

修 士 論 文 の 和 文 要 旨

| | | | |
|---|---------------------------------------|------|---------|
| 研究科・専攻 | 大学院 情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻 博士前期課程 | | |
| 氏 名 | 寺坂 元 | 学籍番号 | 1731113 |
| 論 文 題 目 | 非双曲型平衡点近傍における局所 Lyapunov 関数の精度保証による構成 | | |
| <p>要 旨</p> <p>近年では精度保証付き数値計算と力学系を組み合わせた研究が盛んに行われている。精度保証付き数値計算とは、計算と同時に誤差評価を行う、計算結果の正しさが数学的に保証された数値計算法である。それゆえに純粋数学への応用も可能であり、力学系における解析の非常に強力な道具となっている。活用例として、不安定多様体やホモクリニック軌道といった時間無限大の極限を含む現象の解析や有限時間爆発解の解析が挙げられる。</p> <p>上で挙げた例において、Lyapunov 関数の局所的な構成が力学系における解析の重要な道具の一つとなっている。その Lyapunov 関数について、双曲型平衡点近傍では 2 次形式の形で局所的に構成可能であり、また精度保証付き数値計算による体系的な構成方法も知られている。しかしながら、非双曲型平衡点近傍では 2 次形式の Lyapunov 関数は原理的に構成することができず、したがって精度保証付き数値計算による局所 Lyapunov 関数の体系的な構成方法は確立されていなかった。非双曲型平衡点の近傍でも構成できれば、精度保証付き数値計算と力学系を組み合わせた研究のさらなる発展が期待できる。</p> <p>本論文では 2 次元の自励系における非双曲型平衡点のうち、標準形定理と呼ばれる力学系の基礎的な理論を利用できる場合について、局所 Lyapunov 関数を体系的に構成する方法を開発した。また、本論文で構成された Lyapunov 関数は 2 次形式とは異なる場合があるため、Lyapunov 関数の定義域の新たな検証方法を開発した。さらに、構成した Lyapunov 関数を利用して、非双曲型平衡点から双曲型平衡点へのヘテロクリニック軌道を捕捉し、Lyapunov 関数の有効性を提示した。</p> <p>標準形定理とは力学系の基礎的な理論であり、数値的な手法として活用しやすい。それゆえに、精度保証付き数値計算へのさらなる応用が見込まれる。将来的には、本論文で提案する局所 Lyapunov 関数の構成方法を発展させ、数式処理システムによる高次元の系での平衡点近傍における Lyapunov 関数の自動構成、およびその Lyapunov 関数を用いた平衡点近傍の解析を行うライブラリを構成し、実際的な現象への力学系の応用のための道具となることが期待できる。</p> | | | |

非双曲型平衡点近傍における局所 Lyapunov 関数の精度保証による構成

2019年3月14日

情報数理工学コース

学籍番号 1731113

寺坂元

主任指導教員 山本野人

指導教員 久藤衡介

目次

| | | |
|------|---------------------------------|----|
| 1 | はじめに | 3 |
| 2 | 精度保証付き数値計算 | 5 |
| 2.1 | 区間と区間演算 | 5 |
| 2.2 | 平均値形式 | 6 |
| 2.3 | 常微分方程式の初期値問題の精度保証 | 7 |
| 3 | 局所 Lyapunov 関数 | 11 |
| 3.1 | 局所 Lyapunov 関数の定義 | 11 |
| 3.2 | 双曲型平衡点近傍における局所 Lyapunov 関数の構成 | 12 |
| 3.3 | 双曲型平衡点近傍で構成された局所 Lyapunov 関数の応用 | 15 |
| 3.4 | 非双曲型平衡点に対する問題点 | 16 |
| 4 | 非双曲型平衡点近傍における局所 Lyapunov 関数の構成 | 19 |
| 4.1 | 問題設定 | 19 |
| 4.2 | 標準形定理 | 19 |
| 4.3 | 構成方法 | 21 |
| 4.4 | 定義域の検証方法 | 31 |
| 5 | 数値例 | 37 |
| 5.1 | J_1 の場合に該当する数値例 | 37 |
| 5.2 | J_2 の場合に該当する数値例 | 39 |
| 5.3 | J_3 の場合に該当する数値例 | 41 |
| 6 | 非双曲型平衡点で構成された局所 Lyapunov 関数の応用 | 44 |
| 6.1 | 数値例 | 44 |
| 6.2 | 数値例におけるヘテロクリニック軌道の捕捉方法 | 45 |
| 6.3 | 精度保証の結果 | 51 |
| 7 | 展望 | 55 |
| 付録 A | | 56 |
| A.1 | 標準形の操作範囲 | 56 |
| A.2 | 標準形の操作範囲の導出 | 59 |
| 付録 B | | 63 |

| | | |
|------|-----------------------------|----|
| B.1 | ホモクリニック軌道の連続分布 | 63 |
| B.2 | 中心多様体の導出 | 65 |
| B.3 | 局所 Lyapunov 関数の性質 | 66 |
| 付録 C | | 68 |
| C.1 | 自励系の特徴 | 68 |
| C.2 | 平衡点の安定性 | 69 |
| C.3 | 用語の説明 | 71 |

1 はじめに

力学系理論とは、時間の発展とともに一定の規則に従って状態が変化する系 (時としてモデル, システムあるいはリズムともいう) についてその大域的あるいは局所的な変化・ふるまいを探究する分野であり, 非常に広範である. 系そのものに着目する純粋数学の側面がある一方, 取り扱う分野のその広範さから物理や工学, 生物などあらゆる分野への応用が成されている ([1, 2, 3]). すなわち, 力学系の理論と方法は実現象の数学的な基盤を理解するための有力な解析の「道具」となる. この力学系について, 近年では精度保証付き数値計算と力学系を組み合わせた研究が盛んに行われている. 精度保証付き数値計算とは, 計算と同時に誤差評価を行う, 計算結果の正しさが数学的に保証された数値計算法である. それゆえに純粋数学への応用も可能であり, 力学系の「難しい問題」を解くための非常に強力な道具となっている. 「難しい問題」の例として, 不安定多様体やホモクリニック軌道といった時間無限大の極限を含む現象の解析 ([4, 5]) や有限時間爆発解の解析 ([6]) が挙げられる.

上で挙げた例において, Lyapunov 関数の局所的な構成 (以下局所 Lyapunov 関数と呼ぶ) が「難しい問題」を解く重要な「道具」の一つとなっている. その局所 Lyapunov 関数について, 双曲型平衡点近傍では 2 次形式の形で構成可能であり, また精度保証付き数値計算による体系的な構成方法も知られている ([7, 8]). しかしながら, 非双曲型平衡点近傍では 2 次形式の局所 Lyapunov 関数は原理的に構成することができず, したがって精度保証付き数値計算による局所 Lyapunov 関数の体系的な構成方法は確立されていなかった.

局所 Lyapunov 関数は相空間上の点の位置で決まるスカラー値関数であり, 与えられた力学系に従って時間の経過とともにこの点が推移する際に, その値が減少する性質を持つ. 言い換えれば, 力学系によって動く点は局所 Lyapunov 関数の等高線を下って移動する. この性質が時間無限大の極限を数値的に扱えるようにするための要となる. 局所 Lyapunov 関数を非双曲型平衡点の近傍でも構成できれば, 精度保証付き数値計算と力学系を組み合わせた研究のさらなる発展が期待できる.

本論文では 2 次元の自励系における非双曲型平衡点のうち, 標準形定理と呼ばれる力学系の基礎的な理論を利用できる場合について, 局所 Lyapunov 関数を体系的に構成する方法を開発した. また, 本論文で構成された局所 Lyapunov 関数は 2 次形式とは異なる場合があるため, 局所 Lyapunov 関数の定義域の新たな検証方法を開発した. さらに, 構成した局所 Lyapunov 関数を利用して, 非双曲型平衡点から双曲型平衡点へのヘテロクリニック軌道を捕捉し, 局所 Lyapunov 関数の有効性を提示した.

標準形定理とは力学系の基礎的な理論であり, 数値的な手法として扱いやすい. それゆえに, 精度保証付き数値計算へのさらなる応用が見込まれる. 将来的には, 本論文で提案する局所 Lyapunov 関数の構成方法を発展させ, 数式処理システムによる高次元の系での (双曲型と非双曲型どちらも含む) 平衡点近傍における局所 Lyapunov 関数の自動構成, およびその局所 Lyapunov 関数を用いた平衡点近傍の解析を行うライブラリを構成し, 実際的な現象

への力学系の応用のための「道具」となることが期待できる。

本論文の構成について述べる。第2章では本論文で用いる精度保証付き数値計算の技法について簡単に記述する。区間や区間演算の定義，常微分方程式の初期値問題の精度保証付き数値計算について触れる。

第3章では局所 Lyapunov 関数の定義について「一般的な」Lyapunov 関数との違い，その意義とともに記述する。また双曲型平衡点近傍における局所 Lyapunov 関数の構成方法，そしてその構成方法が非双曲型平衡点近傍では構成不可能な理由について記述する。

第4章では本論文の主題である，非双曲型平衡点近傍での局所 Lyapunov 関数の構成方法および検証方法について記述する。

第5章では本論文の手法を用いて行った数値例を記述する。非双曲型平衡点近傍において局所 Lyapunov 関数を体系的に構成できていることを示す。

第6章では本論文の手法によって構成された局所 Lyapunov 関数の応用例を記述する。非双曲型平衡点近傍で構成された局所 Lyapunov 関数がどのように応用できるかを数値例でもって示す。

第7章では本論文の手法の展望について記述する。

2 精度保証付き数値計算

数値計算の誤差は次のように分類をすることができる ([9]).

1. モデル化誤差: 科学計算のもとになる数学モデルが, 現象を正しく記述できていないことによる誤差
2. 打ち切り誤差: 問題の解法手順が, 計算機内で本質的に実現不能なことに起因する誤差
3. 丸め誤差: 計算機内で扱える数値が, 有限桁であるために生じる誤差

精度保証付き数値計算 (以下精度保証と呼ぶ) は打ち切り誤差と丸め誤差の厳密評価を対象としている. 本論文では, 精度保証を利用することで Lyapunov 関数の定義域の検証を行う. 本章では本研究で利用する精度保証の技法を [9, 10] に基づき紹介する.

2.1 区間と区間演算

現代において, 計算機は実数を浮動小数点数で近似して計算している. しかし, 近似であるということは数学的厳密解を得られないことを意味する. そこで, 精度保証では以下のように, 閉区間で厳密解を包含する. このときの閉区間を単に区間と呼ぶ.

$$X = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}\} \quad (2.1)$$

上のように表現される閉集合 X を区間と呼び, 実数上の区間全体の集合を \mathbb{IR} と表現する. このとき $X \in \mathbb{IR}$ となる. 区間の表現方法は (2.1) のように上限 \bar{x} ・下限 \underline{x} で表す下端上端方式と中心値半径方式の二種類があるが, 本論文では下端上端方式を用いる.

ふたつの区間 $X = [\underline{x}, \bar{x}], Y = [\underline{y}, \bar{y}]$ における演算は, それぞれの区間に含まれる任意の実数同士の演算結果を全て包含する最小の有界閉区間として定義する. これは, 真の値を必ず含むことになる. この区間同士の演算を区間演算と呼ぶ. 四則演算については以下の通りである.

$$\begin{aligned} X + Y &= [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}], \\ X - Y &= [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}], \\ X \cdot Y &= [\min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}], \\ X/Y &= [\underline{x}, \bar{x}] \cdot [1/\bar{y}, 1/\underline{y}]. \quad (0 \notin Y) \end{aligned}$$

演算結果の上限・下限が浮動小数点数にならない場合は, 上限の場合は上向きに, 下限の場合は下向きに丸めた結果の浮動小数点数を上限・下限とする.

区間演算は実数における四則演算と同じ性質を持つとは限らない. その最たる例として, 区間演算では半分配則しか成り立たないことが挙げられる. すなわち, 3つの区間 A, B, C

に対して

$$A \cdot (B + C) \subset A \cdot B + A \cdot C$$

は成り立つが、逆向きの包含は一般には成立しない。この性質から区間演算においては同じ区間はできるだけくくって計算したほうが区間の拡大を抑えられる。

また、区間演算では

$$\begin{aligned} X - X &\neq [0, 0], \\ X/X &\neq [1, 1] \end{aligned}$$

となることに注意されたい。すなわち加法および乗法に関して逆元が存在しないため、プログラミングの際には注意が必要である。また、区間を成分として持つベクトル、行列をそれぞれ区間ベクトル、区間行列と呼び、それらの間も同様にして演算する。

区間演算をそのまま適用すれば過大評価によって区間幅が余計に拡大してしまう場合がある。原因として Dependency Problem と Wrapping Effect(以下 W.E.) が挙げられる。

Dependency Problem とは数式の表現によって区間拡大が起きてしまう現象である。これは区間演算に関して分配則が成立しないことに起因する区間拡大である。特に、区間値に関する非線形関数で起こりやすい。

W.E. とは区間ベクトルと行列との積により区間ベクトルが歪み・回転作用を受け、その結果を区間として包含する際に区間拡大が起きてしまう現象である。一般に大きな W.E. は歪み作用よりもむしろ回転作用によって引き起こされることが多い。W.E. は行列ベクトル積の繰り返しにより指数関数的に増加していくため、精度保証においては行列ベクトル積の計算は注意を要する。行列ベクトル積を計算し得られるベクトルに再び行列を掛ける、といった計算を繰り返す場合は先に行列と行列の積を計算し、最後にベクトルを掛けることで W.E. を一回に軽減させることができる。

2.2 平均値形式

下端上端方式の区間 $[x]$ について 1 階連続微分可能な関数 f の値域 $f([x]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [x]\}$ を包含する区間を $[f([x])]$ と書く。 $[x]$ に属する任意の点 \hat{x} をとる。 \hat{x} は任意の点ではあるが、通常は区間 $[x]$ の中心点である。まず、 $f(x)$ について 1 次のテイラー展開を用いれば

$$\begin{aligned} \forall x \in [x], f(x) &= f(\hat{x} + (x - \hat{x})) \\ &= f(\hat{x}) + (x - \hat{x})f'(\hat{x} + \theta(x - \hat{x})) \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \hat{x} + \theta(x - \hat{x}) &\in [x] = [\underline{x}, \bar{x}], \\ x - \hat{x} &\in [x] - \hat{x} = [\underline{x} - \hat{x}, \bar{x} - \hat{x}] \end{aligned}$$

より

$$f([x]) \subset f(\hat{x}) + f'([x])([x] - \hat{x}), \hat{x} \in [x]$$

となる. ここで, $[f([x])]$ として

$$[f([x])] = f(\hat{x}) + [f'([x])][x] - \hat{x}, \hat{x} \in [x] \quad (2.2)$$

を採用することができる. これを $f([x])$ の \hat{x} における平均値形式という. また, 区間ベクトル $[x] \subset \mathbb{R}^n$, ベクトル値関数 $f \in \mathbb{R}^n$ に対しても同様に平均値形式を考えることができる.

2.3 常微分方程式の初期値問題の精度保証

常微分方程式の初期値問題 (以下 ODE-IVP と呼ぶ) に関する精度保証について [9] に基づいた簡単な説明を記す.

2.3.1 問題設定

ODE-IVP を次のように設定する.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) & (0 < t < T) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0 \in [\mathbf{u}_0] \end{cases}$$

$\mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ であり \mathbf{f} は定義域が $[0, T] \times D, D \subset \mathbb{R}^n$ で, t, \mathbf{u} に関して p 回連続微分可能とする. また, 初期値 \mathbf{u}_0 は区間ベクトル $[\mathbf{u}_0] \subset \mathbb{R}^n$ の任意の点であるとする.

2.3.2 準備

ODE-IVP の精度保証について, 次の定理を利用する.

Brouwer の不動点定理

Ω を n 次ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の有界凸閉集合とし, \mathbf{f} を $\mathbf{f}: \Omega \rightarrow \Omega$ の連続写像としたときに \mathbf{f} は不動点を持つ, すなわち, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ となる $\mathbf{x} \in \Omega$ が存在する.

有限次元空間において不動点の存在および存在範囲を保証する定理である.

Schauder の不動点定理

M を Banach 空間 X の空でない有界凸閉集合とし, $T: M \rightarrow M$ がコンパクト作用素であるとき, T は M に不動点を持つ.

作用素 T がコンパクトとは次の 2 つの性質を持つことと同値である.

- (i) T は連続写像である.
- (ii) 有界集合 U を T によって写したとき, 必ずその像 $T(U)$ の中から収束する点列を選び出すことができる.

次のような写像は一般にコンパクト作用素である.

- 有限次元空間を値域とする連続写像
- 積分作用素
- 微分方程式の解を対応させる作用素
- コンパクト作用素と有界連続作用素の合成写像

Schauder の不動点定理は Brouwer の不動点定理を無限次元に拡張したものである。

2.3.3 解の粗い包含

時間軸上に分点 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$ を設定し、ステップ幅を $h = t_{j+1} - t_j$ とする。

まず、 $[t_j, t_{j+1}]$ で真の解を包含する区間ベクトル $[\mathbf{u}]$ を求める。もとの ODE を t_j から t まです積分し、 \mathbf{u} について整理することで次の式を得る。

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_j + \int_{t_j}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{u}(\tau)) d\tau, \quad t_j < t < t_{j+1}.$$

この右辺は \mathbf{u} に関する作用素とみなすことができる。右辺を $F(\mathbf{u})$ とおくと、不動点方程式

$$\mathbf{u} = F(\mathbf{u})$$

が得られる。積分作用素と連続写像の合成はコンパクト作用素であるため右辺 F はコンパクト作用素といえる。

関数空間として $[t_j, t_{j+1}]$ 上の連続関数を要素に持つ n 元ベクトル全体の集合である $(C[t_j, t_{j+1}])^n$ を考える。 $\mathbf{f} \in (C[t_j, t_{j+1}])^n$ に対してノルム $\|\mathbf{f}\|$ を

$$\|\mathbf{f}\| := \max_{1 \leq i \leq n} \left(\max_{t_j \leq t \leq t_{j+1}} |f_i(t)| \right)$$

として定めると $\mathbf{f} \in (C[t_j, t_{j+1}])^n$ はこのノルムのもとで Banach 空間となる。

以上より、 $[\mathbf{u}] \subset (C[t_j, t_{j+1}])^n$ が有界凸閉集合であること、また

$$F([\mathbf{u}]) \subset [\mathbf{u}]$$

となれば、Schauder の不動点定理から $[\mathbf{u}]$ に不動点方程式の解 $\mathbf{u} = F(\mathbf{u})$ が存在することになる。そこで、 $[\mathbf{u}]$ を有界凸閉集合とするべく n 元実定数ベクトル $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ を選んで

$$[\mathbf{u}] = \{\mathbf{u} \in (C[t_j, t_{j+1}])^n \mid \boldsymbol{\alpha} \leq \mathbf{u}(t) \leq \boldsymbol{\beta}, \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}]\}$$

と定める。まず、 $\mathbf{u}(\tau) \in [\mathbf{u}]$ のもとで $\int_{t_j}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{u}(\tau)) d\tau \in \int_{t_j}^t \mathbf{f}(\tau, [\mathbf{u}]) d\tau$ であり、さらに t を固定して考えれば区間ベクトル同士の包含関係に帰着され、

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^t \mathbf{f}(\tau, [\mathbf{u}]) d\tau &\subset \int_{t_j}^t \mathbf{f}(\tau, [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]) d\tau \\ &\subset \int_{t_j}^t \mathbf{f}([t_j, t_{j+1}], [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]) d\tau \\ &= (t - t_j) \mathbf{f}([t_j, t_{j+1}], [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]) \\ &\subset [0, h] \mathbf{f}([t_j, t_{j+1}], [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]) \end{aligned}$$

となる。これより Schauder の不動点定理を満たすための十分条件として

$$[\mathbf{u}_j] + [0, h]\mathbf{f}([t_j, t_{j+1}], [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]) \subset [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] \quad (2.3)$$

が得られる。これを満たす $[\mathbf{u}] = [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ を定めればよい。

$[\mathbf{u}]$ の初期値を時刻 t_j における解 \mathbf{u}_j とし、以下のアルゴリズムを用いることで条件 (2.3) を満たす $[\mathbf{u}]$ が得られる。

1. (2.3) の左辺を区間演算で計算して、これを包含する区間ベクトルを $[\mathbf{v}]$ とおく
2. $[\mathbf{v}] \subset [\mathbf{u}]$ をチェックし、成立していれば $[\mathbf{u}] := [\mathbf{v}]$ として終了
3. そうでなければ $[\mathbf{u}] := (1 + \epsilon)[\mathbf{v}] - \epsilon[\mathbf{v}]$ とおいて反復

ϵ はあらかじめ定めた小さな正定数であり、この操作を ϵ -inflation と呼ぶ。

ここで得られる解の包含 $[\mathbf{u}]$ は十分な精度とはいえない粗い包含である。そこで、Taylor 展開を用いて打ち切り誤差の評価を簡単にし、区間半径の小さな包含を求める。

2.3.4 Taylor 展開

$t = t_j$ での解 \mathbf{u}_j を包含する区間を $[\mathbf{u}_j]$ とする。前節で求めた $[t_j, t_{j+1}]$ における真の解を包含する区間 $[\mathbf{u}]$ を Taylor 展開に適用し、 $t = t_{j+1}$ での解の包含 $[\mathbf{u}_{j+1}]$ を小さくすることを考える。

まず、 $\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}(t_j + h)$ を $t = t_j$ の周りで Taylor 展開すると

$$\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}(t_j) + \dot{\mathbf{u}}(t_j)h + \frac{1}{2!}\ddot{\mathbf{u}}(t_j)h^2 + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}\mathbf{u}^{(p-1)}(t_j)h^{p-1} + \frac{1}{p!}\mathbf{u}^{(p)}(t_j + \theta h)h^p \quad (2.4)$$

となる。剰余項 $\mathbf{u}^{(p)}(t_j + \theta h)$ については

$$\mathbf{u}_\theta^{(p)}(t_j + \theta h) = \begin{pmatrix} u_1^{(p)}(t_j + \theta_1 h) \\ \vdots \\ u_n^{(p)}(t_j + \theta_n h) \end{pmatrix}, \quad (0 < \theta_j < 1, j = 1, 2, \dots, n)$$

である。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t_j, \mathbf{u}_j) \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \frac{d}{dt}\mathbf{f}(t_j, \mathbf{u}_j) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{f}(t_j, \mathbf{u}_j) \end{aligned}$$

となることに注意する。ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(1)} &= \mathbf{f} \\ \mathbf{f}^{(k+1)} &= \frac{1}{k+1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}^{(k)}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{f} \right) \end{aligned}$$

とおくと、式 (2.4) は

$$\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \sum_{k=1}^{p-1} h^k \mathbf{f}^{(k)}(t_j, \mathbf{u}_j) + h^p \mathbf{f}^{(p)}(t_j + \theta h, \mathbf{u}(t_j + \theta h))$$

と定めることができる。 $\mathbf{f}^{(p)}(t_j + \theta h, \mathbf{u}(t_j + \theta h)) \in \mathbf{f}^{(p)}([t_j, t_{j+1}], [\mathbf{u}])$ に注意して区間 $[\mathbf{u}]$ を用いれば

$$[\mathbf{u}_{j+1}] = [\mathbf{u}_j] + \sum_{k=1}^{p-1} h^k \mathbf{f}^{(k)}(t_j, [\mathbf{u}_j]) + h^p \mathbf{f}^{(p)}([t_j, t_{j+1}], [\mathbf{u}]) \quad (2.5)$$

が導かれる。

(2.5) に平均値形式を適用して Dependency Problem を軽減し、さらに、QR 分解による座標回転を用いれば W.E. を軽減させることができる。この手法を Lohner 法と呼ぶ。詳しくは [9] を参照されたい。また、他には Lohner 法と同じく Taylor 展開法をベースにしているが、W.E. 対策に affine arithmetic と呼ばれる計算方法を用いた手法も存在する。詳しくは [10, 11] を参照されたい。

3 局所 Lyapunov 関数

本章では自励系における局所 Lyapunov 関数の定義，そして双曲型平衡点における局所 Lyapunov 関数の構成方法とその応用について説明する．扱う対象は次の自励系である．

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}), & 0 < t < \infty, \\ \mathbf{u} &\in \mathbb{R}^n, & \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (3.1)$$

なお，(3.1) は平衡点 \mathbf{u}^* を持つものとする．すなわち $\mathbf{f}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$ である．

本論文で定義される「局所 Lyapunov 関数」は「一般的な」Lyapunov 関数とは異なることや，Lyapunov 関数の局所的な構成を目指していることにも注意されたい．局所的な構成の意義は第 3.3 節で説明する．

3.1 局所 Lyapunov 関数の定義

安定性理論や制御理論などで用いられる，いわば「一般的な」Lyapunov 関数は次のように定義される ([12, 13, 14]).

定義 1.

\mathbf{u}^* を含む領域 $D_L \subset \mathbb{R}^n$ での広義 Lyapunov 関数とは，次の条件を満たす C^1 級関数 $L : D_L \rightarrow \mathbb{R}$ を指す．

1. $\forall \mathbf{u} \in D_L \setminus \{\mathbf{u}^*\}, \quad \frac{d}{dt}L(\mathbf{u}) \leq 0$
2. $L(\mathbf{u}^*) = 0, \quad \frac{d}{dt}L(\mathbf{u}^*) = 0$
3. $\forall \mathbf{u} \in D_L \setminus \{\mathbf{u}^*\}, \quad L(\mathbf{u}) \geq 0$

また，広義 Lyapunov 関数であってしかも次の条件を満たせば， L は \mathbf{u}^* の近傍 D_L での (狭義)Lyapunov 関数という．

4. $\forall \mathbf{u} \in D_L \setminus \{\mathbf{u}^*\}, \quad \frac{d}{dt}L(\mathbf{u}) < 0$

上述の Lyapunov 関数では平衡点が安定な場合のみ定義される．それは，Lyapunov 関数は平衡点の安定性解析や吸引領域を同定するためのツールとして用いることに主眼を置かれていたためだと考えられる．本論文における Lyapunov 関数の構成は平衡点近傍の軌道のより詳細な解析のためのツールとして用いることを想定しており，したがって不安定な平衡点についても定義できるようにしたい．そこで，以下のように条件を緩和し定義を拡張させる．

定義 2.

\mathbf{u}^* を含む領域 $D_L \subset \mathbb{R}^n$ での Lyapunov 関数とは、次の条件を満たす C^1 級関数 $L : D_L \rightarrow \mathbb{R}$ を指す。

1. $\forall \mathbf{u} \in D_L \setminus \{\mathbf{u}^*\}, \frac{d}{dt}L(\mathbf{u}) < 0$
2. $L(\mathbf{u}^*) = 0, \frac{d}{dt}L(\mathbf{u}^*) = 0$

本論文では、定義 2 の Lyapunov 関数を扱い、Lyapunov 関数の局所的な構成、いわば「局所 Lyapunov 関数」を目指す。

3.2 双曲型平衡点近傍における局所 Lyapunov 関数の構成

(3.1) の平衡点 \mathbf{u}^* が双曲型平衡点ならば、 \mathbf{u}^* 近傍における局所 Lyapunov 関数が 2 次形式で構成可能であり、精度保証による構成法も知られている ([7, 8])。本節では、[7] に基づいた構成方法を記述する。

3.2.1 2 次形式の導出

以下の手順で局所 Lyapunov 関数の候補となる 2 次形式を求める。

1. $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ における $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ のヤコビ行列を $D\mathbf{f}^*$ とおく。これが正則行列によって対角化可能であるとし、 Λ を固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を並べた対角行列、 X を対応する固有ベクトルを並べた行列として

$$\Lambda = X^{-1}D\mathbf{f}^*X$$

とする。なお、対角化可能でない場合については、ジョルダン標準形を用いて同様の議論ができる ([15])。

2. 行列 I^* を i_1, i_2, \dots, i_n が対角成分とする対角行列とする。ただし、 $i_k (1 \leq k \leq n)$ は

$$i_k = \begin{cases} 1, & \text{if } \operatorname{Re}(\lambda_k) < 0, \\ -1, & \text{if } \operatorname{Re}(\lambda_k) \geq 0 \end{cases}$$

と定める。平衡点を双曲型と仮定したため $\operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$ とはならないが、第 3.4 節の説明をしやすくするため、 $\operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$ の場合も想定して i_k を定めている*1。

3. 実対称行列 Y を以下のように算定する。

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= X^{-H}I^*X^{-1} \\ Y &= \operatorname{Re}(\hat{Y}) \end{aligned}$$

*1 $\operatorname{Re}(\lambda_k) \leq 0$ で $i_k = 1, \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0$ で $i_k = -1$ としても変化はない。

ただし, X^{-H} は行列 X の共役転置の逆行列である

4. 局所 Lyapunov 関数の候補として, 次の 2 次形式を定義する.

$$L(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T Y (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \quad (3.2)$$

精度保証で用いる際は, Y の代わりに $\frac{Y+Y^T}{2}$ を用いるなどの方法で Y の対称性を確保する.

以上の計算に関しては通常の浮動小数点演算による近似計算で行えばよいことを注意しておく.

3.2.2 $L(\mathbf{u})$ の妥当性

上記の方法で構成した関数 (3.2) が平衡点を含む領域で局所 Lyapunov 関数の要件を満たすための十分条件を導き, また双曲型平衡点の十分小さな近傍ではこの条件を満たしていることを示す.

解軌道 $\mathbf{u}(t)$ を引数とした関数 $L(\mathbf{u}(t))$ を t で微分すると,

$$\frac{d}{dt}L(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u})^T Y (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T Y \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (3.3)$$

となる. ここで,

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(\mathbf{u}^* + s(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)), s \in [0, 1]$$

を考える.

$$\frac{d}{ds}\mathbf{g} = D\mathbf{f}(\mathbf{u}^* + s(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*))(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)$$

および $\mathbf{f}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$ となることから

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \int_0^1 D\mathbf{f}(\mathbf{u}^* + s(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*))ds(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)$$

を得る. ただし $D\mathbf{f}(\mathbf{u})$ は \mathbf{f} の \mathbf{u} におけるヤコビ行列である. これより, $L(\mathbf{u}(t))$ の時間微分 (3.3) は実 2 次形式

$$\frac{d}{dt}L(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T \int_0^1 (D\mathbf{f}(\mathbf{u}^* + s(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*))^T Y + Y D\mathbf{f}(\mathbf{u}^* + s(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)))ds(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)$$

で表されることになる.

いま, $\mathbf{z} = \mathbf{u}^* + s(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)$ とおき, 実対称行列 $A(\mathbf{z})$ を

$$A(\mathbf{z}) := D\mathbf{f}(\mathbf{z})^T Y + Y D\mathbf{f}(\mathbf{z})$$

で定める. \mathbf{u}^* と \mathbf{u} を結ぶ線分上の任意の点 \mathbf{z} について $A(\mathbf{z})$ が負定値であれば, \mathbf{u} に対して $\frac{d}{dt}L(\mathbf{u}) < 0$ となる.

以上より, 平衡点 \mathbf{u}^* に関する星型領域, すなわち次の条件

- $\mathbf{u}^* \in D_L$
- $\mathbf{u} \in D_L$ に対し任意の $0 \leq s \leq 1$ について $\mathbf{u}^* + s(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \in D_L$

を満たす領域において任意の $\mathbf{z} \in D_L$ に対して $A(\mathbf{z})$ が負定値であれば $L(\mathbf{u})$ が D_L で局所 Lyapunov 関数となる。

次に, \mathbf{z} が平衡点 \mathbf{u}^* の近傍にあるとき $A(\mathbf{z})$ が負定値となることを示す. 2次形式 $y = \mathbf{u}^T A(\mathbf{z})\mathbf{u}$ は \mathbf{u} を固定するごとに \mathbf{z} について連続であるため, $y = \mathbf{u}^T A(\mathbf{u}^*)\mathbf{u}$ が任意の \mathbf{u} に対して負であることを示せばよい. したがって, $A(\mathbf{u}^*)$ の負定値性を示せばよい. 一般に, エルミート行列 H , 実ベクトル \mathbf{z} に対して 2次形式 $\mathbf{z}^T H \mathbf{z}$ は実数である. さらに

$$\mathbf{z}^T H \mathbf{z} = \mathbf{z}^T \text{Re}(H) \mathbf{z}$$

となる. これより

$$(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T ((D\mathbf{f}^*)^T \hat{Y} + \hat{Y} D\mathbf{f}^*) (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) = (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T ((D\mathbf{f}^*)^T \hat{Y} + \hat{Y} D\mathbf{f}^*) (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \quad (3.4)$$

となる. よって, $A(\mathbf{u}^*)$ の代わりに $(D\mathbf{f}^*)^T \hat{Y} + \hat{Y} D\mathbf{f}^*$ の負定値性を調べればよい. \hat{Y} 及び Λ の定義を用いて

$$\begin{aligned} (D\mathbf{f}^*)^T \hat{Y} + \hat{Y} D\mathbf{f}^* &= (D\mathbf{f}^*)^H X^{-H} I^* X^{-1} + X^{-H} I^* X^{-1} D\mathbf{f}^* \\ &= X^{-H} \Lambda^H I^* X^{-1} + X^{-H} I^* \Lambda X^{-1} \\ &= X^{-H} (\Lambda^H I^* + I^* \Lambda) X^{-1} \\ &= X^{-H} (2\text{Re}(\Lambda) I^*) X^{-1} \\ &= -2X^{-H} |\text{Re}(\Lambda)| X^{-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

と変形できる. ここで $|\text{Re}(\Lambda)|$ は行列 $\text{Re}(\Lambda)$ の各成分の絶対値を取った行列を表す. これで, $(D\mathbf{f}^*)^T \hat{Y} + \hat{Y} D\mathbf{f}^*$ が負定値であることが示される. したがって, \mathbf{u}^* の十分小さな近傍では

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(\mathbf{u}) &< 0 \quad (\mathbf{u} \neq \mathbf{u}^*), \\ \frac{d}{dt} L(\mathbf{u}^*) &= 0 \end{aligned}$$

となり, $L(\mathbf{u})$ は \mathbf{u}^* の近傍で局所 Lyapunov 関数の要件を満たすことが示された.

3.2.3 局所 Lyapunov 関数の定義域の検証

構成した局所 Lyapunov 関数が定義される領域の検証方法について記す.

平衡点 \mathbf{u}^* に関する星型領域 D_L をとり, この領域において局所 Lyapunov 関数の要件が満たされるかを確認する. まず, 領域 D_L を平衡点近傍の領域 D_{L1} と, それ以外の領域 D_{L2} に分ける. さらに, D_{L1}, D_{L2} を適当な小領域に分割して次の検証条件の成立を確認する.

Stage1. 領域 D_{L1} の検証

D_{L1} を分割した各小領域を区間ベクトル $[\mathbf{u}]$ で包含し、さらに $A([\mathbf{u}])$ の負定値性を精度保証で以下の手順により検証する.

1. 行列 $A([\mathbf{u}])$ を精度保証で算定する.
2. $A([\mathbf{u}])$ の中心行列を \hat{A} とする. \hat{A} について対角化を近似的に行う. すなわち,

$$\Lambda = X^{-1}\hat{A}X$$

となる行列 X を算定する.

3. 精度保証法によって区間行列 $X^{-1}A([\mathbf{u}])X$ を算定し、その成分を $[a]_{ij}$ とおく.
4. この区間行列にゲルシュゴリンの定理を適用する. すなわち、各 $i = 1, \dots, n$ について

$$[a]_{ii} + \sum_{j \neq i} |[a]_{ij}| < 0$$

を精度保証で検証する.

Stage2. 領域 D_{L2} の検証

$$\frac{d}{dt}L(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u})^T Y(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T Y \mathbf{f}(\mathbf{u})$$

が負となることを各小領域において区間演算で直接確認する.

以上より領域 D_L で局所 Lyapunov 関数が定義できる. この領域 D_L を Lyapunov 領域ともいう.

検証方法 Stage1 が重要であることに注意されたい. 理由として、関数 L は \mathbf{u}^* 近傍で定義域を検証できなければ局所 Lyapunov 関数と言えないこと、また検証方法 Stage2 では主に丸め誤差の問題からして平衡点近傍で検証条件が成立できないことが分かっていることの2点が挙げられる.

3.3 双曲型平衡点近傍で構成された局所 Lyapunov 関数の応用

Lyapunov 関数は、大域的な安定性解析のために用いられており、大域的な Lyapunov 関数の構成は盛んであった ([3, 13]). その一方で局所 Lyapunov 関数の構成は注目されなかった. 理由として、双曲型平衡点近傍での定性的な振る舞いはヤコビ行列の固有値で決まることがわかっており、定性理論の観点からして、定義域の存在がわかれば十分だとされていたためだと考えられる. また、定義域の特定方法がなかったことも原因に挙げられる.

しかしながら、近年精度保証により定義域の特定が可能となり、現在では力学系解析の強力なツールとして構成されている. 例えば、ホモクリニック軌道・ヘテロクリニック軌道の

ような時間無限大の極限を含む現象の解析 ([4, 5]) や、有限時間爆発解の解析 ([6]) に使われている。すなわち、局所 Lyapunov 関数の構成は解析的に難しい問題を解く武器となる。

現状では、局所 Lyapunov 関数の構成方法は双曲型平衡点に対してのみ存在する。非双曲型平衡点においても構成方法を確立できれば、力学系解析の「より」解析的に難しい問題を解く重要な役割を果たすことを期待できる。

3.4 非双曲型平衡点に対する問題点

第 3.2 節で記した局所 Lyapunov 関数の構成方法は非双曲型平衡点に対しては適用できない。その理由を本節で説明する。

(3.1) の右辺 \mathbf{f} について \mathbf{u}^* 周りの Taylor 展開は

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{u}) \\ f_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \\ &= D\mathbf{f}^*(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T H^*(f_1)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \\ (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T H^*(f_2)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \\ \vdots \\ (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T H^*(f_n)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{u}\|^3) \quad (3.6) \end{aligned}$$

と書ける。 $H^*(f_i) (1 \leq i \leq n)$ は \mathbf{u}^* における f_i のヘッセ行列であり、 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ とおくと

$$H^*(f_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{u}^*)}{\partial u_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{u}^*)}{\partial u_1 \partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{u}^*)}{\partial u_n \partial u_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{u}^*)}{\partial u_n^2} \end{pmatrix}$$

となる。

ここで、第 3.2.1 節に従って局所 Lyapunov 関数の候補関数 L :

$$L(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T Y (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)$$

を構成したとしよう。関数 L の時間微分は

$$\frac{d}{dt} L(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u})^T Y (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T Y \mathbf{f}(\mathbf{u})$$

であるが、 Y は対称行列であるため

$$\frac{d}{dt} L(\mathbf{u}) = 2(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T Y \mathbf{f}(\mathbf{u})$$

と書ける。ここで、(3.6) を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(\mathbf{u}) &= 2(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T Y D\mathbf{f}^*(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \\ &+ (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T Y \begin{pmatrix} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T H^*(f_1)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \\ (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T H^*(f_2)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \\ \vdots \\ (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T H^*(f_n)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{u}\|^4) \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる。

$\frac{d}{dt}L(\mathbf{u}^*) = 0$ は明らかであり、関数 L が \mathbf{u}^* における局所 Lyapunov 関数と言えるためには、 \mathbf{u}^* の除外閉近傍 $U_\varepsilon^*(\mathbf{u}^*) = \{\mathbf{u} \mid 0 < \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\| \leq \varepsilon\}$ で $dL/dt < 0$ となればよい。しかし、 \mathbf{u}^* が非双曲型平衡点ならばそれは成立しない。

(3.7) の 2 次項

$$DL_2(\mathbf{u}) := 2(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T Y D\mathbf{f}^*(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)$$

について (3.4), (3.5) を用いれば

$$\begin{aligned} DL_2(\mathbf{u}) &= 2(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T Y D\mathbf{f}^*(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \\ &= (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T ((D\mathbf{f}^*)^T Y + Y D\mathbf{f}^*)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \\ &= -2X^{-H} |\operatorname{Re}(\Lambda)| X^{-1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる。非双曲型の仮定より Λ の対角成分に 0 が含まれるため、(3.8) は非正定値である。よって、次の条件を満たす \mathbf{u}^* の閉近傍 $U_\delta(\mathbf{u}^*) = \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\| \leq \delta \leq \varepsilon\}$ が存在する。

$$\forall \mathbf{u} \in U_\delta, \sup DL_2([\mathbf{u}]) > 0 \quad (3.9)$$

$\sup DL_2([\mathbf{u}])$ は $DL_2(\mathbf{u})$ に対して区間演算による精度保証を行った場合に得られる区間値の上端を表す。(3.9) が成立する要因は主に丸め誤差である。

さらに、(3.7) の 3 次項

$$DL_3(\mathbf{u}) := (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T Y \begin{pmatrix} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T H^*(f_1)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \\ (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T H^*(f_2)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \\ \vdots \\ (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T H^*(f_n)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \end{pmatrix}$$

に対して、集合 $V^- = \{\mathbf{u} \mid DL_3(\mathbf{u}) < 0 \wedge \mathbf{u} \in U_\delta(\mathbf{u}^*) \setminus \{\mathbf{u}^*\}\}$ 上の任意の点 \mathbf{v}^- を考える。このとき、 $\mathbf{v}^+ := 2\mathbf{u}^* - \mathbf{v}^-$ については

$$DL_3(\mathbf{v}^+) = (-\mathbf{v}^- + \mathbf{u}^*)^T Y \begin{pmatrix} (-\mathbf{v}^- + \mathbf{u}^*)^T H^*(f_1)(-\mathbf{v}^- + \mathbf{u}^*) \\ (-\mathbf{v}^- + \mathbf{u}^*)^T H^*(f_2)(-\mathbf{v}^- + \mathbf{u}^*) \\ \vdots \\ (-\mathbf{v}^- + \mathbf{u}^*)^T H^*(f_n)(-\mathbf{v}^- + \mathbf{u}^*) \end{pmatrix} = -DL_3(\mathbf{v}^-) > 0$$

となる. また $v^+ \in U_\delta(\mathbf{u}^*) \setminus \{\mathbf{u}^*\}$ であるため, 集合 $V^+ = \{\mathbf{u} \mid DL_3(\mathbf{u}) > 0 \wedge \mathbf{u} \in U_\delta(\mathbf{u}^*) \setminus \{\mathbf{u}^*\}\}$ が存在する. したがって, (3.9) を満たす $U_\delta(\mathbf{u}^*)$ と V^+ の存在を考えれば, \mathbf{u}^* の除外近傍では $dL/dt < 0$ を精度保証で検証できない.

以上の理由で, 第 3.2 節の方法では非双曲型平衡点近傍における局所 Lyapunov 関数を原理的に構成できない.

4 非双曲型平衡点近傍における局所 Lyapunov 関数の構成

本章では、本論文の主題である、2次元の自励系における非双曲型平衡点での局所 Lyapunov 関数の構成方法および定義域の検証方法を提案する。本論文で提案する方法は、力学系において基礎的な理論である標準形定理を利用している。全ての系において適用できるものではないが、手法そのものは勿論、適用可能な条件についても体系化されている。また提案した方法によって構成される局所 Lyapunov 関数は、第 3.2 節で記した双曲型平衡点での局所 Lyapunov 関数とは形式が異なる。それに合わせて、第 3.2 節と異なる定義域の検証方法を提案する。

4.1 問題設定

本論文では次のような 2次元の自励系を対象とする。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}), & 0 < t < \infty, \\ \mathbf{u} &\in \mathbb{R}^2, & \mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

また、 $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ は考えている領域で C^r ($r \geq 4$) 級とし、平衡点 \mathbf{u}^* , $\mathbf{f}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$, が存在するものとする。さらに、(4.1) について平衡点 \mathbf{u}^* が非双曲型であるものとする。

(4.1) について \mathbf{u}^* を原点に座標変換し、原点における \mathbf{f} のヤコビ行列の固有空間に基底を取り直す。さらに、Taylor 展開を行えば

$$\dot{\mathbf{x}} = J\mathbf{x} + F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad J: \text{実ジョルダン標準形} \quad (4.2)$$

とできる。なお、 F は \mathbf{f} とは異なることに注意されたい。

本論文の主題である局所 Lyapunov 関数の構成については、(4.2) を問題とすることが本質的であり、よって (4.2) における、非双曲型平衡点である原点近傍における局所 Lyapunov 関数の構成方法について考える。

4.2 標準形定理

非双曲型平衡点近傍での局所 Lyapunov 関数の構成方法を考えるにあたって、標準形定理を利用する。本節では、標準形定理について [16] を参考に記す。

扱いやすさのため、(4.2) を

$$\dot{\mathbf{x}} = J\mathbf{x} + F_2(\mathbf{x}) + F_3(\mathbf{x}) + \cdots + F_{r-1}(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^r) \quad (4.3)$$

に書き直す。ここで、 $F_i(\mathbf{x})$ ($2 \leq i \leq r-1$) は $F(\mathbf{x})$ の Taylor 展開の i 次の項を表す。

座標変換

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + h_2(\mathbf{y}) \quad (4.4)$$

を導入する．この操作を標準形変換あるいは近恒等変換と呼ぶ ([17, 18]) が，ここでは標準形変換と呼ぶことにする．ここで， $h_2(\mathbf{y})$ は \mathbf{y} の 2 次の項である．(4.4) を (4.3) に代入して

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (I + Dh_2(\mathbf{y}))\dot{\mathbf{y}} \\ &= J\mathbf{y} + Jh_2(\mathbf{y}) + F_2(\mathbf{y} + h_2(\mathbf{y})) + F_3(\mathbf{y} + h_2(\mathbf{y})) + \cdots + F_{r-1}(\mathbf{y} + h_2(\mathbf{y})) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^r)\end{aligned}$$

を得る． I_n は 2×2 単位行列を， $Dh_2(\mathbf{y})$ は $h_2(\mathbf{y})$ のヤコビ行列を表す．ここで，

$$F_j(\mathbf{y} + h_2(\mathbf{y})) = F_j(\mathbf{y}) + \hat{F}_{j+1}(\mathbf{y}) + \cdots + \hat{F}_{2j}(\mathbf{y}), \quad 2 \leq j \leq r-1$$

となる．なお， $\hat{F}_i(\mathbf{y})$ ($j+1 \leq i \leq 2j$) は i 次の項である．これより

$$\begin{aligned}(I + Dh_2(\mathbf{y}))\dot{\mathbf{y}} &= J\mathbf{y} + Jh_2(\mathbf{y}) + F_2(\mathbf{y}) + \hat{F}_3(\mathbf{y}) + F_3(\mathbf{y}) \\ &\quad + \cdots + \hat{F}_{r-1}(\mathbf{y}) + F_{r-1}(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^r)\end{aligned}\tag{4.5}$$

となる．

十分小さな \mathbf{y} に対して $(I + Dh_2(\mathbf{y}))^{-1}$ が存在し，次のように級数展開できる．

$$(I + Dh_2(\mathbf{y}))^{-1} = I - Dh_2(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^2).\tag{4.6}$$

(4.6) を (4.5) 両辺左からかけて，

$$\dot{\mathbf{y}} = J\mathbf{y} + Jh_2(\mathbf{y}) - Dh_2(\mathbf{y})J\mathbf{y} + F_2(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^3)\tag{4.7}$$

を得る． $h_2(\mathbf{y})$ は \mathbf{y} についての任意の 2 次項であり，したがって (4.7) の 2 次項

$$\tilde{F}_2(\mathbf{y}) := Jh_2(\mathbf{y}) - Dh_2(\mathbf{y})J\mathbf{y} + F_2(\mathbf{y})\tag{4.8}$$

は $h_2(\mathbf{y})$ の任意性によって『ある程度の範囲』*2で操作できる．

(4.4) による標準形変換は 2 次の項のみ操作される．より高次の項も操作できるようにするには，座標変換の式を

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \sum_{m=2}^j h_m(\mathbf{y}), \quad 2 \leq j \leq r-1\tag{4.9}$$

とすればよい． $h_i(\mathbf{y})$ ($2 \leq i \leq j$) は \mathbf{y} の任意の i 次項である．このとき，(4.4) の場合と同様の操作で

$$\dot{\mathbf{y}} = J\mathbf{y} + \tilde{F}_2^r(\mathbf{y}) + \cdots + \tilde{F}_j^r(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^{j+1})\tag{4.10}$$

が導かれる．ここで， $\tilde{F}_i^r(\mathbf{y})$ ($2 \leq i \leq j$) は標準形変換によって変形された \mathbf{y} の i 次の項を意味する．(4.10) を標準形と呼び，(4.3) が (4.10) に変換できることを標準形定理と呼ぶ．標準形は変換式 (4.9) の非線形項 $\sum_{m=2}^j h_m(\mathbf{y})$ ($2 \leq i \leq j$) の任意性によって『ある程度の範囲』で操作できる．また，問題設定上，2 次元の系に対して標準形定理の操作を行っているが，系がより高次元であっても成立することを敢えて記したい．

*2 系によっては，標準形変換では操作できない項も存在する場合があります『ある程度の範囲』としている．詳細は付録 A.1 を参照．

4.3 構成方法

問題 (4.2) の原点近傍における局所 Lyapunov 関数の構成方法について記す。

本論文で提案する構成方法は標準形定理を利用する。方針として、まずは与えられた系に対して局所 Lyapunov 関数が容易に考えられる標準形を探す。そして、その標準形への変換式を算出し、考えられた局所 Lyapunov 関数を座標変換前の変数で表すことをめざす。

ただし、標準形定理をそのまま利用するには問題が生じる。変換式 (4.9) では局所 Lyapunov 関数を座標変換前の変数 \mathbf{x} で厳密に表すことができない。これを解決するためには、 \mathbf{x} から \mathbf{y} への座標変換の式を

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \sum_{m=2}^j h_m(\mathbf{x}), \quad 2 \leq j \leq r-1, \quad (4.11)$$

$h_i(\mathbf{x})$ ($2 \leq i \leq j$) : \mathbf{x} の任意の i 次項

として標準形変換を行いたい。

[17] を参考に (4.11) による座標変換でも標準形定理が成立することを次に示す。

標準形定理の系。

$$\dot{\mathbf{x}} = J\mathbf{x} + F_2(\mathbf{x}) + F_3(\mathbf{x}) + \cdots + F_{r-1}(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^r),$$

$F_i(\mathbf{x})$ ($2 \leq i \leq r-1$) : \mathbf{x} の i 次項

について、次の変換式

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \sum_{m=2}^j h_m(\mathbf{x}), \quad 2 \leq j \leq r-1,$$

$h_i(\mathbf{x})$ ($2 \leq i \leq j$) : \mathbf{x} の任意の i 次項

を考える。このとき、

$$\dot{\mathbf{y}} = J\mathbf{y} + \tilde{F}_2^r(\mathbf{y}) + \cdots + \tilde{F}_j^r(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^{j+1}),$$

$\tilde{F}_i^r(\mathbf{y})$ ($2 \leq i \leq j$) : \mathbf{y} の i 次項

に変形できる。

証明.

(4.11) の時間微分は

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{y}} &= \dot{\mathbf{x}} + Dh_2(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} + \cdots + Dh_j(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} \\
&= J\mathbf{x} + F_2(\mathbf{x}) + Dh_2(\mathbf{x})J\mathbf{x} \\
&\quad + \sum_{m=3}^j \{F_m(\mathbf{x}) + Dh_m(\mathbf{x})J\mathbf{x} + \sum_{k+l=m+1} Dh_k(\mathbf{x})F_l(\mathbf{x})\} \\
&\quad + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^{j+1}), \quad k, l \geq 2
\end{aligned}$$

である. なお, $Dh_i(\mathbf{x}) (2 \leq i \leq j)$ は $h_i(\mathbf{x})$ のヤコビ行列を表す. ここから $J\mathbf{y}$ を引くと

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{y}} - J\mathbf{y} &= F_2(\mathbf{x}) + Dh_2(\mathbf{x})J\mathbf{x} - Jh_2(\mathbf{x}) \\
&\quad + \sum_{m=3}^j \{F_m(\mathbf{x}) + Dh_m(\mathbf{x})J\mathbf{x} - Jh_m(\mathbf{x}) + \sum_{k+l=m+1} Dh_k(\mathbf{x})F_l(\mathbf{x})\} \\
&\quad + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^{j+1})
\end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{y}} &= J\mathbf{y} + \tilde{F}_2(\mathbf{x}) + \cdots + \tilde{F}_j(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^{j+1}), & (4.12) \\
\tilde{F}_2(\mathbf{x}) &= F_2(\mathbf{x}) + Dh_2(\mathbf{x})J\mathbf{x} - Jh_2(\mathbf{x}), \\
\tilde{F}_m(\mathbf{x}) &= F_m(\mathbf{x}) + Dh_m(\mathbf{x})J\mathbf{x} - Jh_m(\mathbf{x}) + \sum_{k+l=m+1} Dh_k(\mathbf{x})F_l(\mathbf{x}) \\
&\quad (3 \leq m \leq j, \quad k, l \geq 2)
\end{aligned}$$

が導かれる. ここで,

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \sum_{m=2}^{j-1} G_m(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^j) \quad (4.13)$$

を考える. なお, $G_i(\mathbf{y}) (1 \leq i \leq j-1)$ は \mathbf{y} の i 次多項式とする. さらに, (4.13) は (4.11) の逆変換となるものとする^{*3}. 逆変換 (4.13) を (4.12) に代入すれば, (4.12) の各項は

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_i(\mathbf{x}) &= \tilde{F}_i(\mathbf{y} + \sum_{m=2}^{j-1} G_m(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^j)) \\
&= \tilde{F}_i(\mathbf{y}) + \sum_{m=i+1}^j \tilde{F}_m^i(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^{j+1}) \quad (2 \leq i \leq j)
\end{aligned}$$

となる. なお, $\tilde{F}_m^i(\mathbf{y})$ は \mathbf{y} の m 次項であり, $\tilde{F}_i(\mathbf{x})$ に (4.13) を代入した際に生じる項であることを強調するため上付き文字 i を加えた.

^{*3} (4.11) は原点において $d\mathbf{y}/d\mathbf{x} = I$ であるため, 逆関数定理より逆変換が原点近傍で存在する.

以上より,

$$\dot{\mathbf{y}} = J\mathbf{y} + \tilde{F}_2^r(\mathbf{y}) + \cdots + \tilde{F}_j^r(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^{j+1}), \quad (4.14)$$

$$\tilde{F}_2^r(\mathbf{y}) = \tilde{F}_2(\mathbf{y}), \quad \tilde{F}_k^r(\mathbf{y}) = \tilde{F}_k(\mathbf{y}) + \sum_{m=2}^{k-1} \tilde{F}_k^m(\mathbf{y}) \quad (3 \leq k \leq j)$$

が得られる. (4.14) は (4.10) と同様に, 変換式 (4.11) の非線形項 $\sum_{m=2}^j h_i(\mathbf{x}) (2 \leq i \leq j)$ の任意性によって『ある程度の範囲』で操作できる (付録 A.1 を参照).

(証明終わり)

座標変換を (4.11) としても標準形定理が成立することを確認できた. この標準形定理の系の操作手順を局所 Lyapunov 関数の構成に利用する.

次に問題設定に対する捉え方について説明する. (4.12) の各 \tilde{F} の値が J を含んでいることから, 標準形は h だけでなく J にも依ることがわかる. すなわち, 問題 (4.2) を J 毎に分類して考えればよい. (4.2) の J については非双曲型の仮定から

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ -\rho & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

$$\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

の 4 通りが考えられる. J_1 はヤコビ行列の固有値が純虚数の場合, J_2 は 2 つある固有値のうち一つが 0 である場合, J_3 は 2 つとも固有値 0 かつ対角化可能でない場合, J_4 は 2 つとも固有値 0 かつ対角化可能な場合を示している.

本論文では J_1, J_2, J_3 それぞれの場合について, 上記の方針に従った局所 Lyapunov 関数の構成方法を記す. J_4 の場合については上記の方針に従うことはできないが, そのことについても後述する.

4.3.1 J_1 の場合

(4.2) を J_1 の場合書き直すと, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ に関する 2 次元の系

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\rho x_2 + f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = \rho x_1 + f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (4.16)$$

の形にできる. ここで, $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とし, f_1, f_2 は Taylor 展開したときの最低次数が 2 次以上の関数を考えている. なお, f_1, f_2 は (4.1) の \mathbf{f} とは異なるものとして扱っていることに注意されたい. 見通しをよくするため, 新たな複素変数 $z \in \mathbb{C}$ を与える. $z = x_1 + ix_2$ とおくと, (4.16) は

$$\dot{z} = i\rho z + g(z, \bar{z})$$

と表せる. $g(z, \bar{z})$ は z, \bar{z} に関して 2 次以上の項であり, したがって

$$g(z, \bar{z}) = \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^k \bar{z}^l + \mathcal{O}(|z|^4) \quad (g_{kl} \in \mathbb{C})$$

とおける. よって (4.16) は

$$\dot{z} = i\rho z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^k \bar{z}^l + \mathcal{O}(|z|^4) \quad (4.17)$$

に変形できる. ここでホップ分岐に対する標準形定理を参考に次の定理を与える.

定理 1-1([16, 17, 19]).

$$\dot{z} = i\rho z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^k \bar{z}^l + \mathcal{O}(|z|^4)$$

について, ある変換式

$$w = z + \frac{h_{20}}{2} z^2 + h_{11} z \bar{z} + \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + \frac{h_{30}}{6} z^3 + \frac{h_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{z}^3$$

を考える. なお, $h_{20}, h_{11}, h_{02}, h_{30}, h_{12}, h_{03} \in \mathbb{C}$ である. このとき

$$\dot{w} = i\rho w + c_1 w^2 \bar{w} + \mathcal{O}(|w|^4) \quad (c_1 \in \mathbb{C})$$

に変形できる適当な $h_{20}, h_{11}, h_{02}, h_{30}, h_{12}, h_{03}$ が存在する.

証明.

見やすさのため $\lambda := i\rho$ とする.

(4.17) について w から z への変換式

$$w = z + \frac{h_{20}}{2} z^2 + h_{11} z \bar{z} + \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + \frac{h_{30}}{6} z^3 + \frac{h_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{z}^3 \quad (4.18)$$

を与える. w を t で微分すると

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 \\ &+ h_{20} z \left(\lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 \right) + h_{11} \bar{z} \left(\lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 \right) \\ &+ h_{11} z \left(\bar{\lambda} \bar{z} + \frac{\bar{g}_{20}}{2} \bar{z}^2 + \bar{g}_{11} z \bar{z} + \frac{\bar{g}_{02}}{2} z^2 \right) + h_{02} \bar{z} \left(\bar{\lambda} \bar{z} + \frac{\bar{g}_{20}}{2} \bar{z}^2 + \bar{g}_{11} z \bar{z} + \frac{\bar{g}_{02}}{2} z^2 \right) \\ &+ \frac{h_{30}}{2} z^2 (\lambda z) + \frac{h_{12}}{2} \bar{z}^2 (\lambda z) + h_{12} z \bar{z} (\bar{\lambda} \bar{z}) + \frac{h_{03}}{2} \bar{z}^2 (\bar{\lambda} \bar{z}) + \mathcal{O}(|z|^4) \end{aligned}$$

となる. さらに

$$\lambda w = \lambda z + \frac{h_{20}}{2} \lambda z^2 + h_{11} \lambda z \bar{z} + \frac{h_{02}}{2} \lambda \bar{z}^2 + \frac{h_{30}}{6} \lambda z^3 + \frac{h_{12}}{2} \lambda z \bar{z}^2 + \frac{h_{03}}{6} \lambda \bar{z}^3$$

を引くと

$$\begin{aligned}
\dot{w} - \lambda w = & \frac{g_{20} + \lambda h_{20}}{2} z^2 + (g_{11} + (\lambda + \bar{\lambda})h_{11} - \lambda h_{11}) z \bar{z} + \frac{g_{02} + 2\bar{\lambda}h_{02} - h_{02}\lambda}{2} \bar{z}^2 \\
& + \frac{g_{30} + 3g_{20}h_{20} + 3\bar{g}_{02}h_{11} + 3h_{30}\lambda - h_{30}\lambda}{6} z^3 \\
& + \frac{g_{21} + 2g_{11}h_{20} + g_{20}h_{11} + 2\bar{g}_{11}h_{11} + \bar{g}_{02}h_{02}}{2} z^2 \bar{z} \\
& + \frac{g_{12} + g_{02}h_{20} + 2h_{11}g_{11} + \bar{g}_{20}h_{11} + 2\bar{g}_{11}h_{02} + h_{12}\lambda + 2h_{12}\bar{\lambda} - h_{12}\lambda}{2} z \bar{z}^2 \\
& + \frac{g_{03} + 3g_{02}h_{11} + 3\bar{g}_{20}h_{02} + 3h_{03}\bar{\lambda} - h_{03}\lambda}{6} \bar{z}^3 + \mathcal{O}(|z|^4)
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
h_{20} = & -\frac{g_{20}}{\lambda}, h_{11} = -\frac{g_{11}}{\lambda}, h_{02} = \frac{g_{02}}{\lambda - 2\lambda}, \\
h_{30} = & \frac{g_{30} + 3g_{20}h_{20} + 3\bar{g}_{02}h_{11}}{-2\lambda}, h_{12} = \frac{g_{12} + g_{02}h_{20} + 2h_{11}g_{11} + \bar{g}_{20}h_{11} + 2\bar{g}_{11}h_{02}}{-2\bar{\lambda}}, \\
h_{03} = & \frac{g_{03} + 3g_{02}h_{11} + 3\bar{g}_{20}h_{02}}{\lambda - 3\bar{\lambda}}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

とすれば

$$\begin{aligned}
\dot{w} = & \lambda w + c_1 z^2 \bar{z} + \mathcal{O}(|z|^4), \\
c_1 = & -\left(\frac{g_{20}g_{11}(2\bar{\lambda} + \lambda)}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\bar{\lambda}} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\bar{\lambda} - \lambda)} \right) + \frac{g_{21}}{2}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

が得られる。ここで、 z から w への変換を考える。(4.18) の逆変換

$$z = w - \frac{h_{20}}{2} w^2 - h_{11} w \bar{w} - \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 + \mathcal{O}(|w|^3)$$

を代入すると

$$\begin{aligned}
\dot{w} = & \lambda w + c_1 z^2 \bar{z} + \mathcal{O}(|z|^4) \\
= & \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + \mathcal{O}(|w|^4) \\
= & i\rho w + c_1 w^2 \bar{w} + \mathcal{O}(|w|^4)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

が成立する。

(証明終わり)

ここで(4.21)について着目する。 $w = u + iv, c_1 = a + ib$ とおくと(4.21)は

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + (au - bv)(u^2 + v^2) + \mathcal{O}(|w|^4), \\ \dot{v} = u + (bu + av)(u^2 + v^2) + \mathcal{O}(|w|^4) \end{cases} \tag{4.22}$$

となる。高次項を切り落とした系

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + (au - bv)(u^2 + v^2), \\ \dot{v} = u + (bu + av)(u^2 + v^2) \end{cases} \tag{4.23}$$

に対して次の関数 L :

$$L(u, v) = \operatorname{sgn}(-a) \cdot \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (4.24)$$

を考える。このとき

$$\frac{d}{dt}L(u, v) = \operatorname{sgn}(-a) \cdot a(u^2 + v^2)^2$$

であるから $\operatorname{Re}(c_1) = a \neq 0$ ならば関数 L は (4.23) について大域で Lyapunov 関数となり、したがって (4.22) において原点近傍で局所 Lyapunov 関数となることが予想できる。また、局所 Lyapunov 関数の符号を決める意味でも a は重要であり、 a を第一 Lyapunov 係数と呼ぶ ([19])。なお、 $a = 0$ の場合はより高次の項までの標準形変換を考え、標準形から局所 Lyapunov 関数の構成を試みればよいと予想している。

4.3.2 J_2 の場合

(4.2) を J_2 の場合書き直した、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ に関する 2 次元の系

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = \rho x_2 + f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (4.25)$$

について考える。 f_1, f_2 は Taylor 展開したときの最低次数が 2 次以上の関数を考えている。扱いやすさのため系を以下のように書く。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= J_2 \mathbf{x} + \frac{a_1}{2} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{a_3}{2} \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{a_4}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} + \frac{a_6}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^3), \end{aligned} \quad (4.26)$$

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbb{R}.$

(4.26) について、 J_1 と同様に標準形定理を用いて局所 Lyapunov 関数の構成を試みる。

定理 1-2.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= J_2 \mathbf{x} + \frac{a_1}{2} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{a_3}{2} \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{a_4}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} + \frac{a_6}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^3),\end{aligned}$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbb{R}$$

について, ある変換式

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h_3}{2} \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h_4}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} + \frac{h_6}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$$

を考える. なお, $h_2, h_3, h_4, h_6 \in \mathbb{R}$ である. このとき

$$\dot{\mathbf{y}} = J_2 \mathbf{y} + \frac{a_1}{2} \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^3)$$

に変形できる適当な h_2, h_3, h_4, h_6 が存在する.

証明.

(4.26) について \mathbf{x} から \mathbf{y} への変換式

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h_3}{2} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h_4}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} + \frac{h_6}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

を与える. \mathbf{y} を t で微分すると

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= J_2 \mathbf{x} + \frac{a_1}{2} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{a_3}{2} \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{a_4}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} + \frac{a_6}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + h_2 \rho \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + h_3 \rho \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} + h_6 \rho \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^3)\end{aligned}$$

となる. さらに

$$J_2 \mathbf{y} = J_2 \mathbf{x} + \frac{h_4}{2} \rho \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} + \frac{h_6}{2} \rho \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$$

を引くと

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} - J_2 \mathbf{y} &= \frac{a_1}{2} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + (a_2 + h_2 \rho) \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{a_3}{2} + h_3 \rho\right) \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{a_4 - h_4 \rho}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} + \frac{a_6 + h_6 \rho}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる. ここで

$$h_2 = -\frac{a_2}{\rho}, \quad h_3 = -\frac{a_3}{2\rho}, \quad h_4 = \frac{a_4}{\rho}, \quad h_6 = -\frac{a_6}{\rho} \quad (4.28)$$

とすれば

$$\dot{\mathbf{y}} = J_2 \mathbf{y} + \frac{a_1}{2} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^3)$$

が得られる。ここで、 \mathbf{y} から \mathbf{x} への変換を考える。(4.27) の逆変換

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} - h_2 \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{h_3}{2} \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{h_4}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix} - \frac{h_6}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ y_2^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^3)$$

を代入すると

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= J_2 \mathbf{y} + \frac{a_1}{2} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^3) \\ &= J_2 \mathbf{y} + \frac{a_1}{2} \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^3) \end{aligned} \quad (4.29)$$

が成立する。

(証明終わり)

ここで (4.29) について着目する。高次項を切り落とした系

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \frac{a_1}{2} y_1^2 \\ \dot{y}_2 = \rho y_2 + a_5 y_1 y_2 \end{cases} \quad (4.30)$$

に対して関数 L :

$$L(y_1, y_2) = \operatorname{sgn}(-a_1) \cdot y_1 + \operatorname{sgn}(-\rho) \cdot y_2^2 \quad (4.31)$$

を考える。このとき

$$\frac{d}{dt} L(y_1, y_2) = \operatorname{sgn}(-a_1) \cdot \frac{a_1}{2} y_1^2 + \operatorname{sgn}(-\rho) \cdot (2\rho y_2^2 + 2a_5 y_1 y_2^2)$$

であるから $a_1 \neq 0$ ならば関数 L は (4.30) で原点近傍における局所 Lyapunov 関数となり、したがって (4.29) で原点近傍における局所 Lyapunov 関数となることが予想できる。厳密には dL/dt が 0 となる点が原点以外にないことを示す必要があるが、これは L の定義域を第 4.4 節にて記す方法で検証すればよい。 $a_1 = 0$ の場合はより高次の項までの標準形変換を考え、標準形から局所 Lyapunov 関数の構成を試みればよいと予想している。

係数 a_1 は第 4.3.3 節にて記した第一 Lyapunov 係数 a と同じ役割を果たしている。よって、本論文では a_1 も第一 Lyapunov 係数と呼ぶことにする。

4.3.3 J_3 の場合

(4.2) を J_3 の場合書き直した、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ に関する 2 次元の系

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \rho x_2 + f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (4.32)$$

について考える。 f_1, f_2 は Taylor 展開したときの最低次数が 2 次以上の関数を考えている。

扱いやすさのため系を以下のように書く.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= J_3 \mathbf{x} + \frac{a_1}{2} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{a_3}{2} \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{a_4}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} + \frac{a_6}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^3), \quad (4.33) \\ &a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(4.33) について, J_1 と同様に標準形定理を用いて局所 Lyapunov 関数の構成を試みる.

定理 1-3.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= J_3 \mathbf{x} + \frac{a_1}{2} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{a_3}{2} \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{a_4}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} + \frac{a_6}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^3),\end{aligned}$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbb{R}$$

について, ある変換式

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{h_1}{2} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h_4}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} + h_5 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

を考える. なお, $h_1, h_2, h_4, h_5 \in \mathbb{R}$ である. このとき

$$\dot{\mathbf{y}} = J_3 \mathbf{y} + \frac{a_1 + a_5}{2} \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{a_4}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^3), \quad d_1, d_4 \in \mathbb{R}$$

に変形できる適当な h_1, h_2, h_4, h_5 が存在する.

証明.

(4.33) について \mathbf{x} から \mathbf{y} への変換式

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{h_1}{2} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h_4}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} + h_5 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

を与える. \mathbf{y} を t で微分すると

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= J_3 \mathbf{x} + \frac{a_1}{2} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{a_3}{2} \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{a_4}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} + \frac{a_6}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + h_1 \rho \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + h_2 \rho \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} + h_4 \rho \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} + h_5 \rho \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^3)\end{aligned}$$

となる. さらに

$$J_3 \mathbf{y} = J_3 \mathbf{x} + \frac{h_4}{2} \rho \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + h_5 \rho \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を引くと

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} - J_3 \mathbf{y} &= \frac{a_1 - h_4 \rho}{2} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + (a_2 + h_1 \rho - h_5 \rho) \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{a_3 + 2h_2 \rho}{2} \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{a_4}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} + (a_5 + h_4 \rho) \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} + \frac{a_6 + 2h_5 \rho}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^3) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$h_1 = -\frac{2a_2 + a_6}{2\rho}, \quad h_2 = -\frac{a_3}{2\rho}, \quad h_4 = -\frac{a_5}{\rho}, \quad h_5 = -\frac{a_6}{2\rho} \quad (4.35)$$

とすれば

$$\dot{\mathbf{y}} = J_3 \mathbf{y} + \frac{a_1 + a_5}{2} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{a_4}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^3)$$

が得られる。ここで、 \mathbf{y} から \mathbf{x} への変換を考える。(4.34) の逆変換

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} - \frac{h_1}{2} \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} - h_2 \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{h_4}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix} - h_5 \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^3)$$

を代入すると

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= J_3 \mathbf{y} + \frac{a_1 + a_5}{2} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{a_4}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^3) \\ &= J_3 \mathbf{y} + \frac{a_1 + a_5}{2} \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{a_4}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^3) \end{aligned} \quad (4.36)$$

が成立する。

(証明終わり)

ここで (4.36) について着目する。高次項を切り落とした系

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \rho y_2 + \frac{a_1 + a_5}{2} y_1^2 \\ \dot{y}_2 = \frac{a_4}{2} y_1^2 \end{cases} \quad (4.37)$$

に対して関数 L :

$$L(y_1, y_2) = \operatorname{sgn}(-\rho) \cdot y_1 y_2 + \operatorname{sgn}(-a_4) \cdot y_2 \quad (4.38)$$

を考える。このとき

$$\frac{d}{dt} L(y_1, y_2) = \operatorname{sgn}(-\rho) \cdot \left(\rho y_2^2 + \frac{a_1 + a_5}{2} y_1^2 y_2 + \frac{a_4}{2} y_1^3 \right) + \operatorname{sgn}(-a_4) \cdot \frac{a_4}{2} y_1^2$$

であるから $a_4 \neq 0$ ならば関数 L は (4.37) で原点近傍で局所 Lyapunov 関数となり、したがって (4.36) で原点近傍における局所 Lyapunov 関数となることが予想できる。厳密には dL/dt が 0 となる点が原点以外にないことを示す必要があるが、これは L の定義域を第 4.4 節にて記す方法で検証すればよい。 $a_4 = 0$ の場合はより高次の項までの標準形変換を考え、標準形から局所 Lyapunov 関数の構成を試みればよいと予想している。

係数 a_4 は第 4.3.3 節にて記した第一 Lyapunov 係数 a と同じ役割を果たしている。よって、本論文では a_4 も第一 Lyapunov 係数と呼ぶことにする。

4.3.4 J_4 の場合

(4.2) を J_4 の場合書き直した, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ に関する 2 次元の系

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

について考える. f_1, f_2 は Taylor 展開したときの最低次数が 2 次以上の関数を考えている.

この系に対しては上記の方針に従った方法で局所 Lyapunov 関数を構成することはできない. これは, (4.14) の 2 次項 \tilde{F}_2^r が

$$\tilde{F}_2^r = F_2(\mathbf{y}) + Dh_2(\mathbf{y})J_4\mathbf{y} - J_4h_2(\mathbf{y}) = F_2(\mathbf{y})$$

となり, 標準形変換では一切操作できないためである.

上に記した理由から,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2 + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^3) \\ \dot{x}_2 = a_4x_1^2 + a_5x_1x_2 + a_6x_2^2 + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^3) \end{cases}$$

に対して局所 Lyapunov 関数の構成を考えねばならない. そのためには, 係数 a_1, a_2, \dots, a_6 を分類して考える必要がある. しかしながら, 局所 Lyapunov 関数が絶対に構成できない系*4も存在しており, 問題に非常に取り掛かりづらい. 次の例を挙げる.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_2^2, \\ \dot{x}_2 = x_1x_2 \end{cases} \quad (4.39)$$

(4.39) は非双曲型平衡点を原点に持つ. また, 原点から原点へのホモクリニック軌道が連続分布している (証明は付録 B.1 に記載). このように, 特殊なフローを描ける系が存在しており, 解決の糸口を掴めていないのが現状である.

4.4 定義域の検証方法

局所 Lyapunov 関数は平衡点近傍で定義域を検証できなければならない. 第 3.2 節で記した方法 Stage1 では局所 Lyapunov 関数は 2 次形式で導出されており, また 2 次形式であることを利用して, 行列の負値性を確認することで定義域を検証している. 一方, 第 4.3.1 節の方法で構成された局所 Lyapunov 関数 (4.24) は 4 次以上の高次多項式であり, その検証方法を用いることはできない. 理由として, 次の系を例に挙げる.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) + x_1^4, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) + x_2^4. \end{cases}$$

*4 平衡点近傍で閉軌道が連続的に分布しているならば, 局所 Lyapunov 関数は構成できない (詳細は B.3 節を参照).

第 4.3.1 節によりこの系の平衡点である原点における局所 Lyapunov 関数は $L(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^2/2$ と考えられる．ここで， L の時間微分を 2 次形式のように，変数ベクトルと対称行列の積の形で表すと，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(x_1, x_2) &= -(x_1^2 + x_2^2)^2 + (x_1^5 + x_2^5) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^3 - x_1^2 & -x_1x_2 \\ -x_1x_2 & x_2^3 - x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 & -1 \\ -1 & x_2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

となる．(4.40) あるいは (4.41) の対称行列について原点近傍で負定値となることを示せばよい．しかし，原点の場合，対称行列の固有値は 0 となり，原点近傍での行列の負定値性を精度保証では確認できない．

このように，行列の負値性を確認する方法では定義域を検証できない例が存在する．そこで同次多項式の性質を利用し，新たな検証方法を考案した．

4.4.1 準備

検証方法を説明するにあたって，以下の簡単な定理を用意する．

定理 2.

係数 $c_\alpha \in \mathbb{R}$ を持つ $2m$ 次同次式

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=2m} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

を考える．なお， α は全次数を表す．このとき

$$\forall \mathbf{y} \in \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}, f(\mathbf{y}) < 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}, f(\mathbf{x}) < 0$$

が成立する．

証明．

非零の n 次元ベクトル \mathbf{x} と \mathbf{x} 方向の単位ベクトル \mathbf{y} を考える．このとき， $\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|\mathbf{y}$ ， $\|\mathbf{y}\| = 1$ である．ここで，同次式の性質より

$$f(\mathbf{x}) = f(\|\mathbf{x}\|\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^{2m} f(\mathbf{y})$$

となる．以上より， $f(\mathbf{y}) < 0$ ならば $f(\mathbf{x}) < 0$ となるため，題意は満たされた．

(証明終わり)

この定理を精度保証に応用するため，次の系を与える．

定理 2 の系.

以下では区間係数 $[c_\alpha] \in \mathbb{IR}$ をもつ $2m$ 次同次式

$$f_I(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=2m} [c_\alpha] \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{IR}$$

を考える. このとき

$$\forall \mathbf{y} \in \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}, \sup f_I(\mathbf{y}) < 0 \Rightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}, f_I(\mathbf{x}) < 0$$

が成立する.

証明.

$\sup f_I(\mathbf{y})$ についての条件は

$$\forall \mathbf{y} \in \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}, \sup f_I(\mathbf{y}) < 0 \Leftrightarrow \forall \mathbf{y} \in \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}, \forall c_\alpha \in [c_\alpha], f(\mathbf{y}) < 0$$

を意味する. ここで, 定理 2 より

$$\forall \mathbf{y} \in \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}, \forall c_\alpha \in [c_\alpha], f(\mathbf{y}) < 0 \Rightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}, \forall c_\alpha \in [c_\alpha], f(\mathbf{x}) < 0$$

が成立する.

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}, \forall c_\alpha \in [c_\alpha], f(\mathbf{x}) < 0 \Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}, f_I(\mathbf{x}) < 0$$

であり, 題意は満たされた.

(証明終わり)

この定理 2 の系を用いて新たな検証方法を考案した. 詳細は次に記す.

4.4.2 検証方法

ここでは簡単のため, (4.16) における f_1, f_2 は 2 次以上の多項式であるものとする*5. 局所 Lyapunov 関数 (4.24) の時間微分は

$$\frac{d}{dt} L(x_1, x_2) = \operatorname{sgn}(-a) \cdot a(x_1^2 + x_2^2)^2 + DL_h(x_1, x_2), \quad (4.42)$$

$$DL_h(x_1, x_2) = \sum_{5 \leq k+l \leq M} c_{kl} x_1^k x_2^l, \\ k, l \in \mathbb{N}, \quad M = \max\{\deg(f_1), \deg(f_2)\} + 5, \quad c_{kl} \in \mathbb{R}$$

となる. $Dh_j(x_1, x_2)$ は (4.42) の 5 次以上の項である.

ここで, 検証領域 $D_L := \{\mathbf{x} \mid \underline{x}_1 \leq x_1 \leq \bar{x}_1, \underline{x}_2 \leq x_2 \leq \bar{x}_2\}$ ($\underline{x}_1 < 0 < \bar{x}_1, \underline{x}_2 < 0 < \bar{x}_2$ とする) を

$$D_L = ([D_{x_1}], [D_{x_2}]), [D_{x_1}] = [\underline{x}_1, \bar{x}_1], [D_{x_2}] = [\underline{x}_2, \bar{x}_2] \quad (4.43)$$

*5 f_1, f_2 が多項式でない場合でも, Taylor 展開の剰余項の係数を区間値で表現すればよい.

の区間ベクトルで表すことにする.

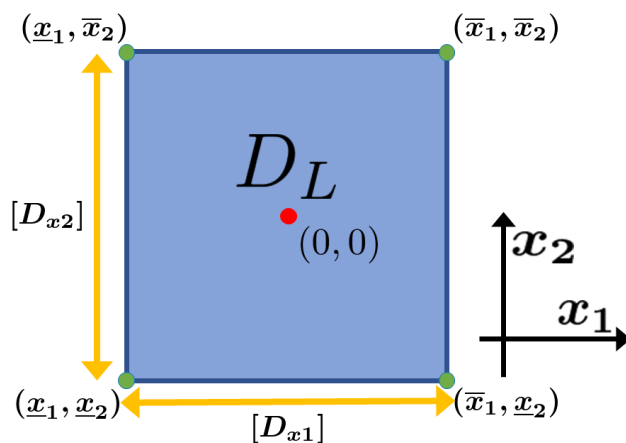


図 1: 検証領域 D_L は矩形であるため, 区間ベクトルで表せる.

$\dot{L}(0,0) = 0$ であるため, D_L が局所 Lyapunov 関数の定義域かどうかは, $D_L \setminus (0,0)$ で dL/dt が負となることを検証すればよい. その検証方法を記す.

まず, 区間係数をもつ 4 次同次式

$$DL_I(x_1, x_2) = \text{sgn}(-a) \cdot a(x_1^2 + x_2^2)^2 + \sum_{k+l=4} \sum_{1 \leq i+j \leq M-4} c_{ijkl} ([D_{x_1}]^i ([D_{x_2}])^j x_1^k x_2^l, \quad i, j, k, l \in \mathbb{N}, \quad c_{ijkl} \in \mathbb{R}$$

を以下の条件を満たすように構成する.

$$\sum_{k+l=4} \sum_{1 \leq i+j \leq M-4} c_{ijkl} x_1^{i+k} x_2^{j+l} = DL_h(x_1, x_2) \quad (4.44)$$

このとき,

$$\forall (x_1, x_2) \in D_L, \quad \frac{d}{dt} L(x_1, x_2) \in DL_I(x_1, x_2) \quad (4.45)$$

が成立することに注意されたい. DL_I の構成方法についての詳細は後述する.

また, 領域 D_L の境界 ∂D :

$$\begin{aligned} \partial D &= D_{L1} \cup D_{L2} \cup D_{L3} \cup D_{L4}, \\ D_{L1} &= (\underline{x}_1, [D_{x_2}]), \\ D_{L2} &= ([D_{x_1}], \underline{x}_2), \\ D_{L3} &= ([D_{x_1}], \bar{x}_2), \\ D_{L4} &= (\bar{x}_1, [D_{x_2}]) \end{aligned}$$

を与える.

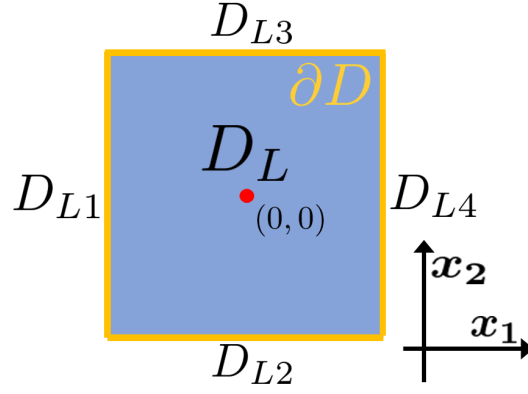


図 2: 検証領域 D_L の境界 ∂D の部分領域 $D_{L1}, D_{L2}, D_{L3}, D_{L4}$ の位置関係.

このとき $\|\cdot\|$ を

$$\|(x_1, x_2)\| = \max\left(\frac{x_1}{x_1}, \frac{x_1}{x_1}, \frac{x_2}{x_2}, \frac{x_2}{x_2}\right)$$

とすれば

$$\forall (x_1, x_2) \in \partial D, \|(x_1, x_2)\| = 1 \quad (4.46)$$

を満たす.

以上より, 定理 2 の系, (4.45) および (4.46) を用いれば

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{y} \in \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \partial D\}, \sup DL_I(\mathbf{y}) < 0 &\Leftrightarrow \forall \mathbf{y} \in \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1 \wedge \mathbf{x} \in D_L\}, \sup L_I(\mathbf{y}) < 0 \\ &\Rightarrow \forall \mathbf{x} \in D_L \setminus \mathbf{0}, DL_I(\mathbf{x}) < 0 \\ &\Rightarrow \forall \mathbf{x} \in D_L \setminus \mathbf{0}, \frac{d}{dt} L(\mathbf{x}) < 0 \end{aligned}$$

が成立する. すなわち, 領域 D_L の検証方法については (4.45) を満たす関数 DL_I を構成し,

$$\forall (x_1, x_2) \in \partial D, \sup DL_I(x_1, x_2) < 0 \quad (4.47)$$

が成り立つかどうかを精度保証で確認すればよい.

DL_I は一見複雑に見えるが, 構成方法は実のところ単純なものである. \mathbf{x} についての 5 次以上の項に対して, 4 次への同次化の操作として変数 x_1, x_2 を区間 $[D_{x1}], [D_{x2}]$ に置きかえればよい.

説明のため, 例を挙げる. 時間微分が次式のような局所 Lyapunov 候補関数が得られたとしよう.

$$\frac{d}{dt} L(x_1, x_2) = -(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_1^5 + x_1^4 x_2 \quad (4.48)$$

このとき, $DL_5(x_1, x_2) = x_1^5 + x_1^4 x_2$ である. これに対して, 4 次への同次化の操作を行う. x_1^5 を $[D_{x1}]x_1^4$ に, $x_1^4 x_2$ を $[D_{x2}]x_1^4$ に置きかえた関数 DL_I :

$$DL_I(x_1, x_2) = -(x_1^2 + x_2^2)^2 + [D_{x1}]x_1^4 + [D_{x2}]x_1^4$$

を構成する。このとき、条件 (4.44) は成立する。

なお、 DL_I の構成は一意でないことにも注意されたい。(4.48) について、 DL_I を

$$DL_I(x_1, x_2) = -(x_1^2 + x_2^2)^2 + [D_{x_1}]x_1^4 + [D_{x_1}]x_1^3x_2$$

または

$$DL_I(x_1, x_2) = -(x_1^2 + x_2^2)^2 + [D_{x_1}]x_1^4 + \frac{1}{2}[D_{x_2}]x_1^4 + \frac{1}{2}[D_{x_1}]x_1^3x_2$$

としても条件 (4.44) が成立する。

この検証方法は局所 Lyapunov 関数 (4.24) だけでなく、(4.31) や (4.38) にも適用できる。 dL/dt の最低次数に合わせ、条件 (4.45) を満たす関数 DL_I を上の方法に従って構成し、(4.47) を精度保証で確認すればよい。

5 数値例

第4章では問題を (4.15) のように分類し、それぞれの場合についての構成方法および検証方法を記した。本章ではこれを用いて、実際に2次元の自励系が持つ非双曲型平衡点に対する局所 Lyapunov 関数の構成を行いその有用性を確かめる。なお、定義域の検証に必要な区間演算は MATLAB や Octave 上で精度保証を行うためのパッケージである INTLAB(version10.2) を利用した ([20])。

5.1 J_1 の場合に該当する数値例

以下の $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ に関する2次元の系を数値例とする。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + (3x_1 + x_2)^2, \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases} \quad (5.1)$$

この系について、ヤコビ行列の固有値が $\pm i$ となる非双曲型平衡点である原点近傍における局所 Lyapunov 関数の構成を試みる。

まずは複素変換を行う。 $z = x_1 + ix_2$ とすると

$$\dot{z} = -iz + \left(2 - \frac{3}{2}i\right)z^2 + 5z\bar{z} + \left(2 + \frac{3}{2}i\right)\bar{z}^2$$

となる。(4.20) に従って計算すれば第一 Lyapunov 係数は $-15/2$ となり、第4.3.1節の方法で Lyapunov 関数が構成できることを確認できた。次に変換式 (4.18) の各係数を求める。(4.19) に従えば

$$\begin{aligned} h_{20} &= -3 - 4i, & h_{11} &= 5i, & h_{02} &= \frac{-3 + 4i}{3}, \\ h_{30} &= \frac{39 + 27i}{2}, & h_{12} &= \frac{-175 - 75i}{6}, & h_{03} &= \frac{-67 - 69i}{4} \end{aligned}$$

となる。よって変換式

$$\begin{aligned} w &= z + \frac{h_{20}}{2}z^2 + h_{11}z\bar{z} + \frac{h_{02}}{2}\bar{z}^2 + \frac{h_{30}}{6}z^3 + \frac{h_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{z}^3 \\ &= \left(x_1 - 2x_1^2 + 2x_2^2 + \frac{16}{3}x_1x_2 - \frac{113}{8}x_1^3 - \frac{383}{24}x_1x_2^2 - \frac{173}{8}x_1^2x_2 - \frac{9}{8}x_2^3\right) \\ &\quad + \left(x_2 + \frac{11}{3}x_1^2 + \frac{19}{3}x_2^2 - 2x_1x_2 - \frac{55}{8}x_1^3 - \frac{35}{8}x_1x_2^2 + \frac{785}{24}x_1^2x_2 + \frac{205}{24}x_2^3\right)i \end{aligned}$$

が得られた。(4.24) によれば、次の関数 L :

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \left(x_1 - 2x_1^2 + 2x_2^2 + \frac{16}{3}x_1x_2 - \frac{113}{8}x_1^3 - \frac{383}{24}x_1x_2^2 - \frac{173}{8}x_1^2x_2 - \frac{9}{8}x_2^3\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{11}{3}x_1^2 + \frac{19}{3}x_2^2 - 2x_1x_2 - \frac{55}{8}x_1^3 - \frac{35}{8}x_1x_2^2 + \frac{785}{24}x_1^2x_2 + \frac{205}{24}x_2^3\right)^2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

が局所 Lyapunov 関数となる． L についての時間微分は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(x_1, x_2) = & -\frac{15}{2}(x_1^2 + x_2^2)^2 + \frac{213219}{32}x_1^7 + \frac{129093}{16}x_1^6x_2 + \frac{1351}{24}x_1^6 + \frac{1280961}{32}x_1^5x_2^2 \\ & + \frac{87863}{36}x_1^5x_2 - \frac{21319}{72}x_1^5 + \frac{234255}{8}x_1^4x_2^3 - \frac{96265}{24}x_1^4x_2^2 - \frac{7173}{8}x_1^4x_2 \\ & + \frac{4289185}{288}x_1^3x_2^4 + \frac{3965}{6}x_1^3x_2^3 + \frac{2231}{18}x_1^3x_2^2 + \frac{268327}{48}x_1^2x_2^5 + \frac{13765}{24}x_1^2x_2^4 \\ & + \frac{241}{6}x_1^2x_2^3 + \frac{220243}{288}x_1x_2^6 + \frac{14563}{36}x_1x_2^5 + \frac{339}{8}x_1x_2^4 - \frac{233}{12}x_2^7 \\ & - \frac{817}{8}x_2^6 - \frac{2165}{24}x_2^5 \end{aligned}$$

である．ここで (4.45) を満たす関数

$$\begin{aligned} DL_I(x_1, x_2) = & -\frac{15}{2}(x_1^2 + x_2^2)^2 + \frac{213219}{32}([D_{x_1}])^3x_1^4 + \frac{129093}{16}([D_{x_1}])^2[D_{x_2}]x_1^4 \\ & + \frac{1351}{24}([D_{x_1}])^2x_1^4 + \frac{1280961}{32}[D_{x_1}]([D_{x_2}])^2x_1^4 + \frac{87863}{36}[D_{x_1}][D_{x_2}]x_1^4 \\ & - \frac{21319}{72}[D_{x_1}]x_1^4 + \frac{234255}{8}([D_{x_2}])^3x_1^4 - \frac{96265}{24}([D_{x_2}])^2x_1^4 - \frac{7173}{8}[D_{x_2}]x_1^4 \\ & + \frac{4289185}{288}([D_{x_1}])^3x_2^4 + \frac{3965}{6}[D_{x_1}][D_{x_2}]x_1^2x_2^2 + \frac{2231}{18}[D_{x_1}]x_1^2x_2^2 \\ & + \frac{268327}{48}([D_{x_2}])^3x_1^2x_2^2 + \frac{13765}{24}([D_{x_2}])^2x_1^2x_2^2 + \frac{241}{6}[D_{x_2}]x_1^2x_2^2 \\ & + \frac{220243}{288}[D_{x_1}]([D_{x_2}])^2x_2^4 + \frac{14563}{36}[D_{x_1}][D_{x_2}]x_2^4 + \frac{339}{8}[D_{x_1}]x_2^4 \\ & - \frac{233}{12}([D_{x_2}])^3x_2^4 - \frac{817}{8}([D_{x_2}])^2x_2^4 - \frac{2165}{24}[D_{x_2}]x_2^4 \end{aligned}$$

を考える．他にも (4.45) を満たす関数は考えられるが，今回は上記の関数 DL_I を検証に用いた．後は (4.47) を満たす領域を見つければよい．定義域の検証を行った結果，上の関数 L は少なくとも

$$D_L = \{\mathbf{x} \mid -0.006 \leq x_1 \leq 0.006, -0.006 \leq x_2 \leq 0.006\} \quad (5.3)$$

の範囲で Lyapunov 関数となることがわかった．さらに，構成した局所 Lyapunov 関数は非負値であることから，原点は吸引的性質をもつ平衡点であることがわかる．吸引的性質をもつ平衡点について，次のことが言える．

- 集合 $D_l = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid L(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$ ($\alpha > 0$) を考える．このとき， $D_l \subset D_L$ ならば D_l は平衡点の安定多様体の部分集合となる．

図 3 から見て，少なくとも $D_l = \{\mathbf{x} \mid L(\mathbf{x}) \leq 10^{-5}\}$ が安定多様体の部分集合であると考えられる．

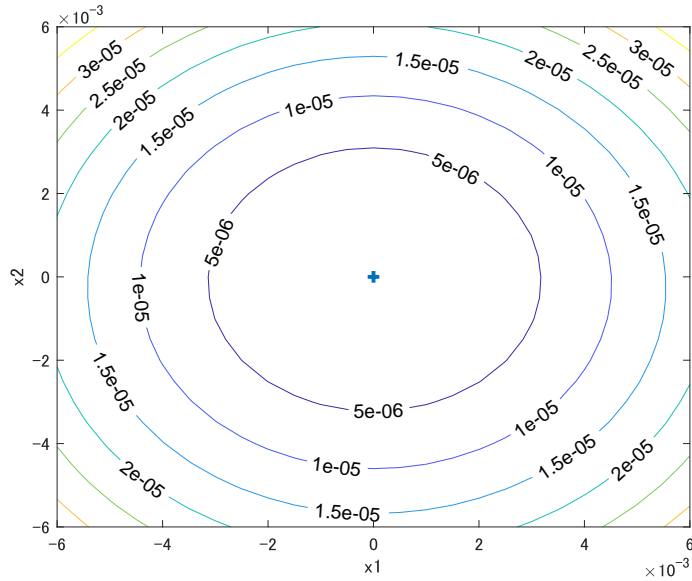


図 3: 近似計算で (5.2) の Lyapunov 等高線を定義域 (5.3) の範囲で描いた. グラフ中の数値が Lyapunov 関数の近似値である. 原点に向かうにつれて Lyapunov 関数値が減少していることが見て取れる.

5.2 J_2 の場合に該当する数値例

以下の $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ に関する 2 次元の系を数値例とする.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - x_1^3 + x_2^3, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 - x_1^3 + x_2^3. \end{cases} \quad (5.4)$$

ヤコビ行列の固有値が $0, -1$ となる非双曲型平衡点である原点近傍における局所 Lyapunov 関数の構成を試みる.

まず, 第一 Lyapunov 係数は -2 であるため, 第 4.3.2 節の方法で局所 Lyapunov 関数が構成できることが確認できた. 次に変換式 (4.27) の各係数を求める. (4.28) に従えば

$$h_2 = 2, \quad h_3 = -1, \quad h_4 = -2, \quad h_6 = -2$$

となる. よって変換式

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 \\ -x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$$

が得られた. (4.31) によれば, 次の関数 L :

$$L(x_1, x_2) = x_1 + 2x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + (x_2 - x_1^2 - x_2^2)^2 \quad (5.5)$$

が局所 Lyapunov 関数となる。 L の時間微分については

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(x_1, x_2) = & -x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_1^6 - 4x_1^5x_2 - 2x_1^5 - 4x_1^4x_2^2 + 16x_1^4x_2 - 4x_1^4 + 2x_1^3x_2^2 \\ & - x_1^3x_2 + x_1^3 + 4x_1^2x_2^4 + 6x_1^2x_2^3 - 16x_1^2x_2^2 + 3x_1^2x_2 + 4x_1x_2^5 - 4x_1x_2^4 \\ & + 3x_1x_2^2 + 4x_2^6 - 10x_2^5 + 5x_2^4 + 4x_2^3 \end{aligned}$$

である。ここで (4.45) を満たす関数

$$\begin{aligned} DL_I(x_1, x_2) = & -x_1^2 - 2x_2^2 - 4([D_{x_1}])^4x_1^2 - 4([D_{x_1}])^3[D_{x_2}]x_1^2 - 2([D_{x_1}]^3)x_1^2 \\ & - 4([D_{x_1}])^4x_2^2 + 16([D_{x_1}])^2[D_{x_2}]x_1^2 - 4([D_{x_1}])^2x_1^2 + 2[D_{x_1}][D_{x_2}]^2x_1^2 \\ & - [D_{x_1}][D_{x_2}]x_1^2 + [D_{x_1}]x_1^2 + 4([D_{x_2}])^4x_1^2 + 6([D_{x_2}])^3x_1^2 \\ & - 16([D_{x_2}]^2)x_1^2 + 3[D_{x_2}]x_1^2 + 4[D_{x_1}][D_{x_2}]^3x_2^2 - 4[D_{x_1}][D_{x_2}]^2x_2^2 \\ & + 3[D_{x_1}]x_2^2 + 4([D_{x_2}])^4x_2^2 - 10([D_{x_2}]^3)x_2^2 + 5([D_{x_2}]^2)x_2^2 + 4[D_{x_2}]x_2^2 \end{aligned}$$

を考える。他にも (4.45) を満たす関数は考えられるが、今回は上記の関数 DL_I を検証に用いた。

定義域の検証を行った結果、上の関数 L は少なくとも

$$D_L = \{\mathbf{x} \mid -0.1875 \leq x_1 \leq 0.1875, -0.1875 \leq x_2 \leq 0.1875\} \quad (5.6)$$

の範囲で Lyapunov 関数となることがわかった。

また、(5.4) の原点は、中心多様体 $W^c(\mathbf{0}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2 + 2x_1^3 + \mathcal{O}(|x_1|^4)\}$ をもつ (付録 B.2 を参照)。フローと合わせて描き、近似計算によって得られた Lyapunov 等高線と照らし合わせれば、以下の図 4、図 5 のようになった。

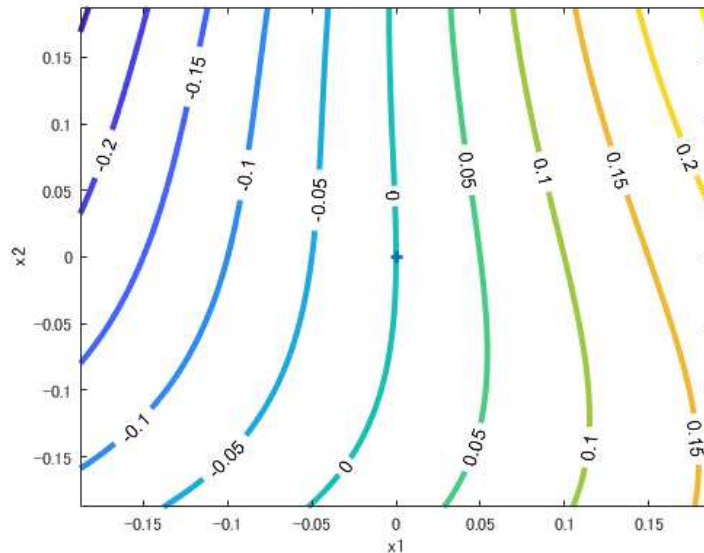


図 4: 近似計算で (5.5) の Lyapunov 等高線を定義域 (5.6) の範囲で描いた。グラフ中の数値が Lyapunov 関数の近似値である。

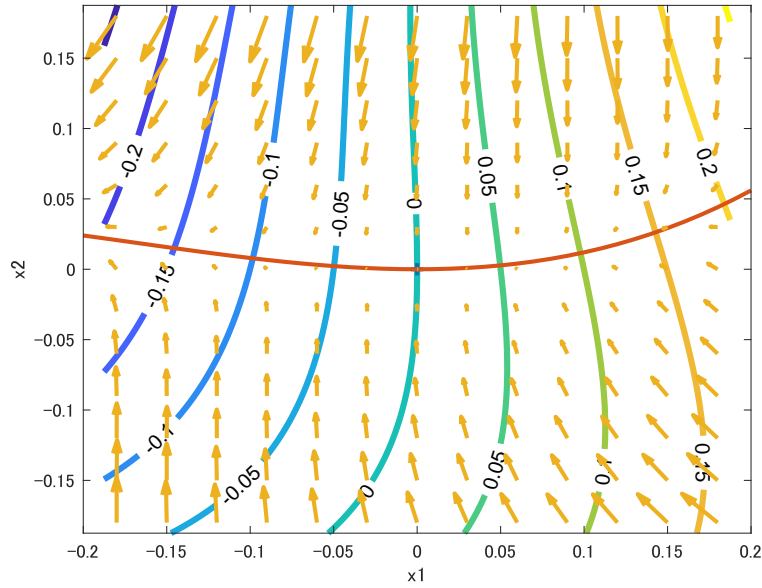


図 5: 図 4 にフローと中心多様体を書き加えた図. 橙色の矢印がフロー, 赤線が中心多様体の近似曲線 $x_2 = x_1^2 + 2x_1^3$ である.

中心多様体上にある点が描く軌道は中心多様体から外れることはない. 図 5 では, Lyapunov 等高線は中心多様体に垂直, あるいはそれに近い角度で張られているように見えるが, これは Lyapunov 関数は中心多様体のその性質を反映しているためだと考えられる.

5.3 J_3 の場合に該当する数値例

以下の $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ に関する 2 次元の系を数値例とする.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2^2. \end{cases} \quad (5.7)$$

この系について, 非双曲型平衡点である原点近傍における局所 Lyapunov 関数の構成を試みる. まず, 第一 Lyapunov 係数は 2 であるため, 第 4.3.3 節の方法で局所 Lyapunov 関数が構成できることが確認できた. 次に変換式 (4.34) の各係数を求める. (4.35) に従えば

$$h_1 = \frac{3}{2}, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = 0, \quad h_5 = 1$$

となる. よって, 変換式

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_1^2 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$$

が得られた。(4.38)によれば、次の関数 L :

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2) &= -(x_1 + \frac{3}{2}x_1^2)(x_2 + x_1x_2) - (x_2 + x_1x_2) \\ &= -(1 + x_1 + \frac{3}{2}x_1^2)(x_2 + x_1x_2) \end{aligned} \quad (5.8)$$

が局所 Lyapunov 関数となる。 L の時間微分については

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(x_1, x_2) &= -\frac{3}{2}x_1^5 - \frac{9}{2}x_1^4x_2 - \frac{5}{2}x_1^4 + \frac{21}{2}x_1^3x_2^2 - 5x_1^3x_2 - 2x_1^3 \\ &\quad + 8x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_2 - x_1^2 + x_1x_2^2 - x_2^2 \end{aligned}$$

である。ここで (4.45) を満たす関数

$$\begin{aligned} DL_I(x_1, x_2) &= -x_1^2 - x_2^2 - \frac{3}{2}([D_{x_1}])^3x_1^2 - \frac{9}{2}([D_{x_1}])^2[D_{x_2}]x_1^2 - \frac{5}{2}([D_{x_1}])^2x_1^2 \\ &\quad + \frac{21}{2}([D_{x_1}])^3x_2^2 - 5[D_{x_1}][D_{x_2}]x_1^2 + 2[D_{x_1}]x_1^2 \\ &\quad + 8([D_{x_1}])^2x_2^2 - 2[D_{x_2}]x_1^2 + [D_{x_1}]x_2^2 \end{aligned}$$

を考える。他にも (4.45) を満たす関数は考えられるが、今回は上記の関数 DL_I を検証に用いた。

定義域の検証を行った結果、上の関数 L は少なくとも

$$D_L = \{\mathbf{x} \mid -0.1875 \leq x_1 \leq 0.1875, -0.1875 \leq x_2 \leq 0.1875\} \quad (5.9)$$

の範囲で Lyapunov 関数となることがわかった。また、フローと近似計算によって得られた Lyapunov 等高線と照らし合わせれば、以下の図 6,7 のようになった。

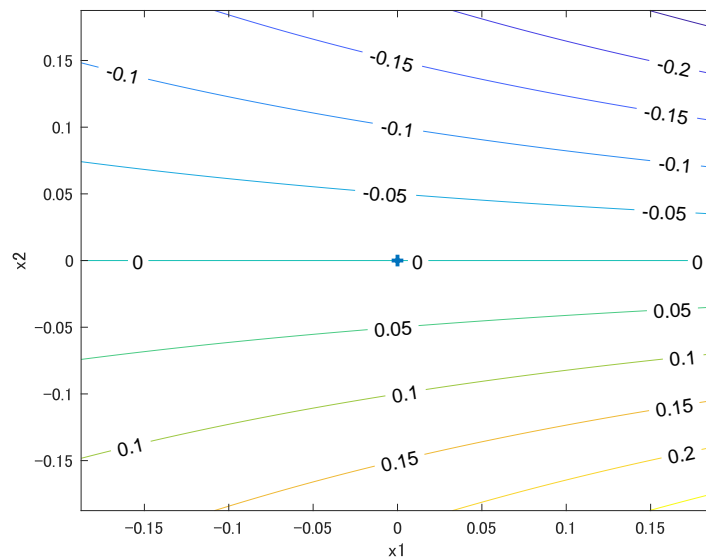


図 6: 近似計算で (5.8) の Lyapunov 等高線を定義域 (5.9) の範囲で描いた。グラフ中の数値が Lyapunov 関数の近似値である。

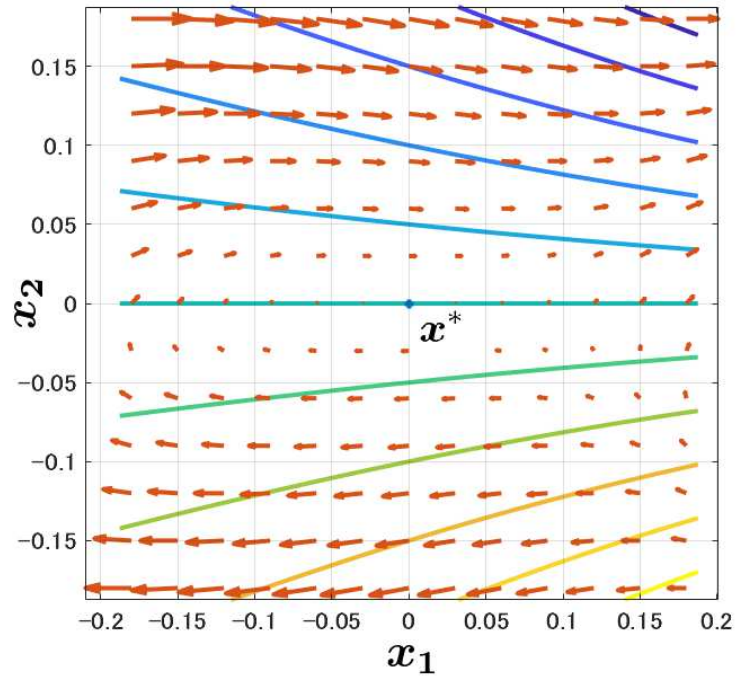


図 7: 図 6 にフローを書き加えた図. 橙色の矢印がフローである.

原点におけるヤコビ行列の固有値は 0 のみであるため, 系 (5.7) は 2 次元中心多様体をもつ. 力学系の縮約がこれ以上できない系に対して局所 Lyapunov 関数を構成できたことは, 力学系解析において大きな意味を持つと考えられる. 実際に, 次章ではこの系 (5.7) に対して, 局所 Lyapunov 関数 (5.8) を用いてヘテロクリニック軌道を捕捉し, 力学系解析の方面での局所 Lyapunov 関数の有効性を示す.

6 非双曲型平衡点で構成された局所 Lyapunov 関数の応用

第 4 章で非双曲型平衡点に対する局所 Lyapunov 関数の構成方法について述べ、第 5 章で数値例を挙げ、局所 Lyapunov 関数を構成した。本章ではその局所 Lyapunov 関数を利用し、非双曲型平衡点と非双曲型平衡点を結ぶヘテロクリニック軌道の捕捉を行う。これによって非双曲型平衡点における局所 Lyapunov 関数の構成の有用性を示す。

6.1 数値例

第 5.3 節では、次の $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ に関する 2 次元の系

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2^2 \end{cases} \quad (6.1)$$

において非双曲型平衡点である原点における局所 Lyapunov 関数 L :

$$L(x_1, x_2) = -(1 + x_1 + \frac{3}{2}x_1^2)(x_2 + x_1x_2) \quad (6.2)$$

を定義域 D_L :

$$D_L = \{\mathbf{x} \mid -0.1875 \leq x_1 \leq 0.1875, -0.1875 \leq x_2 \leq 0.1875\} \quad (6.3)$$

として構成した。この系は原点のほかに $\mathbf{x}^* := (1, 1)^T$ を平衡点にもつ。また、原点付近からの軌道を近似で計算した結果を見れば、原点近傍から \mathbf{x}^* へのヘテロクリニック軌道の存在が予想できる。構成した局所 Lyapunov 関数 (6.2) をもとに、ヘテロクリニック軌道の捕捉を行う。

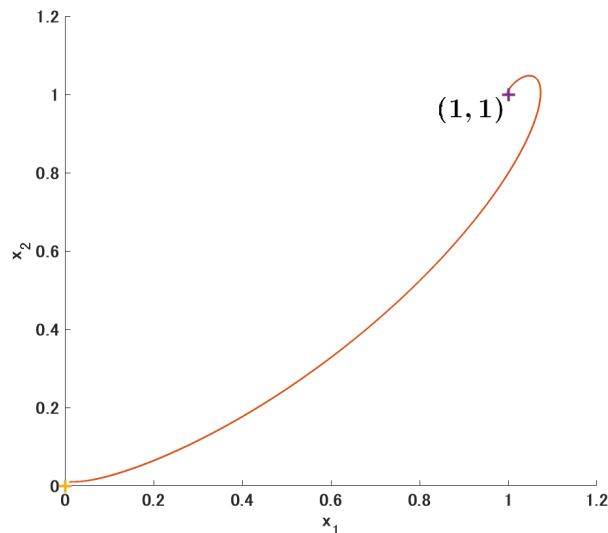


図 8: $\mathbf{x} = (0.01, 0.01)^T$ を初期点としたルンゲクッタ法による近似軌道。原点から $\mathbf{x}^* = (1, 1)^T$ へのヘテロクリニック軌道のように見える。

6.2 数値例におけるヘテロクリニック軌道の捕捉方法

$\mathbf{x}^* = (1, 1)^T$ における (6.1) のヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

であり, 固有値は $-1 \pm i$ である. よって平衡点 \mathbf{x}^* は吸引点であり, したがって 2次元安定多様体 $W^s(\mathbf{x}^*)$:

$$W^s(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2 \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}^*\}$$

が存在する. よって, ヘテロクリニック軌道の捕捉にあたって次の手順を行えばよい.

1. \mathbf{x}^* の安定多様体 $W^s(\mathbf{x}^*)$ の部分集合 D_A を精度保証で捕捉する.
2. 原点の不安定多様体を $W^u(\mathbf{0})$:

$$W^u(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x}_0 \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}\}$$

とする. $\mathbf{x}_u \in W^u(\mathbf{0})$ となる点 \mathbf{x}_u を精度保証で捕捉する.

3. 精度保証によって捕捉された点 \mathbf{x}_u を初期点とする (6.1) の解 $\varphi(t, \mathbf{x}_u)$ が時刻 $T_{US} > 0$ で D_A に含まれることを精度保証で確認する. このとき, $\varphi(t, \mathbf{x}_u)$ はヘテロクリニックとなる.

各ステップの詳細は次に記述する.

6.2.1 D_A の捕捉方法

安定多様体 $W^s(\mathbf{x}^*)$ の部分集合 D_A の精度保証による捕捉方法について説明する.

まず, 第 3.2 節に従って $\mathbf{x}^* = (1, 1)^T$ における局所 Lyapunov 関数 L_{11} :

$$L_{11}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), \quad Y \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (6.4)$$

を構成し, その定義域 $D_{L_{11}}$ を検証する. 次に, $D_A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid L_{11}(\mathbf{x}) \leq \alpha\} \subset D_{L_{11}}$ となる $\alpha > 0$ を取る. このとき, 平衡点 \mathbf{x}^* は吸引点であるため, D_A は $W^s(\mathbf{x}^*)$ の部分集合となる.

α については精度保証を用いて導出することができるが ([15]), 今回は解析的に求めた. 具体的には第 6.3.2 節にて記す.

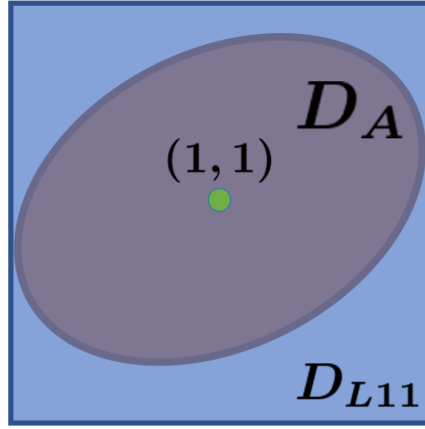


図 9: 局所 Lyapunov 関数の定義域 D_{L11} と領域 D_A . D_A 上の点は必ず $t \rightarrow \infty$ で \mathbf{x}^* に収束する.

6.2.2 \mathbf{x}_u の捕捉方法

$\mathbf{x}_u \in W^u(\mathbf{0})$ となる点 \mathbf{x}_u の捕捉方法について説明する.

(6.2) の定義域 D_L は第 5.3 節によれば

$$D_L = \{\mathbf{x} \mid -0.1875 \leq x_1 \leq 0.1875, -0.1875 \leq x_2 \leq 0.1875\}$$

である. ここで, Lyapunov 関数値が 0 となる等位面 $L_0 = \{\mathbf{x} \in D_L \mid L(\mathbf{x}) = 0\}$ を考える. このとき, 局所 Lyapunov 関数 (6.2) からして

$$L_0 = \{\mathbf{x} \in D_L \mid x_2 = 0\}$$

だとわかる. さらに, Lyapunov 関数値が正となる領域 $D_L^+ = \{\mathbf{x} \in D_L \mid L(\mathbf{x}) > 0\}$ と Lyapunov 関数値が負となる領域 $D_L^- = \{\mathbf{x} \in D_L \mid L(\mathbf{x}) < 0\}$ を考える. このとき,

$$\begin{aligned} D_L^+ &= \{\mathbf{x} \in D_L \mid x_2 < 0\}, \\ D_L^- &= \{\mathbf{x} \in D_L \mid x_2 > 0\} \end{aligned}$$

となる. 平衡点以外で $dL/dt < 0$ となることを考えれば, 原点の不安定多様体 $W^u(\mathbf{0})$ 上の点 \mathbf{x}_u を捕捉するにあたって, 領域 D_L^- と等位面 L_0 に着目するのが妥当である.

次に, 領域 D_L^- の境界 ∂D_L^- :

$$\begin{aligned} \partial D_L^- &= D_{L1}^- \cup D_{L2}^- \cup D_{L3}^- \cup L_0, \\ D_{L1}^- &= \{\mathbf{x} \in D_L^- \mid x_1 = -0.1875, 0 < x_2 \leq 0.1875\}, \\ D_{L2}^- &= \{\mathbf{x} \in D_L^- \mid -0.1875 < x_1 < 0.1875, x_2 = 0.1875\}, \\ D_{L3}^- &= \{\mathbf{x} \in D_L^- \mid x_1 = 0.1875, 0 < x_2 \leq 0.1875\} \end{aligned}$$

におけるフローについて考える. (6.1) から D_{L1}^-, D_{L3}^- 上の点では $\dot{x}_1 > 0$ となり, D_{L2}^- 上の点では $\dot{x}_2 < 0$ となる. L_0 においては $\dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 > 0$ となる. 局所 Lyapunov 関数の定

義域では閉軌道が存在しないことを鑑みれば、原点および点 $(0.1875, 0)^T$ を除く L_0 上の点から出発した軌道は正の有限時間で D_L^- に流入し、 $D_{L_3}^-$ を通過して流出することがわかる。

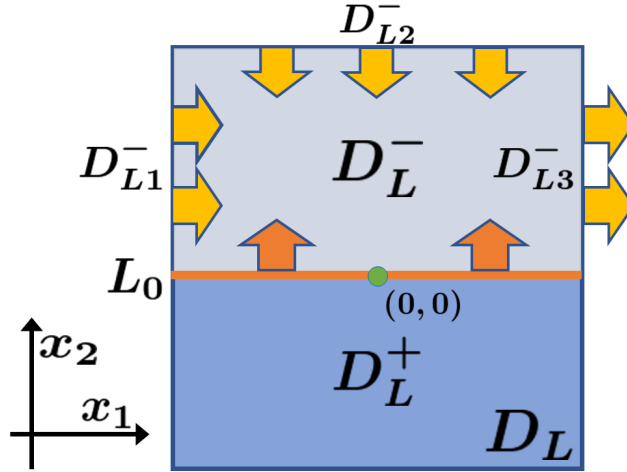


図 10: $D_L, D_L^+, D_L^-, D_{L_1}^-, D_{L_2}^-, D_{L_3}^-, L_0$ の位置関係と $D_{L_1}^-, D_{L_2}^-, D_{L_3}^-, L_0$ でのフローをまとめた図. 黄色の矢印が $D_{L_1}^-, D_{L_2}^-, D_{L_3}^-$ におけるフロー, 赤色の矢印が L_0 におけるフローを表している. $L_0 \setminus \{0, (0.1875, 0)^T\}$ 上の点は D_L^- に流入し, $D_{L_3}^-$ 上では D_L^- から流失することがわかる.

以上の事実を用いて、次の手順で \mathbf{x}_u の捕捉を行う。

1. 原点を挟んだ L_0 上の 2 点 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$:

$$\mathbf{x}_A = (x_1^A, 0)^T, \quad \mathbf{x}_B = (x_1^B, 0)^T, \quad x_1^A < 0 < x_1^B$$

を選び, $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ を初期点とする (6.1) の解軌道 $\varphi(t, \mathbf{x}_A), \varphi(t, \mathbf{x}_B)$ を精度保証で算定する.

2. $\varphi(t, \mathbf{x}_A), \varphi(t, \mathbf{x}_B)$ が $D_{L_3}^-$ を通過する時刻 $t_i, T_j > 0$ を探し出す. これは, ODE-IVP の精度保証法を用いて得られる $\varphi(t, \mathbf{x}_A), \varphi(t, \mathbf{x}_B)$ の時刻 t_i, T_j における解区間 $[\varphi(t_i, \mathbf{x}_A)], [\varphi(T_j, \mathbf{x}_B)]$:

$$[\varphi(t_i, \mathbf{x}_A)] := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{x}_i \leq x_1 \leq \bar{x}_i, \underline{y}_i \leq x_2 \leq \bar{y}_i\},$$

$$[\varphi(T_j, \mathbf{x}_B)] := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{x}_j \leq x_1 \leq \bar{x}_j, \underline{y}_j \leq x_2 \leq \bar{y}_j\},$$

$$\underline{x}_i, \bar{x}_i, \underline{y}_i, \bar{y}_i, \underline{x}_j, \bar{x}_j, \underline{y}_j, \bar{y}_j \in \mathbb{R}$$

について,

$$\underline{x}_i, \underline{x}_j > 0.1875 \tag{6.5}$$

を示せばよい.

3. $\varphi(t, \mathbf{x}_A), \varphi(t, \mathbf{x}_B)$ が D_{L3}^- を通過する前の時刻 $t_{i-1}, T_{j-1} > 0$ を探し出す。これは、ODE-IVP の精度保証法を用いて得られる $\varphi(t, \mathbf{x}_A), \varphi(t, \mathbf{x}_B)$ の時刻 t_{i-1}, T_{j-1} における解区間 $[\varphi(t_{i-1}, \mathbf{x}_A)], [\varphi(T_{j-1}, \mathbf{x}_B)]$:

$$[\varphi(t_{i-1}, \mathbf{x}_A)] := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{x}_{i-1} \leq x_1 \leq \bar{x}_{i-1}, \underline{y}_{i-1} \leq x_2 \leq \bar{y}_{i-1}\},$$

$$[\varphi(T_{j-1}, \mathbf{x}_B)] := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{x}_{j-1} \leq x_1 \leq \bar{x}_{j-1}, \underline{y}_{j-1} \leq x_2 \leq \bar{y}_{j-1}\},$$

$$\underline{x}_{i-1}, \bar{x}_{i-1}, \underline{y}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, \underline{x}_{j-1}, \bar{x}_{j-1}, \underline{y}_{j-1}, \bar{y}_{j-1} \in \mathbb{R}$$

について,

$$\bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{j-1} < 0.1875 \quad (6.6)$$

を示せばよい。

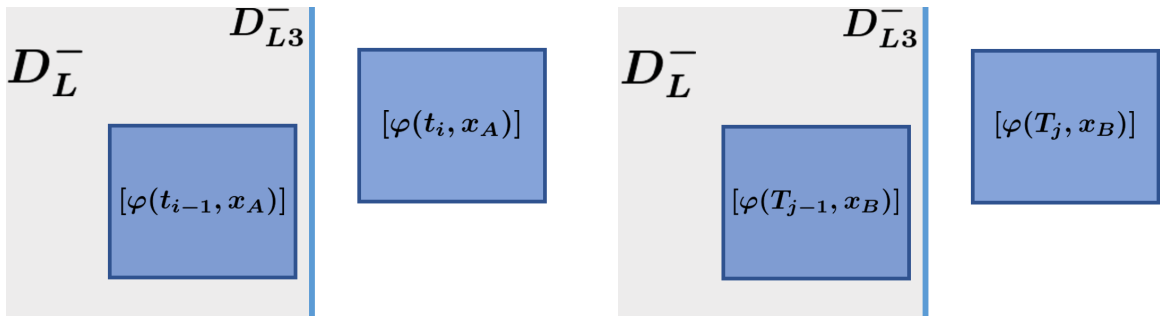


図 11: 左図は解区間 $[\varphi(T_i, \mathbf{x}_A)], [\varphi(t_{i-1}, \mathbf{x}_A)]$ と D_L^-, D_{L3}^- との位置関係を, 右図は 解区間 $[\varphi(T_j, \mathbf{x}_B)], [\varphi(T_{j-1}, \mathbf{x}_B)]$ と D_L^-, D_{L3}^- との位置関係を描いている。

4. $\varphi(t, \mathbf{x}_A)$ について, 適当な時間分点 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i$ を設定し, 時刻 $[0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{i-1}, t_i]$ における解区間

$$[\varphi([t_0, t_1], \mathbf{x}_A)], [\varphi([t_1, t_2], \mathbf{x}_A)], \dots, [\varphi([t_{i-1}, t_i], \mathbf{x}_A)] \quad (6.7)$$

を精度保証で求める。また, $\varphi(t, \mathbf{x}_B)$ についても適当な時間分点 $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_{j-1} < T_j$ を設定し, 時刻 $[0, T_1], [T_1, T_2], \dots, [T_{j-1}, T_j]$ における解区間

$$[\varphi([T_0, T_1], \mathbf{x}_B)], [\varphi([T_1, T_2], \mathbf{x}_B)], \dots, [\varphi([T_{j-1}, T_j], \mathbf{x}_B)] \quad (6.8)$$

を精度保証で求める。区間時間における解区間は, 第 2.4.4 節で記した Taylor 展開による精度保証法 (2.5) におけるステップ幅 h を区間時間に置き換えることで得られる。なお, kv ライブラリ ([11]) にはこの機能が実装されている。

このとき,

$$\begin{aligned} [\varphi(t_{k-1}, \mathbf{x}_A)], [\varphi(t_k, \mathbf{x}_A)] &\subset [\varphi([t_{k-1}, t_k], \mathbf{x}_A)], \\ [\varphi(T_{l-1}, \mathbf{x}_B)], [\varphi(T_l, \mathbf{x}_B)] &\subset [\varphi([T_{l-1}, T_l], \mathbf{x}_B)], \\ 1 \leq k \leq i, 0 \leq l \leq j \end{aligned} \quad (6.9)$$

であり, また

$$\begin{aligned} [\varphi([t_{k-1}, t_k], \mathbf{x}_A)] \cap [\varphi([t_k, t_{k+1}], \mathbf{x}_A)] &\neq \emptyset, \\ [\varphi([T_{l-1}, T_l], \mathbf{x}_B)] \cap [\varphi([T_l, T_{l+1}], \mathbf{x}_B)] &\neq \emptyset, \\ 1 \leq k \leq i-1, 0 \leq l \leq j-1 \end{aligned} \quad (6.10)$$

となることに注意されたい.

5. 得られた解区間 (6.7),(6.8) をもとに, 解区間の和集合 A, B :

$$\begin{aligned} A &= [\varphi([0, t_1], \mathbf{x}_A)] \cup [\varphi([t_1, t_2], \mathbf{x}_A)] \cup \cdots \cup [\varphi([t_{i-1}, t_i], \mathbf{x}_A)], \\ B &= [\varphi([0, T_1], \mathbf{x}_B)] \cup [\varphi([T_1, T_2], \mathbf{x}_B)] \cup \cdots \cup [\varphi([T_{j-1}, T_j], \mathbf{x}_B)] \end{aligned}$$

を考える. このとき, A は $\varphi(t, \mathbf{x}_A)$ の時刻 $0 \leq t \leq t_i$ における値の存在範囲を, B は $\varphi(t, \mathbf{x}_B)$ の時刻 $0 \leq t \leq T_j$ における値の存在範囲を意味する. また, (6.10) より A, B は連結集合である. ここで, 次の2つの条件を満たしているか確認する.

$$A \setminus \{[\varphi([t_{i-1}, t_i], \mathbf{x}_A)]\}, B \setminus \{[\varphi([T_{i-1}, T_i], \mathbf{x}_A)]\} \subset (D_L^- \cup L_0) \quad (6.11)$$

$$A \cup B = \emptyset \quad (6.12)$$

(6.11) については, $\varphi(t, \mathbf{x}_A), \varphi(t, \mathbf{x}_B)$ が時刻 $0 \leq t \leq t_{i-1}, 0 \leq t \leq T_{j-1}$ で局所 Lyapunov 関数 (6.2) の定義域に含まれているかを確認するためである. 解析的には領域 D_L^- からは D_{L3}^- 以外の境界で流出しないことがわかっているが, 区間演算における誤差拡大によって条件 (6.11) を満たさない場合が存在し得る.

A, B はともに連結集合であることや条件 (6.11),(6.12) から, 集合 A, B の位置は以下の図のように描ける.

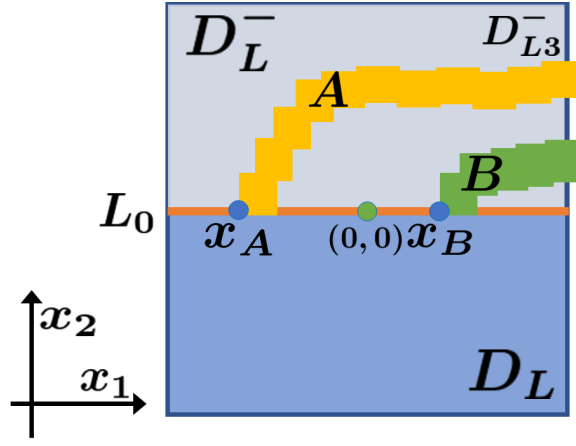


図 12: 条件 (6.11), (6.12) を満たすときの $D_L, D_L^-, D_{L3}^-, L_0$ と点 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ と集合 A, B の位置関係. 黄色の領域が集合 A , 緑色の領域が集合 B である.

解区間 $[\varphi([t_{i-1}, t_i], \mathbf{x}_A)], [\varphi([T_{j-1}, T_j], \mathbf{x}_B)]$ を

$$\begin{aligned} [\varphi([t_{i-1}, t_i], \mathbf{x}_A)] &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{x}_{ti} \leq x_1 \leq \bar{x}_{ti}, \underline{y}_{ti} \leq x_2 \leq \bar{y}_{ti}\} \\ [\varphi([T_{j-1}, T_j], \mathbf{x}_B)] &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{x}_{Tj} \leq x_1 \leq \bar{x}_{Tj}, \underline{y}_{Tj} \leq x_2 \leq \bar{y}_{Tj}\}, \end{aligned}$$

$$\underline{x}_{Ti}, \bar{x}_{Ti}, \underline{y}_{Ti}, \bar{y}_{Ti}, \underline{x}_{Tj}, \bar{x}_{Tj}, \underline{y}_{Tj}, \bar{y}_{Tj} \in \mathbb{R}$$

と表す. このとき, 解区間 $[\varphi([t_{i-1}, t_i], \mathbf{x}_A)], [\varphi([T_{j-1}, T_j], \mathbf{x}_B)]$ と D_{L3}^- との共通部分 X_{LA}, X_{LB} は

$$\begin{aligned} X_{LA} &= [\varphi([t_{i-1}, t_i], \mathbf{x}_A)] \cup D_{L3}^- \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0.1875, \underline{y}_{ti} \leq x_2 \leq \bar{y}_{ti}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{LB} &= [\varphi([T_{j-1}, T_j], \mathbf{x}_B)] \cup D_{L3}^- \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0.1875, \underline{y}_{Tj} \leq x_2 \leq \bar{y}_{Tj}\} \end{aligned}$$

となる. さらに, X_{LA}, X_{LB} の和集合を次の区間ベクトル $[X_u]$:

$$\begin{aligned} [X_u] &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0.1875, \underline{y}_{Tj} \leq x_2 \leq \bar{y}_{ti}\} \\ &= ([0.1875, 0.1875], [\underline{y}_{Tj}, \bar{y}_{ti}])^T \end{aligned}$$

を考える. このとき, 図 12, 局所 Lyapunov 関数の定義域 (6.3) では閉軌道が存在しないこと (付録 B.3 を参照), 自励系において解軌道は交叉しないこと (付録 C.1 を参照) から,

$$\exists \mathbf{x}_u \in [X_u], \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}_u = \mathbf{0}$$

が成立する. また, $[X_u]$ が \mathbf{x}_u の存在範囲となる.

6.2.3 $[X_u]$ から D_A への解軌道の検証

前節で得られた $[X_u]$ を初期区間とする解軌道 $\varphi(t, [X_u])$ について,

$$[\varphi(T_{US}, [X_u])] \subset D_A \quad (6.13)$$

を満たす時刻 $T_{US} > 0$ を探し出す. なお, $[\varphi(T_{US}, [X_u])]$ は ODE-IVP の精度保証法を用いて得られた, 時刻 T_{US} における $\varphi(T_{US}, [X_u])$ の解区間を表す. (6.13) の判定方法については, 解区間 $[\varphi(T_{US}, [X_u])]$ について

$$\sup L_{11}([\varphi(T_{US}, [X_u])]) \leq \alpha$$

となればよい. なお, $\sup L_{11}([\varphi(T_{US}, [X_u])])$ とは $L_{11}([\varphi(T_{US}, [X_u])])$ の上端を表す. このとき, $[X_u] \subset W^s(\mathbf{x}^*)$ となる. これで,

$$\exists \mathbf{x}_u \in [X_u], \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathbf{x}_u) = \mathbf{x}^* \wedge \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, \mathbf{x}_u) = \mathbf{0}$$

が成立し, $\varphi(t, [X_u])$ はヘテロクリニック軌道の存在範囲となる.

6.3 精度保証の結果

第 6.2 節に従いヘテロクリニック軌道の捕捉を行う.

6.3.1 局所 Lyapunov 関数 L_{11} の構成と定義域の検証

双曲型平衡点 $\mathbf{x}^* = (1, 1)^T$ の近傍における局所 Lyapunov 関数を第 3.2 節に従って構成し, 定義域を検証する. なお, 定義域の検証に用いる区間演算は第 5 章と同様に INTLAB(version 10.2) を用いた ([20]).

\mathbf{x}^* におけるヤコビ行列 $D\mathbf{f}^*$ の固有値を対角成分に並べた行列 Λ は

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{pmatrix}$$

であり, 各固有値に対応する固有ベクトルを並べた行列は

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$$

となる. また, 局所 Lyapunov 関数を構成する際の I^* は

$$I^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. よって, 局所 Lyapunov 関数の候補として

$$\begin{aligned} L_{11}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \mathbf{x} \\ &= (x_1 - 1)^2 - (x_1 - 1)(x_2 - 1) + \frac{1}{2}(x_2 - 1)^2 \end{aligned} \quad (6.14)$$

を得られた．この関数 $L(\mathbf{x})$ に対して定義域の検証を行った．その結果，上の関数 L は少なくとも

$$D_{L11} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 0.125 \leq x_1 \leq 2, 0.5 \leq x_2 \leq 2\} \quad (6.15)$$

の範囲で Lyapunov 関数となることがわかった．

6.3.2 D_A の導出

$W^s(\mathbf{x}^*)$ の部分集合 D_A の捕捉を行う．

局所 Lyapunov 関数 (6.14) の値が 0.1 となる等位面 $L_{0.1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid L_{11}(\mathbf{x}) = 0.1\}$ に着目する．(6.14) を変形させれば

$$L_{11}(\mathbf{x}) = \left\{ (x_1 - 1) - \frac{x_2 - 1}{2} \right\}^2 + \frac{(x_2 - 1)^2}{4} \quad (6.16)$$

$$= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}(x_1 - 1)^2 \quad (6.17)$$

となる．したがって x_1 の値が最大，最小となる $L_{0.1}$ 上の点は (6.17) より

$$\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}, 1 + \frac{\sqrt{5}}{5} \right), \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}, 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \quad (6.18)$$

となり， x_2 の値が最大，最小となる $L_{0.1}$ 上の点は (6.16) より

$$\left(1 + \frac{\sqrt{10}}{10}, 1 + \frac{\sqrt{10}}{5} \right), \left(1 - \frac{\sqrt{10}}{10}, 1 - \frac{\sqrt{10}}{5} \right) \quad (6.19)$$

となる．以上より， $L_{0.1}$ は次に記す矩形領域 D に包含されることがわかる．

$$D = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \leq x_1 \leq 1 + \frac{\sqrt{5}}{5}, 1 - \frac{\sqrt{10}}{5} \leq x_2 \leq 1 + \frac{\sqrt{10}}{5} \right\}$$

また，

$$1 - \frac{\sqrt{5}}{5} > 0.55, \quad 1 + \frac{\sqrt{5}}{5} < 1.45, \quad 1 - \frac{\sqrt{10}}{5} > 0.36, \quad 1 + \frac{\sqrt{10}}{5} < 1.64$$

であるから

$$L_{0.1} \subset D \subset D_{L11}$$

となり，したがって

$$D_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid L_{11}(\mathbf{x}) \leq 0.1\} \quad (6.20)$$

が得られた．

6.3.3 \mathbf{x}_u の捕捉

次に, 不安定多様体上の点 \mathbf{x}_u の存在範囲 $[X_u]$ を求める. なお, 本節における精度保証は C++ で書かれた kv ライブラリ ([11]) を利用した.

今回, 最初の 2 点 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ について

$$\mathbf{x}_A = -0.125, \mathbf{x}_B = 0.0625$$

として精度保証を行った結果, 時刻 $t_{i-1} = 10.25, t_i = 10.375, T_{j-1} = 5.0625, T_j = 5.15625$ で条件 (6.5), (6.6) を満たすことがわかった. そこで, (6.7) についてはステップ幅を $t_j - t_{j-1} = 0.125$ として時間分点を設定し, (6.8) については時間幅を $t_j - t_{j-1} = 0.125$ として時間分点を設定し精度保証を行い条件 (6.11)(6.12) を満たしていることを確認した.

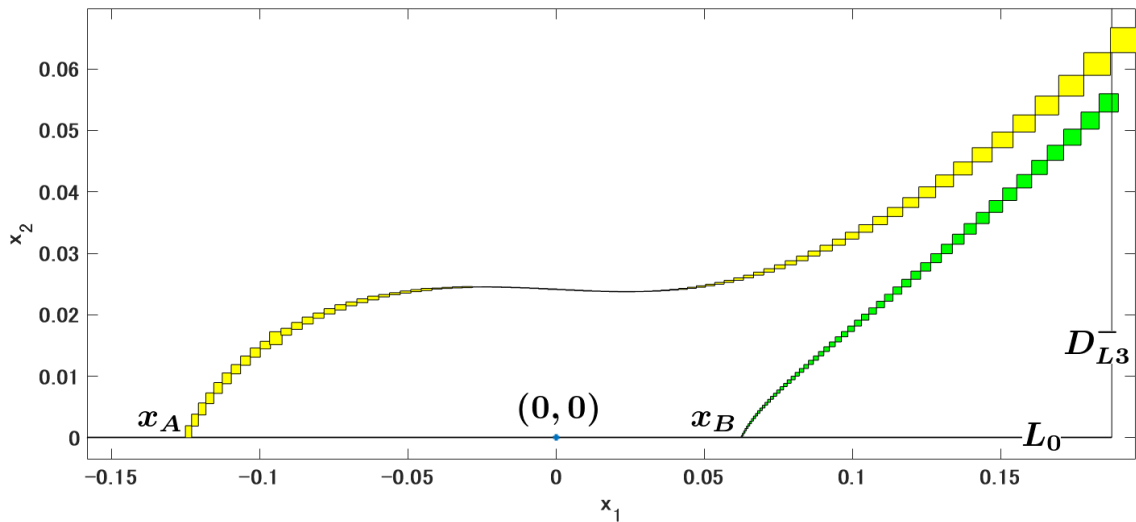


図 13: 黄色の領域が (6.7) の和集合 A を, 緑色の領域が (6.8) の和集合 B を, 横線が L_0 を, 縦線が D_{L3}^- を表している. この図から条件 (6.11)(6.12) を満たしていることを確認できる.

このときの $[\varphi([t_{i-1}, t_i], \mathbf{x}_A)], [\varphi([T_{j-1}, T_j], \mathbf{x}_B)]$ は

$$\begin{aligned} [\varphi([t_{i-1}, t_i], \mathbf{x}_A)] &\subset ([0.1832, 0.1897], [0.0529, 0.0561])^T \\ [\varphi([T_{j-1}, T_j], \mathbf{x}_B)] &\subset ([0.1869, 0.1967], [0.0626, 0.0668])^T \end{aligned}$$

となり, したがって

$$[X_u] = ([0.1875, 0.1875], [0.0529, 0.0668])^T \quad (6.21)$$

が得られた.

6.3.4 $[X_u]$ から D_A への解軌道の検証

最後に、得られた $[X_u]$ の区間値 (6.21) が正の有限時間で D_A へ向かうかどうか精度保証による検証を行った。なお、本節における精度保証は C++ で書かれた kv ライブラリ ([11]) を利用した。

結果として、時刻 $T_{US} = 4.21875$ で

$$[\varphi(T_{US}, [X_u])] \subset ([0.9603, 1.1401], [0.8401, 0.9708])^T$$

となり、また

$$\sup L_{11}([\varphi(T_{US}, [X_u])]) < 0.0548 < 0.1$$

となることがわかった。

以上より、原点から $\boldsymbol{x}^* = (1, 1)^T$ へのヘテロクリニック軌道が存在し、 $\varphi(t, [X_u])$ はそのヘテロクリニック軌道の存在範囲であることが示された。

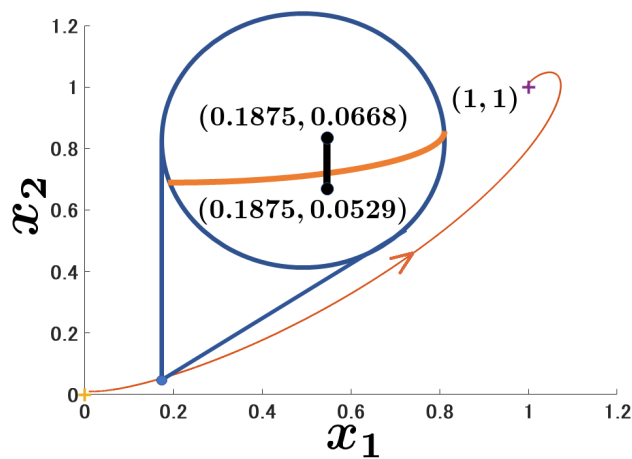


図 14: ヘテロクリニック軌道は $[X_u]$ の内部を通過する。

7 展望

本論文では、2次元の自励系に限定されてはいるが、標準形定理を用いて非双曲型平衡点近傍における局所 Lyapunov 関数の構成方法がある程度の範囲で示し、実際に数値例で構成した。標準形定理は力学系の基礎的な理論であり、また数値的な手法として活用しやすい。そのため、多くの展望が開ける。

・第一 Lyapunov 係数が 0 の場合

第 4 章で記した構成方法は第一 Lyapunov 係数が非零となっている場合についてのみ用いることができる。第一 Lyapunov 係数が 0 の場合はより高次の項までの標準形変換を考え、標準形から局所 Lyapunov 関数の構成を試みればよいと予想しているが、実際に局所 Lyapunov 関数が構成できるかどうかは不明である。より高次の項までの標準形変換を与えることで局所 Lyapunov 関数が構成できるとすれば、第一 Lyapunov 係数のような役割を果たす係数、いわば「第二、第三…Lyapunov 係数」の存在が期待されるが、本論文では確かめられていない。

さらなる話題として、(4.15)において J_1, J_2, J_3 のいずれかに分類される保存系が挙げられる。そのような保存系に対して第 4 章にて記した構成方法を試みようとする、おそらく第一 Lyapunov 係数および「第二、第三…Lyapunov 係数」は 0 になると予想しているが、本論文ではそれを確かめられていない。

今後の課題として、上の話題の解決が挙げられる。

・高次項・高次元への発展について

本論文では 2次元の自励系に対して局所 Lyapunov 関数の構成を行った。これはより高次、3次元以上の系に対しても同様の方法で局所 Lyapunov 関数を構成できることが期待される。しかしながら、局所 Lyapunov 関数を考えられるような標準形の導出手計算で行うのは難しい。なぜなら、 n 次元の系に対して j 次の項まで標準形変換を行う場合、 $\sum_{m=2}^j n \cdot m+n-1 C_m$ 個もの項*6について考慮し計算する必要が生じるからである。

計算機で標準形を導出する方法が述べられた先行研究 ([21]) を参考に、局所 Lyapunov 関数の構成を目的とした、標準形および標準形への変換式を導出する数式処理プログラムの構成が望まれる。

*6 例えば、 $\mathbf{x} = (x, y)^T$ に関する 2次元についての系の 3次までの項は $(x^2, 0)^T, (xy, 0)^T, (y^2, 0)^T, (0, x^2)^T, (0, xy)^T, (0, y^2)^T, (x^3, 0)^T, (x^2y, 0)^T, (xy^2, 0)^T, (y^3, 0)^T, (0, x^3)^T, (0, x^2y)^T, (0, xy^2)^T, (0, y^3)^T$ の $\sum_{m=2}^3 2 \cdot m+1 C_m = 14$ 個である。

付録 A

ここでは標準形定理に関する事項の詳細を記す。本章の記述内容は、本論文の主題である非双曲型平衡点近傍における局所 Lyapunov 関数の構成方法そのものには関わりがなく、それゆえに本文には記さなかった。しかし、構成方法を開発するにあたって、局所 Lyapunov 関数が容易に考えられる標準形を探すための重要な指標となっている。したがって、高次元の系への発展を目指すには十分配慮しなければならない事項である。

A.1 標準形の操作範囲

第 4.2 節、第 4.3 節にて記した標準形定理、および標準形定理の系について、標準形は「変換式の任意性によって『ある程度の範囲』で操作できる」と説明した。その標準形の操作範囲の詳細と導出方法について、第 4.3 節で与えた標準形定理の系を基に記す。

本文では非双曲型平衡点を持つ 2 次元の自励系を対象としていたが、ここでは (双曲型あるいは非双曲型の) 平衡点を持つ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ に関する n 次元の自励系を対象として説明する。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}), & 0 < t < \infty, \\ \mathbf{u} &\in \mathbb{R}^n, & \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

また、 $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ は考えている領域で C^r ($r \geq 4$) 級とし、平衡点 \mathbf{u}^* , $\mathbf{f}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$, が存在するものとする。(A.1) について \mathbf{u}^* を原点に座標変換し、原点における \mathbf{f} のヤコビ行列の固有空間に基底を取り直す。さらに、Taylor 展開を行えば

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= J\mathbf{x} + F_2(\mathbf{x}) + F_3(\mathbf{x}) + \dots + F_{r-1}(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^r), \\ \mathbf{x} &\in \mathbb{R}^n, \quad J : \text{実ジョルダン標準形} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

とできる。なお、 $F_i(\mathbf{x})$ ($2 \leq i \leq r-1$) は $F(\mathbf{x})$ の Taylor 展開の i 次の項を表す。

ここで第 4.3 節で記した標準形定理の系に振り返ってみよう。第 4.3 節では 2 次元の系に対して標準形定理の系を示しているが、これは n 次元に拡張しても成り立つ。すなわち、(A.1) は (4.11) を n 次元に拡張した変換式

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{x} + \sum_{m=2}^j h_m(\mathbf{x}), & 2 \leq j \leq r-1, \\ h_i(\mathbf{x}) & (2 \leq i \leq j) : \mathbf{x} \text{ の任意の } i \text{ 次項} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

を用いれば第 4.3 節と同様の手順で (4.14) が導ける。導出は以下に記す*7。

*7 扱う系が 2 次元ではなく n 次元に拡張されているが、第 4.3 節で記した標準形定理の系の証明と同じ内容である。

(A.3) の時間微分は

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{y}} &= \dot{\mathbf{x}} + Dh_2(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} + \cdots + Dh_j(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} \\
&= J\mathbf{x} + F_2(\mathbf{x}) + Dh_2(\mathbf{x})J\mathbf{x} \\
&\quad + \sum_{m=3}^j \{F_m(\mathbf{x}) + Dh_m(\mathbf{x})J\mathbf{x} + \sum_{k+l=m+1} Dh_k(\mathbf{x})F_l(\mathbf{x})\} \\
&\quad + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^{j+1}), \quad k, l \geq 2
\end{aligned}$$

である。なお、 $Dh_i(\mathbf{x}) (2 \leq i \leq j)$ は $h_i(\mathbf{x})$ のヤコビ行列を表す。ここから $J\mathbf{y}$ を引くと

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{y}} - J\mathbf{y} &= F_2(\mathbf{x}) + Dh_2(\mathbf{x})J\mathbf{x} - Jh_2(\mathbf{x}) \\
&\quad + \sum_{m=3}^j \{F_m(\mathbf{x}) + Dh_m(\mathbf{x})J\mathbf{x} - Jh_m(\mathbf{x}) + \sum_{k+l=m+1} Dh_k(\mathbf{x})F_l(\mathbf{x})\} \\
&\quad + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^{j+1})
\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{y}} &= J\mathbf{y} + \tilde{F}_2(\mathbf{x}) + \cdots + \tilde{F}_j(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^{j+1}), \tag{A.4} \\
\tilde{F}_2(\mathbf{x}) &= F_2(\mathbf{x}) + Dh_2(\mathbf{x})J\mathbf{x} - Jh_2(\mathbf{x}), \\
\tilde{F}_m(\mathbf{x}) &= F_m(\mathbf{x}) + Dh_m(\mathbf{x})J\mathbf{x} - Jh_m(\mathbf{x}) + \sum_{k+l=m+1} Dh_k(\mathbf{x})F_l(\mathbf{x}) \\
&\quad (3 \leq m \leq j, \quad k, l \geq 2)
\end{aligned}$$

が導かれる。ここで、

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \sum_{m=2}^{j-1} G_m(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^j) \tag{A.5}$$

を考える。なお、 $G_i(\mathbf{y}) (1 \leq i \leq j-1)$ は \mathbf{y} の i 次多項式とする。さらに、(A.5) は (A.3) の逆変換となるものとする逆変換 (A.5) を (A.4) に代入すれば、(A.4) の各項は

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_i(\mathbf{x}) &= \tilde{F}_i(\mathbf{y} + \sum_{m=i}^{j-1} G_m(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^j)) \\
&= \tilde{F}_i(\mathbf{y}) + \sum_{m=i+1}^j F_m^i(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^{j+1}) \quad (2 \leq i \leq j) \tag{A.6}
\end{aligned}$$

となる。なお、 $F_m^i(\mathbf{y})$ は \mathbf{y} の m 次項であり、 $\tilde{F}_i(\mathbf{x})$ に (A.5) を代入した際に生じる項であることを強調するため上付き文字 i を加えた。

以上より、

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{y}} &= J\mathbf{y} + \tilde{F}_2^r(\mathbf{y}) + \cdots + \tilde{F}_j^r(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^{j+1}), \tag{A.7} \\
\tilde{F}_2^r(\mathbf{y}) &= \tilde{F}_2(\mathbf{y}), \quad \tilde{F}_k^r(\mathbf{y}) = \tilde{F}_k(\mathbf{y}) + \sum_{m=2}^{k-1} F_k^m(\mathbf{y}) \quad (3 \leq k \leq j)
\end{aligned}$$

が得られる.

(導出終わり)

ここで, (A.3) の非線形項 $\sum_{m=2}^j h_m(\mathbf{x})$ が与える系の変化に注目する. (A.4) に従えば, $m(m \geq 2)$ 次項については

$$Dh_m(\mathbf{x})J\mathbf{x} - Jh_m(\mathbf{x}) + \sum_{k+l=m+1} Dh_k(\mathbf{x})F_l(\mathbf{x}) \quad (2 \leq m \leq j, \quad k, l \geq 2) \quad (\text{A.8})$$

が変換式 (A.3) による変形部分となる. したがって, 標準形の操作範囲は (A.8) によって決まる*8.

(A.8) の変形について調べる. まず, \mathbb{R}^n の標準基底 e_1, e_2, \dots, e_n と, \mathbf{y} に関する m 次 ($2 \leq m \leq j$) のベクトル値単項式

$$(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n})e_l, \sum_{k=1}^n \alpha_k = m \quad (1 \leq l \leq n) \quad (\text{A.9})$$

の全体の集合 H_m を考える. このとき, H_m は線型ベクトル空間となる.

次に, H_m から H_m への写像

$$L_m : h_m(\mathbf{x}) \mapsto Dh_m(\mathbf{x})J\mathbf{x} - Jh_m(\mathbf{x}) + \sum_{k+l=m+1} Dh_k(\mathbf{x})F_l(\mathbf{x}) \quad (\text{A.10})$$

$$(2 \leq m \leq j, \quad k, l \geq 2)$$

を考える. ここで, 写像 (A.10) について

$$L_m(H_m) \subseteq H_m$$

が成り立つこと, また $h_m(\mathbf{x}) \in H_m$ であることに着目すれば, $L_m(H_m) = H_m, L_m(H_m) \neq H_m$ それぞれの場合について以下の事が言える.

1. $L_m(H_m) = H_m$ の場合

標準形 (A.7) の m 次項は自由に操作できる.

2. $L_m(H_m) \neq H_m$ の場合

L_m の補空間であり, かつ m 次ベクトル値単項式 (A.9) の組を基底とする空間を W_m とする. このとき, (A.4) について

$$\tilde{F}_m(\mathbf{x}) \in W_m$$

が成立する. W_m の取り方は任意性があるが, その中で次元が最小となる空間を考える. これを \tilde{W}_m とする. このとき, \tilde{W}_m の基底となるベクトル値単項式 (あるいはベ

*8 逆変換 (A.5) も系を変形させる要素であることが (A.6) からわかるが, 変換式 (A.3) と違い任意性は持たない. したがって, 「標準形の操作範囲」を決めるものではない.

クトル値単項式の組) \tilde{W}_m の基底となるベクトル値単項式 (あるいはベクトル値単項式の組) が標準形 (A.7) の m 次項のうち標準形変換で操作できない項となる。なお、 \tilde{W}_m は一意でないことに注意されたい。

以上より、標準形の m 次項の操作範囲を調べるにあたって $L_m(H_m)$ を調べればよい。 $L_m(H_m) \neq H_m$ であれば、 \tilde{W}_m の導出が m 次項の操作範囲を判明するための鍵となる。

A.2 標準形の操作範囲の導出

本文では以下の $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ に関する 2 次元の系

$$\dot{\mathbf{x}} = J\mathbf{x} + F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad J: \text{実ジョルダン標準形}$$

について、 J を次の 4 つの場合に分類して局所 Lyapunov 関数の構成方法を考えていた。

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ -\rho & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

$$\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

標準形定理は通常「系を簡単な形に変形する」ために利用する。その一方で、本論文では「局所 Lyapunov 関数の導出」のため、すなわち局所 Lyapunov 関数が容易に見つかる系の導出のために利用している。標準形の操作範囲の重要性はこの目的の違いから生まれている。

第 4.3 節では J_1, J_2, J_3 の場合における、局所 Lyapunov 関数が容易に見つかる系、および具体的な変換式を定理として記した (定理 1-1, 1-2, 1-3)。その中で、定理 1-2, 1-3 の着想は標準形の操作範囲、言い換えれば \tilde{W}_m の導出にある*⁹。

本節では、 J_2, J_3 の場合における標準形の操作範囲を記す。

A.2.1 J_2 の場合

J_2 の場合について、第 4.3 節では標準形の 2 次項の操作範囲を導出し、そのうえで局所 Lyapunov 関数が容易に見つかる系を探し出した (定理 1-2)。ここでは \tilde{W}_2 の導出過程を記し、2 次項の操作範囲について記述する。

空間 H_2 :

$$H_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \right\}$$

と写像

$$L_2 : h_2(\mathbf{x}) \mapsto Dh_2(\mathbf{x})J_2\mathbf{x} - J_2h_2(\mathbf{x})$$

*⁹ 定理 1-1 は Hopf 分岐における標準形定理から着想を得ているが、標準形の操作範囲の導出から着想を得ている事と本質的には変わらないことを述べたい。ただし、複素変換を行っているため、導出を記述するにはあまりにも冗長である。したがって本論文には記さない。詳細は [16] にある。

について, $L_2(H_2)$ を調べる.

$$L_2 \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2 \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2 \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\rho \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = -\rho \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix},$$

$$L_2 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2 \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$L_2(H_2) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \right\}$$

となる. したがって

$$\tilde{W}_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{A.12})$$

が得られる.

(A.12) より,

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

が標準形変換では操作できない 2 次の項だとわかった.

A.2.2 J_3 の場合

J_3 の場合について, 第 4.3 節では標準形の 2 次項の操作範囲を導出し, そのうえで局所 Lyapunov 関数が容易に見つかる系を探し出した (定理 1-3). ここでは \tilde{W}_2 の導出過程を記し, 2 次項の操作範囲について記述する.

空間 H_2 :

$$H_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \right\}$$

と写像

$$L_2 : h_2(\mathbf{x}) \mapsto Dh_2(\mathbf{x})J_3\mathbf{x} - J_3h_2(\mathbf{x})$$

について、 $L_2(H_2)$ を調べる.

$$L_2 \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\rho \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2 \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2 \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} L_2 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2\rho x_1x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} -x_1^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} \\ &= \rho \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

$$L_2 \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$L_2(H_2) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \right\}$$

となる. したがって、 \tilde{W}_2 は

$$\begin{aligned} \tilde{W}_2 &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} \right\}, \\ &\quad \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

の2つが考えられる. これは,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$$

と

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{あるいは} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

の2つの項が標準形変換では操作できない2次の項ということになる.

なお, 定理 1-3 では, (A.14) の2つの項のうち

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$$

を操作する変換式を用いている.

付録 B

本論文の主旨から大きく外れるため本文には記さなかったいくつかの話題を記述する。

B.1 ホモクリニック軌道の連続分布

第 4.3.4 節にて記した, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ に関する 2 次元の系

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

は原点から原点へのホモクリニック軌道が連続分布している。これを示すには次の定理を証明すればよい。

定理 B-1.

(B.1) の初期点を $\mathbf{x}_0 (\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2)$ とし, その解軌道を $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ とする。このとき, 任意の \mathbf{x}_0 について $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ は $t \rightarrow \pm\infty$ で原点に向かうホモクリニック軌道である。

証明.

原点の近傍 $B_\varepsilon := \{ \|\mathbf{x}\| < \varepsilon \} (\varepsilon > 0)$ を考える。このとき,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathbf{x}_0 \in B_\varepsilon \setminus \{\mathbf{0}\}, \left(\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \right) \wedge (\forall t \in (-\infty, \infty), \varphi(t, \mathbf{x}_0) \in B_\varepsilon) \quad (\text{B.2})$$

を示せばよい。

まずは極座標変換を行う。 $x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta$ とおく。このとき,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \dot{\theta} \\ \dot{x}_2 = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \cdot \dot{\theta} \end{cases}$$

であるため,

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 \cos \theta - \dot{x}_1 \sin \theta &= r \dot{\theta} \\ \dot{x}_1 \cos \theta + \dot{x}_2 \sin \theta &= \dot{r} \end{aligned}$$

が成り立つ。また,

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 \cos \theta - \dot{x}_1 \sin \theta &= r^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \cos \theta - r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cdot \sin \theta \\ &= r^2 \sin^3 \theta, \\ \dot{x}_1 \cos \theta + \dot{x}_2 \sin \theta &= r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cdot \cos \theta + r^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \cos \theta \\ &= r^2 \cos^3 \theta \end{aligned}$$

であり, したがって

$$\begin{cases} \dot{r} = r^2 \cos^3 \theta \\ \dot{\theta} = r \sin^3 \theta \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

が導かれる.

(B.3) より $\theta < 0$ で $\dot{\theta} < 0$, $\theta > 0$ で $\dot{\theta} > 0$ となる. これは

$$\begin{aligned} \forall t \in (-\infty, \infty), \forall \theta \in (0, \pi), (\dot{\theta} > 0) \wedge (0 < \theta(t) < \pi) \\ \forall t \in (-\infty, \infty), \forall \theta \in (-\pi, 0), (\dot{\theta} < 0) \wedge (-\pi < \theta(t) < 0) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

となることを示す.

$0 < \theta(t) < \pi$ の場合に限定して考える. このとき, $\sin \theta \neq 0$ なので

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{r}{\tan^3 \theta} \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{r} dr &= \int \frac{1}{\tan^3 \theta} d\theta \\ &= \int \frac{1 + (\tan^2 \theta - \tan^2 \theta)}{\tan^3 \theta} d\theta = \int \left(\frac{1 + \tan^2 \theta}{\tan^3 \theta} - \frac{1}{\tan^2 \theta} \right) d\theta \\ &= \int \left(\frac{\frac{d}{d\theta}(\tan \theta)}{\tan^3 \theta} - \frac{\frac{d}{d\theta}(\sin \theta)}{\sin \theta} \right) d\theta \\ \Leftrightarrow \log r &= -\frac{1}{2 \tan^2 \theta} - \log |\sin \theta| + C_1 \quad (C_1 \text{は積分定数}) \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} r(\theta) &= e^{C_1} \frac{1}{\sin \theta} e^{-\frac{1}{2 \tan^2 \theta}} \\ &= e^{C_1} \frac{1}{\sin \theta} e^{-\frac{1 - \sin^2 \theta}{2 \sin^2 \theta}} \\ &= e^{C_1} \frac{1}{\sin \theta} e^{1 - \frac{1}{|\sin \theta|^2}} \\ &= e^{C_2} \frac{1}{\sin \theta} e^{-\frac{1}{|\sin \theta|^2}} \quad (C_2 = C_1 + 1) \end{aligned}$$

が導かれる. ここで, $r(\theta)$ について調べる. 初期点を $(r, \theta) = (r_0, \frac{\pi}{2})$ とおくと $e^{C_2} = r_0$ より

$$r(\theta) = \frac{r_0}{|\sin \theta|} e^{-\frac{1}{|\sin \theta|^2}}$$

となる. $\tau = 1/|\sin \theta|$ とおくと

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} r(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pi} r(\theta) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{e^{\tau^2}} = \mathbf{0}$$

となる. また, (B.4) より $\theta(t) \rightarrow 0$ で $t \rightarrow -\infty$, $\theta(t) \rightarrow \pi$ で $t \rightarrow \infty$ となる. したがって, $0 < \theta < \pi$ の範囲から出発した任意の解軌道は $t \rightarrow \pm\infty$ で $\mathbf{0}$ に収束する.

また, $r(\tau)$ について

$$\frac{dr}{d\tau} = e^{-\tau^2} - 2\tau^2 e^{-\tau^2} = (1 - 2\tau^2) e^{-\tau^2} \quad (\tau > 0)$$

であるから $\tau = 1/\sqrt{2}$ で極大値

$$r\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$$

をとる。よって

$$r(\tau) \leq r_0\sqrt{\frac{e}{2}}$$

が成り立つ。

以上より、 r_0 を

$$r_0 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{e}{2}}}$$

となるように取れば、任意の ε に対し、初期点 $(r, \theta) = (r_0, \pi/2)$ 、つまりは $\mathbf{x}_0 = (0, r_0)^T$ とすれば (B.2) が成立する。

$-\pi < \theta(t) < 0$ についても同様の議論で (B.2) を証明できる。

(証明終わり)

ホモクリニック軌道の分布は x_1 軸対称である。フローを上手く描くと開かれた蛤の貝殻に見える。

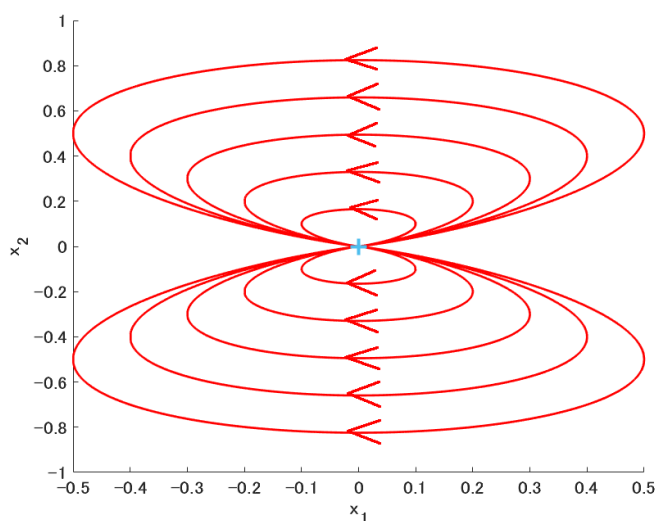


図 15: 系 (B.1) のフロー。相空間全体が原点から原点へのホモクリニック軌道となっている。

B.2 中心多様体の導出

第 5.2 節にて記した、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ に関する 2 次元の系

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - x_1^3 + x_2^3, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 - x_1^3 + x_2^3 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

について，原点の中心多様体 $W^c(\mathbf{0})$:

$$W^c(\mathbf{0}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2 + 2x_1^3 + \mathcal{O}(|x_1|^4)\} \quad (\text{B.6})$$

が存在する．この導出過程について記す．

中心多様体の導出には定理 C-3-2 を用いる．(C.4) と照らし合わせれば

$$\begin{aligned} A &= 0, \quad B = -1, \\ g(x_1, x_2) &= -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - x_1^3 + x_2^3, \\ h(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 - x_1^3 + x_2^3 \end{aligned}$$

となる．ここで， $\phi(x_1) = ax_1^2 + bx_1^3 + \mathcal{O}(|x_1|^4)$ とすると

$$\begin{aligned} &\phi'(x_1)(Ax_1 + g(x_1, \phi(x_1))) - B\phi(x_1) - h(x_1, \phi(x_1)) \\ &= \phi'(x_1) \cdot g(x_1, \phi(x_1)) + \phi(x_1) - h(x_1, \phi(x_1)) \\ &= (2ax_1 + 3bx_1^2 + \mathcal{O}(|x_1|^3)) \cdot (-x_1^2 + 2ax_1^3 - x_1^3 + \mathcal{O}(|x_1|^4)) \\ &\quad + ax_1^2 + bx_1^3 + \mathcal{O}(|x_1|^4) - x_1^2 - x_1(ax_1^2 + bx_1^3) + x_1^3 + \mathcal{O}(|x_1|^4) \\ &= (a-1)x_1^2 + (b-3a+1)x_1^3 + \mathcal{O}(|x_1|^4) \end{aligned}$$

となる． $a=1, b=2$ ならば

$$\phi'(x_1)(Ax_1 + g(x_1, \phi(x_1))) - B\phi(x_1) - h(x_1, \phi(x_1)) = \mathcal{O}(|x_1|^4)$$

が導かれ，原点の中心多様体

$$W^c(\mathbf{0}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2 + 2x_1^3 + \mathcal{O}(|x_1|^4)\}$$

を得る．

B.3 局所 Lyapunov 関数の性質

(C.1) と同様の系を例にとり，局所 Lyapunov 関数の性質について説明する．

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad 0 < t < \infty, \\ \mathbf{u} &\in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

なお，(3.1) は平衡点 \mathbf{u}^* を持ち，さらに， \mathbf{f} は \mathbb{R}^n で定義されている C^r 級関数とする．

B.3.1 局所 Lyapunov 関数の定義域では閉軌道が存在しない

\mathbf{u}^* における局所 Lyapunov 関数が定義域 $D_L \subset \mathbb{R}^n$ で構成できたとする．このとき，定義域 D_L 内部では閉軌道が存在しない．つまりは，次の定理が成立する．

定理 B-3-1.

(B.7) での平衡点 \mathbf{u}_* において, 局所 Lyapunov 関数が定義域 $D_L \subset \mathbb{R}^n$ で構成できたとする. また, \mathbf{u}_0 を初期点とする解軌道を $\varphi(t, \mathbf{u}_0)$ とする. このとき,

$$\forall \mathbf{u} \in D_L, \forall t \in [T_1, T_2], \varphi(t, \mathbf{u}) \in D_L \Rightarrow \forall t \in [T_1, T_2] \setminus \{0\}, \varphi(t, \mathbf{u}) \neq \mathbf{u} \\ (T_1 \leq 0, T_2 \geq 0)$$

が成り立つ.

証明.

次の条件を満たす点 $\mathbf{u}_0 \in D_L$ と時刻 $T_2 > 0$ が存在するものとして.

$$\varphi(T_2, \mathbf{u}_0) = \mathbf{u}_0, \\ \forall t \in [0, T_2], \varphi(t, \mathbf{u}_0) \in D_L$$

このとき, 局所 Lyapunov 関数の定義より

$$\forall t \in [0, T_2], \frac{d}{dt} L(\varphi(t, \mathbf{u}_0)) < 0$$

となり, したがって

$$L(\mathbf{u}_0) - L(\varphi(T_2, \mathbf{u}_0)) < 0$$

が導かれ, 矛盾が生じる.

時刻 $T_1 < 0$ の場合についても, 同様にして矛盾を導ける.

(証明終わり)

また, 定理 B-3-1 は系 (B.1) のような平衡点近傍で閉軌道が連続的に分布している場合は局所 Lyapunov 関数を構成できないことを示せる.

付録 C

ここでは次の自励系に関する基礎的事項を [14, 16, 19] などを参考に記す。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}), & 0 < t < \infty, \\ \mathbf{u} &\in \mathbb{R}^n, & \mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

また, $\mathbf{f}(\mathbf{u}^*) = 0$ となる点 $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^n$ が存在し, \mathbf{f} は \mathbb{R}^n で定義されている C^r 級関数とする. また, 任意の $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ に対してこれを $t = 0$ における初期ベクトルとする $\mathbf{u}(t)$ を $\varphi(t, \mathbf{u}_0)$ と表すことにする. そして, $\varphi(t, \mathbf{u}_0)$ が $-\infty < t < \infty$ で存在することを仮定する. なお, $\varphi(t, \mathbf{u}_0)$ は \mathbf{u}_0 を初期点とする解軌道とも呼ばれる.

C.1 自励系の特徴

自励系とは (C.1) のように, 正規形常微分方程式であり, かつ右辺に時間 t を陽に含まない式を指す. 自励系においては異なる初期点から出発した解軌道が有限時間では互いに交わらないという特徴を持つ. つまりは, 以下の定理が成り立つ.

定理 C-1.

(C.1) において, 任意の異なる 2 つの点 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n$ を考える. このとき

$$\forall T \in (-\infty, \infty), \varphi(T, \mathbf{u}_1) \neq \mathbf{u}_2 \quad \Rightarrow \quad \forall T_1, T_2 \in (-\infty, \infty), \varphi(T_1, \mathbf{u}_1) \neq \varphi(T_2, \mathbf{u}_2)$$

が成立する.

証明.

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$, $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (f_1(\mathbf{u}), f_2(\mathbf{u}), \dots, f_n(\mathbf{u}))^T$ とする. このとき, (C.1) から dt を消去すれば

$$\frac{du_1}{f_1(\mathbf{u})} = \frac{du_2}{f_2(\mathbf{u})} = \dots = \frac{du_n}{f_n(\mathbf{u})}$$

となり, したがって

$$\frac{du_1}{du_n} = \frac{f_1(\mathbf{u})}{f_n(\mathbf{u})}, \dots, \frac{du_{n-1}}{du_n} = \frac{f_{n-1}(\mathbf{u})}{f_n(\mathbf{u})}$$

が得られた. よって, $\varphi(t, \mathbf{u}_0)$ は \mathbf{u}_0 の値によって一意に決まることがわかり, 次の関係が成り立つ.

$$\exists T \in (-\infty, \infty), \mathbf{u}_1 = \varphi(T, \mathbf{u}_0) \quad \Rightarrow \quad \forall t, \varphi(t, \mathbf{u}_0) = \varphi(t - T, \mathbf{u}_1) \quad (\text{C.2})$$

ここで, 次の関係が成り立つとしよう.

$$\exists T_1, T_2 \in (-\infty, \infty), \varphi(T_1, \mathbf{u}_1) = \varphi(T_2, \mathbf{u}_2)$$

$\tilde{\mathbf{u}} := \varphi(T_1, \mathbf{u}_1)$ としたとき, (C.2) より

$$\begin{aligned}\forall t_1, \varphi(t_1, \mathbf{u}_1) &= \varphi(t_1 - T_1, \tilde{\mathbf{u}}) \\ \forall t_2, \varphi(t_2, \mathbf{u}_2) &= \varphi(t_2 - T_2, \tilde{\mathbf{u}})\end{aligned}$$

となる. ここで, $t_1 = T_1 - T_2, t_2 = 0$ とすれば

$$\varphi(T_1 - T_2, \mathbf{u}_1) = \varphi(0, \mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2$$

が導かれる. よって

$$\exists T_1, T_2 \in (-\infty, \infty), \varphi(T_1, \mathbf{u}_1) = \varphi(T_2, \mathbf{u}_2) \Rightarrow \varphi(T_1 - T_2, \mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_2$$

が成立する. この関係式の対偶は

$$\forall T \in (-\infty, \infty), \varphi(T, \mathbf{u}_1) \neq \mathbf{u}_2 \Rightarrow \forall T_1, T_2 \in (-\infty, \infty), \varphi(T_1, \mathbf{u}_1) \neq \varphi(T_2, \mathbf{u}_2)$$

である.

(証明終わり)

C.2 平衡点の安定性

\mathbf{u}^* において (C.1) は $\mathbf{f}(\mathbf{u}^*) = 0$ の仮定から

$$\frac{d\mathbf{u}^*}{dt} = 0$$

となり, 時間変化をしないことがわかる. この点を \mathbf{u}^* を平衡点と呼ぶ.

C.2.1 平衡点の安定性の定義

また平衡点の安定性については次のように定義されている.

定義 C-2([14, 16]).

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在し,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\| < \delta \Rightarrow \forall t > 0, \|\varphi(t, \mathbf{u}) - \mathbf{u}^*\| < \varepsilon$$

が成り立つとき, 平衡点 \mathbf{u}^* は安定 (Lyapunov 安定) である, という. また安定でない平衡点は, 不安定である, という.

\mathbf{u}^* が安定であって, さらに

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, \mathbf{u}) - \mathbf{u}^*\| = 0$$

が成り立つとき, 平衡点 \mathbf{u}^* は漸近安定である, という.

C.2.2 線形系の安定性

(C.1) について、 \mathbf{f} が線形であるとしよう。すなわち、(C.1) が

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

で表せる場合を考える。このとき、 $\mathbf{u}^* = \mathbf{0}$ が平衡点である。その安定性に関しては、以下のことが知られている。

1. A のすべての固有値 λ について

$$\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$$

ならば、 \mathbf{u}^* は安定である。

2. A のすべての固有値 λ について

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

ならば、 \mathbf{u}^* は漸近安定である。

3. A の固有値のうち、

$$\operatorname{Re}(\lambda) > 0$$

となるものがあれば、 \mathbf{u}^* は不安定である。

これらは A が対角化可能であれば簡単な議論で確かめることができる。対角化可能でない場合についても、ジョルダン標準化を行えば、同様にして証明できる。

C.2.3 非線形系の安定性

非線形系の平衡点の安定性については、線形化方程式を考えることで判別することができる。

(C.1) における平衡点 \mathbf{u}^* でのヤコビ行列を $D\mathbf{f}^*$ と置き、線形化方程式

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = D\mathbf{f}^*\mathbf{v}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, D\mathbf{f}^* \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (\text{C.3})$$

を考える。このとき、以下のことが成立する。

1. (C.3) の平衡点 $\mathbf{v}^* = \mathbf{0}$ が漸近安定であれば、非線形系 (C.1) の平衡点 \mathbf{x}^* も漸近安定である。
2. (C.3) の平衡点 $\mathbf{v}^* = \mathbf{0}$ が不安定であれば、非線形系 (C.1) の平衡点 \mathbf{x}^* も不安定である。

(C.3) が安定であっても、行列 $D\mathbf{f}^*$ の固有値 λ で

$$\operatorname{Re}(\lambda) = 0$$

となるものがある場合には、(C.1)の安定性については線形化方程式だけでは判別できない。ヤコビ行列 $D\mathbf{f}^*$ の固有値の実部に0が含まれないとき、平衡点 \mathbf{u}^* を双曲型平衡点と呼び、ヤコビ行列 $D\mathbf{f}^*$ の固有値の実部に0が含まれるとき、平衡点 \mathbf{u}^* を非双曲型平衡点と呼ぶ。

双曲型平衡点について、もう少し詳しく記す。双曲型平衡点は、 $D\mathbf{f}^*$ の固有値実部の正負によって、以下の3種類に分別される。

1. 固有値実部が全て負の場合

平衡点は吸引点（沈点）と呼ばれる。また、平衡点は漸近安定である。すなわち、 \mathbf{u}^* を含む開領域 D があって、任意の $\mathbf{x} \in D$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, \mathbf{x}) - \mathbf{x}^*\| = 0$$

となる。これを満たす全ての D の和集合を吸引域と呼ぶ。

2. 固有値実部が全て正の場合

平衡点は湧出点（源点）と呼ばれる。時間を逆向きに考えれば、平衡点は漸近安定である。すなわち、 \mathbf{u}^* を含む開領域 D があって、任意の $\mathbf{x} \in D$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\varphi(t, \mathbf{x}) - \mathbf{x}^*\| = 0$$

となる。

3. 固有値実部が正のものと負のものを共に持つ場合

平衡点はサドル（鞍点）と呼ばれる。

C.3 用語の説明

力学系にて用いられる基本的な用語の定義や性質について記述する。

C.3.1 安定多様体と不安定多様体

(C.1)の平衡点 \mathbf{u}^* に対する安定多様体とは、 $t \rightarrow \infty$ で平衡点 \mathbf{u}^* に収束するような解の初期値全体の集合であり、不安定多様体とは、 $t \rightarrow -\infty$ で平衡点 \mathbf{u}^* に収束するような解の初期値全体の集合である。数学的には次のように定義される。

定義 C-3-1([18]).

平衡点 \mathbf{u}^* に対して, 集合 W^s :

$$W^s(\mathbf{u}^*) = \{\mathbf{u}_0 \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathbf{u}_0) = \mathbf{u}^*\}$$

を \mathbf{u}^* の安定多様体と呼ぶ. また, 集合 W^u :

$$W^u(\mathbf{u}^*) = \{\mathbf{u}_0 \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, \mathbf{u}_0) = \mathbf{u}^*\}$$

を \mathbf{u}^* の不安定多様体と呼ぶ.

平衡点 \mathbf{u}^* まわりのヤコビ行列 $D\mathbf{f}^*$ が負の固有値を持つとき, 対応する固有ベクトルに接する安定多様体を持つ. 同様に, \mathbf{u}^* まわりのヤコビ行列 $D\mathbf{f}^*$ が正の固有値を持つとき, 対応する固有ベクトルに接する不安定多様体を持つ. すなわち, 平衡点 \mathbf{u}^* が双曲型であれば

$$\begin{aligned} \dim(W^s(\mathbf{u}^*)) &= n^+, \dim(W^u(\mathbf{u}^*)) = n^-, \\ n^+ &: D\mathbf{f}^* \text{ の実部正の固有値の重複度を込めた個数,} \\ n^- &: D\mathbf{f}^* \text{ の実部負の固有値の重複度を込めた個数,} \\ n^+ + n^- &= n \end{aligned}$$

となる. \mathbf{u}^* が吸引点ならば, n 次元の安定多様体が存在し, 吸引域となる. また, \mathbf{u}^* がサドル型ならば, n^+ 次元の安定多様体と n^- 次元の不安定多様体が存在する.

C.3.2 ホモクリニック軌道とヘテロクリニック軌道

(C.1) は $\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*$ の 2 点を平衡点に持つと仮定する. このとき, ホモクリニック軌道とは, $t \rightarrow \pm\infty$ で平衡点 \mathbf{u}_1^* に収束するような解の初期値全体の集合であり, ヘテロクリニック軌道とは, $t \rightarrow -\infty$ で平衡点 \mathbf{u}_1^* に収束し, かつ $t \rightarrow \infty$ で平衡点 \mathbf{u}_2^* に収束するような解の初期値全体の集合である. 数学的には次のように定義される.

定義 C-3-2.

(C.1) についての異なる 2 点 $\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*$ は平衡点であり, また, \mathbf{u}_1^* の安定多様体 $W^s(\mathbf{u}_1^*)$ と不安定多様体 $W^u(\mathbf{u}_1^*)$, \mathbf{u}_2^* の安定多様体 $W^s(\mathbf{u}_2^*)$ が存在するものとする. このとき, 次の集合 W^{ho} :

$$W^{ho} = W^s(\mathbf{u}_1^*) \cap W^u(\mathbf{u}_1^*)$$

について, $W^{ho} \neq \emptyset$ であれば W^{ho} は \mathbf{u}_1^* のホモクリニック軌道と呼ぶ. また, 次の集合 W^{he} :

$$W^{he} = W^u(\mathbf{u}_1^*) \cap W^s(\mathbf{u}_2^*)$$

について, $W^{he} \neq \emptyset$ であれば W^{he} は \mathbf{u}_1^* から \mathbf{u}_2^* へのホモクリニック軌道と呼ぶ.

C.3.3 中心多様体

中心多様体について説明する．ここで，説明を簡単にするために (C.1) は原点 $\mathbf{u} = 0$ で平衡点となるものとする．

(C.1) における平衡点 $\mathbf{u} = 0$ は非双曲型であるもの，つまりは原点におけるヤコビ行列が重複度を込めて，

- n_+ 個の実部正の固有値
- n_- 個の実部負の固有値
- n_0 個の実部 0 の固有値

をもつとする．このとき， $n = n_+ + n_- + n_0$ となる．また，実部 0 の固有値に対応する n_0 次元一般固有空間 T_c を考える．このとき，次の定理が知られている．

定理 C-3-1 ([17, 19]).

(C.1) が定める力学系は n_0 次元の滑らかな局所不変多様体 $W^c(\mathbf{0})$ をもつ．さらに， $W^c(\mathbf{0})$ は $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ で T_c に接する．

ただし， $W^c(\mathbf{0})$ が局所不変多様体多様体であるとは，十分小さな $t > 0$ に対して

$$\mathbf{u}_0 \in W^c(\mathbf{0}) \Rightarrow \varphi(t, \mathbf{u}_0) \in W^c(\mathbf{0})$$

であることをいう．

ここで，固有空間に基底を取り直すことで，(C.1) は

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

と書き直せる．なお， $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_0}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_+ + n_-}$ であり， A は固有値の実部はすべて 0, B の固有値の実部はすべて非零となる行列である．また， \mathbf{g}, \mathbf{h} は 2 次以上の非線形項である．このとき，中心多様体は $\varphi(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^2)$ を満たす写像 $\varphi: \mathbb{R}^{n_0} \rightarrow \mathbb{R}^{n_+ + n_-}$ のグラフで表せる．言い換えれば，関数 $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$ は，中心多様体 $W^c(\mathbf{0})$ の定義を与えている．

さらに，次の定理で中心多様体の近似計算を行うことが可能である．

定理 C-3-2([16, 17]).

$\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \phi'(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ を満たす関数が

$$\phi'(\mathbf{x})(A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))) - B\phi(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^p) \quad (p > 1)$$

を満たすならば, $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$ で

$$\varphi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^p)$$

となる.

参考文献

- [1] Steven H. Strogatz, [田中久陽, 中尾裕也, 千葉逸人 訳]: “ストロガッツ 非線形ダイナミクスとカオス: 数学的基礎から物理・生物・化学・工学への応用まで”, 丸善出版, 2017.
- [2] 郡宏, 森田喜久: “生物リズムと力学系”, 共立出版, 2011.
- [3] H. スミス, P. ウォルトマン著, 竹内康弘監訳: “微生物の力学系: ケモスタット理論を通じて”, 日本評論社, 2004.
- [4] K. Nitta and N. Yamamoto: “On numerical verification of homoclinic orbits in high dimensional dynamical systems”, SCAN2018: Book of Abstracts, pp110-111, 2018.
- [5] 山野駿: “連続力学系におけるホモクリニック軌道の精度保証による検証について”, 平成 27 年度電気通信大学大学院情報理工学研究科修士論文, 2016
- [6] A. Takayasu, K. Matsue, T. Sasaki, K. Tanaka, M. Mizuguchi, and S. Oishi: “Numerical validation of blow-up solutions of ordinary differential equations”, J. Comput. Appl. Math., Vol.314, pp.10-29, 2017.
- [7] K. Matsue, T. Hiwaki and N. Yamamoto: “On the construction of Lyapunov functions with computer assistance”, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol319, pp385-412, 2017.
- [8] 三宅智弘: “精度保証による Lyapunov 関数の構成とその拡張”, 平成 28 年度電気通信大学情報理工学研究科修士論文, 2017.
- [9] 中尾充宏, 山本野人: “精度保証付き数値計算”, 日本評論社, pp.1-34, 1998.
- [10] 大石進一編著: “精度保証付き数値計算の基礎”, コロナ社, 2018.
- [11] 柏木雅英: “kv - C++ による精度保証付き数値計算ライブラリ”, <http://verifiedby.me/kv/>, 2018/11/29 アクセス.
- [12] C. ロビンソン著, [國府寛司, 柴山健伸, 岡宏枝 訳]: “力学系 (上・下)”, シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社, 2001.
- [13] J. ラサール, S. レフシェッツ著, 山本稔訳: “リヤプノフの方法による安定性理論”, 産業図書株式会社, 1975.
- [14] M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney 著, [桐木紳, 三波篤郎, 谷川清隆, 辻井正人 訳]: “力学系入門: 微分方程式からカオスまで 原著第 2 版”, 2007.
- [15] 張替将人: “常微分方程式の解の漸近挙動に関する数値的検証法”, 平成 24 年度電気通信大学大学院情報理工学研究科修士論文, 2013.
- [16] S. ウィギンス著, 丹羽敏雄監訳: “非線形の力学系とカオス”, シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社, 2000.
- [17] 小川知之: “非線形現象と微分方程式: パターンダイナミクスの分岐解析”, サイエンス社, pp.29-45, 2010.

- [18] 桑村雅隆: “パターン形成と分岐理論：自発的パターン発生の力学系入門”, 共立出版, 2015.
- [19] Y.A.Kuznetsov: “Elements of Applied Bifurcation Theory”, 3rd ed., Springer-Verlag New York, pp.84-99, 2004.
- [20] S.M.Rump: “INTLAB - INTerval LABoratory”, <http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/>, 2018/12/23 アクセス.
- [21] Rand R.H, Armbruster D: “Perturbation Methods, Bifurcation Theory and Computer Algebra”, Springer-Verlag New York, 1987.

謝辞

本論文の執筆にあたって、指導教員の山本野人先生は勿論、明治大学の宮路智行先生、九州大学の松江要先生の懇切丁寧なご指導、お力添えを頂きましたことを心よりお礼申し上げます。先生方のご助力を賜らなければ、現在の研究成果に到達し得なかったと思っております。重ね重ねお礼申し上げます。また、副指導教員の久藤衡介先生もお忙しいなか本論文にお目通し頂き、さらには私の拙い発表にお付き合いくださったこと、深く感謝申し上げます。

そして、新田光輝氏、古戸慎一郎氏や古荘航氏をはじめとした同学生部屋の皆様やOBの方々、トナカイには多くの励ましを頂きましたことをお礼申し上げます。