta_0\Delta_1}{2\Delta_1} f^n - \frac{\Delta_0^2}{2\Delta_1} f^{n-1} \end{aligned} \quad (2.91)$$

となる。ここで, 式 (2.91) は時間刻み Δt が変化しない場合, つまり $\Delta_{0,1} = \Delta t$ のとき

$$y^{n+1} = y^n + \frac{3}{2} \Delta t f^n - \frac{1}{2} \Delta t f^{n-1} \quad (2.92)$$

となり，一般に知られている AB2 法の離散化式の係数と一致する．

また，同様に $y^{n+1} - y^{n-1}$ は

$$\begin{aligned}
y^{n+1} - y^{n-1} &= \frac{f^n}{\Delta_1} \int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}} (t - t^{n-1}) dt - \frac{f^{n-1}}{\Delta_1} \int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}} (t - t^n) dt \\
&= \frac{f^n}{\Delta_1} \left[\frac{1}{2} (t^{n+1} - t^{n-1})^2 \right] - \frac{f^{n-1}}{\Delta_1} \left[\frac{1}{2} (t^{n+1} - t^n)^2 - \frac{1}{2} (t^{n-1} - t^n)^2 \right] \\
&= \frac{f^n}{\Delta_1} \frac{(\Delta_0 + \Delta_1)^2}{2} - \frac{f^{n-1}}{\Delta_1} \left(\frac{\Delta_0^2}{2} - \frac{\Delta_1^2}{2} \right) \\
&= \frac{(\Delta_0 + \Delta_1)^2}{2\Delta_1} f^n - \frac{\Delta_0^2 - \Delta_1^2}{2\Delta_1} f^{n-1} \tag{2.93}
\end{aligned}$$

である．ここで，式 (2.88) に式 (2.91)，(2.93) を代入して整理すると

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^{n+1} &= -\alpha_1 (y^{n+1} - y^n) - \alpha_2 (y^{n+1} - y^{n-1}) \\
&= -\alpha_1 \left(\frac{\Delta_0^2 + 2\Delta_0\Delta_1}{2\Delta_1} f^n - \frac{\Delta_0^2}{2\Delta_1} f^{n-1} \right) \\
&\quad - \alpha_2 \left(\frac{(\Delta_0 + \Delta_1)^2}{2\Delta_1} f^n - \frac{\Delta_0^2 - \Delta_1^2}{2\Delta_1} f^{n-1} \right) \\
&= \frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_1} f^n - \frac{\Delta_0}{\Delta_1} f^{n-1} \\
&= \beta_0 f^n + \beta_1 f^{n-1} \tag{2.94}
\end{aligned}$$

となる．ただし， β_0, β_1 はそれぞれ

$$\beta_0 = \frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_1}, \quad \beta_1 = -\frac{\Delta_0}{\Delta_1} \tag{2.95}$$

である．以上で，AB2 から $\mathcal{N}(y)$ の項が求まった．また，式 (2.89) の $\mathcal{L}(y)$ の項は $n+1$ 時間ステップを使用するので $\mathcal{L}(y^{n+1}) = Ly^{n+1}$ と表せる．ただし， L は拡散項にかかる係数部分の値を表す．さらに，式 (2.89) の左辺には BDF2 (式 (2.87)) を用いるため，これら全てをまとめると式 (2.89) は

$$\alpha_0 y^{n+1} + \alpha_1 y^n + \alpha_2 y^{n-1} = \beta_0 f^n + \beta_1 f^{n-1} + Ly^{n+1} \tag{2.96}$$

と表せる．この式を整理すると

$$y^{n+1} = (\alpha_0 - L)^{-1} (-\alpha_1 y^n - \alpha_2 y^{n-1} + \beta_0 f^n + \beta_1 f^{n-1}) \tag{2.97}$$

となる．よって，第 2 ステップにおける時間刻みが可変の時間積分 AB2-BDF2 の離散化式 (2.97) が導出された．

第 2 ステップ以降の計算は，式 (2.89) の左辺に BDF2 である式 (2.87)， $\mathcal{N}(y)$ の計算に AB3， $\mathcal{L}(y)$ に $n+1$ 時間ステップを用いる．次に，第 2 ステップ以降の時間積分の離散化式 AB3-BDF2 を導出する．はじめに，時間刻み Δt について式 (2.82) の定義に加えて

$$\Delta_0 = t^{n+1} - t^n, \quad \Delta_1 = t^n - t^{n-1}, \quad \Delta_2 = t^{n-1} - t^{n-2} \quad (2.98)$$

とする．まず， $\mathcal{N}(y)$ の項を AB3 から計算する．式 (2.81) の $\tilde{f}(t)$ を (t^n, f^n) と (t^{n-1}, f^{n-1}) ， (t^{n-2}, f^{n-2}) が与えられた 2 次の Lagrange 補間多項式とおけば式 (2.98) を用いて $\tilde{f}(t)$ は

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \frac{(t - t^{n-1})(t - t^{n-2})}{(t^n - t^{n-1})(t^n - t^{n-2})} f^n + \frac{(t - t^n)(t - t^{n-2})}{(t^{n-1} - t^n)(t^{n-1} - t^{n-2})} f^{n-1} \\ &\quad + \frac{(t - t^n)(t - t^{n-1})}{(t^n - t^{n-1})(t^{n-2} - t^{n-1})} f^{n-2} \\ &= \frac{(t - t^{n-1})(t - t^{n-2})}{\Delta_1(\Delta_1 + \Delta_2)} f^n + \frac{(t - t^n)(t - t^{n-2})}{\Delta_1\Delta_2} f^{n-1} \\ &\quad + \frac{(t - t^n)(t - t^{n-1})}{\Delta_2(\Delta_1 + \Delta_2)} f^{n-2} \end{aligned} \quad (2.99)$$

と表せる．すると， $y^{n+1} - y^n$ は式 (2.99) を用いて式 (2.81) より

$$\begin{aligned} y^{n+1} - y^n &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \tilde{f}(t) dt \\ &= \frac{f^n}{\Delta_1(\Delta_1 + \Delta_2)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t - t^{n-1})(t - t^{n-2}) dt \\ &\quad + \frac{f^{n-1}}{\Delta_1\Delta_2} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t - t^n)(t - t^{n-2}) dt \\ &\quad + \frac{f^{n-2}}{\Delta_2(\Delta_1 + \Delta_2)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t - t^n)(t - t^{n-1}) dt \\ &= \frac{1}{\Delta_1 + \Delta_2} \left[\frac{(\Delta_0 + \Delta_1)^2}{\Delta_1} \left(\frac{\Delta_0 + \Delta_1}{3} + \frac{\Delta_2}{2} \right) - \Delta_1 \left(\frac{\Delta_1}{3} + \frac{\Delta_2}{2} \right) \right] f^n \\ &\quad - \frac{\Delta_0^2}{\Delta_1\Delta_2} \left(\frac{\Delta_0}{3} + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} \right) f^{n-1} \\ &\quad + \frac{\Delta_0^2}{\Delta_2(\Delta_1 + \Delta_2)} \left(\frac{\Delta_0}{3} + \frac{\Delta_1}{2} \right) f^{n-2} \end{aligned} \quad (2.100)$$

と求まる．ここで，式 (2.100) は時間刻み Δt が変化しない場合，つまり $\Delta_{0,1,2} = \Delta t$ のとき

$$y^{n+1} = y^n + \frac{23}{12}\Delta t f^n - \frac{4}{3}\Delta t f^{n-1} + \frac{5}{12}\Delta t f^{n-2} \quad (2.101)$$

となり，一般に知られている AB3 法の係数と一致する．

同様に， $y^{n+1} - y^{n-1}$ は

$$\begin{aligned} y^{n+1} - y^{n-1} &= \int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}} \tilde{f}(t) dt \\ &= \frac{f^n}{\Delta_1(\Delta_1 + \Delta_2)} \int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}} (t - t^{n-1})(t - t^{n-2}) dt \\ &\quad - \frac{f^{n-1}}{\Delta_1\Delta_2} \int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}} (t - t^n)(t - t^{n-2}) dt \\ &\quad + \frac{f^{n-2}}{\Delta_2(\Delta_1 + \Delta_2)} \int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}} (t - t^n)(t - t^{n-1}) dt \\ &= \frac{(\Delta_0 + \Delta_1)^2}{\Delta_1(\Delta_1 + \Delta_2)} \left(\frac{\Delta_0 + \Delta_1}{3} + \frac{\Delta_2}{2} \right) f^n \\ &\quad - \frac{1}{\Delta_1\Delta_2} \left[\frac{\Delta_0^3 + \Delta_1^3}{3} + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} (\Delta_0^2 - \Delta_1^2) \right] f^{n-1} \\ &\quad + \frac{1}{\Delta_2(\Delta_1 + \Delta_2)} \left(\frac{\Delta_0^3}{3} + \frac{\Delta_0^2\Delta_1}{2} - \frac{\Delta_1^3}{6} \right) f^{n-2} \quad (2.102) \end{aligned}$$

となる．式 (2.88) に式 (2.100) ， (2.102) を代入して整理すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^{n+1} &= -\alpha_1(y^{n+1} - y^n) - \alpha_2(y^{n+1} - y^{n-1}) \\ &= \gamma_0 f^n + \gamma_1 f^{n-1} + \gamma_2 f^{n-2} \quad (2.103) \end{aligned}$$

とできる．ここで， γ_i ($i = 0, 1, 2$) はそれぞれ

$$\gamma_0 = \frac{(\Delta_0 + \Delta_1)(2\Delta_0 + 3\Delta_1 + 3\Delta_2)}{3\Delta_1(\Delta_1 + \Delta_2)} \quad (2.104)$$

$$\gamma_1 = -\frac{\Delta_0(2\Delta_0 + 2\Delta_1 + 3\Delta_2)}{3\Delta_1\Delta_2} \quad (2.105)$$

$$\gamma_2 = \frac{2\Delta_0(\Delta_0 + \Delta_1)}{3\Delta_2(\Delta_1 + \Delta_2)} \quad (2.106)$$

である．よって，AB3 から $\mathcal{N}(y)$ の項が求まったので， $n + 1$ 時間ステップの $\mathcal{L}(y)$ と式 (2.87) も用いて式 (2.89) をまとめると

$$\alpha_0 y^{n+1} + \alpha_1 y^n + \alpha_2 y^{n-1} = \gamma_0 f^n + \gamma_1 f^{n-1} + \gamma_2 f^{n-2} + Ly^{n+1} \quad (2.107)$$

と表せる．この式を整理すると

$$y^{n+1} = (\alpha_0 - L)^{-1}(-\alpha_1 y^n - \alpha_2 y^{n-1} + \gamma_0 f^n + \gamma_1 f^{n-1} + \gamma_2 f^{n-2}) \quad (2.108)$$

となる．以上で，第 2 ステップ以降における時間刻みが可変の時間積分 AB3-BDF2 の離散化式 (2.108) が導出された．

ここまでは拡散項 $\mathcal{L}(y)$ が存在する場合の離散化式を導出した．しかし，拡散係数が 0 で拡散項がない場合は BDF2 を用いないため離散化式が異なる．最後に，拡散項がない場合の時間積分の離散化式について述べる．拡散項がない場合は第 2 ステップの計算には AB2 法，第 2 ステップ以降の計算には AB3 法のみを使用する．そのため，第 2 ステップの離散化式は式 (2.91) より

$$y^{n+1} = y^n + \frac{\Delta_0^2 + 2\Delta_0\Delta_1}{2\Delta_1} f^n - \frac{\Delta_0^2}{2\Delta_1} f^{n-1} \quad (2.109)$$

である．また，第 2 ステップ以降の離散化式は式 (2.100) より

$$y^{n+1} = y^n + C_0 f^n + C_1 f^{n-1} + C_2 f^{n-2} \quad (2.110)$$

となる．ただし， C_i ($i = 0, 1, 2$) はそれぞれ

$$C_0 = \frac{1}{\Delta_1 + \Delta_2} \left[\frac{(\Delta_0 + \Delta_1)^2}{\Delta_1} \left(\frac{\Delta_0 + \Delta_1}{3} + \frac{\Delta_2}{2} \right) - \Delta_1 \left(\frac{\Delta_1}{3} + \frac{\Delta_2}{2} \right) \right] \quad (2.111)$$

$$C_1 = -\frac{\Delta_0^2}{\Delta_1\Delta_2} \left(\frac{\Delta_0}{3} + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} \right) \quad (2.112)$$

$$C_2 = \frac{\Delta_0^2}{\Delta_2(\Delta_1 + \Delta_2)} \left(\frac{\Delta_0}{3} + \frac{\Delta_1}{2} \right) \quad (2.113)$$

である．

2.5 数値モデルの規格化

数値モデルの規格化を行う．渦度 ω , 流れ関数 ϕ , 密度ゆらぎ ρ_1 , 時刻 t , 空間 x, y を次のように無次元化する．

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \frac{1}{\gamma_g} \omega, & \bar{\phi} &= \frac{1}{L^2 \gamma_g} \phi, & \bar{\rho}_1 &= \frac{1}{L \rho'_0} \rho_1, \\ \bar{t} &= \gamma_g t, & \bar{x} &= \frac{x}{L}, & \bar{y} &= \frac{y}{L}\end{aligned}\tag{2.114}$$

ただし, $L = L_x / \pi$ は空間スケールを表す． γ_g は交換型不安定性の駆動力

$$\gamma_g = \sqrt{\frac{g \rho'_0}{\rho_0}}\tag{2.115}$$

である．また, γ_g^{-1} が交換型不安定性の成長を表す時間スケールを示す．

式 (2.114) を用いて渦度方程式 (2.31) , 流れ関数に関する Poisson 方程式 (2.34) そして密度の連続の式 (2.40) の規格化を行う．

はじめに, 渦度方程式 (2.31) は

$$\begin{aligned}\gamma_g^2 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{t}} + \sigma L \bar{y} \frac{\gamma_g}{L} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{x}} + \frac{L^2 \gamma_g^2}{L^2} \{\bar{\phi}, \bar{\omega}\} &= \nu \frac{\gamma_g}{L^2} \bar{\Delta} \bar{\omega} - \gamma_g^2 \frac{L}{L} \frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial \bar{x}} \\ \iff \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{t}} + \frac{\sigma}{\gamma_g} \bar{y} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{x}} + \{\bar{\phi}, \bar{\omega}\} &= \frac{\nu}{L^2 \gamma_g} \bar{\Delta} \bar{\omega} - \frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial \bar{x}}\end{aligned}\tag{2.116}$$

となる．ただしここで, 規格化された Poisson 括弧 $[\phi, \omega] = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}$ を用い, $\bar{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2}$ を表す．さらに, $\bar{\sigma} = \sigma / \gamma_g$, $\bar{\nu} = \nu / L^2 \gamma_g$ とおくと最終的に規格化された渦度方程式が

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{t}} + \bar{\sigma} \bar{y} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{x}} + \{\bar{\phi}, \bar{\omega}\} = \bar{\nu} \bar{\Delta} \bar{\omega} - \frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial \bar{x}}\tag{2.117}$$

と求まる．

次に, 規格化された Poisson 方程式は式 (2.114) を用いて

$$\frac{L^2 \gamma_g}{L^2} \bar{\Delta} \bar{\phi} = -\gamma_g \bar{\omega} \iff \bar{\Delta} \bar{\phi} = -\bar{\omega}\tag{2.118}$$

である．

最後に，密度の連続の式 (2.40) は式 (2.114) より

$$\begin{aligned}
 L\rho'_0\gamma_g\frac{\partial\bar{\rho}_1}{\partial\bar{t}} + \sigma L\bar{y}\frac{L\rho'_0}{L}\frac{\partial\bar{\rho}_1}{\partial\bar{x}} + L\rho'_0\gamma_g\{\bar{\phi}, \bar{\rho}_1\} &= L\rho'_0\gamma_g\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{x}} + \kappa\frac{L\rho'_0}{L^2}\bar{\Delta}\bar{\rho}_1 \\
 \iff \frac{\partial\bar{\rho}_1}{\partial\bar{t}} + \frac{\sigma}{\gamma_g}\bar{y}\frac{\partial\bar{\rho}_1}{\partial\bar{x}} + \{\bar{\phi}, \bar{\rho}_1\} &= \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{x}} + \frac{\kappa}{L^2\gamma_g}\bar{\Delta}\bar{\rho}_1
 \end{aligned} \tag{2.119}$$

となる．ここで， $\bar{\sigma} = \sigma/\gamma_g$ ， $\bar{\kappa} = \kappa/L^2\gamma_g$ を用いると規格化された密度の連続の式が

$$\frac{\partial\bar{\rho}_1}{\partial\bar{t}} + \bar{\sigma}\bar{y}\frac{\partial\bar{\rho}_1}{\partial\bar{x}} + \{\bar{\phi}, \bar{\rho}_1\} = \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{x}} + \bar{\kappa}\bar{\Delta}\bar{\rho}_1 \tag{2.120}$$

と求まる．

ここまですをまとめると，規格化された数理モデルは次のようになる．

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{t}} + \bar{\sigma}\bar{y}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{x}} + \{\bar{\phi}, \bar{\omega}\} &= \bar{\nu}\bar{\Delta}\bar{\omega} - \frac{\partial\bar{\rho}_1}{\partial\bar{x}} \\
 \bar{\Delta}\bar{\phi} &= -\bar{\omega}
 \end{aligned} \tag{2.121}$$

$$\frac{\partial\bar{\rho}_1}{\partial\bar{t}} + \bar{\sigma}\bar{y}\frac{\partial\bar{\rho}_1}{\partial\bar{x}} + \{\bar{\phi}, \bar{\rho}_1\} = \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{x}} + \bar{\kappa}\bar{\Delta}\bar{\rho}_1$$

$$\left(\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\gamma_g}, \quad \bar{\nu} = \frac{\nu}{L^2\gamma_g}, \quad \bar{\kappa} = \frac{\kappa}{L^2\gamma_g} \right)$$

3 せん断流れがない場合の交換型不安定性

この節では，せん断流れが流れていない場合 ($\sigma = 0$) の交換型不安定性の振る舞いを見る．そのため，渦度方程式 (2.31) と密度の連続の式 (2.40) に含まれるせん断流れの項は無視する．

3.1 交換型不安定性の線形成長率

交換型不安定性の線形成長率を確認する．はじめに， ω ， ϕ ， ρ_1 をそれぞれ

$$\begin{aligned}\omega &= \hat{\omega} e^{i(k_x x + k_y y) + \gamma t} \\ \phi &= \hat{\phi} e^{i(k_x x + k_y y) + \gamma t} \\ \rho_1 &= \hat{\rho}_1 e^{i(k_x x + k_y y) + \gamma t}\end{aligned}\quad (3.1)$$

とおく．線形化した渦度方程式 (2.31) と密度の連続の式 (2.40)，および流れ関数に関する Poisson 方程式 (2.34) に式 (3.1) の 3 式を代入すると，式 (2.31) は

$$\gamma \hat{\omega} = -\nu (k_x^2 + k_y^2) \hat{\omega} - \frac{g}{\rho_0} i k_x \hat{\rho}_1 \quad (3.2)$$

となり，式 (2.34) は

$$(k_x^2 + k_y^2) \hat{\phi} = \hat{\omega} \quad (3.3)$$

である．また，式 (2.40) は

$$\begin{aligned}\gamma \hat{\rho}_1 &= \rho'_0 i k_x \hat{\phi} - \kappa (k_x^2 + k_y^2) \hat{\rho}_1 \\ \iff \hat{\rho}_1 &= \frac{\rho'_0}{\gamma + \kappa (k_x^2 + k_y^2)} i k_x \hat{\phi}\end{aligned}\quad (3.4)$$

と表される．ここでさらに，式 (3.2) に式 (3.3)，(3.4) を代入すると次のようになる．ただし， $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ とする．

$$\gamma k^2 \hat{\phi} = -\nu (k^2)^2 \hat{\phi} + \frac{1}{\gamma + \kappa k^2} \frac{g \rho'_0}{\rho_0} k_x^2 \hat{\phi} \quad (3.5)$$

式 (3.5) を整理すると

$$(\gamma + \nu k^2) (\gamma + \kappa k^2) = \gamma_g^2 \frac{k_x^2}{k^2} \quad (k^2 \neq 0) \quad (3.6)$$

となる．ここで， $\gamma_g^2 = g\rho'_0/\rho_0$ であり γ_g は交換型不安定性の駆動力を表す．以上で，交換型不安定性の成長率 γ の関係式 (3.6) が求まった．

次に， $\nu = \kappa = D$ として式 (3.6) より成長率 γ について調べる．式 (3.6) は

$$\gamma^2 + 2Dk^2\gamma + D^2(k^2)^2 - \gamma_g^2 \frac{k_x^2}{k^2} = 0 \quad (3.7)$$

となる．ここで，解の公式より γ の値を求めると

$$\gamma = -Dk^2 \pm \gamma_g \sqrt{\frac{k_x^2}{k^2}} \quad (3.8)$$

である． γ の大きい方の値を γ^+ とおくと

$$\gamma^+ = -D(k_x^2 + k_y^2) + \gamma_g \sqrt{\frac{k_x^2}{k_x^2 + k_y^2}} \quad (3.9)$$

と表される．よって， $\nu = \kappa = D$ で

$$\gamma_g > 0, \quad \frac{\gamma_g}{k_x^2 + k_y^2} \sqrt{\frac{k_x^2}{k_x^2 + k_y^2}} > D \quad (3.10)$$

を満たす波数が，交換型不安定性によって γ^+ の成長率で成長する．

また， γ は $k_x \rightarrow 0$, $k_y = 0$ で最大値を取ることが分かる．

3.2 シュミット数の違いによる変化

パラメータ ν と κ はそれぞれ渦度方程式 (2.31) と密度の連続の式 (2.40) の拡散係数である．この節では， ν と κ の比を変更したときの振る舞いの違いを見る．ここで，動粘性係数 ν と密度の拡散係数 κ の比はシュミット数と呼ばれ S_c を用いて

$$S_c = \frac{\nu}{\kappa} \quad (3.11)$$

と表される [17]．はじめにこの節で行うシミュレーションの条件について述べ，その後シミュレーション結果を見る．

3.2.1 シミュレーション条件

計算領域は， $L_x = \pi$, $L_y = \pi$ として $x \in [0, L_x]$, $y \in [0, L_y]$ の正方形領域とした．渦度 ω の初期条件は

$$\omega(0, x, y) = 0 \quad (3.12)$$

を与え，流れ関数 $\phi(0, x, y)$ の初期条件は $\omega(0, x, y)$ より計算で求める．

初期擾乱 $\rho_1(0, x, y)$ は

$$\rho_1(0, x, y) = \rho_f + \rho_n \quad (3.13)$$

を与える．ここで， ρ_f は 1 波数からなる基本擾乱

$$\rho_f = \epsilon \cos(2x + 10y) \quad (3.14)$$

である．基本擾乱は $\epsilon = 10^{-2}$ の振幅および波数 $k_x = 2$, $k_y = 10$ を持つ． ρ_n は複数の波の重ねあわせからなるノイズであり

$$\rho_n = \sum_{\substack{-10 \leq k_x \leq 10 \\ 1 \leq k_y \leq 10}} 0.1\epsilon (R_c \cos(k_x x + k_y y) + R_s \sin(k_x x + k_y y)) \quad (3.15)$$

と表される．ただし， R_c, R_s は区間 $(-1, 1)$ の乱数である．

時間刻み Δt は式 (2.76) のクーラン条件を満たす最大の値をとる．ここで，数値安定性に余裕を持つためにクーラン数は $C = 0.1$ とした．また，格子幅 h は式 (2.77) の値， v_{\max} は式 (2.78) の値を用いる．

2.4 節で述べたように，独立なパラメータは $\bar{\nu}$, κ , σ の 3 つである．しかし，本節で行うシミュレーションはせん断流れがない場合を考えているため $\sigma = 0$ である． $\bar{\nu}$ の値を変更する際は，動粘性係数 ν の値を代表して変更し γ_g の値を固定する．このとき

$$g = 1.0, \quad \rho_0 = 1.0, \quad \rho'_0 = 1.0 \quad (3.16)$$

$$\gamma_g = \sqrt{\frac{g\rho'_0}{\rho_0}} = 1.0$$

とする．以降，本研究で行うシミュレーションは全て γ_g の値を式 (3.16) に固定し，動粘性係数 ν の値の変更で $\bar{\nu}$ の値を変える．

シュミット数の比を変えてシミュレーションを行うために， ν と κ の値を

$$\nu, \kappa = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4} \quad (3.17)$$

のように各 3 つ取る．図 4 は本節で行うシミュレーションの ν, κ の値とそのときのシュミット数 S_c の値を示している．式 (3.17) のように ν, κ の値を変え，図 4 の (a) ~ (i) までの 9 つのシミュレーションを行う．

グリッド数は $\nu, \kappa = 10^{-2}$ のとき (c) は $N_x = 256$, $N_y = 256$ とした． ν, κ の取る値が 10^{-2} , 10^{-3} のみの場合 (b), (e), (f) は $N_x = 512$, $N_y = 512$ で行った． ν, κ のどちらかが 10^{-4} の値を取るとき (a), (d), (g), (h), (i) は小さい構造が作られるため $N_x = 1024$, $N_y = 1024$ とした．

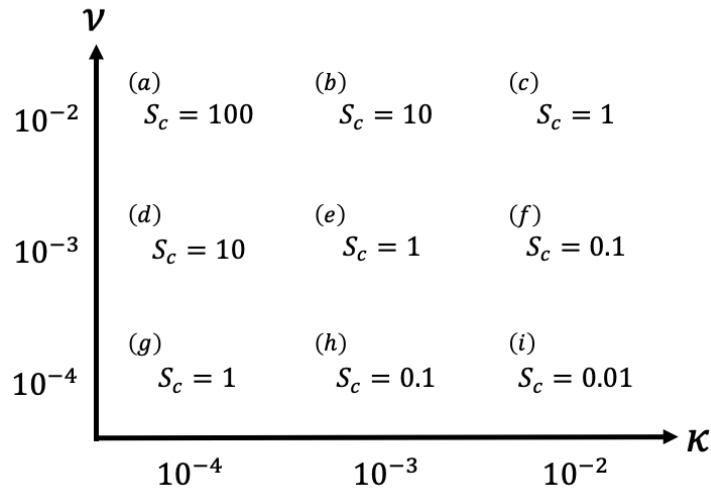


図 4: 動粘性係数 ν と密度の拡散係数 κ の値, そのときのシュミット数 S_c の値を示す.
 ν , κ の値を変え, (a) ~ (i) までの 9 つのシミュレーションを行う.

3.2.2 シミュレーション結果

前節で示した条件で図 4 の 9 つのシミュレーションを $t = 30$ まで行った. シミュレーション結果を図 5 に示す. 図 5 は $t = 30$ における各条件での渦度 ω と密度ゆらぎ ρ_1 の波数 k_y に対するスペクトル分布

$$|\hat{\omega}(k_y)|^2 = \sum_{k_x} |\hat{\omega}(k_x, k_y)|^2 \quad (3.18)$$

$$|\hat{\rho}_1(k_y)|^2 = \sum_{k_x} |\hat{\rho}_1(k_x, k_y)|^2$$

をプロットしている. 紫色の線が渦度 ω のスペクトル分布, 緑線が密度ゆらぎ ρ_1 のスペクトル分布を表している.

(c), (e), (g) は全てシュミット数 $S_c = 1.0$ のシミュレーション結果であり, 粘性係数 ν と密度の拡散係数 κ の値が等しい. 結果より, 渦度 ω のスペクトルが密度ゆらぎ ρ_1 のスペクトルより各 k_y において常に高い値を持っていることが確認できる.

次に ν と κ が異なる値を持つ場合を見る. まず, (a), (b), (d) の $S_c > 1$ の結果を見る. これらは, κ の値よりも ν の値が大きい場合である. このときは, ν による減衰が大きく (b) と (e) や (a), (d) と (g) を比較するとより低波数で渦度 ω のスペクトルが減衰していることが確認できる. 特に, (a) では密度ゆらぎ ρ_1 のスペクトルよりも渦度 ω の方が小

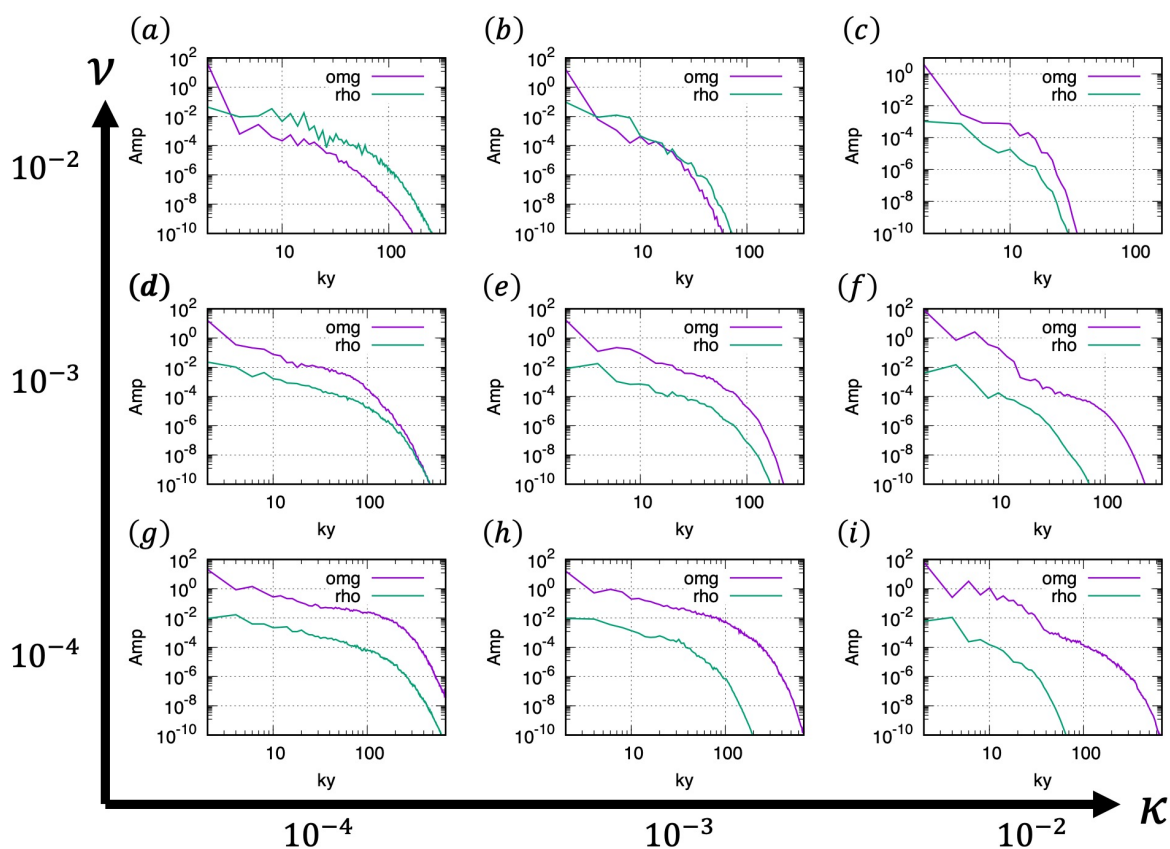


図 5: 動粘性係数 ν と密度の拡散係数 κ の値を変えたときの渦度 ω と密度ゆらぎ ρ_1 の $t = 30$ におけるスペクトル分布．紫線が渦度 ω ，緑線が密度ゆらぎ ρ_1 を示している．

さくなっており， $S_c = 1.0$ の特徴と逆転している．また，(a), (d), (g) の比較では κ の値を固定して ν を変更したときの比較となる．ここで，渦度 ω のスペクトル分布の違いはさきほど述べた通りだが，密度ゆらぎ ρ_1 のスペクトルも κ を固定しているにも関わらずわずかにだがより低波数で減衰している．よって，密度ゆらぎ ρ_1 は κ による減衰に加えて渦度とのカップリングによって ν を通じても減衰していると考えられる．

最後に，(f), (h), (i) の $S_c < 1$ の結果を見る．ここでは， ν の値よりも κ の値の方が大きい．(e) と (f) や (g) と (h), (i) を比較すると $S_c > 1$ の場合と逆に κ の減衰が大きく密度ゆらぎ ρ_1 がより低波数で減衰していることが確認できる．また，これらの場合でも (g), (h), (i) を比較してみると ν の値を固定しているにも関わらず渦度 ω のスペクトルもより低波数で減衰している．このことから，渦度 ω も ν による減衰だけでなく密度とのカップリングによって κ からの減衰の影響を受けていると考えられる．

3.3 粘性率を変化させたときの交換型不安定性の振る舞い

この節では、粘性係数 ν の値を変えて交換型不安定性の振る舞いを見る。

3.3.1 シミュレーション条件

計算領域は、 $L_x = \pi$ 、 $L_y = \pi$ として $x \in [0, L_x]$ 、 $y \in [0, L_y]$ の正方領域とした。渦度 ω の初期条件は

$$\omega(0, x, y) = 0 \quad (3.19)$$

を与え、流れ関数 ϕ の初期条件は $\omega(0, x, y)$ より計算で求める。初期擾乱 ρ_1 は

$$\rho_1(0, x, y) = \rho_f + \rho_n \quad (3.20)$$

を与える。ここで、 ρ_f 、 ρ_n は式 (3.14)、(3.15) と等しい。

時間刻み Δt は式 (2.76) のクーラン条件を満たす最大の値をとる。ここで、クーラン数は $C = 0.1$ とし、格子幅 h は式 (2.77)、 v_{\max} は式 (2.78) を用いる。また、式 (3.16) のように交換型不安定性の駆動力は $\gamma_g = 1.0$ とした。

最後に、この節で行うシミュレーションの目的は粘性率 ν を変化させたときの交換型不安定性の振る舞いを調べる事である。そのため、シミュレーションでは粘性率を

$$\nu = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} \quad (3.21)$$

としてそれぞれの振る舞いを調べた。また、拡散による減衰の比が等しくなるように κ の値は $S_c = 1.0$ となる値を与えた。

グリッド数は $\nu = 10^{-1}$ 、 10^{-2} のとき $N_x = 256$ 、 $N_y = 256$ とし、 $\nu = 10^{-3}$ のときは $N_x = 512$ 、 $N_y = 512$ とした。

3.3.2 $\nu = 10^{-1}$ の交換型不安定性

$\nu = 10^{-1}$ における交換型不安定性の振る舞いを見る。渦度 $\hat{\omega}_{k_x, k_y}$ の波数ごとの時間発展の様子を図 6 に示す。紫線はエンストロフィーの時間発展を表している。ここで、エンストロフィー Z は

$$Z = \frac{1}{2L_x L_y} \int |\omega(x, y)|^2 dx dy \quad (3.22)$$

である。他の線は渦度スペクトル $|\hat{\omega}_{k_x, k_y}|^2$ の時間発展を表している。図 6 より、波数 $(k_x, k_y) = (2, 0)$ の波が交換型不安定性によって成長し続ける様子が確認できる。これは、

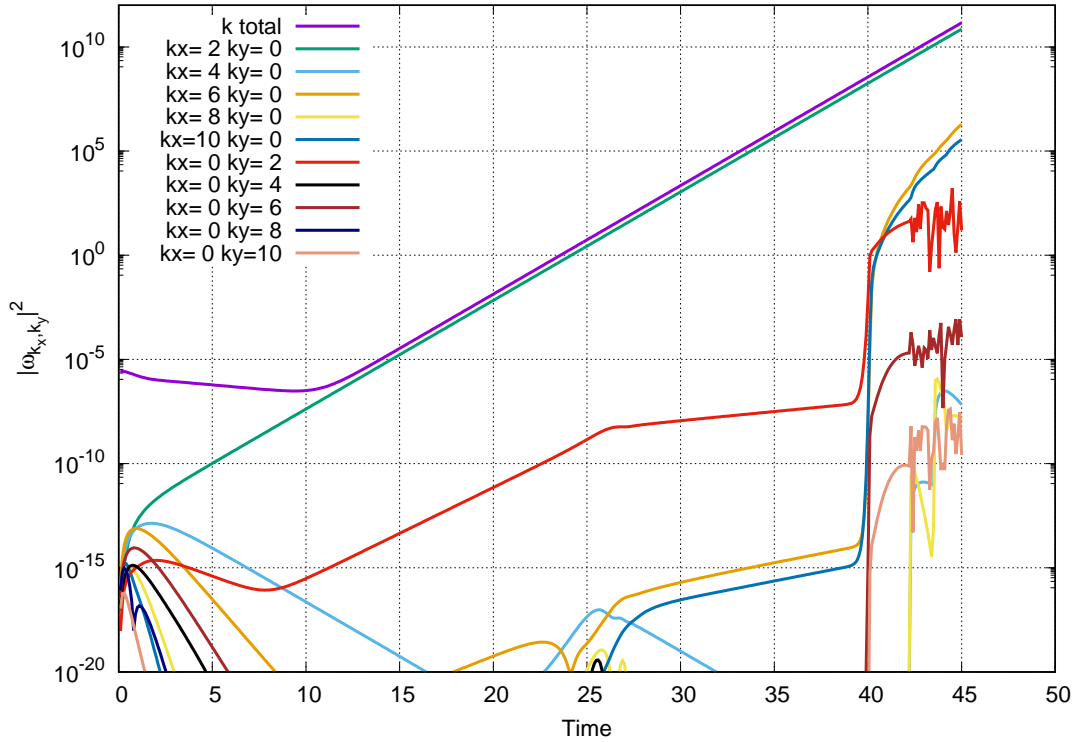


図 6: $\nu = 10^{-1}$ における渦度 $\hat{\omega}_{k_x, k_y}$ の波数ごとの時間発展の様子．紫線がエンストロフィー (式 (3.22)) の時間発展を表し，他の線が渦度スペクトル $|\hat{\omega}_{k_x, k_y}|^2$ の時間発展を表す．

y 方向に一樣と仮定した場合の厳密解と同じ振る舞いと考えられ，このあとは図 6 に見られるように $(2, 0)$ の波が成長を続ける [3]．

3.3.3 $\nu = 10^{-2}$ の交換型不安定性

$\nu = 10^{-2}$ における交換型不安定性の振る舞いを見る．図 7 に渦度 $\hat{\omega}_{k_x, k_y}$ の波数ごとの時間発展の様子を示す．図 7 より乱流が発生したり消えたりを繰り返していることが分かる．振る舞いを詳しく見るために，時刻ごとに区切って考える．

$0 \leq t \leq 20$ における振る舞い

$t = 0$ から $\nu = 10^{-1}$ のときと異なり様々な波数の波が交換型不安定性によって成長する．このとき，様々な波が成長したことによって乱流となる．図 8 より $t = 10$, $t = 13$ でやや乱れた流れを形成していることが分かる．その後， $t = 15$ 付近で $(0, 2)$ の波が大きな振幅を持つ．また， $(0, 2)$ の波の振幅が大きくなると乱れが収まり各波の振幅が減衰し

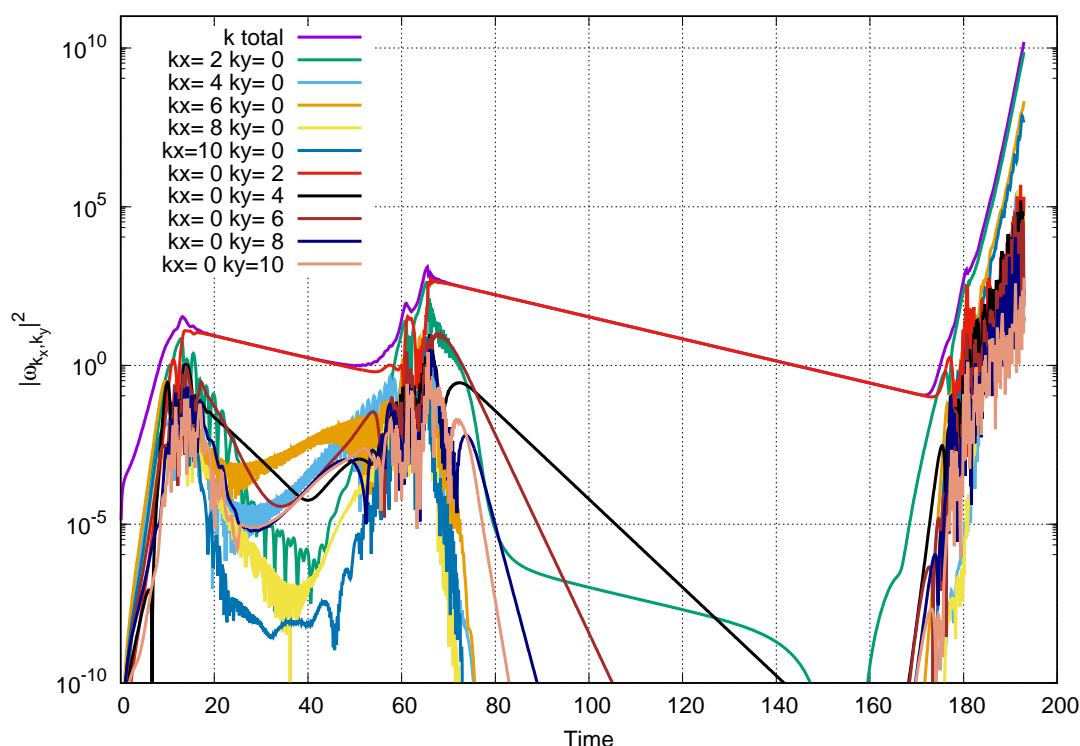


図 7: $\nu = 10^{-2}$ における渦度 $\hat{\omega}_{k_x, k_y}$ の波数ごとの時間発展の様子．紫線がエンストロフィーの時間発展を表し，他の線が渦度スペクトル $|\hat{\omega}_{k_x, k_y}|^2$ の時間発展を表す．

ていく様子が図 7 から確認できる． $t = 20$ における x 方向の速度 v_x と y 方向の速度 v_y をプロットしたものを図 9 に示す．図 9 のスケールから x 方向により強い流れが生じていることが分かる．さらに，図 9 の (a) は y の値によって速さの異なる x 方向の流れとなっており，せん断流れに似た流れとなっている．このことから，まず $(0, 2)$ の振幅が大きくなると y 方向への傾きが大きくなり， x 方向への流れが強くなる．このときに生じたせん断流れに似た流れによって交換型不安定性の成長が抑制されることで， $10 \leq t \leq 13$ の乱れが収まり波の振幅が減衰を始めたと考えられる．

$40 \leq t \leq 80$ における振る舞い

$t = 40$ ではまだ $(0, 2)$ の波の振幅が最も大きいですが，粘性による散逸によって $t = 20$ よりも振幅が小さくなっている．また， $t = 40$ 付近では $k_x \neq 0$ の波が成長を始めていることが確認できる． $t = 40$ における x 方向の速度 v_x と y 方向の速度 v_y をプロットしたものを図 10 に示す．図 10 を見ると x 方向のせん断流れに似た流れとなっているが，速度 v_x が $t = 20$ の速度と比べて遅くなっていることが分かる．このことから， x 方向の流れ

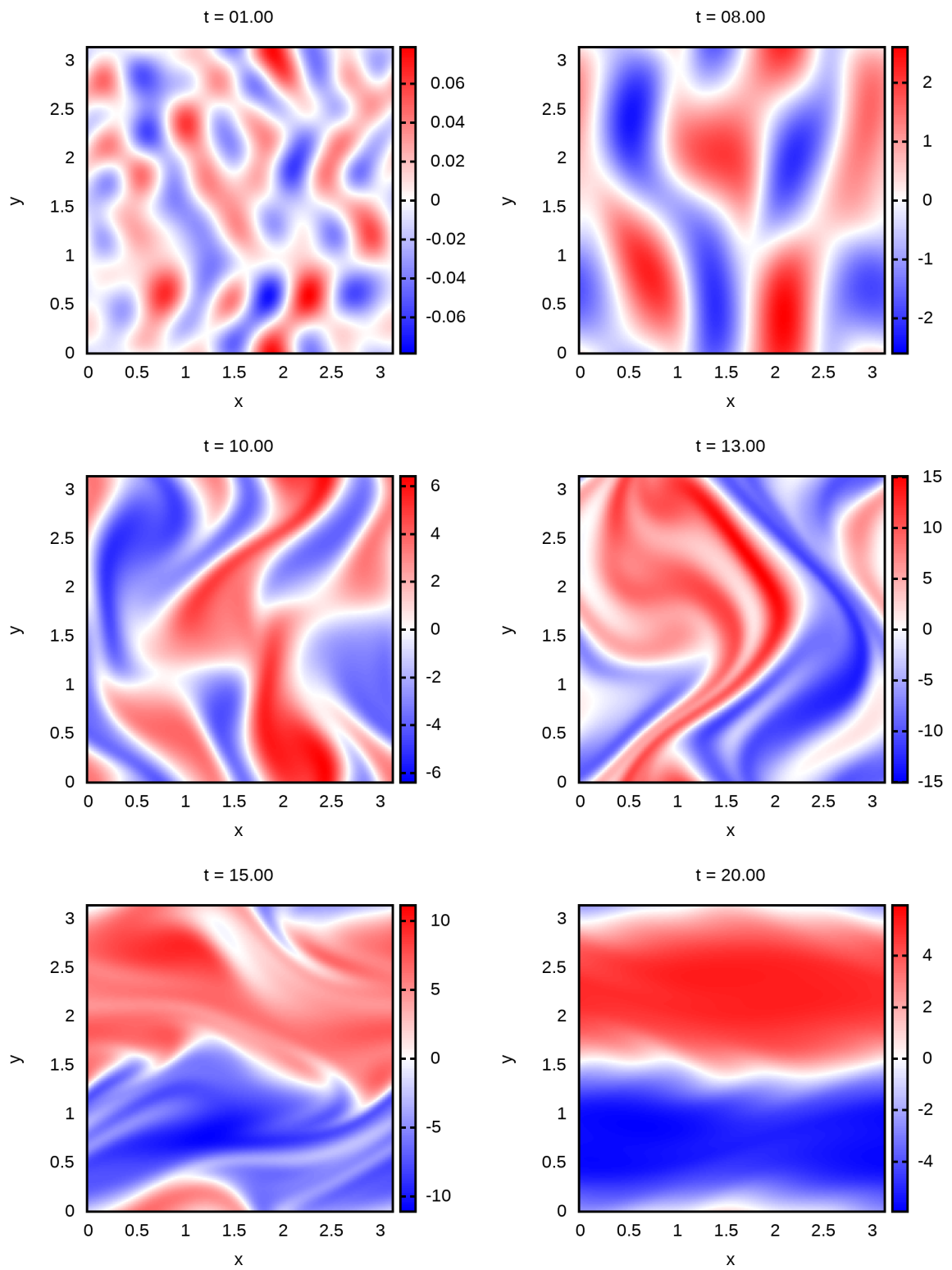
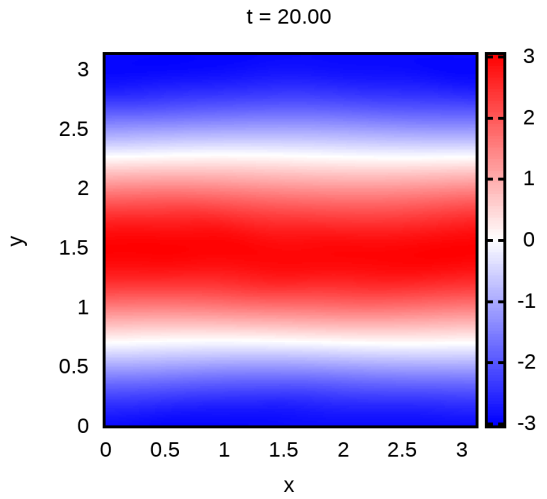
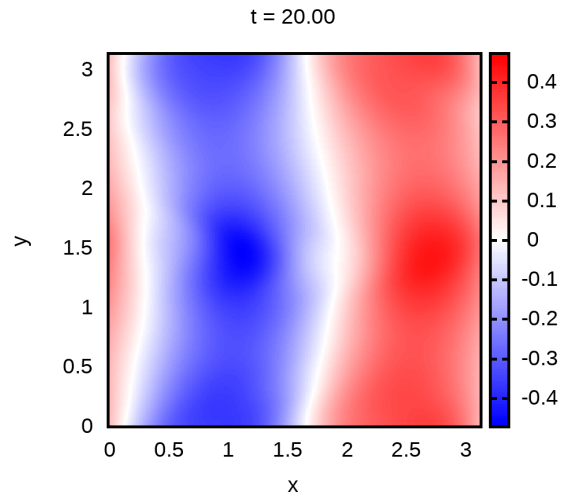


図 8: $\nu = 10^{-2}$ における $t = 1 \sim 20$ までの渦度 ω の実空間プロット .

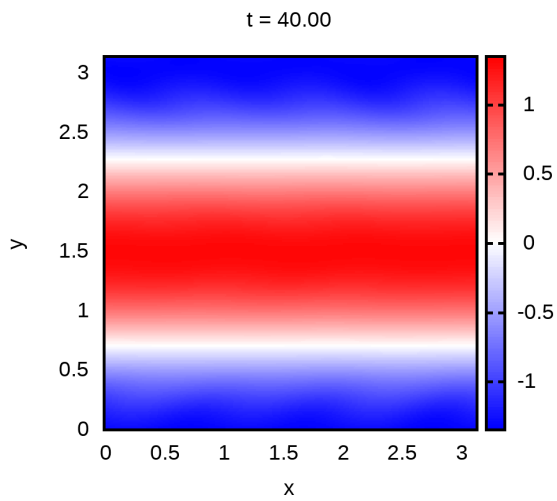


(a) x 方向の速度 v_x

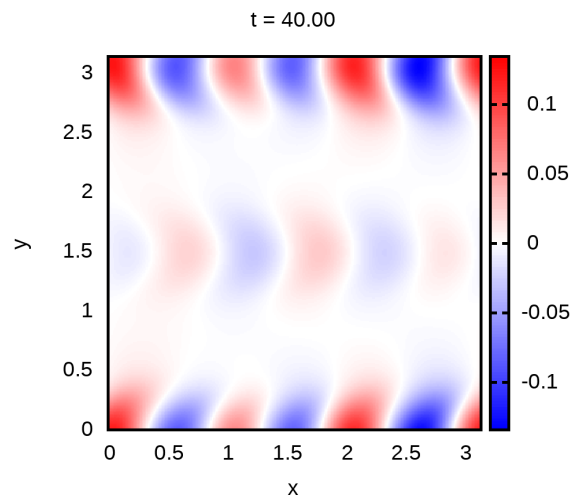


(b) y 方向の速度 v_y

図 9: $t = 20$ における x, y 方向の速度 .



(a) x 方向の速度 v_x



(b) y 方向の速度 v_y

図 10: $t = 40$ における x, y 方向の速度 .

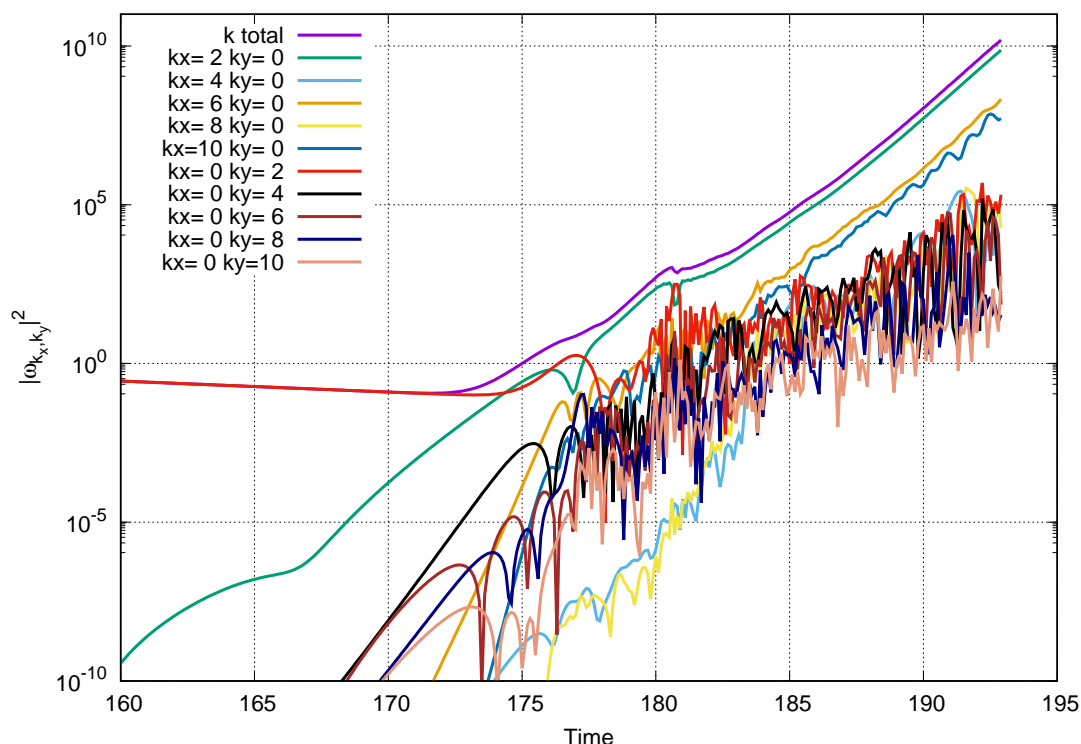


図 11: $t = 160$ 以降の $\nu = 10^{-2}$ における渦度スペクトル $|\hat{\omega}_{k_x, k_y}|^2$ の波数ごとの時間発展の様子。

の速度が小さくなって交換型不安定性の抑制力が弱まったために再び成長が始まったと考えられる。

$t = 40$ 以降の振る舞いは、 $0 \leq t \leq 20$ までの振る舞いと 同じく様々な波数が成長して乱流を形成する。その後、 $(0, 2)$ の波の振幅が大きくなり強い x 方向のせん断流によって $t \geq 65$ では再び交換型不安定性の成長が抑制される。

$t = 160$ 以降の振る舞い

$(0, 2)$ の波の y 方向の傾きがゆるやかになり、 $t = 160$ 付近で再び成長が起きている。図 11 より $t = 180$ 以降は $(2, 0)$ の波の振幅が最も大きく、他の波は $(2, 0)$ の波よりも低い振幅で乱流を形成していることが分かる。ここで、 $(2, 0)$ の波が成長を続ける様子が図 11 に見られ、これは $\nu = 10^{-1}$ の条件で見た振る舞いと似ている。そのため、これ以降は $(2, 0)$ の波が成長し続ける振る舞いが続くと考えられる。

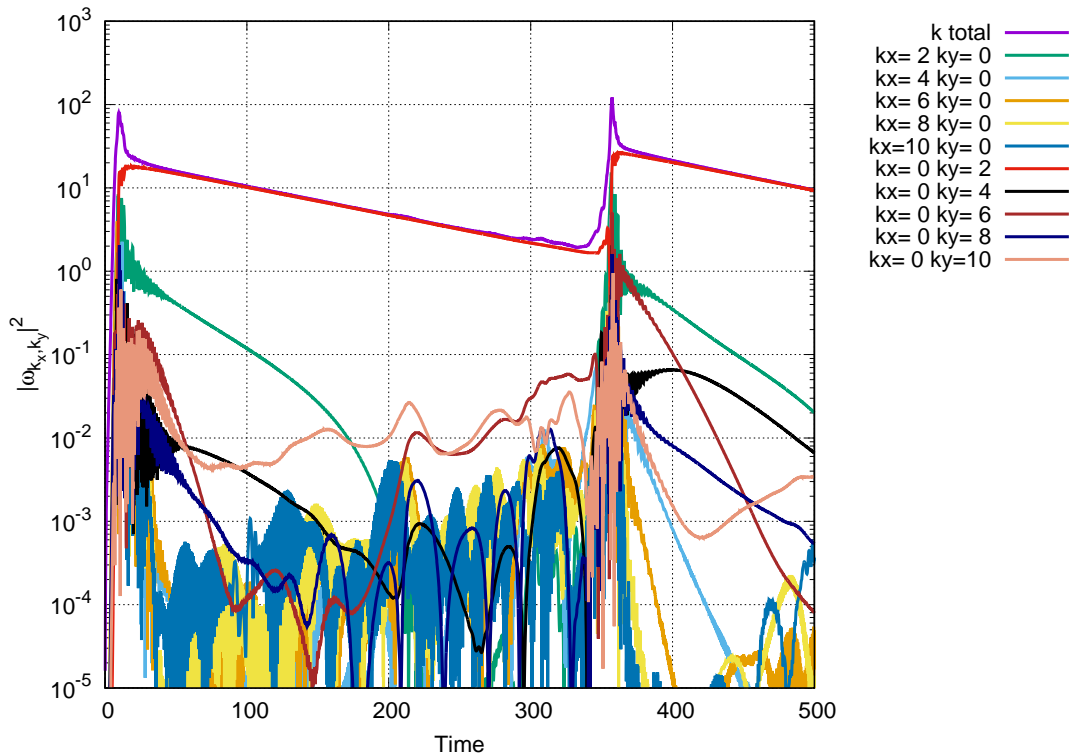


図 12: $\nu = 10^{-3}$ における渦度 $\hat{\omega}_{k_x, k_y}$ の波数ごとの時間発展の様子．紫線がエンストロフィーの時間発展を表し，他の線が渦度スペクトル $|\hat{\omega}_{k_x, k_y}|^2$ の時間発展を表す．

3.3.4 $\nu = 10^{-3}$ の交換型不安定性

$\nu = 10^{-3}$ における交換型不安定性の振る舞いを見る．図 12 に渦度 $\hat{\omega}_{k_x, k_y}$ の波数ごとの時間発展の様子を示す．交換型不安定性による振る舞いは $\nu = 10^{-2}$ の場合と同様で，時刻 $t = 0$ から交換型不安定性によって様々な波数の波が成長して乱流となる (図 13)．その後， $(0, 2)$ の波の振幅が非線形相互作用によって大きくなり， x 方向の流れの速度が強くなって交換型不安定性の成長を抑制する．

図 12 より $\nu = 10^{-2}$ の場合と同様に， $(0, 2)$ の波の振幅が減衰したことによって，再び交換型不安定性が成長していることが確認できる．しかし， $\nu = 10^{-3}$ とした場合は $\nu = 10^{-2}$ の結果と比較して再び交換型不安定性が現れるまでに長い時刻がかかっている．これは粘性率が $\frac{1}{10}$ となったことで，減衰率も同じく $\frac{1}{10}$ となり $(0, 2)$ の波の減衰に時間がかかるためであると考えられる．

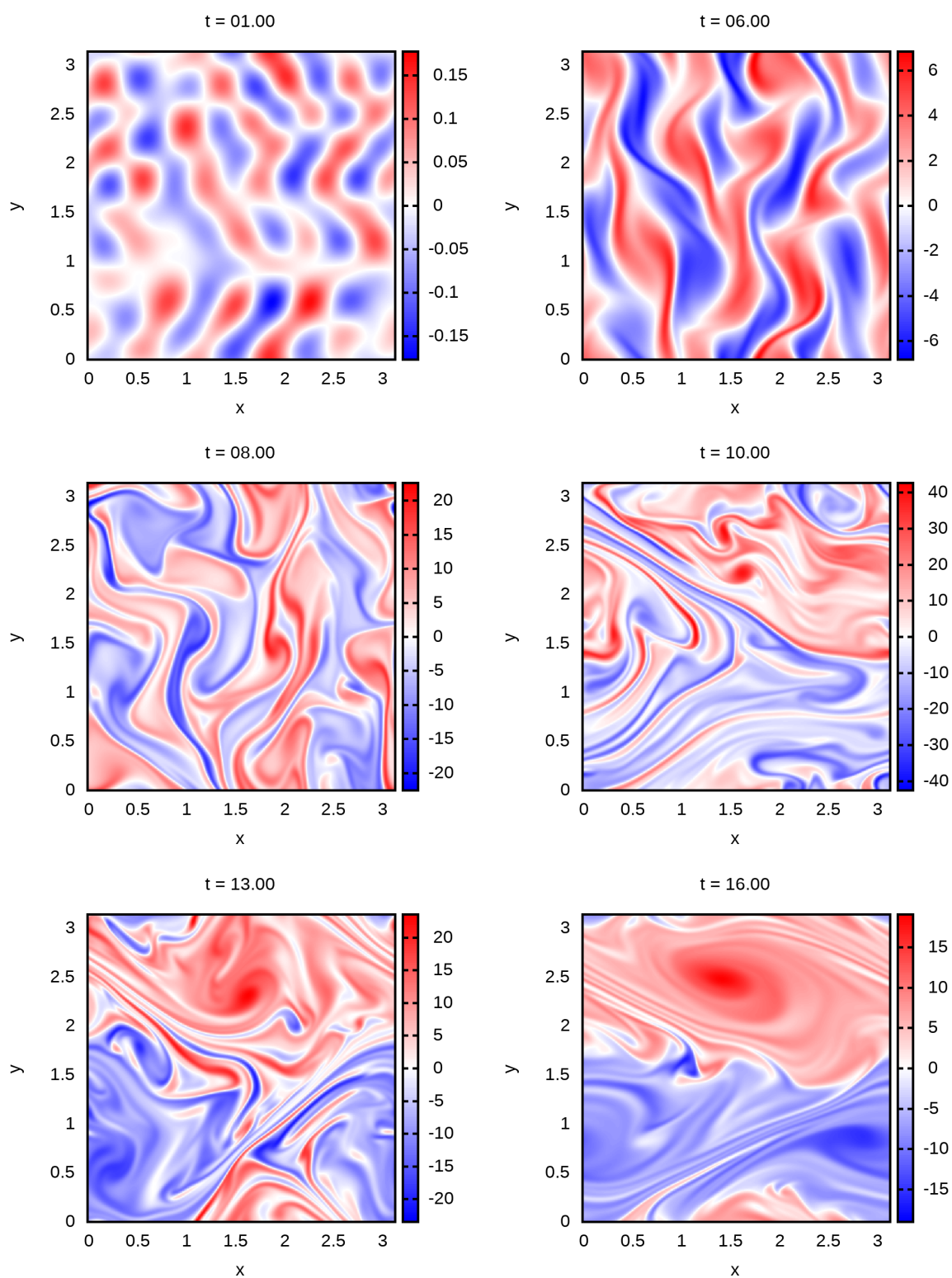


図 13: $\nu = 10^{-3}$ における $t = 1 \sim 16$ までの渦度 ω の実空間プロット. $t = 8 \sim 13$ の図から乱流となっていることが確認できる.

4 せん断流れがある場合の交換型不安定性

この節では，せん断流れを入れて交換型不安定性の非線形シミュレーションを行い，その振る舞いを調べる．

4.1 交換型不安定性のせん断流れによる線形安定性について

以降の節において非線形シミュレーションの結果と線形理論による解析を比較する．そのため，この節では先行研究 [2] のせん断流れによる交換型不安定性の抑制効果の解析について簡単にまとめる．

$\nu = 0$ として線形化した渦度方程式 (2.31) の両辺に $(\partial_t + v_0 \partial_x)$ を作用させる．ここで， $v_0 = v_0(y)$ である．同じく $\kappa = 0$ として線形化した密度の連続の式 (2.40) と流れ関数に関する Poisson 方程式 (2.34) をさきほどの渦度方程式に代入すると， ϕ に関する方程式

$$(\partial_t + v_0 \partial_x)^2 \Delta \phi = \gamma_g^2 \partial_x^2 \phi \quad (4.1)$$

が得られる．ただし， $\gamma_g^2 = g \rho'_0 / \rho_0$ (式 (2.115)) である．

ここで， ϕ についてのフーリエ逆変換を

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \hat{\phi}_k(t) e^{i(k_x x + \tilde{k}_y(t) y)} \quad (4.2)$$

とする．ただし， $\tilde{k}_y(t) = k_y - \sigma k_x t$ である．

式 (4.1) に式 (4.2) を代入すると最終的に $\hat{\phi}$ に関する常微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[(k_x^2 + \tilde{k}_y(t)^2) \hat{\phi} \right] = k_x^2 \gamma_g^2 \hat{\phi} \quad (4.3)$$

が得られる．

ここで，調べたいことは $\hat{\phi}$ の漸近的な振る舞いについてなので， t が十分に大きく

$$t \gg \frac{k_y}{\sigma k_x}, \quad t \gg \frac{1}{\sigma} \quad (4.4)$$

であると仮定すると， k によらない方程式

$$\frac{d^2 \hat{\phi}}{dt^2} + \frac{4}{t} \frac{d \hat{\phi}}{dt} + \frac{2 - \alpha}{t^2} \hat{\phi} = 0 \quad (4.5)$$

を得る．ただし， α は

$$\alpha = \frac{\gamma_g^2}{\sigma^2} \quad (4.6)$$

であり交換型不安定性の駆動力 γ_g とせん断流れの強さを示す σ の比である．式 (4.5) を解くと

$$\hat{\phi} = C_1 t^{m_+} + C_2 t^{m_-} \quad (4.7)$$

となる．ここで， C_1 および C_2 は定数であり

$$m_{\pm} = \frac{-3 \pm \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \quad (4.8)$$

である． $m_+ > m_-$ より (4.7) の漸近的な振る舞いは m_+ の符号によって決定される． $\alpha < 2$ のとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\phi} = 0 \quad (4.9)$$

となることから，パラメータ $\alpha = \frac{\gamma_g^2}{\sigma^2} < 2$ ならば交換型不安定性は線形安定である．逆に， $\alpha > 2$ の場合は不安定となる．

4.2 初期擾乱が単一波で表されるとき振る舞い

この節では，せん断流れの非線形シミュレーションに単一波を初期擾乱として与えた場合の振る舞いを見る．

4.2.1 シミュレーション条件

計算領域は， $L_x = \pi$ ， $L_y = \pi$ として $x \in [0, L_x]$ ， $y \in [0, L_y]$ の正方形領域とした．渦度 ω の初期条件は

$$\omega(0, x, y) = 0 \quad (4.10)$$

を与え，流れ関数 ϕ の初期条件は $\omega(0, x, y)$ より計算で求める．

ここでは，比較のために線形シミュレーションと初期擾乱に基本擾乱とノイズを加えた非線形シミュレーションも行う．それぞれの初期擾乱を次のように与える．

- 単一波を初期擾乱に持つ非線形シミュレーション

$$\rho_1(0, x, y) = \rho_f = \epsilon \cos(2x + 10y) \quad (4.11)$$

- 単一波を初期擾乱に持つ線形シミュレーション

$$\rho_1(0, x, y) = 10^{-3} \rho_f = 10^{-3} \epsilon \cos(2x + 10y) \quad (4.12)$$

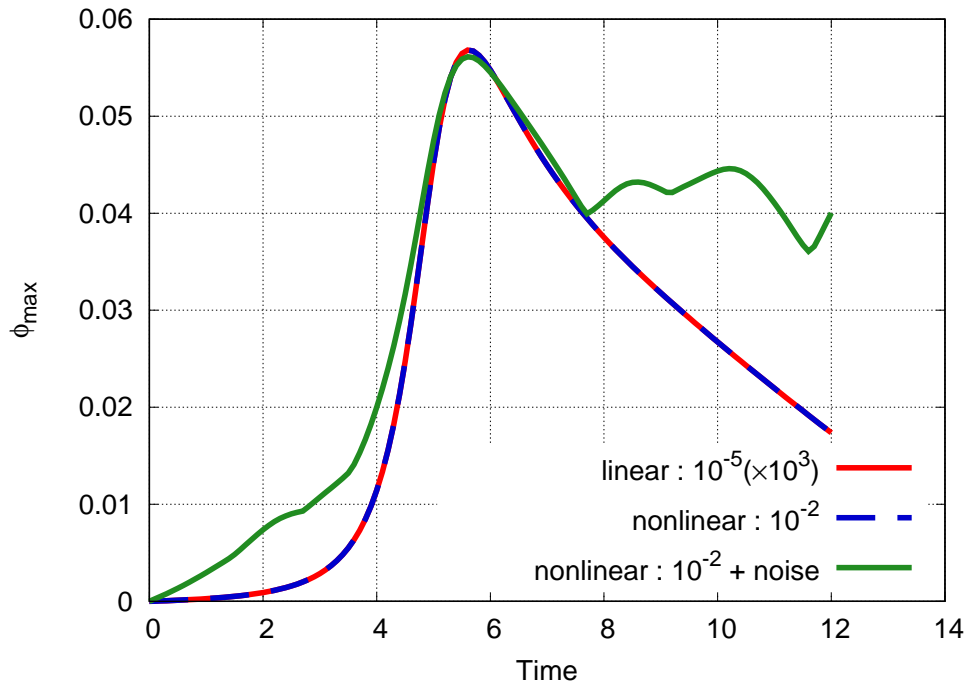


図 14: 流れ関数 ϕ の最大値の時間変化を表す．赤線が基本擾乱を入れた線形シミュレーション，青線が基本擾乱を入れた非線形シミュレーション，緑線が基本擾乱 + ノイズを入れた非線形シミュレーションの結果である．

- 基本擾乱 + ノイズを初期擾乱に持つ非線形シミュレーション

$$\rho_1(0, x, y) = \rho_f + \rho_n \quad (4.13)$$

ただし， ρ_f ， ρ_n は式 (3.14)，(3.15) に等しく， ρ_f の振幅は $\epsilon = 10^{-2}$ とした．

時間刻み Δt は式 (2.76) のクーラン条件を満たす最大の値をとり，クーラン数は $C = 0.1$ とした．また，格子幅 h は式 (2.77) の値， v_{\max} は式 (2.78) の値を用いる．

交換型不安定性の駆動力は式 (3.16) のように $\gamma_g = 1.0$ とし，粘性率 ν と密度の拡散係数 κ はそれぞれ $\nu = 10^{-3}$ ， $\kappa = 10^{-3}$ とした．また，グリッド数は $N_x = 256$ ， $N_y = 256$ とした．ここで，グリッド数が前節で比べて半分になったがこの節で行うシミュレーションは $t = 12$ までの短い時間で小さな構造が生成される前に終わるため，このグリッド数でも十分に計算できる．最後に，せん断流れの速さは $\sigma = 1.0$ とした．

4.2.2 シミュレーション結果

3つの初期条件におけるシミュレーション結果を図 14 に示す．図 14 は流れ関数 ϕ の

最大値の時間変化をプロットしており，赤線が初期擾乱として振幅をさらに 10^{-3} 倍した基本擾乱 ρ_f を入れた線形シミュレーション，青線が初期擾乱として基本擾乱 ρ_f を入れた非線形シミュレーション，緑線が基本擾乱 + ノイズ ($\rho_f + \rho_n$) を入れた非線形シミュレーションの結果である．また，線形シミュレーション (赤線) は結果に対して 10^3 倍したものをプロットしている．

はじめに，基本擾乱のみの単一波を初期擾乱とした線形シミュレーション (赤線) と非線形シミュレーション (青線) を比較する．図 14 より，線形シミュレーションの結果を 10^3 倍したものと非線形シミュレーションの結果が一致していることが確認できる．このことから，初期擾乱が単一波の場合は非線形性が消えて線形問題となることが分かる．また，ここで設定したシミュレーション条件は線形安定性のパラメータが $\alpha = \gamma_g^2 / \sigma^2 = 1.0 < 2$ であり線形安定の条件でのシミュレーションである．図 14 を見ると赤線と青線は $t = 5$ を超えたあたりから減衰を始めており安定であることが分かる．しかし， $t = 5$ までは線形安定であるにも関わらず振幅が成長している．これは，せん断流れによる減衰効果が時刻 t に比例しており十分な減衰効果を得るまでに時間の経過が必要となるためである [2]．

最後に，基本擾乱 + ノイズを初期擾乱とした非線形シミュレーション (緑線) の結果を見る．図 14 より緑線は他 2 つとは異なる振る舞いをしていることが確認できる．そのため，複数の波が初期擾乱に含まれている場合は非線形性によって線形と異なる複雑な振る舞いをするのが分かる．また，緑線は線形安定な条件であるがその振る舞いは安定ではない． $t = 5$ 付近まで成長した後 $t = 8$ の手前までは振幅が減衰しており，この振る舞いは線形シミュレーションで得られた結果と非常に似た振る舞いである．このことから，線形安定な条件ならば初期擾乱の形によらずせん断流れによって交換型不安定性が抑制されることが分かる．しかし， $t = 8$ 以降は振幅が減衰しない．そのため，非線形性によって交換型不安定性とは別の現象が起きていると考えられる．このような，初期擾乱に複数の波を持つ線形安定条件における非線形の交換型不安定性シミュレーションの振る舞いについては次節で詳しく見る．

4.3 線形安定条件におけるせん断流れのある非線形シミュレーション

この節では， $\alpha < 2$ の線形安定な条件で非線形シミュレーションを行いその振る舞いについて調べる．

4.3.1 シミュレーション条件

計算領域，および渦度の初期条件は 4.2.1 節と同様の値を用いる．初期擾乱 $\rho_1(0, x, y)$ には

$$\rho_1(0, x, y) = \sum_{k_x, k_y} \epsilon (R_c \cos(k_x x + k_y y) + R_s \sin(k_x x + k_y y)) \quad (4.14)$$

と複数の波の重ねあわせを与える．ただし， $(k_x, k_y) = (0, 0)$ の波は振幅 0 とする．また，初期擾乱がより自然なノイズとなるようにガウス関数を用いて低波数の波の振幅が大きく，高波数になるほど振幅が小さくなるように R_c, R_s を設定する．このとき， R_c, R_s はそれぞれ

$$R_c, R_s = R \exp \left[-\frac{k_x^2 + k_y^2}{2c^2} \right] \quad (4.15)$$

となる．ただし， R は $-1 < R < 1$ の範囲を持つ一様乱数とし， $c = 10$ を与える．また，各波の最大振幅は $\epsilon = 10^{-2}$ とした．

時間刻み Δt と交換型不安定性の駆動力 γ_g については，4.2.1 節と同様の値を使用する．粘性率 ν と密度の拡散係数 κ はそれぞれ $\nu = 10^{-3}$ ， $\kappa = 10^{-3}$ とした．また，グリッド数は $N_x = 512$ ， $N_y = 1024$ とした．ここで， N_y のグリッドを多めに取る理由は長い時間のシミュレーションを行って $\tilde{k}_y(t) = k_y - \sigma k_x t$ が高波数に変化しても対応できるようにするためである．

最後に，せん断流れの強さは $\sigma = 1.0, 2.0$ の 2 つを取ってそれぞれシミュレーションを行った．このときの α の値はそれぞれ $\alpha = 1.0, 0.25$ であり，共に線形安定な条件である．

4.3.2 $\sigma = 1.0$ のシミュレーション結果

$\sigma = 1.0$ とした場合の非線形シミュレーションの結果を見る．図 15 に渦度 $\hat{\omega}_{k_x, k_y}$ の波数ごとの時間発展の様子を示す．ここで，本節で行ったシミュレーションはせん断流れがあるため y 方向の波数は $\tilde{k}_y(t)$ である．2.3 節の最後に述べたように $\tilde{k}_y(t)$ は y 方向の波数が時間変化することを表す．そのため，図 15 を含めて以降の渦度スペクトルの時間発展の $k_x \neq 0$ のプロットは図の凡例に示した初期波数 $k_y = \tilde{k}_y(0)$ に着目し，その波数の時間変化に追従しながら渦度スペクトルをプロットしている．

図 15 より，線形安定な条件であるにも関わらず乱流となっていることが確認できる．しかし， $k_x \neq 0$ の波が $t > 13$ から減衰している様子が確認できるため，交換型不安定性は抑制されていると思われる．これは，時刻の経過とともに $\tilde{k}_y(t)$ が高波数となって粘性 ν の影響を強く受けるためと考えられる．

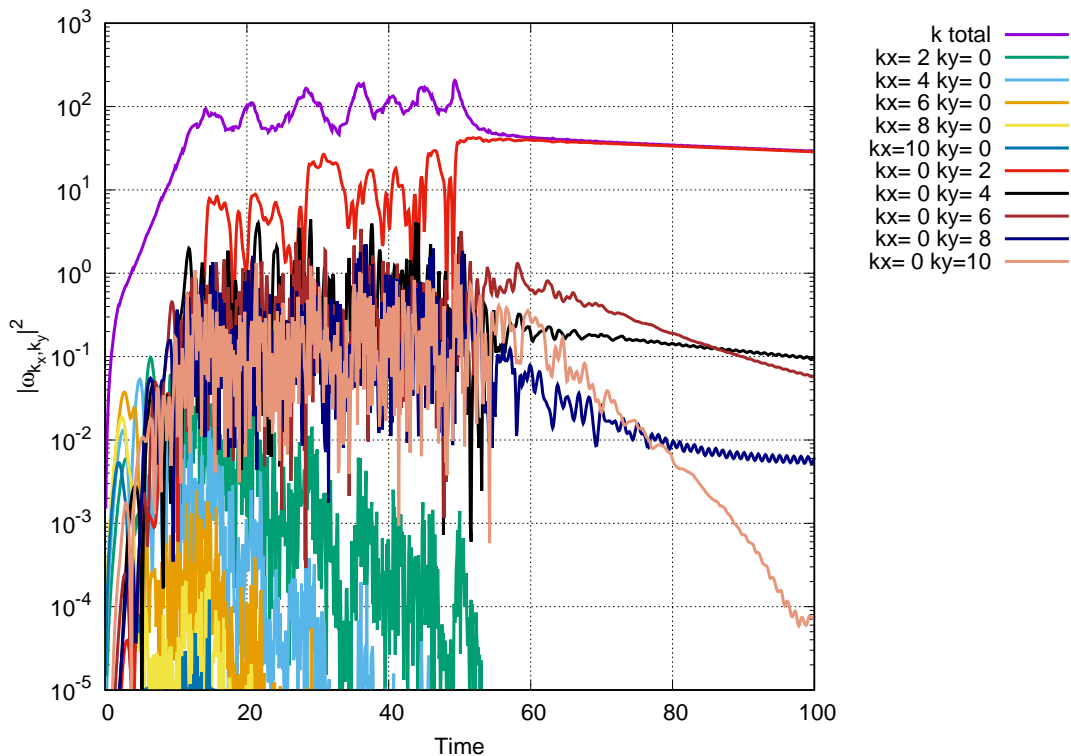


図 15: $\sigma = 1.0$ における渦度 $\hat{\omega}_{k_x, k_y}$ の波数ごとの時間発展の様子．紫線がエンストロフィー (式 (3.22)) の時間発展を表し，他の線が渦度スペクトル $|\hat{\omega}_{k_x, k_y}|^2$ の時間発展を表す．

図 16 に $t = 20$ までの渦度 ω の様子を示す．図 16 を見ると， $t = 6$ では乱れの少ない流れを形成していることが分かる．しかし， $t = 10$ ではやや乱れた流れとなり $t = 13$ からは乱流となっていることが確認できる．さらに，図 16 の $t = 10$ の図において $(x, y) = (2.3, 2.7)$ 付近に Kelvin-Helmholtz 不安定性の特徴的な渦構造が確認できる．Kelvin-Helmholtz 不安定性とは対向流のような異なる流れが流体中にあるとき，その界面に渦構造を形成して摂動を増大させる不安定性である [18]．

ここで， $t = 10$ で確認できた渦構造が Kelvin-Helmholtz 不安定性によるものであることを確認するために，この渦構造を形成した対向流の存在を調べた．図 17 に $t = 10$ の渦構造が形成されるまでの渦度 ω とそのときの流体の速度場の様子を示す． $t = 8$ の速度場を見ると図の赤枠で囲った中に対向流が存在することが確認できる．同じく $t = 8$ の渦度の図を見ると赤枠の中に青色で示された右回りの渦がある．さらに時刻が経過すると渦はせん断流れによって $+x$ 方向に移動し， $t = 8$ で見た右回りの渦は対向流によってより強い渦となる． $t = 8.7$ の渦度の図では黒の矢印で示した右回りの渦が対応してい

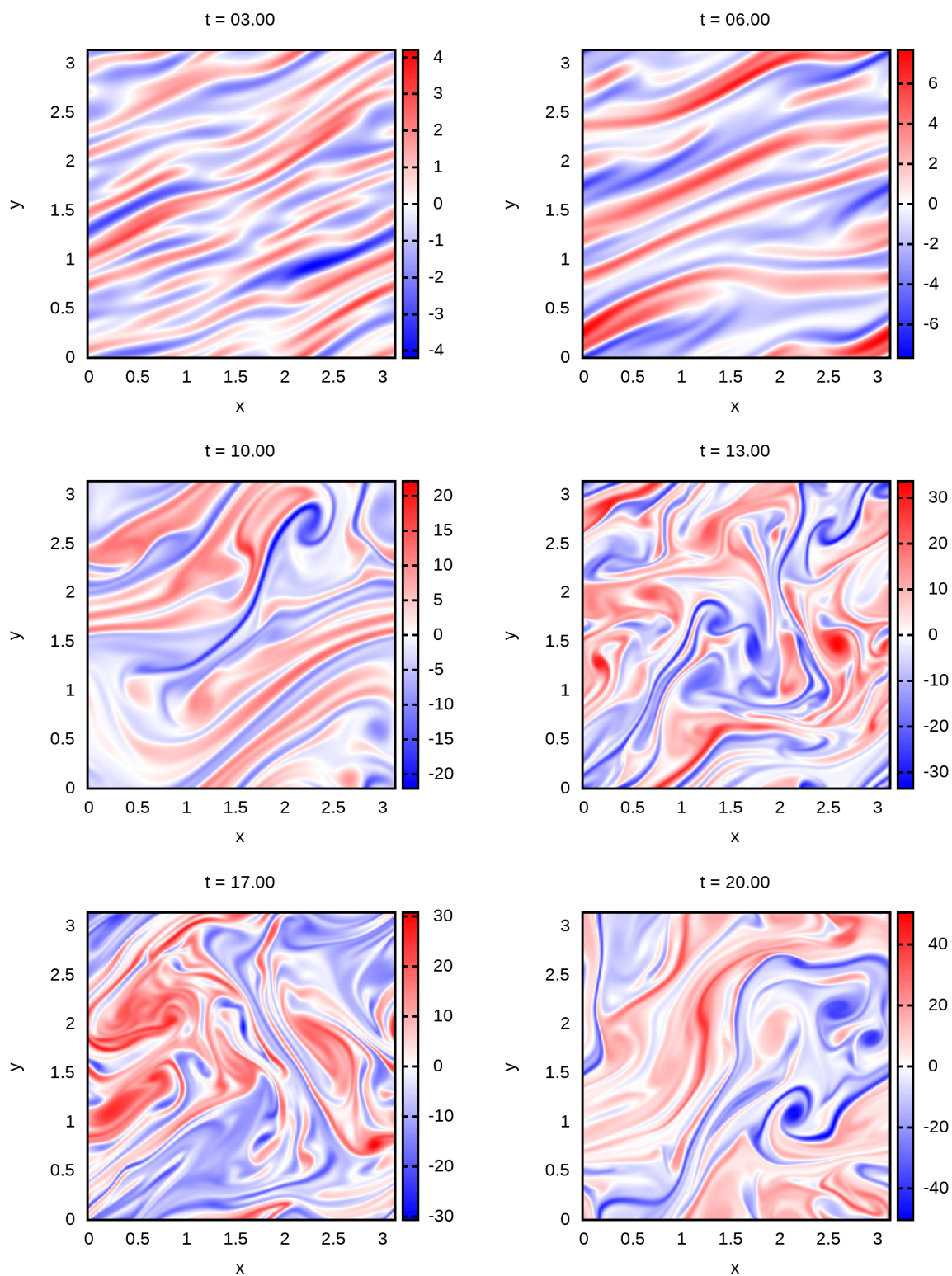


図 16: $\sigma = 1.0$ とした非線形シミュレーションの $t = 3 \sim 20$ までの渦度 ω の様子 . $t = 10, 13, 20$ において Kelvin-Helmholtz 不安定性の特徴的な渦構造が確認できる .

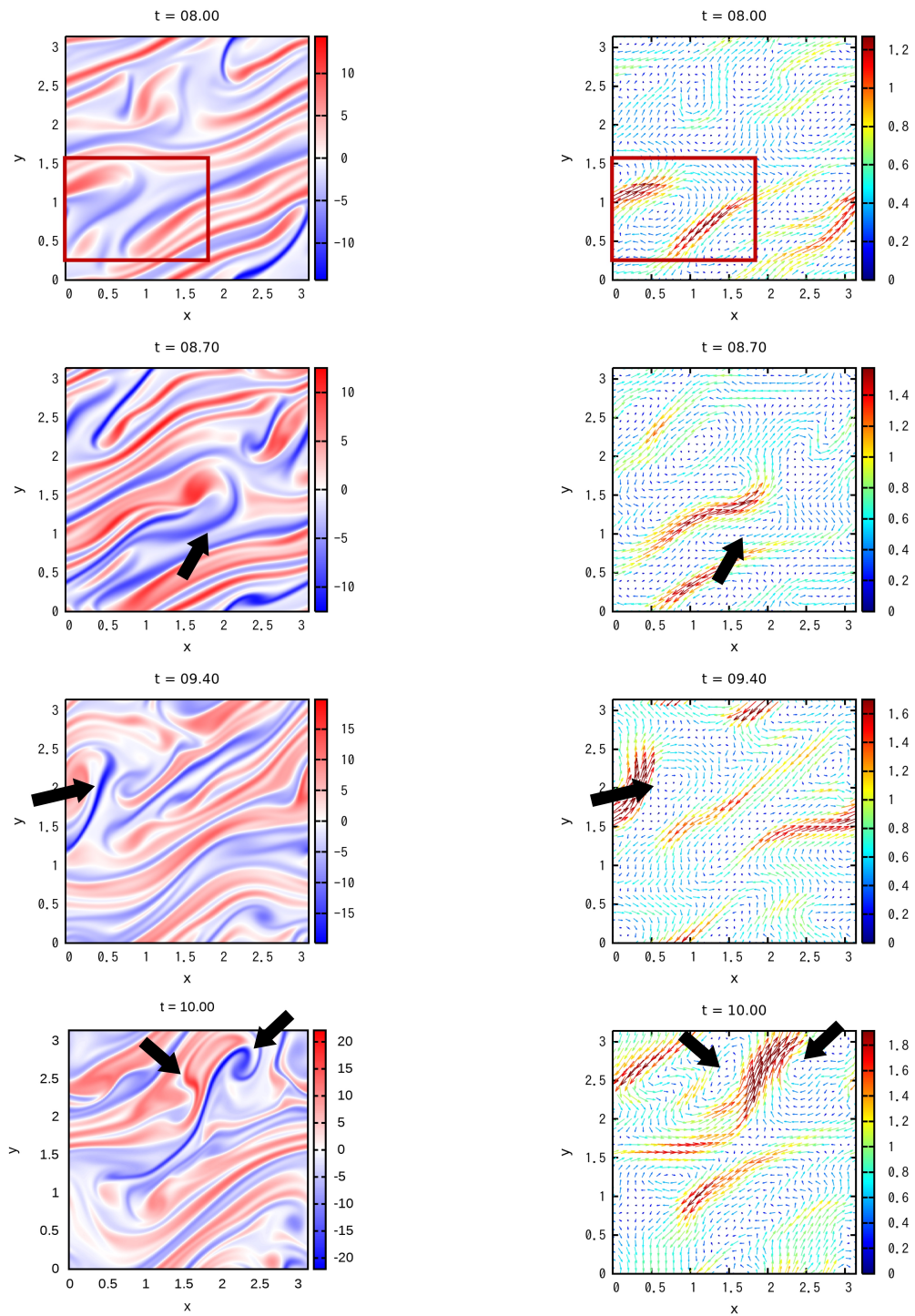


図 17: $t = 10$ に見られた Kelvin-Helmholtz 不安定性による渦構造が対向流から形成される様子．左の図は渦度 ω を，右の図は流体の速度場を示している．

る． $t = 9.4$ では矢印で示した $(x, y) = (0.5, 2.0)$ 付近の右回りの渦が対応し，対向流によってさらに強い渦へと成長していることが確認できる．最後に，この渦は $t = 9.4$ 以降も成長を続け， $t = 10$ に見られる右側の矢印で示した Kelvin-Helmholtz 不安定性の特徴的な渦構造となる．また， $t = 10$ の速度場を見ると右回りの渦と対になる左回りの渦 $((x, y) = (1.6, 2.5))$ も存在していることが確認できた．以上のように，対向流から渦が成長して $t = 10$ の特徴的な渦構造となることが確認できたため，Kelvin-Helmholtz 不安定性が起きていることが分かった．

図 17 より $t = 10$ における Kelvin-Helmholtz 不安定性による渦構造は $t = 8$ の対向流から生じていることが確認できた．この $t = 8$ の対向流の速度は $1 \sim 1.2$ の値であることから，およそ 1 以上の速度を持つ対向流が流れているとき Kelvin-Helmholtz 不安定性が生じるのではないかと考えられる．

これまでの結果から，線形安定な条件であっても乱流が形成されてしまう原因は交換型不安定性によるものではなく，せん断流れの引き伸ばし効果で小スケールの対向流が生成されることにより 2 次的に生じた Kelvin-Helmholtz 不安定性によるものだと考える．

4.3.3 $\sigma = 2.0$ のシミュレーション結果

せん断流れによる交換型不安定性の抑制効果がより強い $\sigma = 2.0$ としたときの非線形シミュレーションの結果を図 18 から図 20 に示す．図 18 より各波の交換型不安定性による成長はせん断流れによって抑制され， $t = 3$ 以降は減衰していることが確認できる．また， $\sigma = 1.0$ のシミュレーション結果では Kelvin-Helmholtz 不安定性による乱流の形成が確認されたが，図 19 を見ると Kelvin-Helmholtz 不安定性が生じている様子は見られない．さらに，図 19 は始めは小スケールの流れが存在したが時間が経過すると大スケールの安定した流れとなっていることが分かる．これは，粘性による減衰が小スケールの波に対して強く働くために起こる．図 18 の $k_x = 0$ の波を見ると k_y の値が大きい程より速く減衰していることが確認できる．粘性による減衰は大スケールの波から小スケールの波まで全ての波に対して働くが，小スケールの波のほうがより速く減衰するため図 19 のようにシミュレーション後半では大スケールの流れが残る．

図 20 に $\sigma = 1.0$ ， $\sigma = 2.0$ としたそれぞれのシミュレーションの $t = 3$ における波数ごとの渦度スペクトル $|\hat{\omega}_{k_x, k_y}|^2$ の値を (k_x, k_y) 平面に 2 次元プロットしたものを示す．図 20 より $\sigma = 1.0$ ， $\sigma = 2.0$ とした場合で交換型不安定性による各波数の成長を比較すると $\sigma = 2.0$ の方が励起されたスペクトルの幅が狭い．また，最大振幅の値も $\sigma = 1.0$ より $\sigma = 2.0$ の方がわずかに小さい．よって， $\sigma = 2.0$ とすることで交換型不安定性の成長がより強く抑制されていることが分かる．

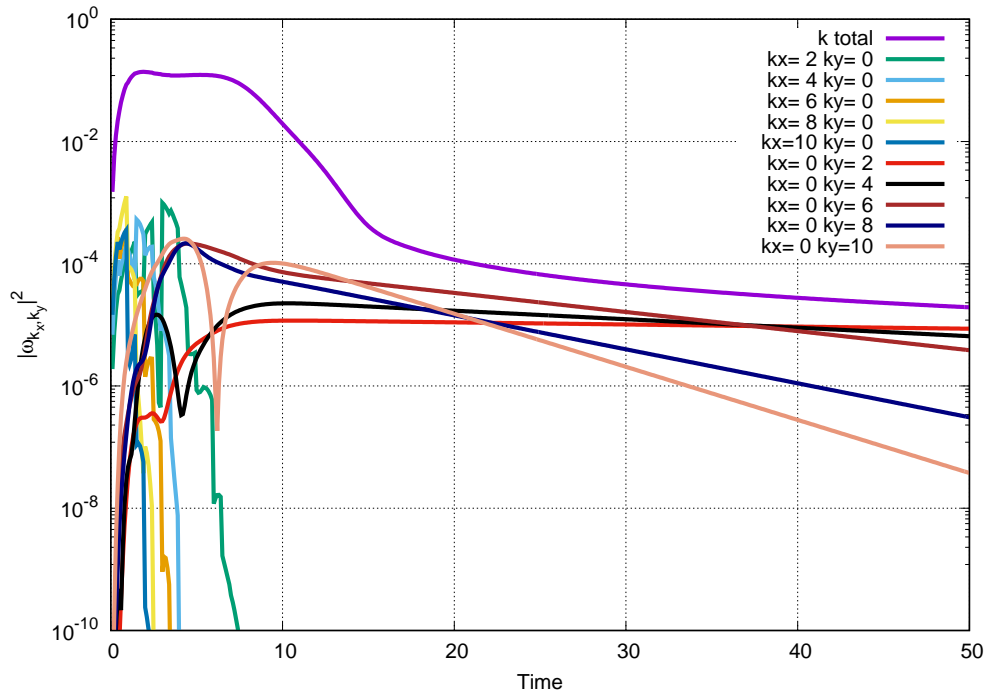


図 18: $\sigma = 2.0$ における渦度 $\hat{\omega}_{k_x, k_y}$ の波数ごとの時間発展の様子．紫線がエンストロフィー $\sum_{k_x, k_y} |\hat{\omega}_{k_x, k_y}|^2$ の時間発展を表し，他の線がそれぞれの波数の $|\hat{\omega}_{k_x, k_y}|^2$ の時間発展を表す．

本条件のシミュレーションでは，Kelvin-Helmholtz 不安定性の発生が見られなかった．エンストロフィーの値が最も大きくなった $t = 3$ における速度場の様子を図 21 に示す．図 21 より最大の速度が 0.12 程度であることが確認できるが，Kelvin-Helmholtz 不安定性が生じた図 17 の $t = 8$ の速度場の図より最大速度を比較すると 1/10 倍の速度であることが分かる．このように，流れが遅く流体の速度が Kelvin-Helmholtz 不安定性を引き起こす程大きくならなかったために不安定性の発生がなかったと考える．

4.4 亜臨界乱流

4.3.2 節では $\alpha < 2$ の線形安定な条件にもかかわらず 2 次的に生じた Kelvin-helmholtz 不安定性によって乱流となったことを確認した．このように線形安定な条件において非線形的に不安定となって発生した乱流を亜臨界乱流と呼ぶ [7]．亜臨界乱流にはその発生のための初期摂動の大きさにしきい値が存在し，しきい値以下の摂動は減衰し安定化するという特徴がある．

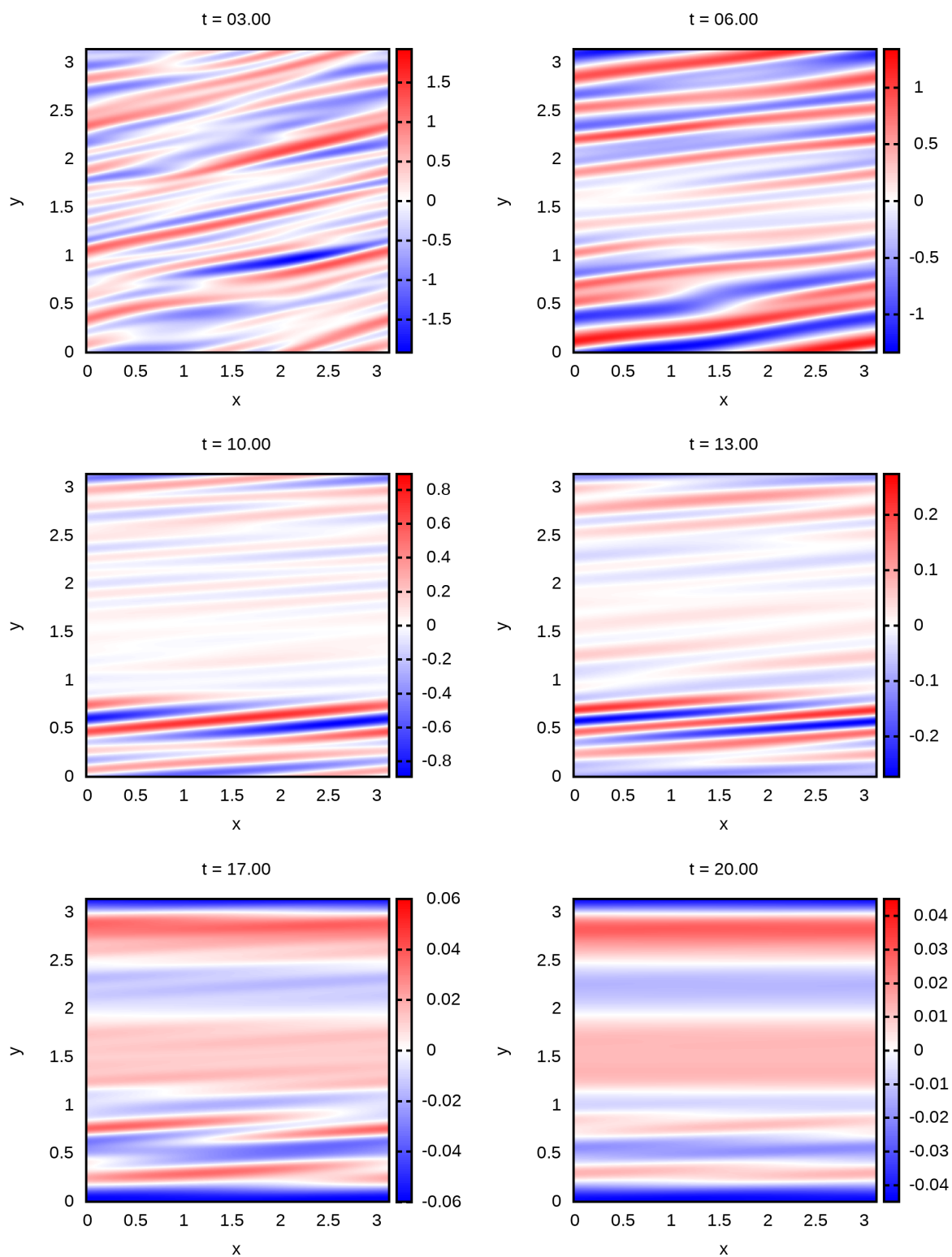


図 19: $\sigma = 2.0$ とした非線形シミュレーションの $3 \leq t \leq 20$ までの渦度 ω の様子 . $\sigma = 1.0$ の結果で見られた Kelvin-Helmholtz 不安定性や乱流が見られず , 安定した流れを形成している .

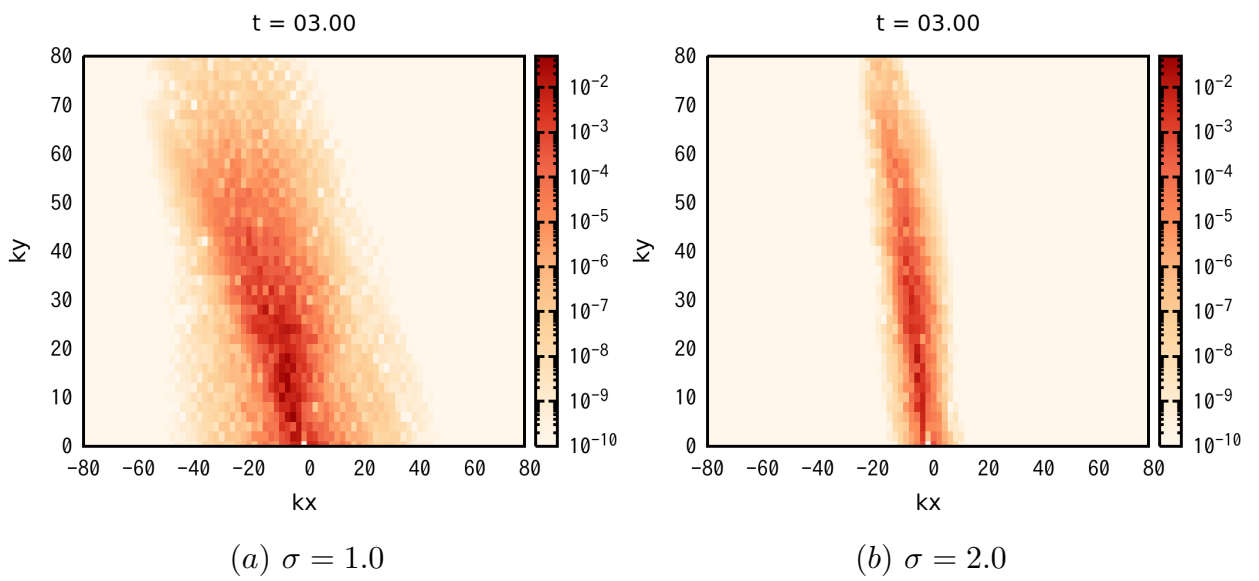


図 20: $\sigma = 1.0$ と $\sigma = 2.0$ としたシミュレーションの $t = 3$ における波数ごとの $|\widehat{\omega}_{k_x, k_y}|^2$ の 2 次元プロット .

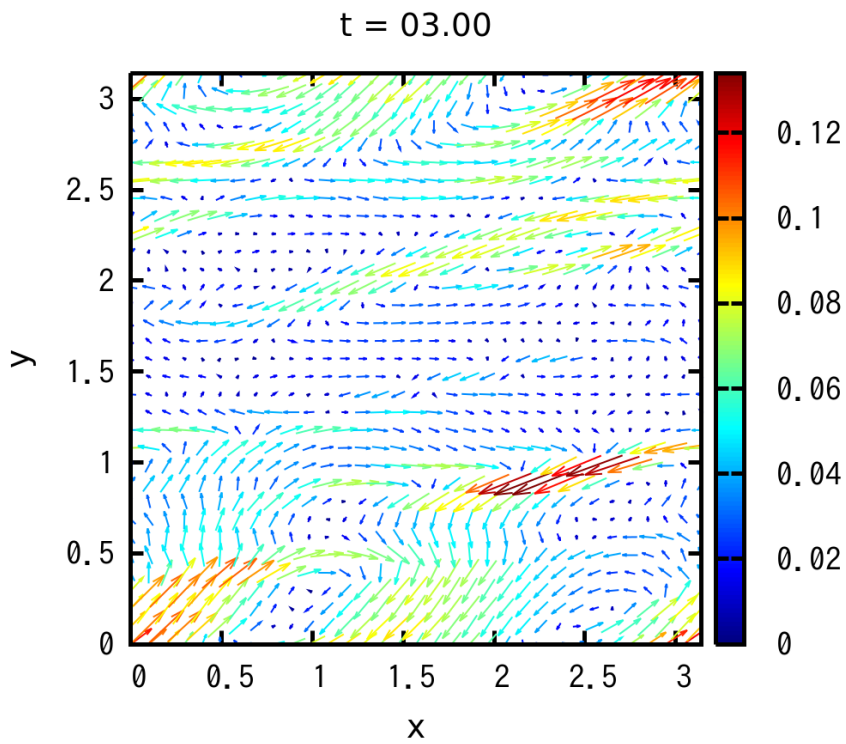


図 21: $\sigma = 2.0$ としたシミュレーションの $t = 3$ における速度場の様子 .

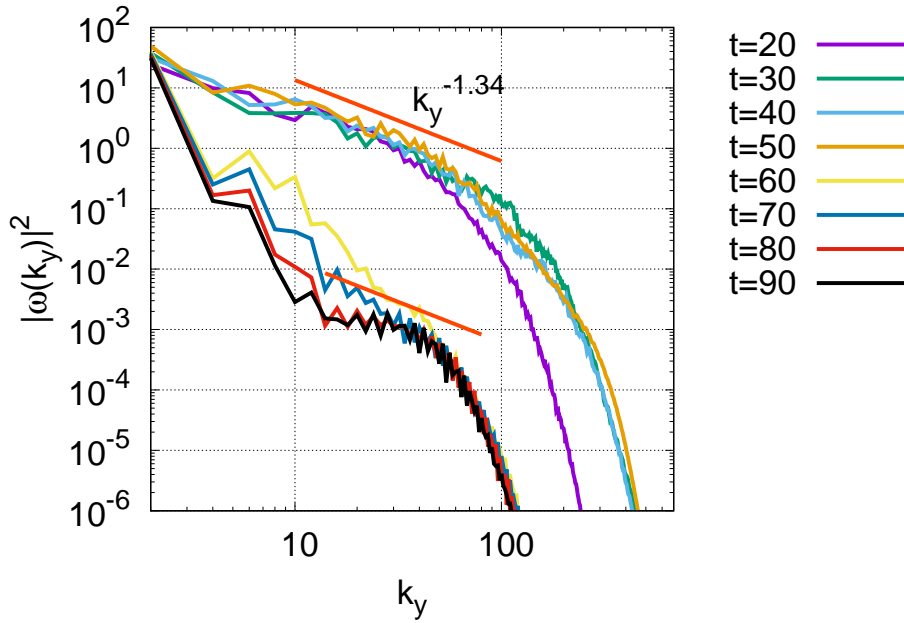


図 22: 時刻 $20 \leq t \leq 90$ における $\sigma = 1.0$ としたシミュレーションに対するエンストロフィーのスペクトル分布．オレンジ線は $10 \leq k_y \leq 100$ の範囲で $t = 30$ のスペクトル分布の傾きについてフィッティングした結果．

この節では始めに 4.3.2 節の流体の振る舞いが乱流であると判定した根拠について述べ、次に初期擾乱の振幅 ϵ とせん断流れの強さ σ を変更したシミュレーションを複数行い、せん断流れによる交換型不安定性抑制のシステムが持つ亜臨界乱流の特徴を調べる．

4.4.1 乱流の判定条件

4.3.2 節の $\sigma = 1.0$ としたシミュレーション結果の複雑な振る舞いが乱流であると判断した根拠について述べる．乱流は大きな空間スケールで外力などからエネルギーが補給されて、小さな空間スケールで粘性によってエネルギーを失うという特徴を持つ [12, 19]．この特徴は、スペクトル分布の図には一定の傾きを持った領域として現れる．

$\sigma = 1.0$ のシミュレーション結果にこのような乱流の特徴があるかを調べる．図 22 は時刻 $20 \leq t \leq 90$ におけるエンストロフィーに関するスペクトル分布

$$|\hat{\omega}(k_y)|^2 = \sum_{k_x} |\hat{\omega}(k_x, k_y)|^2 \quad (4.16)$$

をプロットした図である．ここで、計算領域の大きさと比較して十分に小さいスケールである $10 \leq k_y \leq 100$ の範囲で $t = 30$ におけるスペクトル分布に対してフィッティングを

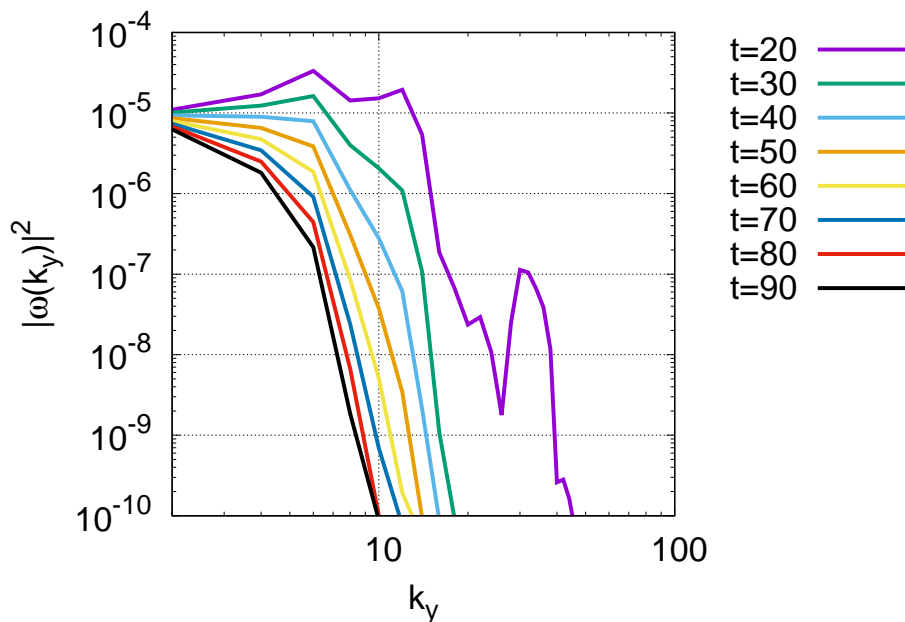


図 23: 時刻 $20 \leq t \leq 90$ における $\sigma = 2.0$ としたシミュレーションに対するエンストロフィーのスペクトル分布 .

行った . その結果が図 22 のオレンジ色の線で , およそ -1.34 の傾きを持つがここでは傾きの値についての議論は行わない . その傾きと $20 \leq t \leq 50$ のスペクトル分布の傾きを比較すると , その傾きは概ね一致しており一定の傾きが存在することが確認できる . この状態を乱流と見なす [12] . ここで , $t = 20$ のスペクトル分布は他の結果とやや外れているように見えるが , これは乱流になってからの時刻経過が浅くスペクトルが十分に発達していないためと考える . また , $t \geq 60$ のスペクトル分布はそれ以前の結果と異なり波数が最も小さい $k_y = 2$ を除いた他の値が大きく減衰している . しかし , $20 \leq k_y \leq 60$ の範囲で一定の傾きの領域が確認できることから , $20 \leq t \leq 50$ の乱流と比べて弱い乱流が $t \geq 60$ で形成されていると考えられる .

一方で , 4.3.3 節では $\sigma = 2.0$ の条件でシミュレーションを行ったが , その結果は安定した流れであった . 比較のためにこの条件の時刻 $20 \leq t \leq 90$ におけるエンストロフィーに関するスペクトル分布を図 23 に示す . 図 23 より $\sigma = 2.0$ の条件では一定の傾きを持つ領域が確認できないことからその流れは乱流でないと判定した .

また , エンストロフィースペクトルの値が最も大きい $k_y = 2$ に着目して図 22 と図 23 で比較すると , 乱流となった $\sigma = 1.0$ では $|\hat{\omega}(k_y = 2)|^2 = 30 \sim 50$ の値を取っているのに対して , $\sigma = 2.0$ では $|\hat{\omega}(k_y = 2)|^2 = 10^{-5}$ という値を取っており非常に大きな差があ

ることが確認できる．このような大きな差は 2 次的な不安定性による成長が起きたか，起きていないかの違いによって生じると考えられる．そのため， $k_y = 2$ の値より 2 次的な不安定性が起きたかどうかの判断を行うことができると思われる．

4.4.2 シミュレーション条件

計算領域，および渦度の初期条件は 4.2.1 節と同様の値を用いる．初期擾乱 $\rho_1(0, x, y)$ は

$$\rho_1(0, x, y) = \sum_{k_x, k_y} \epsilon (R_c \cos(k_x x + k_y y) + R_s \sin(k_x x + k_y y)) \quad (4.17)$$

とする．ただし， $(k_x, k_y) = (0, 0)$ の波は振幅 0 とする． R_c, R_s の値には式 (4.15) と同じものを与える．

この節では初期擾乱の振幅 ϵ とせん断流れの強さ σ を変えてシミュレーションを行う． ϵ と σ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{初期擾乱の振幅} & : \epsilon = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1} \\ \text{せん断流れの強さ} & : \sigma = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

とした．時刻 Δt と交換型不安定性の駆動力 γ_g については，4.2.1 節と同様の値を使用する．粘性率 ν と密度の拡散係数 κ はそれぞれ $\nu = 10^{-3}$ ， $\kappa = 10^{-3}$ とした．また，グリッド数は $N_x = 512$ ， $N_y = 1024$ とした．

4.4.3 シミュレーション結果

σ の値を 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 と変更してシミュレーションを行った．ここで， $\sigma = 0.5$ のとき

$$\alpha = \frac{\gamma_g^2}{\sigma^2} = \frac{1}{0.25} = 4 > 2 \quad (4.19)$$

であり，線形不安定な条件でのシミュレーションとなる． σ の他の値は $\alpha < 2$ を満たし，線形安定な条件でのシミュレーションである．

はじめに， $\sigma = 0.5$ として ϵ の値を変えたシミュレーション結果について述べる． $\sigma = 0.5$ は線形不安定な条件でのシミュレーションである．その結果は初期擾乱 ϵ の値に関係なく乱流となった．線形不安定であるので，せん断流れが流れていてもその抑制効果が十分に働かないことは予想でき，非線形性を入れてもその振る舞いは不安定であった．

次に， $\sigma \geq 1.0$ の線形安定な条件で ϵ の値を変えて行ったシミュレーションの結果について見る．線形安定な条件におけるエンストロフィースペクトル分布の結果を図 24 に

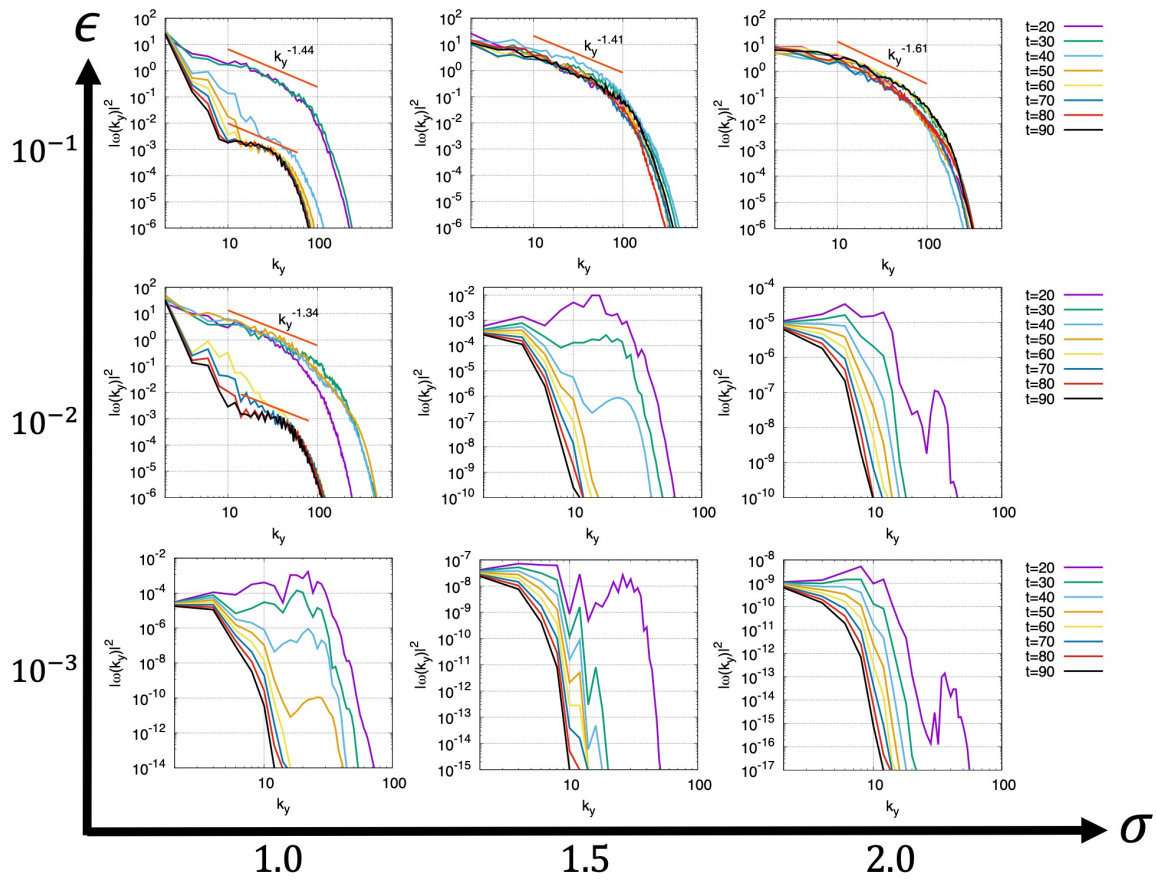


図 24: $\epsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$, $\sigma = 1.0, 1.5, 2.0$ におけるエンストロフィーに関するスペクトル分布の時間変化 .

示す . 乱流の判定は 4.4.1 節で述べたようにエンストロフィースペクトル分布の結果より行った . 図 24 の $\epsilon = 10^{-1}$ の 3 つの結果と $\sigma = 1.0$, $\epsilon = 10^{-2}$ の結果を確認すると , それぞれの結果で一定の傾きを持つ領域が存在することが分かる . ただし , 各結果のオレンジ線は $10 \leq k_y \leq 100$ の範囲でフィッティングした結果で , $\sigma = 1.0$, $\epsilon = 10^{-2}$ の条件では $t = 30$ より , $\sigma = 1.0$, $\epsilon = 10^{-1}$ では $t = 20$ より , $\sigma = 1.5, 2.0$, $\epsilon = 10^{-1}$ では $t = 60$ よりフィッティングしている . それぞれの傾きも図に記しているがここでは議論しない . また , $k_y = 2$ のエンストロフィースペクトルの値がおおよそ $|\hat{\omega}(k_y = 2)|^2 \geq 10$ の値であることから 2 次的な不安定性が起きていることも確認できるため , これらの結果は乱流であると判断した . よって , これらの条件における振る舞いは亜臨界乱流である . 一方で , 図 24 の $\sigma = 1.5, 2.0$, $\epsilon = 10^{-2}$ の 2 つと $\epsilon = 10^{-3}$ の 3 つの結果からエンストロフィースペクトル分布を確認すると , 一定の傾きを持つ領域は確認できない . また , $k_y = 2$ の

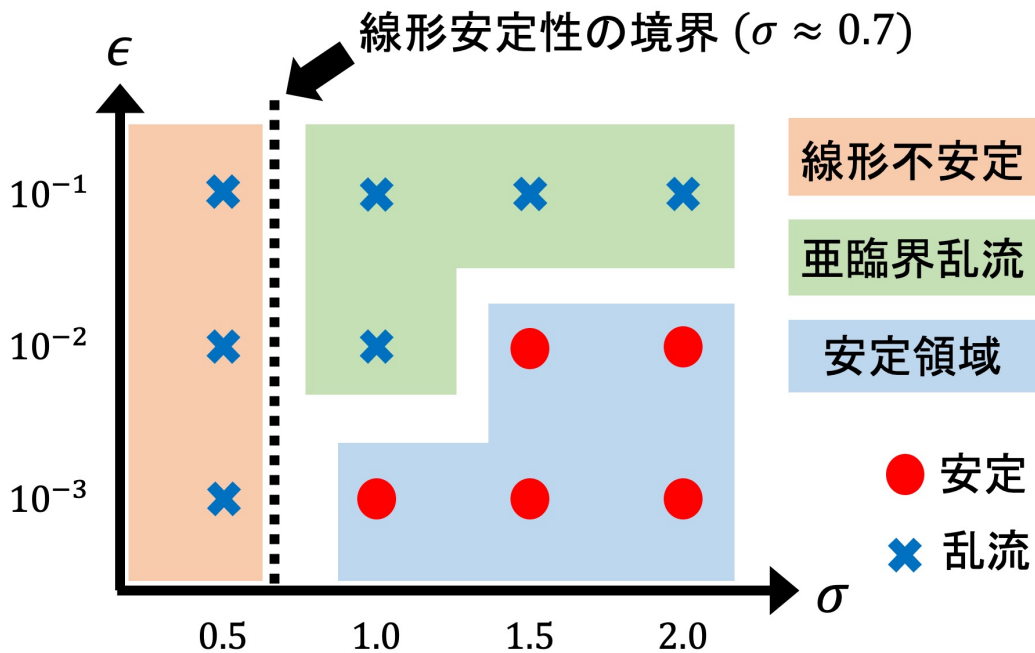


図 25: 初期擾乱の振幅 ϵ とせん断流れの強さ σ を変えて行ったシミュレーションの結果．赤い丸は振る舞いが減衰して安定したことを表し，青い×は振る舞いが乱流となったことを表している．

エンストロフィースペクトルの値は最も大きくても $|\hat{\omega}(k_y = 2)|^2 < 10^{-3}$ となっており小さい値であることから，2 次的な不安定性が生じなかったと考えられる．よって，この結果は安定であると判断した．

ここまでの結果から，線形安定な条件であっても非線形的に不安定となり亜臨界乱流になることが確認できた．また，不安定性が生じるための初期擾乱の大きさにしきい値があることも分かり， $\sigma = 1.0$ の場合は $\epsilon = 10^{-3}$ と 10^{-2} の間に， $\sigma = 1.5, 2.0$ の場合は $\epsilon = 10^{-2}$ と 10^{-1} の間にあると考えられる．

振幅のしきい値を超えると不安定になる理由は，初期擾乱の振幅が大きいほど流体速度のゆらぎ成分が速くなるためと考えられる．図 26 に $\epsilon = 10^{-2}$ ， $\sigma = 1.0$ の時刻 $t = 1.0$ における速度場の様子と $\epsilon = 10^{-1}$ ， $\sigma = 1.0$ の $t = 1.0$ における速度場の様子を示す．図 26 を比較すると速度の大きさには 10 倍程度の差があることが確認できる．このように初期の流体速度が速いために，交換型不安定性が抑制されて速度が落ちる前に Kelvin-Helmholtz 不安定性を生じさせる速度に達してしまい，2 次的に発生した不安定性から成長を続け乱流になると考える．

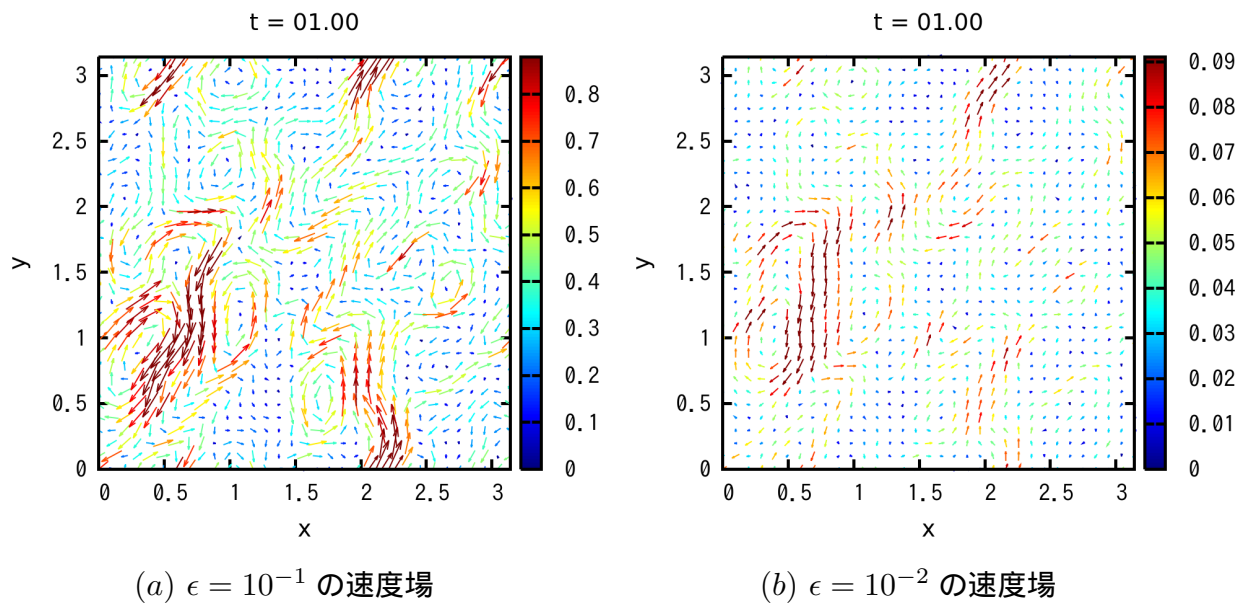


図 26: 時刻 $t = 1.0$ における $\epsilon = 10^{-1}$, $\sigma = 1.0$ の速度場の様子と $\epsilon = 10^{-2}$, $\sigma = 1.0$ の速度場の様子 .

5 まとめ

本研究では、せん断流れのある 2 次元非圧縮性を仮定して簡約化した流体方程式に対して、非線形数値シミュレーションを行いせん断流れによる交換型不安定性の抑制効果や交換型不安定性による流体の振る舞いについて調べた。シミュレーションの数値解法としては、空間の離散化に擬スペクトル法を、時間積分に 3 次の Adams-Bashforth 法と 2 次の後退差分法を組み合わせたものを使用した。

第 3 節では、 $+y$ 軸方向に密度勾配があり $-y$ 軸方向に重力が働いているとして、せん断流れを含まない交換型不安定性の振る舞いについて調べた。はじめに、粘性と密度ゆらぎの拡散を含む交換型不安定性の線形成長率について調べると x 方向の波数 k_x が小さく、 y 方向の波数が $k_y = 0$ となる波が最も速く成長することが分かった。次に、渦度方程式に含まれる粘性係数 ν と密度の連続の式に含まれる密度の拡散係数 κ の関係性について調べた。その結果、乱流発生時には渦度 ω と密度ゆらぎ ρ_1 はそれぞれの式に含まれる ν, κ のみから減衰の影響を受けるのではなく、両者のカップリングによって ν と κ の両方から減衰することが確認できた。最後に、 ν と κ の減衰の比を同じに設定して、粘性係数 ν の値を変えたときの交換型不安定性の振る舞いを調べた。まず、 $\nu = 10^{-1}$ を設定

してシミュレーションを行うと、波数 k_x が小さく、 $k_y = 0$ の波である $(k_x, k_y) = (2, 0)$ の波が交換型不安定性によって成長し続ける振る舞いを示した。これは y 方向に一様と考えたときの非線形厳密解の振る舞いと一致している [3]。 $\nu = 10^{-2}$ を設定した場合は交換型不安定性によって複数の波が成長してやや乱れた流れを形成した後、 $(k_x, k_y) = (0, 2)$ の波の振幅が最も大きくなり交換型不安定性が抑制されるという振る舞いが見れた。交換型不安定性が抑制された原因は、 $(k_x, k_y) = (0, 2)$ の波の振幅が大きくなることで x 方向へのせん断流れが強くなり、引き伸ばし効果によって交換型不安定性が抑制されたためと考えられる。また、時刻が経過して粘性によって $(k_x, k_y) = (0, 2)$ の波の振幅が小さくなると、 x 方向の流れも弱くなり再び波の成長が始まった。さらにシミュレーションを進めると、 $\nu = 10^{-1}$ の振る舞いと 同じく $(k_x, k_y) = (2, 0)$ の波が最も大きく成長し、他の波も成長を続けるという振る舞いが見られた。 $\nu = 10^{-3}$ を設定したときの振る舞いは $\nu = 10^{-2}$ の振る舞いと 同じく、始め乱流となった後に $(k_x, k_y) = (0, 2)$ の波の振幅が成長して交換型不安定性が抑制されるという結果となった。また、 $\nu = 10^{-3}$ では減衰率が小さくなったことで $(k_x, k_y) = (0, 2)$ の波の減衰に時間がかかり、再び乱れの成長が始まるまでに長い時間を必要とした。

第 4 節では、第 3 節と同様に $+y$ 軸方向に密度勾配があり $-y$ 軸方向に重力が働いている状況に対して、さらに密度勾配に対して垂直で $y > 0$ で $+x$ 軸方向へ、 $y < 0$ で $-x$ 軸方向へ流れるせん断流れを加えて交換型不安定性の非線形シミュレーションを行い、非線形性を加えたことで線形理論とどのような違いが現れるか調べた。線形理論では、交換型不安定性の駆動力 γ_g とせん断流れの強さ σ の比 α が $\alpha = \gamma_g^2 / \sigma^2 < 2$ を満たせば交換型不安定性が抑制される [2]。はじめに、初期擾乱が単一波で表されるとき振る舞いに調べたところ、初期擾乱が単一波の場合は非線形性が消えて線形問題と同じ振る舞いを示すことが確認できた。次に、 $\gamma_g = 1.0$ として $\sigma = 1.0, 2.0$ の線形安定条件におけるせん断流れの非線形シミュレーションを行った。 $\sigma = 1.0$ のシミュレーションでは乱流が形成された。このとき、渦度スペクトル $|\hat{\omega}_{k_x, k_y}|^2$ の x 方向の波数が $k_x \neq 0$ となる波の減衰が見られることから、せん断流れによる交換型不安定の抑制は起きていると考える。また、渦度 ω の図において Kelvin-Helmholtz 不安定性の特徴的な渦構造が確認できた。よって、線形安定な条件で交換型不安定性が抑制されてもせん断流れの引き伸ばし効果で小スケールの対向流が生成されることにより 2 次的に生じた Kelvin-Helmholtz 不安定性によって乱流になると考えられる。 $\sigma = 2.0$ のシミュレーションでは安定した流れになることが確認でき、 σ の値を大きくしたことでより強く交換型不安定性の成長が抑制されていることを確認した。最後に、初期擾乱の振幅 ϵ とせん断流れの強さ σ の値を変えてシミュレーションを行い、その振る舞いが乱流となるか安定な流れになるかを調べた。その結果、線

形安定の条件でも乱流が発生することを確認し，また初期擾乱の振幅にしきい値を持つという亜臨界乱流の特徴も確認できた．

今後の課題としては，せん断流れの強さと Kelvin-Helmholtz 不安定性の関係性や，亜臨界乱流のしきい値に関して定量的な考察を行っていきたいと考えている．また，亜臨界乱流について調べる際に今回は粘性率を固定したが，粘性率を変えることでどういった特徴が変わるのか，あるいは変わらないのかについても興味がある．

参考文献

- [1] プラズマ物理入門, 内田岱, 丸善出版, 2017.
- [2] T. Tatsuno, F. Volponi, and Z. Yoshida, Transient Phenomena and Secularity of Linear Interchange Instabilities with Shear Flows in Homogeneous Magnetic Field Plasmas, *Physics of Plasmas* **8**, 399 (2001).
- [3] A. B. Hassam, Nonlinear stabilization of the Rayleigh-Taylor instability by external velocity shear, *Physics of Fluids B* **4** (3), 485 (1992).
- [4] A. Rogava, Are Astrophysical Shear Flows Able To Heat Themselves?, *Astrophysical and Space Science* **293**, 189 (2004).
- [5] K. Ichiguchi, *et al.*, Three-Dimensional Numerical Analysis of Shear Flow Effects on MHD Stability in LHD Plasmas, *Plasma and Fusion Research* **11**, 2403035 (2016).
- [6] S. Sakakibara, *et al.*, Characteristics of MHD instabilities limiting the beta value in LHD, *Nuclear Fusion* **55**, 083020 (2015).
- [7] L. Maxime, M. Sasaki, and A. Shimizu, Subcritical Instabilities in Neutral Fluid and Plasmas, *Journal of Plasma Fusion Research* **9**, 665-671 (2016).
- [8] O. Dauchot, and F. Daviaud, Finite amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow, *Physics of Fluids* **7**, 335 (1995).
- [9] J. Cheng, M. Grossman, and T. McKercher, *CUDA C プロフェッショナルプログラミング*, インGRESジャパン, 2015.
- [10] J. Sanders, and E. Kandrot, *CUDA by Example 汎用 GPU プログラミング入門*, インGRESジャパン, 2011.
- [11] 九州大学大学院総合理工学府大気海洋環境システム学専攻, 地球環境を学ぶための流体力学, 成山堂書店, 2006 (p.201) .
- [12] 金田行雄, 笹井理生, 乱流の計算科学 - 乱流解明のツールとしての大規模数値シミュ

レーション, 共立出版, 2012.

- [13] 石岡圭一, スペクトル法による数値計算入門, 東京大学出版, 2004.
- [14] S. Orszag, On the Elimination of Aliasing in Finite-Difference Schemes by Filtering High-Wavenumber Components, *Journal of the Atmospheric Sciences* **28**, 1074 (1971).
- [15] J. Hawley, C. Gammie, and S. Balbus, Local Three-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of Accretion Disks, *The Astrophysical Journal* **440**, 742 (1995).
- [16] T. Tatsuno, and W. Dorland, Magneto-flow instability in symmetric field profiles, *Physics of Plasmas* **13**, 092107 (2006).
- [17] 社団法人 応用物理学会, 応用物理用語大辞典, オーム社, 1999.
- [18] 神部勉, P.G. ドレイジン, 流体力学 安定性と乱流, 東京大学出版, 1998.
- [19] 吉澤徹, 流体力学, 東京大学出版, 2001.

謝辞

本研究を進めるにあたって始終適切なお助言を賜り, 熱心にご指導下さった龍野智哉准教授に深く感謝申し上げます。また, 緒方秀教教授もお忙しい中わざわざ時間を割いて本論文にお目通しいただき感謝申し上げます。龍野研究室の Tretler Rudolf 氏には様々なアドバイスを頂きました。心より感謝致します。最後に, 同学生部屋の皆様には多くの励ましをいただきました。本当にありがとうございました。