修 士 論 文 の 和 文 要 旨

研究科・専攻	大学院　情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻　博士前期課程		
氏　　　名	辻啓太	学籍番号	1731110
論 文 題 目	双対理論を用いたクラウドファンディングメカニズムデザイン		

要　　旨

クラウドファンディングとは，起業家がインターネット等を通じ，銀行等の金融仲介者を介さずに幅広く個人に投資を募る方法である．クラウドファンディングのプラットフォーム例としては，CAMPFIRE や kickstarter などがある．クラウドファンディングのメリットとして，(1)銀行等からの融資と比べると資金集めが容易であり，起業が容易，(2)少額から気軽に事業へ投資する事が出来るなどがある．

一方，現行のクラウドファンディング方式において，プラットフォームから資金を得た起業家が資金を持ち逃げしてしまう可能性がある．このような問題を起業家のモラルハザードと呼ぶ．起業家のモラルハザードが多発すると，クラウドファンディングプラットフォームが市場としての信頼を失ってしまうと考えられる．

クラウドファンディングは実社会で運用されているが，クラウドファンディングメカニズムの研究は少ない．メカニズムデザインの例として，Roland による，起業家のモラルハザードを考慮したクラウドファンディングのメカニズムデザインがある．しかし，Roland のモデルは複雑であり，遂行可能なメカニズムを求める事ができず，モデルの解析が困難である．

そこで，Myerson によって提案された，プリンシパル・エージェントモデルに対する，線形計画問題による解析アプローチを取り入れた．双対理論を用いたメカニズムデザインは，クラウドファンディングのモデルを線形計画問題として定式化し，双対理論による遂行可能なメカニズムの特徴づけを与えることが出来る．

本研究では，Roland らの考案したメカニズムを混合整数計画問題として表現し，双対理論を用いたアプローチによってメカニズムの性質を解析することを目的とする．主たる結果として，モラルハザードを考慮しない場合におけるクラウドファンディングにおいて，個人合理性と実行可能性を満たすメカニズムに対して解析を行い，性質を明らかにした．さらに，モラルハザードを考慮したクラウドファンディングを展開系ゲームとしてモデル化し，2 段階の混合整数計画問題として定式化した．

電気通信大学大学院情報理工学研究科
情報・ネットワーク工学専攻情報数理工学プログラム修士論文

双対理論を用いた
クラウドファンディングメカニズムデザイン

平成 31 年 1 月 28 日

情報数理工学プログラム

学籍番号 1731110

辻啓太

指導教員　高橋里司
　　　　　岡本吉央

目次

1　はじめに

クラウドファンディングとは，起業家がインターネット等を通じ，銀行等の金融仲介者を介さずに幅広く個人に投資を募る方法である．クラウドファンディングのプラットフォーム例としては，CAMPFIRE [4] や kickstarter [5] などがある．クラウドファンディングのメリットとして，起業家側のメリットは銀行等からの融資と比べると資金集めが容易であり，起業が容易，顧客側からのメリットは少額から気軽に事業へ投資する事が出来るなどがある．

一方，現行のクラウドファンディング方式において，プラットフォームから資金を得た起業家が資金を持ち逃げしてしまう可能性がある．実際に，kickstater を利用して資金を集めた後，顧客と音信不通になった企業が顧客に訴えられたケース [13] が存在する．このような問題を起業家のモラルハザードと呼ぶ．起業家のモラルハザードが多発すると，クラウドファンディングプラットフォームが市場としての信頼を失ってしまう可能性がある．しかし，モラルハザードに対する選好情報は起業家の私的情報であるため，プラットフォームからの観測は困難である．

クラウドファンディングは実社会で運用されているが，クラウドファンディングメカニズムの研究は少ない．数少ないメカニズムデザインの例として，Roland [11] による，起業家のモラルハザードを考慮したクラウドファンディングのメカニズムデザインがある．しかし，Roland [11] のモデルは非常に複雑であり，遂行可能なメカニズムを求める事ができず，モデルの解析が困難である．そこで，Myerson によって提案された，プリンシパル・エージェントモデルに対する，線形計画問題による解析アプローチ [10] を取り入れる．プリンシパル・エージェントモデルは，経済取引や契約をモデル化する際に有効であり [2]，クラウドファンディングのモデルに近い．クラウドファンディングのモデルを混合整数計画問題として定式化することで，双対理論による遂行可能なメカニズムの特徴づけを与えることが出来る．

双対理論を用いたメカニズムの研究は，Bayesian オークションのメカニズムデザイン [14] をはじめとする市場に適応されている．双対理論を用いたメカニズムデザインは，メカニズムを導出するだけでなく，メカニズムの性質の解析にも使われる手法である．

本研究では，Roland の考案したメカニズムを混合整数計画問題として表現し，双対理論 を用いたアプローチによってメカニズムの性質を解析することを目的とする．主たる結果として，Roland のメカニズムを直接求める方法を示し，モラルハザードを考慮しない場合におけるクラウドファンディングメカニズムの性質を明らかにした．さらに，モラ

ルハザードを考慮したクラウドファンディングを展開型ゲームとしてモデル化し，2 段階の線型計画法として定式化した．

最後に本論文の構成を示す．第二章では，本研究における基礎知識について述べ，第三章では，先行研究について述べる．その後，第四章においてモラルハザードを考慮しないクラウドファンディングメカニズムについて議論し，第五章でモラルハザードを考慮するクラウドファンディングメカニズムを議論する．そして，第六章でまとめと今後の展望を述べる．

2 準備

本章では，本研究に関する基礎知識について述べる．

2.1 表記の導入

本論文で扱う表記をいくつか導入する．まず n 次元のベクトル $(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)^T$ から i 番目の要素 v_i を除いた $n-1$ 次元のベクトルを $\boldsymbol{v}_{-i} = (v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)^T$ と定義し，ベクトルの組 $(\bar{v}_i, \boldsymbol{v}_{-i})$ を

$$(\bar{v}_i, \boldsymbol{v}_{-i}) = (v_1, \ldots, \bar{v}_i, \ldots, v_n)^T$$

と定義する．

続いて，n 次元のベクトルですべての成分が 0 であるベクトルを $\mathbf{0}_n$ と表記する．また，$n \times m$ 型行列で全ての要素が 0 である行列を $O_{n\times m}$ で表記し，1 から整数 n までの整数の集合を $[n] = \{1, \ldots, n\}$ と表記する．

また，$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ において，

$$\forall i \in [n], b_i \geq v_i$$

である事を $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{v}$ と表記し，

$$\forall i \in [n], b_i > v_i$$

である事を $\boldsymbol{b} > \boldsymbol{v}$ と表記する．

2.2 クラウドファンディング

クラウドファンディングとは，インターネットを通じクリエイターや起業家が不特定多数の人から資金を募る方法を指し [3]，いくつかの基準によって分類される．この基準は，プラットフォーム等によって様々であるが，本研究では先行研究 [11] の基準を用いる．

クラウドファンディングの分類は顧客への報酬による分類と，起業家が目標としている金額に達しなかった際の支援金の処理による分類の 2 つの基準がある．表 1 に顧客への報酬による分類を，表 2 に起業家が目標としている金額に達しなかった際の支援金の処理による分類を示す．次に，クラウドファンディングの登場人物を定義しておく．

定義 2.1. クラウドファンディングの登場人物は，次の 3 種類である．

表１　報酬による分類

報酬の種類	名称
報酬なし	寄付型
金銭的報酬	投資型
金銭以外の報酬	リワード型

表２　支援金の処理による分類

処理	名称
返金を行う	all-or-nothing 形式
返金を行わない	all-in 形式

- 起業家とは，クラウドファンディングのプラットフォームを通じて，事業を行う意志のある人物である．

- 顧客とは，プラットフォームを通じて起業家を支援する立場にある人物である．

- プラットフォーム提供者とは，起業家と顧客にクラウドファンディングの場を提供する人物である．

クラウドファンディングにおいて，起業家と顧客は意思決定を行う主体であり，これをプレイヤーと呼ぶ．一方，プラットフォーム提供者は，事前に決めたルールに従って振る舞う人物であるため，意思決定を行うプレイヤーではない事に注意する．

一般にクラウドファンディングは以下のようなスキームで遂行される．

step 1　起業家は目標金額，期限と顧客への支援をプラットフォーム提供者に申告する．

step 2　各顧客は事業に対する評価をプラットフォーム提供者に申告する．

step 3　支援金の総額が目標金額以上であるとき，プラットフォーム提供者は，起業家に資金を送金する．

step 4　起業家は資金を得る事ができた場合，その資金を元に事業を行い，顧客に成果物を提供する．

以上のスキームでプラットフォーム提供者が決定するものは，成果物を誰に割当てるかを表す帰結と各顧客の支払いである．なお今後，成果物の事を財と呼ぶ．もし上記スキー

ムにおいて，プラットフォームから資金を入手した起業家が事業を行うことなく，資金を持ち逃げした場合，起業家のモラルハザードが発生したという．

2.3 クラウドファンディングメカニズム

経済取引におけるメカニズムとは，メカニズム設計者が経済的に望ましい結果を導くためのルールである．特に，クラウドファンディングにおいてメカニズム設計者はプラットフォームの提供者を指し，メカニズムにおける意思決定には関与しないことに注意する．

ここで，顧客の集合を $\mathcal{N} = [n]$，起業家がとる事の出来る戦略の集合を $\mathcal{S}_0$，顧客 $i \in \mathcal{N}$ がとる事の出来る戦略の集合を $\mathcal{S}_i$ とし，全てのプレイヤーの戦略の組を集めた集合を $\mathcal{S} = \prod_{i=0}^{n} \mathcal{S}_i$ と定義する．

プレイヤーの帰結とは，プレイヤーがクラウドファンディングに参加した結果を指す．例えば，リワード型クラウドファンディングにおいて，顧客の帰結とは，起業家によって生産される財の割当を指す．起業家の帰結全体からなる集合を $\mathcal{X}_0$ とし，顧客 $i \in \mathcal{N}$ への帰結全体からなる集合を $\mathcal{X}_i$ とする．ここで，$x_0 \in \mathcal{X}_0$ で起業家の帰結を表し，$x_i \in \mathcal{X}_i$ で顧客 $i \in \mathcal{N}$ の帰結を表す．さらに，全プレイヤーの帰結の組を $(x_0, \ldots, x_n)$ で表し，全プレイヤーの帰結の組を集めた集合を $\mathcal{X} = \prod_{i=0}^{n} \mathcal{X}_i$ とする．各プレイヤーの戦略の組を入力とし，各プレイヤーの帰結の組を出力する関数 $\widetilde{\mathrm{RM}} : \mathcal{S} \to \mathcal{X}$ を帰結メカニズムと定義する．

また，顧客 $i \in \mathcal{N}$ の支払い全体からなる集合を $\mathcal{T}_i$ とし，顧客 $i \in \mathcal{N}$ の支払いを $t_i \in \mathcal{T}_i$ で表す．さらに，全ての顧客の支払いを，$(t_1, \ldots, t_n)^T$ で表し，全ての顧客の支払い全体の集合を $\mathcal{T} = \prod_{i \in \mathcal{N}} \mathcal{T}_i$ とする．各プレイヤーの戦略を入力とし，各プレイヤーの支払いを出力する関数 $\widetilde{\mathrm{PM}} : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ を支払いメカニズムと定義する．

以上を用いて，クラウドファンディングメカニズムを次の様に定義する．

定義 2.2. *クラウドファンディングメカニズム (CF メカニズム) は，帰結メカニズム $\widetilde{\mathrm{RM}} : \mathcal{S} \to \mathcal{X}$ と支払いメカニズム $\widetilde{\mathrm{PM}} : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ の組 $\mathrm{CFM} = (\widetilde{\mathrm{RM}}, \widetilde{\mathrm{PM}})$ として定義する．*

2.4 二者択一の定理

本研究では，CFM を線形計画問題に緩和し議論する．そのため，解析において重要な位置を占める二者択一の定理について紹介する．次のような線形計画問題を考える．

$$\langle P\rangle \begin{cases} \min & \mathbf{0}_n^T \boldsymbol{s} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{s} \geq \mathbf{0}_n. \end{cases}$$

ここで， $A \in \mathbb{R}_+^{m\times n}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ は定数，$\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$ は決定変数であるとする．

定義 2.3. 不等式系

$$A\boldsymbol{s} > \boldsymbol{b}, \boldsymbol{s} > \mathbf{0}_n$$

を満たす $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$ を $\langle P\rangle$ の内点許容解と定義し，この $\langle P\rangle$ の内点許容解の集合 $\mathcal{P}$ を

$$\mathcal{P} = \{\ \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{s} > \boldsymbol{b}, \boldsymbol{s} > \mathbf{0}_n\ \}$$

とする．

$\langle P\rangle$ の双対問題 $\langle DP\rangle$ を考える．

$$\langle DP\rangle \begin{cases} \max & \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{u} \\ \text{s.t.} & A^T\boldsymbol{u} \leq \mathbf{0}_n \\ & \boldsymbol{u} \geq \mathbf{0}_m. \end{cases}$$

式 (1) で定義する，この $\langle DP\rangle$ の解集合の部分集合を $\mathcal{D}$ と呼ぶ．

$$\mathcal{D} = \left\{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m | \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u} \geq 0, A^T\boldsymbol{u} \leq \mathbf{0}_n, \boldsymbol{u} \geq \mathbf{0}_m, \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}_m\right\}. \tag{1}$$

$\mathcal{P}$ と $\mathcal{D}$ の間には脇と村松 [7] によって以下の二者択一の定理と呼ばれる関係が示されている．

定理 2.1. $\mathcal{P}$ と $\mathcal{D}$ について常にどちらか一方が必ず成り立つ．

1. $\mathcal{P} = \emptyset \implies \mathcal{D} \neq \emptyset$.
2. $\mathcal{D} = \emptyset \implies \mathcal{P} \neq \emptyset$.

3 関連研究

3.1 Roland のクラウドファンディングモデル

本章ではクラウドファンディングのメカニズムデザインについて関連する研究を紹介する．はじめに，起業家のモラルハザードを考慮したクラウドファンディングのメカニズムデザインを行った Roland のモデル [11] について詳しく述べる．

Roland が対象にしたクラウドファンディングは，起業家が 1 人，顧客が n 人のリワード型 all-or-nothing 形式のクラウドファンディングである．Roland は，このクラウドファンディングにおいて，各顧客は財を高々 1 つまでしか得る事が出来ないとしている．また，このモデルの特徴として，プラットフォームは起業家への送金を事業を行う前と事業を行なった後に分割して行う．事業を行う前の送金を事前送金，事業を行った後の送金を事後送金と呼ぶ．送金を分割する理由は，起業家が持ち逃げする誘因を減らすためである．起業家は次のような事業コスト I と生産コスト c を持つ．

事業コスト $I \in \mathbb{R}_+$: 起業家が事業を始めるために必要とするコスト．

生産コスト $c \in [0, 1)$: 起業家が財を 1 つ生産するために必要とするコスト．

ここで，起業家がプラットフォームに申告する事業コストと生産コストの組を集めた有限集合を $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}_+ \times [0, 1)$ とする．今後，事業コストと生産コストの組 (I, c) を単にコストと呼ぶ．これらのコストは，起業家のみが知っている私的情報である．これを利用して，起業家は嘘のコストを申告する事で，自身の利得を高めようとする誘因がある．実際に事業を行う際に必要となる事業コストと生産コストを真の事業コストと生産コストと呼び，$(I^*, c^*) \in \mathcal{K}$ を用いて表す．

顧客の集合を $\mathcal{N} = [n]$ とし，各顧客 $i \in \mathcal{N}$ は事業に対する評価を持っている．ここでは， 顧客 i の事業への評価を $v_i \in \{ 0, 1 \}$ と定義する．全ての顧客の評価を表すベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T$ とし，これを評価ベクトルと呼ぶ．この評価ベクトルの取り得る値全体の集合を $\mathcal{V} = \{0, 1\}^n$ とする．また，顧客 $i \in \mathcal{N}$ は事業への自身の評価を知っているが，申告する評価を操作する事で，自身の利得を高めようとする誘因がある．顧客 $i \in \mathcal{N}$ の実際の事業への評価を真の評価と呼び，v_i^* を用いて表す．また，顧客 $i \in \mathcal{N}$ の真の評

価ではない評価を v_i^{*c} と表記し，

$$v_i^{*c} = \begin{cases} 1 & \text{if } v_i^* = 0 \\ 0 & \text{if } v_i^* = 1 \end{cases}$$

と定義する．

CFM が出力する帰結を $n+1$ 次元ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)^T$ を用いて，以下のように定義する．

$$x_0 = \begin{cases} 1 & \text{if プラットフォーム提供者は起業家に事業勧告を行う} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{if 顧客 } i \in \mathcal{N} \text{ に財を 1 つ割当てる} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

これを帰結ベクトルという．ここで，プラットフォーム提供者が起業家に事業を行うように勧告することを，事業勧告と呼ぶ．各顧客 $i \in \mathcal{N}$ がプラットフォームへ支払う事前送金の金額と事後送金の金額を，それぞれ，非負の実数値をとる変数を用いて，$t_i^a \in \mathbb{R}_+, t_i^p \in \mathbb{R}_+$ と定義する．また，全ての顧客の事前支払いを n 次元のベクトル $\boldsymbol{t}^a = (t_1^a, \ldots, t_n^a)^T \in \mathbb{R}_+^n$ を用いて表し，事後支払いを n 次元ベクトル $\boldsymbol{t}^p = (t_1^p, \ldots, t_n^p)^T \in \mathbb{R}_+^n$ を用いて表す．さらに，ベクトルの組 $(\boldsymbol{t}^a, \boldsymbol{t}^p)$ を分割ベクトルと呼び，$\boldsymbol{t}$ で表す．帰結ベクトル $\boldsymbol{x}$ と分割ベクトル $\boldsymbol{t}$ の組を割当 $a = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ と定義する．

Roland のモデルでは，クラウドファンディングは以下のように遂行される．

step 1　起業家がコスト $(I, c) \in \mathcal{K}$ をプラットフォームに申告する．

step 2　各顧客 $i \in \mathcal{N}$ はプラットフォームに評価 $v_i \in \{0, 1\}$ を申告する．ただし，顧客は起業家の申告したコストを知ることはできない事に注意する．

step 3　プラットフォームは起業家に事業勧告 $x_0 \in \{0, 1\}$ を申告する．

step 4

- $x_0 = 0$ ならば, プラットフォームによる送金 T は 0 となる．すなわち，起業家は事業を行わない，顧客はプラットフォームに何も支払わない．
- $x_0 = 1$ ならば，起業家はプラットフォームから送金 $T = \displaystyle\sum_{i \in \mathcal{N}} t_i^a$ を受取り，2 つの行動を選択する，
  - 送金から αT だけ持って逃げる ($\alpha \in [0, 1]$．ここで，α は事前に決まっているものとする．

– 事業を行う．

各顧客 $i \in \mathcal{N}$ はプラットフォームに t_i^a だけ送金を行う．

step 5　次の処理は，$x_0 = 1$ のときのみ行われる．

1. 起業家が事業を行うならば，プラットフォームは各顧客 $i \in \mathcal{N}$ に対して，財の分配 $x_i \in \{0,1\}$ を決定し，起業家に $\boldsymbol{x}$ を送信する．
2. 起業家は分配 $\boldsymbol{x}$ に従い，事業で生産された財を割当て，各顧客 $i \in \mathcal{N}$ はプラットフォームに t_i^p だけ送金する．
3. 起業家が財を発送後，プラットフォームは起業家に残りの送金 $\displaystyle\sum_{i\in\mathcal{N}} t_i^p$ を行う．

割当を評価する尺度として，起業家と顧客の利得を合わせた総余剰を定義する．そこで，まず起業家と顧客の利得を定義する．

定義 3.1. 割当 $a = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ による起業家の利得は顧客からの送金の総額から生産にかかったコストを引いたもの，すなわち，

$$\sum_{i\in\mathcal{N}} (t_i^a + t_i^p) - I^* x_0 - c^* \sum_{i\in\mathcal{N}} x_i$$

と定義する．また，顧客 $i \in \mathcal{N}$ の利得は，評価していた財を得た効用から支払いを引いたものとする．すなわち，顧客 $i \in \mathcal{N}$ の利得を

$$v_i^* x_i - (t_i^a + t_i^p)$$

と定義する．

以上を用いて，割当 $a = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ における総余剰は

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in\mathcal{N}} (t_i^a + t_i^p) - I^* x_0 - c^* \sum_{i\in\mathcal{N}} x_i + \sum_{i\in\mathcal{N}} \{v_i^* x_i - (t_i^a + t_i^p)\} \\
&= \sum_{i\in\mathcal{N}} (v_i^* - c^*) x_i - I^* x_0
\end{aligned}$$

となる．

3.1.1　クラウドファンディングメカニズム

Roland のモデルにおける CFM について説明する．起業家のとる事が出来る戦略の集合は，申告できるコストの集合 $\mathcal{K}$ であり，顧客 $i \in \mathcal{N}$ のとる事が出来る戦略の集合は $\{0,1\}$ であり，全ての顧客の戦略の組全体の集合は $\mathcal{V} = \{0,1\}^n$ である．よって，全てのプレイヤーの戦略全体の集合は $\mathcal{K} \times \mathcal{V}$ である．また，全てのプレイヤーの帰結

全体の集合は $\{0,1\}^{n+1}$ であり，全ての顧客の支払いを表す支払い全体を表す集合は $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$ である．従って，CFM は 帰結メカニズム $\widetilde{\mathrm{RM}} : \mathcal{K} \times \mathcal{V} \to \{0,1\}^{n+1}$ と支払いメカニズム $\widetilde{\mathrm{PM}} : \mathcal{K} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$ の組となる．今後，支払いメカニズムを分割メカニズムと呼ぶ．帰結メカニズムに入力 $((I,c),\boldsymbol{v})$ を与えた際の出力を $\widetilde{\mathrm{RM}}((I,c),\boldsymbol{v})$ と表記する．同様に，分割メカニズムに入力 $((I,c),\boldsymbol{v})$ を与えた際の出力を $\widetilde{\mathrm{PM}}((I,c),\boldsymbol{v})$ とし，顧客 $i \in \mathcal{N}$ の事前送金を $\widetilde{\mathrm{PM}}_i^a((I,c),\boldsymbol{v})$，事後送金を $\widetilde{\mathrm{PM}}_i^p((I,c),\boldsymbol{v})$ とする．ここで $\widetilde{\mathrm{PM}}((I,c),\boldsymbol{v}) = (\widetilde{\mathrm{PM}}^a((I,c),\boldsymbol{v}), \widetilde{\mathrm{PM}}^p((I,c),\boldsymbol{v}))$ とする．以上の定義から，集合 $\mathcal{K}$ と顧客の集合 $\mathcal{N}$, 起業家の真のコスト (I^*, c^*), 顧客の真の評価 $\boldsymbol{v}^*$ と CFM の組 $(\mathcal{K}, \mathcal{N}, (I^*, c^*), \boldsymbol{v}^*, \mathrm{CFM})$ を用いて，クラウドファンディングを表す．

次に CFM に望まれる性質について定義する．まず，CFM の出力する割当において，次のような実行可能性について考える．

定義 3.2. $\mathrm{CFM} = (\widetilde{\mathrm{RM}}, \widetilde{\mathrm{PM}})$ が実行可能性を満たすとは，任意の入力 $((I,c),\boldsymbol{v})$ に対して，次の不等式系を満たすことを言う．

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \widetilde{\mathrm{PM}}_i^a((I,c),\boldsymbol{v}) \geq I^* \widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}), \tag{2}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} (\widetilde{\mathrm{PM}}_i^a((I,c),\boldsymbol{v}) + \widetilde{\mathrm{PM}}_i^p((I,c),\boldsymbol{v})) \geq I^* \widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}) + c^* \sum_{i \in \mathcal{N}} \widetilde{\mathrm{RM}}_i((I,c),\boldsymbol{v}), \tag{3}$$

$$n \widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}) \geq \sum_{i \in \mathcal{N}} \widetilde{\mathrm{RM}}_i((I,c),\boldsymbol{v}). \tag{4}$$

ここで，各式はそれぞれ以下の意味を表している．

- 式 (2) は，起業家が顧客の事前送金によって，事業コストを支払えなければいけないことを示している．

- 式 (3) は，起業家が顧客からの送金によって，事業を行う上でかかる総コストを支払えなければいけないことを示している．

- 式 (4) は，起業家が事業を行っていなければ，顧客は財を得ることができないことを示している．

式 (2) と式 (3) を満たすとき，CFM は予算実行可能性を満たすと言い，式 (4) を満たすとき，CFM は開発実行可能性を満たすと言う．開発実行可能性を満たした上で CFM の

出力する割当が与える最大の余剰について次を定義する．

定義 3.3. パレート最適な帰結メカニズム $\widetilde{\mathrm{RM}}^*:\mathcal{K}\times\mathcal{V}\to\mathcal{X}$ とは，次のような帰結メカニズムのことを指す．

$$\widetilde{\mathrm{RM}}_0^*((I,c),\boldsymbol{v}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{N}} v_i^* \geq \frac{I^*}{1-c^*} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\widetilde{\mathrm{RM}}_i^*((I,c),\boldsymbol{v}) = \begin{cases} v_i^* & \text{if } \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{N}} v_i^* \geq \frac{I^*}{1-c^*} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

パレート最適な帰結メカニズムは，開発実行可能性を満たした上で，総余剰を最大化する帰結ベクトル $\boldsymbol{x}$ を出力する．そして，総余剰を最大化する帰結ベクトル $\boldsymbol{x}$ は，評価している顧客のみに対して財を割当る事を示している．詳しくは論文 [11] を参照されたい．

次に，顧客と起業家の利得を計算する為に，利得関数を定義する．

定義 3.4. 起業家の真のコスト (I^*,c^*) に対し，起業家がコスト $(I,c)\in\mathcal{K}$ を申告し，顧客が $\boldsymbol{v}$ を申告した際の起業家の利得を式 (5) で定義する．

$$\begin{aligned}\Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*)) = &\sum_{i\in\mathcal{N}}(\widetilde{\mathrm{PM}}_i^a((I,c),\boldsymbol{v}) + \widetilde{\mathrm{PM}}_i^p((I,c),\boldsymbol{v})) \\ &- \left(I^*\widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}) + c^*\sum_{i\in\mathcal{N}}\widetilde{\mathrm{RM}}_i((I,c),\boldsymbol{v})\right) \end{aligned} \tag{5}$$

step 4 において，起業家は顧客の評価を知る事ができないため，式 (5) を計算する事が出来ない．そのため，利得の期待値を考えて申告するコスト $(I,c)\in\mathcal{K}$ を決定する．起業家の期待利得関数を定義するために必要な諸定義を行う．

定義 3.5. プラットフォーム提供者に対して，評価ベクトル $\boldsymbol{v}$ が申告される確率を $\pi(\boldsymbol{v})$ とし，起業家がコスト (I,c) を申告したとき事前送金が $T=\displaystyle\sum_{i\in\mathcal{N}} t_i^a$ になるような評価ベクトル $\boldsymbol{v}$ の集合を $V(T|(I,c)) = \{\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}|\sum_{i\in\mathcal{N}}\widetilde{\mathrm{PM}}_i^a((I,c),\boldsymbol{v}) = T \wedge \widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}) = 1\}$ と定義する．また，コスト $(I,c)\in\mathcal{K}$ が申告されたとき，事前送金 $T=\sum_{i\in\mathcal{N}} t_i^a\in\mathbb{R}_+$ が達成される確率 P を

$$P(T|(I,c)) = \sum_{\boldsymbol{v}\in V(T|(I,c))} \pi(\boldsymbol{v}) \tag{6}$$

と定義する．

更に，起業家がコスト $(I,c) \in \mathcal{K}$ を申告し，事前送金 $T \in \mathbb{R}_+$ が達成されたとき，評価ベクトルが $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ である確率を

$$\eta(\boldsymbol{v}|T,(I,c)) = \begin{cases} \frac{\pi(\boldsymbol{v})}{P(T|(I,c))} & \text{if } \boldsymbol{v} \in V(T|(I,c)) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する．

定義 3.6. 起業家の真のコスト (I^*,c^*) に対し，起業家がコスト $(I,c) \in \mathcal{K}$ を申告し，事前送金 T を得たとき，事業を行った起業家が得る期待利得を表す関数を式 (7) で定義する．

$$\bar{\Pi}_0(T|(I,c),(I^*,c^*)) = \sum_{\boldsymbol{v} \in V(T|(I,c))} \eta(\boldsymbol{v}|T,(I,c))\Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*)). \tag{7}$$

モラルハザードを起こした場合の利得を次で定義する．

定義 3.7. 起業家が事前送金 T を得たとき，持ち逃げして得る利得をある $\alpha \in [0,1]$ を用いて αT と定義する．ここで，α は事前送金 T から比 α 分だけ持って逃げる事が出来る割合を表し，この α の値は起業家のみが知り得るとする．今後，モラルハザードを考慮したクラウドファンディングを $(\mathcal{K},\mathcal{N},(I^*,c^*),\boldsymbol{v}^*,\alpha,\mathrm{CFM})$ と表す．

step 4 で事前送金 T を得た起業家は，式 (7) で表す期待利得を計算し，モラルハザードを起こした場合の利得と比較する事で，事業を行うかモラルハザードを起こすかを決定する．事前送金に関して，次を定義する．

定義 3.8. 起業家がコスト $(I,c) \in \mathcal{K}$ を申告したときにとりうる事前送金の集合を

$$\tau(I,c) = \left\{ T = \sum_{i \in \mathcal{N}} \widetilde{\mathrm{PM}}_i^a((I,c),\boldsymbol{v}) \;\middle|\; \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}, \widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}) = 1 \right\}$$

と定義する．

以上を用いて，起業家のモラルハザードを考慮した起業家の期待利得関数を以下で定義する．

定義 3.9. 真の評価が (I^*,c^*) である起業家が (I,c) を申告したときの起業家の期待利得

$\bar{\Pi}$ を式 (8) で定義する．

$$\bar{\Pi}((I,c)|(I^*,c^*)) = \sum_{T\in\tau(I,c)} P(T|(I,c)) \max\{\bar{\Pi}_0(T|(I,c),(I^*,c^*)),\alpha T\} + \sum_{\boldsymbol{v}\in\left\{\,\boldsymbol{v}\;\middle|\;\widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v})=0\,\right\}} \pi(\boldsymbol{v})\Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*)). \tag{8}$$

ここで，起業家は全ての $\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}$ について，$\pi(\boldsymbol{v})$ を知っているものする．起業家が合理的であるならば，この $\bar{\Pi}((I,c)|(I^*,c^*))$ を最大にするコスト (I,c) がプラットフォーム提供者に申告される．次に顧客の利得について定義する．

定義 3.10. 真の評価が v_i^* である顧客 $i\in\mathcal{N}$ が評価 $v_i\in\{0,1\}$ を申告し，起業家が $(I,c)\in\mathcal{K}$，i を除く顧客が評価ベクトル $\boldsymbol{v}_{-i}$ を申告した際の顧客 i の利得を式 (9) で定義する．

$$U_i((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i})|v_i^*) = v_i^*\widetilde{\mathrm{RM}}_i((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i})) - (\widetilde{\mathrm{PM}}_i^a((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i})) + \widetilde{\mathrm{PM}}_i^p((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i}))). \tag{9}$$

顧客 $i\in\mathcal{N}$ が起業家の申告したコストと他の顧客の評価がわからないため，式 (9) を計算することができない．そこで，顧客の期待利得関数を考える．顧客 $i\in\mathcal{N}$ は起業家の申告した $(I,c)\in\mathcal{K}$ がわからないので，コスト $(I,c)\in\mathcal{K}$ が申告される確率 $\rho(I,c)$ で表し，更に，$\boldsymbol{v}_{-i}\in\{0,1\}^{n-1}$ について，$\pi'(\boldsymbol{v}_{-i})$ で顧客 $i\in\mathcal{N}$ を除いた顧客が評価ベクトル $\boldsymbol{v}_{-i}$ を申告する確率を表す．以上を用いて，顧客 i の期待利得関数を以下のように定義する．

定義 3.11. 真の評価が v_i^* である顧客 $i\in\mathcal{N}$ が v_i を申告したときの期待利得 $\bar{U}_i$ を式 (10) で定義する．

$$\bar{U}_i(v_i|v_i^*) = \sum_{(I,c)\in\mathcal{K}} \rho(I,c) \sum_{\boldsymbol{v}_{-i}\in\mathcal{V}_{-i}} \pi'(\boldsymbol{v}_{-i})U_i((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i})|v_i^*). \tag{10}$$

全ての顧客 $i\in\mathcal{N}$ が合理的であるならば，step 2 において，$\bar{U}_i(v_i|v_i^*)$ を最大化するような評価 v_i がプラットフォーム提供者に申告される．

3.1.2　メカニズムの性質

本節では CFM について望まれる性質を定義する．

定義 3.12. CFM が式 (11) を満たすとき，CFM は *C–truthful* であるという．

$$\forall i\in\mathcal{N},\forall v_i\in\{0,1\},\bar{U}_i(v_i|v_i^*)\leq\bar{U}_i(v_i^*|v_i^*). \tag{11}$$

式 (11) は，*C–truthful* な CFM において，顧客 i の真のコスト v_i^* を申告することが，顧客 i の期待利得を最大化する戦略であることを意味する．

定義 3.13. CFM が式 (12) を満たすとき， CFM は *E–truthful* であるという．

$$\forall (I,c) \in \mathcal{K}, \bar{\Pi}((I,c)|(I^*,c^*)) \leq \bar{\Pi}((I^*,c^*)|(I^*,c^*)). \tag{12}$$

式 (12) は，*E–truthful* な CFM において，起業家の真のコスト (I^*,c^*) を申告することが，起業家の期待利得を最大化する戦略であることを意味する．

定義 3.14. CFM が式 (13) を満たすとき， CFM は *obedient* であるという．

$$\forall T \in \tau(I^*,c^*), \bar{\Pi}_0(T|(I^*,c^*),(I^*,c^*)) \geq \alpha T \tag{13}$$

式 (13) は，*obedient* な CFM において，起業家が正直申告を行った場合，モラルハザードを起こした際の利得が事業を行った時の期待利得以下であることを表す．

定義 3.15. CFM が *C–truthful* であり，*E–truthful* であり，*obedient* であるとき，CFM は誘因両立性を満たすという．

CFM が誘因両立性を満たすとき，合理的な起業家はモラルハザードを起こさない．また，プレイヤーがクラウドファンディングに参加した際に負の利得を得る事は望ましくない．これを防ぐために，個人合理性を定義する．

定義 3.16. CFM が，

$$\forall i \in \mathcal{N}, \bar{U}_i(v_i^*|v_i^*) \geq 0$$

を満たすとき，CFM は個人合理性を満たすという．

これは起業家についても同様の定義が可能であるが，本モデルでは定義 3.2 より，起業家の利得は常に非負であることがわかるため，改めて定義はしない．

定義 3.17. CFM が， 個人合理性，誘引両立性，実行可能性を満たすとき，実装可能な CFM であるという．

以上の定義を用いて，Roland の提案した CFM は次の問題を解くことで得られる．

$$
\begin{array}{ll}
\text{find} & \widetilde{\mathrm{RM}}, \widetilde{\mathrm{PM}} \\
\text{s.t.} & \sum_{i\in\mathcal{N}} \widetilde{\mathrm{PM}}_i^a((I,c),\boldsymbol{v}) \geq I^*\widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}), \forall (I,c)\in\mathcal{K}, \forall \boldsymbol{v}\in\mathcal{V} \\
& \sum_{i\in\mathcal{N}}(\widetilde{\mathrm{PM}}_i^a((I,c),\boldsymbol{v}) + \widetilde{\mathrm{PM}}_i^p((I,c),\boldsymbol{v})) \geq \\
& \ I^*\widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}) + c^*\sum_{i\in\mathcal{N}} \widetilde{\mathrm{RM}}_i((I,c),\boldsymbol{v}), \forall (I,c)\in\mathcal{K}, \forall \boldsymbol{v}\in\mathcal{V} \\
& n\widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}) \geq \sum_{i\in\mathcal{N}} \widetilde{\mathrm{RM}}_i((I,c),\boldsymbol{v}) \forall (I,c)\in\mathcal{K}, \forall \boldsymbol{v}\in\mathcal{V} \\
& \bar{U}_i(v_i|v_i^*) \leq \bar{U}_i(v_i^*|v_i^*), \forall i\in\mathcal{N}, \forall v_i\in\{0,1\}, \\
& \bar{\Pi}((I,c)|(I^*,c^*)) \leq \bar{\Pi}((I^*,c^*)|(I^*,c^*)), \forall (I,c)\in\mathcal{K}, \\
& \bar{\Pi}_0(T|(I^*,c^*),(I^*,c^*)) \geq \alpha T, \forall T\in\tau(I^*,c^*), \\
& \bar{U}_i(v_i^*|v_i^*) \geq 0, \forall i\in\mathcal{N}, \\
& \widetilde{\mathrm{RM}} : \mathcal{K}\times\mathcal{V} \to \{0,1\}^{n+1}, \\
& \widetilde{\mathrm{PM}} : \mathcal{K}\times\mathcal{V} \to \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n.
\end{array}
$$

Roland はこの問題を解くことが難しいため，一部制約を緩和した問題を解く事を考案した．詳しくは，論文 [11] を参照されたい．また，実装可能なメカニズムの存在について Roland は以下の定理を示した．

定理 3.1. あるクラウドファンディング $(\mathcal{K}, \mathcal{N}, (I^*, c^*), \boldsymbol{v}^*, \alpha, \mathrm{CFM} = (\widetilde{\mathrm{RM}}^*, \widetilde{\mathrm{PM}}))$ において，パレート最適かつ実装可能な CFM は存在しない．

証明については，論文 [11] を参照されたい．

3.2 プリンシパル・エージェントモデル

本研究で用いる線形計画法による解析アプローチをプリンシパル・エージェントモデルに対して行った先行研究 [10] を紹介する．情報を保有してるプレイヤーと，そうでないプレイヤー間の交渉を考える．ただし，どちらのプレイヤーの利得も情報に依存しているとする．一方のプレイヤーのみが交渉を行うと仮定し，交渉を行うプレイヤーをプリンシパル，交渉を受けるプレイヤーをエージェントと呼ぶ．プリンシパルの交渉は，シュタッケルベルクゲームの一種 [2] であり，この交渉を表すモデルをプリンシパル・エージェントモデルという．

プリンシパルの数は 1 人であり，エージェントの数は n 人とし，エージェントの集合を $[n]$ とする．ただし，$n \geq 1$ とし，各プレイヤーの目的は自身の利得の最大化とする．エージェント $i \in [n]$ のタイプの集合を Q_i とし，エージェント i のとり得る戦略の集合を D_i とする．プリンシパルが取り得る選択肢の集合を D_0 で表し，$D = \prod_{i=0}^n D_i, Q = \prod_{i=1}^n Q_i$ と定義する．ただし，D_0 と任意の $i \in [n]$ について，各 D_i, Q_i は有限集合であるとする．

全てのプレイヤーの決定をベクトル $\boldsymbol{d} = (d_0, d_1, \ldots, d_n)^T \in D$ で表し，全エージェントのタイプをベクトル $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_n)^T \in Q$ で表す．

プリンシパルとエージェントの利得を以下のように定義する．

定義 3.18. プリンシパルの期待利得関数を関数 $U_0 : D \times Q \to \mathbb{R}$ と定義し，エージェント $i \in [n]$ の期待利得関数を関数 $U_i : D \times Q \to \mathbb{R}$ と定義する．

プレイヤーの決定が $\boldsymbol{d} \in D$，エージェントのタイプが $\boldsymbol{q} \in Q$ であったときのプリンシパルの期待利得を $U_0(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{q})$ で表し，エージェント $i \in [n]$ の期待利得を $U_i(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{q})$ で表す．ここで，Pr を Q 上の確率密度関数とし，エージェントのタイプが $\boldsymbol{q} \in Q$ である確率を $Pr(\boldsymbol{q})$ と表記する．

3.2.1 メカニズムデザイン

プリンシパル・エージェントメカニズムとは，関数 $\mathrm{PAM} : D \times Q \to \mathbb{R}$ のことを指す．エージェントのタイプが $\boldsymbol{q} \in Q$ であるとき，決定 $\boldsymbol{d}$ が行われる確率を $PAM(\boldsymbol{d}|\boldsymbol{q})$ で表記する．以上をもとに Myerson は次の様なメカニズムを提案している．

定義 3.19. プリンシパル・エージェントメカニズム PAM が以下の不等式系を満たすとき，誘因両立性を満たすという．

$$\mathrm{PAM}(\boldsymbol{d}|\boldsymbol{q}) \geq 0, \forall \boldsymbol{d} \in D, \forall \boldsymbol{q} \in Q, \tag{14}$$

$$\sum_{\boldsymbol{d} \in D} \mathrm{PAM}(\boldsymbol{d}|\boldsymbol{q}) = 1, \forall \boldsymbol{q} \in Q, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{\tau \in T, t_i = \tau_i} \sum_{\boldsymbol{d} \in D} Pr(\boldsymbol{q}) \mathrm{PAM}(\boldsymbol{d}|\boldsymbol{q}) U_i(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{q}) \\ &\quad \geq \sum_{t \in T, t_i = \tau_i} \sum_{d \in D} Pr(\boldsymbol{q}) \mathrm{PAM}(\boldsymbol{d}|(\boldsymbol{q}_{-i}, \bar{\tau}_i)) U_i((\boldsymbol{d}_{-i}, \bar{\delta}_i(d_i), \boldsymbol{q})),. \\ &\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall \tau_i \in Q_i, \forall \bar{\tau}_i \in Q_i, \forall \bar{\delta}_i : D_i \to D_i \end{aligned} \tag{16}$$

式 (16) は全てのエージェントにとって正直に自分のタイプを申告する事が最良な戦略である事を表している．式 (14) と式 (15) は関数 PAM が各 $\boldsymbol{q} \in Q$ についての D 上の確率密度関数である事を説明するものである．詳細な解説は論文 [10] を参照されたい．

これらをもとに，Myerson はプリンシパルの期待利得関数を以下のように定義している．

定義 3.20. プリンシパル・エージェントメカニズム PAM によるプリンシパルの期待利

得は，

$$\sum_{\boldsymbol{q}\in Q}\sum_{\boldsymbol{d}\in D} Pr(\boldsymbol{q})\mathrm{PAM}(\boldsymbol{d}|\boldsymbol{q})U_0(\boldsymbol{d},\boldsymbol{q})$$

で計算される．

これらを定義して，Myerson[10] は定理 3.2 を示している．

定理 3.2. D, Q が有限集合であるとき，誘引両立性を満たし，プリンシパルの利得を最大化するプリンシパル・エージェントメカニズムは以下の線形計画問題 $\langle PAP\rangle$ を解く事で得る事が出来る．

$$\langle PAP\rangle \begin{cases} \max & \displaystyle\sum_{\boldsymbol{q}\in Q}\sum_{\boldsymbol{d}\in D} Pr(\boldsymbol{q})\mathrm{PAM}(\boldsymbol{d}|\boldsymbol{q})U_0(\boldsymbol{d},\boldsymbol{q}) \\ s.t. & \mathrm{PAM}(\boldsymbol{d}|\boldsymbol{q}) \geq 0, \forall \boldsymbol{d}\in D, \forall \boldsymbol{q}\in Q, \\ & \displaystyle\sum_{\boldsymbol{d}\in D}\mathrm{PAM}(\boldsymbol{d}|\boldsymbol{q}) = 1, \forall \boldsymbol{q}\in Q, \\ & \displaystyle\sum_{\tau\in Q, q_i=\tau_i}\ \sum_{\boldsymbol{d}\in D} Pr(\boldsymbol{q})\mathrm{PAM}(\boldsymbol{d}|\boldsymbol{q})U_i(\boldsymbol{d},\boldsymbol{q}) \\ & \displaystyle\geq \sum_{t\in Q, q_i=\tau_i}\ \sum_{d\in D} Pr(\boldsymbol{q})\mathrm{PAM}(\boldsymbol{d}|(\boldsymbol{q}_{-i},\bar{\tau}_i))U_i((\boldsymbol{d}_{-i},\bar{\delta}_i(d_i)),\boldsymbol{q})), \\ & \forall i\in\{1,\ldots,n\}, \forall\tau_i\in T_i, \forall\bar{\tau}_i\in T_i, \forall\bar{\delta}_i : D_i\to D_i. \end{cases}$$

ここで，決定変数は PAM である．

証明については，論文 [10] を参照されたい．

4　モラルハザードを考慮しないクラウドファンディングメカニズムに対する提案手法

本章では，CFM の出力を線形システムで表現するための導入を行う．Roland のモデルにおける利得関数を線形関数として定式化するために諸定義を行う．ただし，簡単のため，起業家がコスト $(I,c) \in \mathcal{K}$ を申告する確率を $\rho(I,c) = \frac{1}{|\mathcal{K}|}$, 顧客が評価 $\boldsymbol{v}$ を申告する確率を $\pi(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2^n}$ とする．更に，任意の顧客 $i \in \mathcal{N}$ を除いた評価ベクトル $\boldsymbol{v}_{-i}$ が宣言される確率を $\pi'(\boldsymbol{v}_{-i}) = \frac{1}{2^{n-1}}$ とする．

定義 4.1. CFM への入力の集合を $S = \mathcal{K} \times \mathcal{V}$ とする．また，顧客 i が評価 v_i を申告している CFM の入力の集合を $S(i, v_i)$ と定義し，起業家がコスト $(I,c) \in \mathcal{K}$ を申告している CFM の入力の集合を $S(I,c)$ と定義する．

次に，必要な行列を定義する．

定義 4.2. 入力 $\beta \in S$ に対する *CFM* の出力を $(\boldsymbol{x}_\beta, \boldsymbol{t}^a_\beta, \boldsymbol{t}^p_\beta) \in \{0,1\}^{n+1} \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ と定義する．ここで，$\boldsymbol{x}_\beta = (x_{0\beta}, \ldots, x_{n\beta})^T$,$\boldsymbol{t}^a_\beta = \left(t^a_{1\beta}, \ldots, t^a_{n\beta}\right)^T$，$\boldsymbol{t}^p_\beta = \left(t^p_{1\beta}, \ldots, t^p_{n\beta}\right)^T$ とし，$t^a_{i\beta}$ は顧客 $i \in \mathcal{N}$ の事前支払いの金額を表し，$t^p_{i\beta}$ は顧客 $i \in \mathcal{N}$ の事後支払いの金額を表す．

ここで，定義する $\boldsymbol{x}_\beta, \boldsymbol{t}^a_\beta, \boldsymbol{t}^p_\beta$ を用いて，次のような行列を定義する．

定義 4.3. 行列 $X \in \{0,1\}^{(n+1)\times|S|}$ を，$\boldsymbol{x}_\beta$ を列ベクトルとする行列

$$X = \left(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{|S|}\right)$$

と定義し，行列 $T^A \in \mathbb{R}^{n\times|S|}$ を $\boldsymbol{t}^a_\beta$ を列ベクトルとする行列

$$T^A = \left(\boldsymbol{t}^a_1, \ldots, \boldsymbol{t}^a_{|S|}\right)$$

と定義し，行列 $T^P \in \mathbb{R}^{n\times|S|}$ を $\boldsymbol{t}^p_\beta$ を列ベクトルとする行列

$$T^P = \left(\boldsymbol{t}^p_1, \ldots, \boldsymbol{t}^p_{|S|}\right)$$

と定義する．

行列 X, T^A, T^P は全ての入力に対する CFM の出力を列ベクトルとして並べたものである．

次にクラウドファンディングを混合整数計画問題として表現していく．ただし，モラルハザードを考慮した場合と考慮しない場合で分けて議論を行う．これは，起業家が事前送金を得た後に意思決定を行うため，モラルハザードを考慮する場合は起業家が二回の意思決定を行う展開型ゲームで表現され，モラルハザードを考慮しない場合は一回の戦略型ゲームで表現されるためである．

4.1　提案モデル

まずはじめに，モラルハザードを考慮しない場合の CFM の出力を線形システムで表現する．そのために，定義した X, T^A, T^P を用いて，プレイヤーの利得を表現する．まず，起業家の利得を X, T^A, T^P を用いて表現する．

定理 4.1. 起業家の真のコスト (I^*, c^*) に対し，コスト $(I, c) \in \mathcal{K}$ を申告し, 顧客が $\boldsymbol{v}$ を申告したとき，事業を行った起業家の利得は式 (17) と同値である．

$$\Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*)) = \sum_{i\in\mathcal{N}} \left(t^a_{i\beta} + t^p_{i\beta}\right) - I^* x_{0\beta} - c^* \sum_{i\in\mathcal{N}} x_{i\beta}. \tag{17}$$

ただし，$\beta = ((I,c),\boldsymbol{v})$ とする．

証明. $\boldsymbol{x}_\beta, \boldsymbol{t}^a_\beta, \boldsymbol{t}^p_\beta$ の定義より入力 $((I,c),\boldsymbol{v})$ に対する CFM の出力と X, T^A, T^P の関係は,

$$\begin{aligned}
&\forall i \in \{0\} \cup \mathcal{N}, \widetilde{\mathrm{RM}}_i((I,c),\boldsymbol{v}) = x_{i\beta},\\
&\forall i \in \mathcal{N}, \widetilde{\mathrm{PM}}^a_i((I,c),\boldsymbol{v}) = t^a_{i\beta},\\
&\forall i \in \mathcal{N}, \widetilde{\mathrm{PM}}^p_i((I,c),\boldsymbol{v}) = t^p_{i\beta}
\end{aligned}$$

である．起業家の利得は定義より，

$$\begin{aligned}
\Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*)) = &\sum_{i\in\mathcal{N}} (\widetilde{\mathrm{PM}}^a_i((I,c),\boldsymbol{v}) + \widetilde{\mathrm{PM}}^p_i((I,c),\boldsymbol{v}))\\
&- \left(I^* \widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}) + c^* \sum_{i\in\mathcal{N}} \widetilde{\mathrm{RM}}_i((I,c),\boldsymbol{v}) \right)
\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}
\Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*)) = &\sum_{i\in\mathcal{N}} (\widetilde{\mathrm{PM}}^a_i((I,c),\boldsymbol{v}) + \widetilde{\mathrm{PM}}^p_i((I,c),\boldsymbol{v}))\\
&- \left(I^* \widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}) + c^* \sum_{i\in\mathcal{N}} \widetilde{\mathrm{RM}}_i((I,c),\boldsymbol{v}) \right)
\end{aligned}$$

$$
= \sum_{i \in \mathcal{N}} (t^a_{i\beta} + t^p_{i\beta}) - I^* x_{0\beta} - c^* \sum_{i \in \mathcal{N}} x_{i\beta}
$$

である. $\square$

今後,行列 X, T^A, T^P において,入力 $\beta \in S$ による起業家の利得を $\Pi^{X,T^A,T^P}(\beta|(I^*, c^*)) = \sum_{i\in\mathcal{N}} \left(t^a_{i\beta} + t^p_{i\beta} \right) - I^* x_{0\beta} - c^* \sum_{i\in\mathcal{N}} x_{i\beta}$ とする．次に，起業家の真のコスト (I^*, c^*) に対し，コスト (I, c) を申告したとき，事業を行った起業家の期待利得を定義するが， 事前送金 T に対して，$V(T|(I,c))$ が互いに素である事が必要になる．そのための証明を行う．

補題 4.1. 起業家がコスト $(I, c) \in \mathcal{K}$ を申告したとき，以下の関係が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&\forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}, T_1, T_2 \in \tau(I, c), \\
&\boldsymbol{v} \in V(T_1|(I,c)) \wedge \boldsymbol{v} \in V(T_2|(I,c)) \implies T_1 = T_2.
\end{aligned}
$$

証明. 任意のコスト $(I, c) \in \mathcal{K}$ と任意の評価ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ について，

$$
\exists T_1, T_2 \in \tau(I,c), T_1 \neq T_2, \text{かつ } \boldsymbol{v} \in V(T_1|(I,c)) \wedge \boldsymbol{v} \in V(T_2|(I,c))
$$

と仮定する．

$$
V(T_1|(I,c)) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathcal{V} \,\middle|\, \sum_{i\in\mathcal{N}} \widetilde{\mathrm{PM}}^a_i((I,c),\boldsymbol{v}) = T_1 \wedge \widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}) = 1 \right\}
$$

であるので，入力 $((I,c),\boldsymbol{v})$ に対する，CFM の出力する事前送金ベクトルの和は $\sum_{i\in\mathcal{N}} \widetilde{\mathrm{PM}}^a_i((I,c),\boldsymbol{v}) = T_1$ である．同様に， $V(T_2|(I,c))$ の定義より，入力 $((I,c),\boldsymbol{v})$ に対する CFM の出力する事前送金ベクトルの和は $\sum_{i\in\mathcal{N}} \widetilde{\mathrm{PM}}^a_i((I,c),\boldsymbol{v}) = T_2$ である．これは $T_1 \neq T_2$ に矛盾する． $\square$

補題 4.2. 起業家がコスト $(I, c) \in \mathcal{K}$ を申告したとき，以下の関係が成り立つ．

$$
\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathcal{V} \,\middle|\, \widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}) = 1 \right\} = \bigcup_{T\in\tau(I,c)} V(T|(I,c)).
$$

証明. $\widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}) = 1$ であるような評価ベクトル $\boldsymbol{v}$ について，補題 4.1 より，評価ベクトル $\boldsymbol{v}$ はただ一つの事前送金 $\sum_{i\in\mathcal{N}} \widetilde{\mathrm{PM}}^a_i((I,c),\boldsymbol{v}) = T \in \tau(I,c)$ を与える．$V(T|(I,c)) =$

$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathcal{V} \,\middle|\, \sum_{i \in \mathcal{N}} \widetilde{\mathrm{PM}}_i^a((I,c),\boldsymbol{v}) = T \wedge \widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}) = 1 \right\}$ であるため，

$$\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathcal{V} \,\middle|\, \widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}) = 1 \right\} = \bigcup_{T \in \tau(I,c)} V(T|(I,c))$$

である． $\square$

以上の補題を用いて，事業を行った起業家の期待利得を行列 X, T^A, T^P を用いて表す．

定理 4.2. 起業家の真のコスト (I^*, c^*) に対し，コスト (I,c) を申告したとき，事業を行った起業家の期待利得は式 (18) と同値である．

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\beta \in S(I,c)} \left\{ \sum_{i \in \mathcal{N}} (t_{i\beta}^a + t_{i\beta}^p) - I^* x_{0\beta} - c^* \sum_{i \in \mathcal{N}} x_{i\beta} \right\}. \tag{18}$$

証明. はじめに，起業家の真のコストが (I^*, c^*) であり，コスト (I,c) を申告したとき，事業を行った起業家の期待利得を求める．起業家の真のコストが (I^*, c^*) であり，コスト (I,c) を申告したときの起業家の期待利得は，

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}((I,c)|(I^*,c^*)) = &\sum_{T \in \tau(I,c)} P(T|(I,c)) \bar{\Pi}_0(T|(I,c),(I^*,c^*)) \\ &+ \sum_{\boldsymbol{v} \in \mathcal{V} | \widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}) = 0} \pi(\boldsymbol{v}) \Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I,c)) \end{aligned} \tag{19}$$

である．また，起業家の真のコストが (I^*, c^*) に対し，コスト (I,c) を申告したとき，事前送金 T を得たときの起業家の期待利得は，

$$\bar{\Pi}_0(T|(I,c),(I^*,c^*)) = \sum_{\boldsymbol{v} \in V(T|(I,c))} \eta(\boldsymbol{v}|T,(I,c)) \Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*))$$

であり，η の定義より

$$\eta(\boldsymbol{v}|T,(I,c)) = \begin{cases} \frac{\pi(\boldsymbol{v})}{P(T|(I,c))} & \text{if } \boldsymbol{v} \in V(T|(I,c)) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

であることに注意し，$\pi(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2^n}$ を代入し計算すると，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{T \in \tau(I,c)} P(T|(I,c))\bar{\Pi}_0(T|(I,c),(I^*,c^*)) \\
&= \sum_{T \in \tau(I,c)} P(T|(I,c)) \sum_{\boldsymbol{v} \in V(T|(I,c))} \frac{\pi(\boldsymbol{v})}{P(T|(I,c))} \Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*)) \\
&= \sum_{T \in \tau(I,c)} \sum_{\boldsymbol{v} \in V(T|(I,c))} \pi(\boldsymbol{v})\Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*)) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{T \in \tau(I,c)} \sum_{\boldsymbol{v} \in V(T|(I,c))} \Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*))
\end{aligned}
$$

となる．補題 4.2 より，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2^n} \sum_{T \in \tau(I,c)} \sum_{\boldsymbol{v} \in V(T|(I,c))} \Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*)) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}|\widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v})=1} \Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*))
\end{aligned} \tag{20}
$$

となる．式 (20) を式 (19) に代入し計算すると，

$$
\begin{aligned}
\bar{\Pi}((I,c)|(I^*,c^*)) &= \sum_{T \in \tau(I,c)} P(T|(I,c))\bar{\Pi}_0(T|(I,c),(I^*,c^*)) \\
&\quad + \sum_{\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}|\widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v})=0} \pi(\boldsymbol{v})\Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I,c)) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}|\widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v})=1} \Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*)) \\
&\quad + \frac{1}{2^n} \sum_{\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}|\widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v})=0} \Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*)) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}} \Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*))
\end{aligned}
$$

となり，定理 4.1 と，起業家がコスト (I,c) を宣言している入力の集合は $S(I,c)$ であることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
\bar{\Pi}((I,c)|(I^*,c^*)) &= \frac{1}{2^n} \sum_{\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}} \Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*)) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{\beta \in S(I,c)} \left\{ \sum_{i \in \mathcal{N}} (t^a_{i\beta} + t^p_{i\beta}) - I^* x_{0\beta} - c^* \sum_{i \in \mathcal{N}} x_{i\beta} \right\}
\end{aligned}
$$

である． □

今後，行列 X, T^A, T^P における，コスト (I,c) を宣言し，事業を実行する起業家の期待利得を

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}^{X,T^A,T^P}((I,c)|(I^*,c^*)) &= \frac{1}{2^n}\sum_{\beta\in S(I,c)}\Pi^{X,T^A,T^P}(\beta|(I^*,c^*))\\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{\beta\in S(I,c)}\left\{\sum_{i\in\mathcal{N}}(t^a_{i\beta}+t^p_{i\beta}) - I^*x_{0\beta} - c^*\sum_{i\in\mathcal{N}}x_{i\beta}\right\}\end{aligned}$$

とする．

次に，顧客の利得を行列 X, T^A, T^P を用いて表す．

定理 4.3. 顧客 $i\in\mathcal{N}$ の真の評価 v_i^* に対して，評価 $v_i\in\{0,1\}$ を申告し，起業家がコスト (I,c) を申告したときの顧客 i の利得は式 (21) と同値である．

$$U_i((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i})|v_i^*) = v_i^*x_{i\beta} - (t^a_{i\beta}+t^p_{i\beta}). \tag{21}$$

ただし，$\beta = ((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i}))$ とする．

証明. 顧客の利得は，定義より，

$$\begin{aligned}U_i((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i})|v_i^*) = {} & v_i^*\widetilde{\mathrm{RM}}_i((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i}))\\ & -(\widetilde{\mathrm{PM}}^a_i((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i})) + \widetilde{\mathrm{PM}}^p_i((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i})))\end{aligned}$$

である．$\boldsymbol{x}_\beta, \boldsymbol{t}^a_\beta, \boldsymbol{t}^p_\beta$ の定義より入力 $((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i}))$ に対する CFM の出力と X, T^A, T^P の関係は，入力 $\beta = ((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i}))$ を用いて，

$$\begin{aligned}&\forall i\in\{0\}\cup\mathcal{N}, \widetilde{\mathrm{RM}}_i((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i})) = x_{i\beta},\\ &\forall i\in\mathcal{N}, \widetilde{\mathrm{PM}}^a_i((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i})) = t^a_{i\beta},\\ &\forall i\in\mathcal{N}, \widetilde{\mathrm{PM}}^p_i((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i})) = t^p_{i\beta}\end{aligned}$$

である．よって，

$$\begin{aligned}U_i((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i})|v_i^*) &= v_i^*\widetilde{\mathrm{RM}}_i((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i}))\\ &\qquad -(\widetilde{\mathrm{PM}}^a_i((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i})) + \widetilde{\mathrm{PM}}^p_i((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i})))\\ &= v_i^*x_{i\beta} - (t^a_{i\beta}+t^p_{i\beta})\end{aligned}$$

である． □

今後，行列 X, T^A, T^P において, 入力 $\beta \in S$ による顧客 $i \in \mathcal{N}$ の利得を

$$U_i^{X,T^A,T^P}(\beta|v_i^*) = v_i^* x_{i\beta} - (t_{i\beta}^a + t_{i\beta}^p)$$

とする.

定理 4.4. 顧客 $i \in \mathcal{N}$ の真の評価 v_i^* に対し，評価 v_i を申告したときの顧客 i の期待利得は式 (22) と同値である.

$$\bar{U}_i(v_i|v_i^*) = \frac{1}{2^{n-1}|\mathcal{K}|} \sum_{\beta \in S(i,v_i)} \left\{ v_i^* x_{i\beta} - (t_{i\beta}^a + t_{i\beta}^p) \right\}. \tag{22}$$

証明. 顧客の期待利得は，定義より，

$$\bar{U}_i(v_i|v_i^*) = \sum_{(I,c)\in\mathcal{K}} \rho(I,c) \left\{ \sum_{\boldsymbol{v}_{-i}\in\{0,1\}^{n-1}} \pi'(\boldsymbol{v}_{-i}) U_i((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i})|v_i^*) \right\}$$

である．ここで，$\pi'(\boldsymbol{v}_{-i}) = \frac{1}{2^{n-1}}$，$\rho(I,c) = \frac{1}{|\mathcal{K}|}$，かつ顧客 i が v^r を申告している入力の集合は $S(i,v_i)$ であることに注意して，

$$\begin{aligned}
\bar{U}_i(v_i|v_i^*) &= \sum_{(I,c)\in\mathcal{K}} \rho(I,c) \left\{ \sum_{\boldsymbol{v}_{-i}\in\{0,1\}^{n-1}} \pi'(\boldsymbol{v}_{-i}) U_i((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i})|v_i^*) \right\} \\
&= \frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{(I,c)\in\mathcal{K}} \left\{ \sum_{\boldsymbol{v}_{-i}\in\{0,1\}^{n-1}} \pi'(\boldsymbol{v}_{-i}) U_i((I,c),(v_i,\boldsymbol{v}_{-i})|v_i^*) \right\} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}|\mathcal{K}|} \sum_{\beta \in S(i,v_i)} \left\{ v_i^* x_{i\beta} - (t_{i\beta}^a + t_{i\beta}^p) \right\}
\end{aligned}$$

である. □

今後，行列 X, T^A, T^P において，評価 $v_i \in \{0,1\}$ を申告したときの顧客 $i \in \mathcal{N}$ の期待利得を

$$\bar{U}_i^{X,T^A,T^P}(v_i|v_i^*) = \frac{1}{2^{n-1}|\mathcal{K}|} \sum_{\beta \in S(i,v_i)} \left\{ v_i^* x_{i\beta} - (t_{i\beta}^a + t_{i\beta}^p) \right\}$$

とする.

先ほど定義した行列 X, T^A, T^P を用いてを CFM の性質を表す．ただし，起業家のモラルハザードを考慮しない為，*obedient* 性は考慮しない.

定理 4.5. CFM が実行可能性を満たす事と，行列 X, T^A, T^P が次の不等式系を満たすことは同値である．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i\in\mathcal{N}} t^a_{i\beta} \geq I^* x_{0\beta}, \forall\beta\in S,\\
&\sum_{i\in\mathcal{N}} (t^a_{i\beta} + t^p_{i\beta}) \geq I^* x_{0\beta} + c^* \sum_{i\in\mathcal{N}} x_{i\beta}, \forall\beta\in S,\\
&n x_{0\beta} \geq \sum_{i\in\mathcal{N}} x_{i\beta}, \forall\beta\in S.
\end{aligned}
$$

証明. CFM が実行可能性を満たすとは，任意の入力 $((I,c),\boldsymbol{v}) \in \mathcal{K}\times\mathcal{V}$ に対して，

$$
\sum_{i\in\mathcal{N}} \widetilde{\mathrm{PM}}^a_i((I,c),\boldsymbol{v}) \geq I^* \widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}), \tag{23}
$$

$$
\sum_{i\in\mathcal{N}} (\widetilde{\mathrm{PM}}^a_i((I,c),\boldsymbol{v}) + \widetilde{\mathrm{PM}}^p_i((I,c),\boldsymbol{v})) \geq I^* \widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}) + c^* \sum_{i\in\mathcal{N}} \widetilde{\mathrm{RM}}_i((I,c),\boldsymbol{v}), \tag{24}
$$

$$
n\widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}) \geq \sum_{i\in\mathcal{N}} \widetilde{\mathrm{RM}}_i((I,c),\boldsymbol{v}) \tag{25}
$$

を満たす事である．入力 $((I,c),\boldsymbol{v})$ に対する CFM の出力と X, T^A, T^P の関係は，

$$
\begin{aligned}
&\forall i\in\{0\}\cup\mathcal{N}, \widetilde{\mathrm{RM}}_i((I,c),\boldsymbol{v}) = x_{i\beta},\\
&\forall i\in\mathcal{N}, \widetilde{\mathrm{PM}}^a_i((I,c),(\boldsymbol{v}) = t^a_{i\beta},\\
&\forall i\in\mathcal{N}, \widetilde{\mathrm{PM}}^p_i((I,c),(\boldsymbol{v}) = t^p_{i\beta}
\end{aligned}
$$

であるため，式 (23)，式 (24)，式 (25) に代入して

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i\in\mathcal{N}} t^a_{i\beta} \geq I^* x_{0\beta}, \forall\beta\in S,\\
&\sum_{i\in\mathcal{N}} (t^a_{i\beta} + t^p_{i\beta}) \geq I^* x_{0\beta} + c^* \sum_{i\in\mathcal{N}} x_{i\beta}, \forall\beta\in S,\\
&n x_{0\beta} \geq \sum_{i\in\mathcal{N}} x_{i\beta}, \forall\beta\in S
\end{aligned}
$$

である． □

次に個人合理性について考える．

定理 4.6. CFM が個人合理性を満たす事と，行列 X, T^A, T^P について次の式を満たす事は同値である．

$$\forall i \in \mathcal{N}, \bar{U}_i^{X,T^A,T^P}(v_i^*|v_i^*) \geq 0.$$

証明. CFM が個人合理性を満たすとは，任意の顧客 $i \in \mathcal{N}$ が正直な申告をしたときの期待利得について，

$$\bar{U}_i(v_i^*|v_i^*) \geq 0$$

を満たす事を指す．顧客 $i \in \mathcal{N}$ の正直な申告をしたときの期待利得を行列 X, T^A, T^P で表すと，$\bar{U}_i^{X,T^A,T^P}(v_i^*|v_i^*)$ である．よって，任意の顧客について，正直な申告をしたときの期待利得が非負であるとは，

$$\forall i \in \mathcal{N}, \bar{U}_i^{X,T^A,T^P}(v_i^*|v_i^*) \geq 0$$

である． □

次に，*C–truthful* について考える．

定理 4.7. CFM が *C–truthful* であると，行列 X, T^A, T^P について次の式を満たす事は同値である．

$$\forall i \in \mathcal{N}, \bar{U}_i^{X,T^A,T^P}(v_i^*|v_i^*) \geq \bar{U}_i^{X,T^A,T^P}(v_i^{*c}|v_i^*).$$

証明. CFM が *C–truthful* であるとは，評価 v_i を申告した顧客 $i \in \mathcal{N}$ の期待利得について，不等式 $\bar{U}(v_i^*|v_i^*) \geq \bar{U}(v_i^{*c}|v_i^*)$ を満たすことをいう．行列 X, T^A, T^P において，評価 $v_i \in \{0, 1\}$ を申告したときの顧客 $i \in \mathcal{N}$ の期待利得は $\bar{U}_i^{X,T^A,T^P}(v_i|v_i^*)$ である． □

最後に，*E–truthful* について考える．

定理 4.8. モラルハザードを考慮しない場合，CFM が *E–truthful* である事と，行列 X, T^A, T^P について，次の式を満たす事は同値である．

$$\forall (I, c) \in \mathcal{K}, \tilde{\Pi}^{X,T^A,T^P}((I^*, c^*)|(I^*, c^*)) \geq \tilde{\Pi}^{X,T^A,T^P}((I, c)|(I^*, c^*)).$$

証明. CFM が *E–truthful* であるとは，起業家にとって正直申告が最良の戦略である事をさす．モラルハザードを考慮しないとき，行列 X, T^A, T^P による起業家がコスト (I, c) を申告したときの期待利得は，$\tilde{\Pi}^{X,T^A,T^P}((I, c)|(I^*, c^*))$ である． □

以上を用いて，クラウドファンディング $(\mathcal{K},\mathcal{N},(I^*,c^*),\boldsymbol{v}^*,\mathrm{CFM})$ における，実行可能性，個人合理性，C–*truthful*，E–*truthful* を満たす CFM の全ての入力に対する出力は式 (26) で表す線形システムを解くことで得られる．

$$
\begin{array}{ll}
\text{find} & X, T^A, T^P \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{N}} t^a_{i\beta} \geq I^* x_{0\beta}, \forall\beta\in S, \\
& \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{N}} (t^a_{i\beta}+t^p_{i\beta}) \geq I^* x_{0\beta} + c^* \sum_{i\in\mathcal{N}} x_{i\beta}, \forall\beta\in S, \\
& \displaystyle n x_{0\beta} \geq \sum_{i\in\mathcal{N}} x_{i\beta}, \forall\beta\in S, \\
& \bar{U}_i^{X,T^A,T^P}(v_i^*|v_i^*) \geq 0 \geq 0, \forall i\in\mathcal{N}, \\
& \bar{U}_i^{X,T^A,T^P}(v_i^*|v_i^*) \geq \bar{U}_i^{X,T^A,T^P}(v_i^{*c}|v_i^*), \forall i\in\mathcal{N}, \\
& \tilde{\Pi}^{X,T^A,T^P}((I^*,c^*)|(I^*,c^*)) \geq \tilde{\Pi}^{X,T^A,T^P}((I,c)|(I^*,c^*)), \forall (I,c)\in\mathcal{K}, \\
& X \in \{0,1\}^{(n+1)\times|S|}, \\
& T^A \in \mathbb{R}_+^{n\times|S|}, \\
& T^P \in \mathbb{R}_+^{n\times|S|}.
\end{array}
\tag{26}
$$

4.2 解析

クラウドファンディング $(\mathcal{K},\mathcal{N},(I^*,c^*),\boldsymbol{v}^*,\mathrm{CFM})$ において実行可能性と個人合理性を満たす CFM が存在するかについて議論する．実行可能性と個人合理性を満たす CFM の出力を求める問題 $\langle FIP\rangle$ について考える．

$$
\langle FIP\rangle \left\{
\begin{array}{ll}
\text{find} & X, T^A, T^P \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{N}} t^a_{i\beta} \geq I^* x_{0\beta}, \forall\beta\in S, \\
& \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{N}} \left(t^a_{i\beta}+t^p_{i\beta}\right) \geq I^* x_{0\beta} + c^* \sum_{i\in\mathcal{N}} x_{i\beta} \forall\beta\in S, \\
& \displaystyle n x_{0\beta} \geq \sum_{i\in\mathcal{N}} x_{i\beta}, \forall\beta\in S, \\
& \bar{U}_i^{X,T^A,T^P}(v_i^*|v_i^*) \geq 0, \forall i\in\mathcal{N} \\
& X \in \{0,1\}^{(n+1)\times|S|}, \\
& T^A \in \mathbb{R}_+^{n\times|S|}, \\
& T^P \in \mathbb{R}_+^{n\times|S|}.
\end{array}
\right.
\tag{27}
$$

ここで，定数を $\mathcal{K},\mathcal{N},(I^*,c^*),\boldsymbol{v}^*$ とする．後の議論のため，式 (28) の最大化を目的とする混合整数計画問題 $\langle FIMIP\rangle$ を考える．

$$\sum_{i\in\{0\}\cup\mathcal{N}}\sum_{\beta\in S}0\cdot x_{i\beta}+\sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{\beta\in S}0\cdot t^a_{i\beta}+\sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{\beta\in S}0\cdot t^p_{i\beta}, \tag{28}$$

$$\langle FIMIP\rangle\left\{\begin{array}{ll}\max & \displaystyle\sum_{i\in\{0\}\cup\mathcal{N}}\sum_{\beta\in S}0\cdot x_{i\beta}+\sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{\beta\in S}0\cdot t^a_{i\beta}+\sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{\beta\in S}0\cdot t^p_{i\beta},\\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{N}}t^a_{i\beta}\geq I^*x_{0\beta},\forall\beta\in S,\\ & \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{N}}\left(t^a_{i\beta}+t^p_{i\beta}\right)\geq I^*x_{0\beta}+c^*\sum_{i\in\mathcal{N}}x_{i\beta},\forall\beta\in S,\\ & \displaystyle nx_{0\beta}\geq\sum_{i\in\mathcal{N}}x_{i\beta},\forall\beta\in S,\\ & \bar{U}_i^{X,T^A,T^P}(v_i^*|v_i^*)\geq 0,\forall i\in\mathcal{N}\\ & X\in\{0,1\}^{(n+1)\times|S|},\\ & T^A\in\mathbb{R}_+^{n\times|S|},\\ & T^P\in\mathbb{R}_+^{n\times|S|}.\end{array}\right. \tag{29}$$

問題 $\langle FIMIP\rangle$ は自明な解 $(X,T^A,T^P)=(O_{(n+1)\times|S|},O_{n\times|S|},O_{n\times|S|})$ を持つが，本研究における興味は，$\langle FIMIP\rangle$ が非自明な解を持つかどうかである．問題 $\langle FIMIP\rangle$ を緩和した問題を $\langle FILP\rangle$ とし，その内点許容解の集合を $\mathcal{FILP}$ とする．また，$\langle FILP\rangle$ の双対問題を $\langle DFILP\rangle$ とする．

$$\langle FILP\rangle\left\{\begin{array}{ll}\max & \displaystyle\sum_{i\in\{0\}\cup\mathcal{N}}\sum_{\beta\in S}0\cdot x_{i\beta}+\sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{\beta\in S}0\cdot t^a_{i\beta}+\sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{\beta\in S}0\cdot t^p_{i\beta}\\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{N}}t^a_{i\beta}\geq I^*x_{0\beta},\forall\beta\in S,\\ & \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{N}}\left(t^a_{i\beta}+t^p_{i\beta}\right)\geq I^*x_{0\beta}+c^*\sum_{i\in\mathcal{N}}x_{i\beta},\forall\beta\in S,\\ & \displaystyle nx_{0\beta}\geq\sum_{i\in\mathcal{N}}x_{i\beta},\forall\beta\in S,\\ & \bar{U}_i^{X,T^A,T^P}(v_i^*|v_i^*)\geq 0,\forall i\in\mathcal{N}\\ & X\in[0,1]^{(n+1)\times|S|},\\ & T^A\in\mathbb{R}_+^{n\times|S|},\\ & T^P\in\mathbb{R}_+^{n\times|S|},\end{array}\right. \tag{30}$$

$$
\langle DFILP \rangle \begin{cases} \min & \displaystyle\sum_{i \in \{0\} \cup \mathcal{N}} \sum_{\beta \in S} \delta_{i\beta} \\ \text{s.t.} & I^* \theta_\beta + I^* \iota_\beta - n\kappa_\beta + \delta_{0\beta} \geq 0, \forall \beta \in S, \\ & c^* \iota_\beta + \kappa_\beta - \frac{v_i^*}{2^{n-1}|\mathcal{K}|} \lambda_i + \delta_{i\beta} \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}, \forall \beta \in S(i, v_i^*), \\ & c^* \iota_\beta + \kappa_\beta + \delta_{i\beta} \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}, \forall \beta \in S(i, v_i^{*c}), \\ & -\theta_\beta - \iota_\beta + \frac{1}{2^{n-1}|\mathcal{K}|} \lambda_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}, \forall \beta \in S(i, v_i^*), \\ & \theta_\beta = 0, \iota_\beta = 0, \forall i \in \mathcal{N}, \forall \beta \in S(i, v_i^{*c}), \\ & \theta_\beta \geq 0, \forall \beta \in S, \\ & \iota_\beta \geq 0, \forall \beta \in S, \\ & \kappa_\beta \geq 0, \forall \beta \in S, \\ & \lambda_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}, \\ & \delta_{i\beta} \geq 0, \forall i \in \forall i \in \{0\} \cup \mathcal{N}, \forall \beta \in S. \end{cases} \tag{31}
$$

ここで， $|S|$ 次元ベクトル $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{\kappa}$ をそれぞれ $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_{|S|}), \boldsymbol{\iota} = (\iota_1, \ldots, \iota_{|S|}), \boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \ldots, \kappa_{|S|})$ とし，n 次元ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ を $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T$，行列 $\Delta \in \mathbb{R}_+^{(n+1) \times |S|}$ を

$$
\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{01} & \cdots & \delta_{0|S|} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \cdots & \delta_{n|S|} \end{bmatrix}
$$

と表記する．二者択一の定理 2.1 に対応する $\langle DFILP \rangle$ の許容解の集合を考える．ここで，$\delta_{i\beta}$ の非負制約より，任意の $i \in \{0\} \cup \mathcal{N}$ と任意の $\beta \in S$ について，$\delta_{i\beta} \geq 0$ である．よって，$\mathcal{FILP}$ と二者択一の関係にある $\langle DFILP \rangle$ の許容解集合は式 (32) で定義される集合である．

$$
\mathcal{DFILP} = \left\{ (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \Delta) \;\middle|\; \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i \in \mathcal{N} \cup \{\, 0 \,\}} \sum_{\beta \in S} \delta_{i\beta} = 0, \\ I^* \theta_\beta + I^* \iota_\beta - n\kappa_\beta + \delta_{0\beta} \geq 0, \forall \beta \in S, \\ c^* \iota_\beta + \kappa_\beta - \frac{v_i^*}{2^{n-1}|\mathcal{K}|} \lambda_i + \delta_{i\beta} \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}, \forall \beta \in S(i, v_i^*), \\ c^* \iota_\beta + \kappa_\beta + \delta_{i\beta} \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}, \forall \beta \in S(i, v_i^{*c}), \\ -\theta_\beta - \iota_\beta + \frac{1}{2^{n-1}|\mathcal{K}|} \lambda_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}, \forall \beta \in S(i, v_i^*), \\ \theta_\beta = 0, \iota_\beta = 0, \forall i \in \mathcal{N}, \forall \beta \in S(i, v_i^{*c}), \\ \theta_\beta \geq 0, \forall \beta \in S, \\ \iota_\beta \geq 0, \forall \beta \in S, \\ \kappa_\beta \geq 0, \forall \beta \in S, \\ \lambda_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}, \\ \delta_{i\beta} \geq 0, \forall i \in \{0\} \cup \mathcal{N}, \forall \beta \in S, \\ (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \Delta) \neq (\mathbf{0}_{|S|}, \mathbf{0}_{|S|}, \mathbf{0}_{|S|}, \mathbf{0}_n, O_{(n+1) \times |S|}). \end{array} \right\} \tag{32}
$$

補題 2.1 より，$\langle FILP\rangle$ の内点許容解の集合と，式 (32) で定義される集合 $\mathcal{DFILP}$ の間にはどちら一方が必ず成り立つ．

- $\mathcal{FILP}$ が空，かつ $\mathcal{DFILP}$ は非空である．
- $\mathcal{FILP}$ が非空，かつ $\mathcal{DFILP}$ は空である．

全ての顧客が事業を評価している $\forall i \in \mathcal{N}, v_i^* = 1$ の場合について，次の補題を示す．

補題 4.3. $\forall i \in \mathcal{N}, v_i^* = 1$ のとき，$\mathcal{DFILP}$ は空である．

証明. 目的関数値が 0 であるような $\langle DFILP\rangle$ の解を構成し，それが原点のみである事を示す．入力 $\beta \in S$ を以下の三つのいずれかの場合に分ける．

場合 1　顧客全員が嘘の申告をしてる入力 $\beta \in \bigcap_{i\in\mathcal{N}} S(i, v_i^{*c})$.

場合 2　顧客全員が正直な申告をしている入力 $\beta \in \bigcap_{i\in\mathcal{N}} S(i, v_i^*)$.

場合 3　上記以外の入力 $\beta \in S \setminus (\bigcap\limits_{i\in\mathcal{N}} S(i, v_i^*) \cup \bigcap\limits_{i\in\mathcal{N}} S((i, v_i^{*c})))$.

それぞれの β に対して有効な方程式をまとめる．場合 1 の入力 β に関して，$(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \Delta)$ が $\mathcal{DFILP}$ の要素であるためには，$(\theta_\beta, \iota_\beta, \kappa_\beta, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{0}_{n+1})$ が以下の不等式系を満たす必要がある．

$$I^*\theta_\beta + I^*\iota_\beta - n\kappa_\beta \geq 0, \tag{33}$$
$$c^*\iota_\beta + \kappa_\beta \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}, \tag{34}$$
$$\theta_\beta = 0, \iota_\beta = 0, \tag{35}$$
$$\theta_\beta \geq 0, \tag{36}$$
$$\iota_\beta \geq 0, \tag{37}$$
$$\kappa_\beta \geq 0, \tag{38}$$
$$\lambda_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}. \tag{39}$$

式 (35) を式 (33) に代入すると

$$\begin{aligned} \text{式 (33)} &= I^* \cdot 0 + I^* \cdot 0 - n\kappa_\beta \\ &= -n\kappa_\beta \geq 0 \end{aligned}$$

である．式 (38) より，$\kappa_\beta = 0$ であり，以下が得られる．

$$\begin{aligned} \theta_\beta = \iota_\beta = \kappa_\beta = 0, \\ \lambda_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}. \end{aligned} \tag{40}$$

場合 3 の入力 β に関して，$(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \Delta)$ が $\mathcal{DFILP}$ の要素であるためには，$(\theta_\beta, \iota_\beta, \kappa_\beta, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{0}_{n+1})$ が以下の不等式を満たす必要がある．ここで，β において，嘘の申告を行っている顧客の集合を $J_\beta = \left\{ j \in \mathcal{N} \mid \beta \in S(j, v_j^{*c}) \right\}$ とし，$N \setminus J_\beta$ で β において正直な申告をしている顧客の集合を表す．

$$I^* \theta_\beta + I^* \iota_\beta - n\kappa_\beta \geq 0 \tag{41}$$

$$c^* \iota_\beta + \kappa_\beta - \frac{v_i^*}{2^{n-1}|\mathcal{K}|}\lambda_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{N} \setminus J_\beta \tag{42}$$

$$c^* \iota_\beta + \kappa_\beta \geq 0, \forall i \in J_\beta \tag{43}$$

$$-\theta_\beta - \iota_\beta + \frac{1}{2^{n-1}|\mathcal{K}|}\lambda_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{N} \setminus J_\beta \tag{44}$$

$$\theta_\beta = 0, \iota_\beta = 0, \tag{45}$$

$$\theta_\beta \geq 0, \tag{46}$$

$$\iota_\beta \geq 0, \tag{47}$$

$$\kappa_\beta \geq 0, \tag{48}$$

$$\lambda_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}. \tag{49}$$

式 (45) を式 (41) に代入すると以下の式を得る．

$$\text{式 (41)} = -n\kappa_\beta \geq 0 \tag{50}$$

ここで，式 (48) より $\kappa_\beta = 0$ である．これを式 (42) に代入すると，

$$\text{式 (42)} = -\frac{v_i^*}{2^{n-1}|\mathcal{K}|}\lambda_i \geq 0 \tag{51}$$

が得られる．$\forall i \in \mathcal{N}, v_i^* = 1$ から $\frac{v_i^*}{2^{n-1}|\mathcal{K}|} = \frac{1}{2^{n-1}|\mathcal{K}|} > 0$ である．よって，

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) = -\frac{v_i^*}{2^{n-1}|\mathcal{K}|}\lambda_i \geq 0 \\ \implies \lambda_i = 0 \end{aligned} \tag{52}$$

である．以上より，

$$\begin{aligned} \theta_\beta = \iota_\beta = \kappa_\beta = 0, \\ \lambda_i = 0, \forall i \in \mathcal{N} \setminus J_\beta \\ \forall i \in J_\beta, \lambda_i \geq 0 \end{aligned}$$

を得る．ここで，λ_i は β に依らない事と，任意の i について，$i \in J_\beta$ となるような $\beta \in S \setminus (\bigcap_{i \in \mathcal{N}} S(i, v_i^*) \cup \bigcap_{i \in \mathcal{N}} S((i, v_i^{*c})))$ が存在するため，

$$\forall i \in \mathcal{N}, \lambda_i = 0 \tag{53}$$

であり，

$$\begin{aligned} &\theta_\beta = \iota_\beta = \kappa_\beta = 0 \\ &\lambda_i = 0, \forall i \in \mathcal{N} \end{aligned} \tag{54}$$

である．

場合 2 の入力 β に関して，$(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \Delta)$ が $\mathcal{DFILP}$ の要素であるためには，$(\theta_\beta, \iota_\beta, \kappa_\beta, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{0}_{n+1})$ が以下の不等式を満たす必要がある．

$$I^* \theta_\beta + I^* \iota_\beta - n\kappa_\beta \geq 0, \tag{55}$$

$$c^* \iota_\beta + \kappa_\beta - \frac{v_i^*}{2^{n-1}|\mathcal{K}|} \lambda_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}, \tag{56}$$

$$-\theta_\beta - \iota_\beta + \frac{1}{2^{n-1}|\mathcal{K}|} \lambda_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}, \tag{57}$$

$$\theta_\beta \geq 0, \tag{58}$$

$$\iota_\beta \geq 0, \tag{59}$$

$$\kappa_\beta \geq 0, \tag{60}$$

$$\lambda_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{N} \tag{61}$$

λ_i の値は β に依らないので，式 (53) を式 (57) に代入すると

$$\begin{aligned} \text{式 (57)} &= -\theta_\beta - \iota_\beta - \frac{1}{2^{n-1}|\mathcal{K}|} \cdot 0 \\ &= -\theta_\beta - \iota_\beta \geq 0 \end{aligned} \tag{62}$$

である．$\theta_\beta, \iota_\beta$ の非負制約から，

$$\begin{aligned} &-\theta_\beta - \iota_\beta \geq 0 \\ &\iff \theta_\beta = \iota_\beta = 0 \end{aligned} \tag{63}$$

である．式 (55) に式 (63) を代入すると

$$\begin{aligned} \text{式 (55)} &= I^* \cdot 0 + I^* \cdot 0 - n\kappa_\beta \\ &= -n\kappa_\beta \geq 0 \end{aligned} \tag{64}$$

である．式 (60) の非負制約から，$\kappa_\beta = 0$ である．よって，以下を得る．

$$\theta_\beta = \iota_\beta = \kappa_\beta = 0. \tag{65}$$

式 (40)，式 (54)，式 (65) より，目的関数値 0 を与える解は，

$$(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \Delta) = (\mathbf{0}_{|S|}, \mathbf{0}_{|S|}, \mathbf{0}_{|S|}, \mathbf{0}_n, O_{(n+1)\times|S|})$$

のみである．よって，$\displaystyle\sum_{i\in\mathcal{N}} v_i^* = n$ のとき，$\mathcal{DFILP}$ は空である． □

続いて，$\exists i \in \mathcal{N}, v_i^* = 0$ の場合について以下を示す．

補題 4.4. $\exists i \in \mathcal{N}, v_i^* = 0$ のとき，$\mathcal{DFILP}$ は非空である．

証明. 任意の正の実数 ϵ を用いて，$\langle DFILP \rangle$ の解

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{|S|}, \\
&\boldsymbol{\iota} = \mathbf{0}_{|S|}, \\
&\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}_{|S|}, \\
&\lambda_i = \begin{cases} 0 & \text{if } v_i^* = 1 \\ \epsilon & \text{if } v_i^* = 0 \end{cases}, \forall i \in \mathcal{N}, \\
&\Delta = O_{(n+1)\times|S|}
\end{aligned} \tag{66}$$

が $\mathcal{DFILP}$ の要素である事を示す．$\mathcal{DFILP}$ の制約は

$$\sum_{i \in \{\ 0\ \} \cup \mathcal{N}} \sum_{\beta \in S} \delta_{i\beta} = 0, \tag{67}$$

$$I^* \theta_\beta + I^* \iota_\beta - n\kappa_\beta + \delta_{0\beta} \geq 0, \forall \beta \in S, \tag{68}$$

$$c^* \iota_\beta + \kappa_\beta - \frac{v_i^*}{2^{n-1}|\mathcal{K}|}\lambda_i + \delta_{i\beta} \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}, \forall \beta \in S(i, v_i^*), \tag{69}$$

$$c^* \iota_\beta + \kappa_\beta + \delta_{i\beta} \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}, \forall \beta \in S(i, v_i^{*c}), \tag{70}$$

$$-\theta_\beta - \iota_\beta + \frac{1}{2^{n-1}|\mathcal{K}|}\lambda_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}, \forall \beta \in S(i, v_i^*), \tag{71}$$

$$\theta_\beta = 0, \iota_\beta = 0, \forall i \in \mathcal{N}, \forall \beta \in S(i, v_i^{*c}), \tag{72}$$

$$\theta_\beta \geq 0, \forall \beta \in S, \tag{73}$$

$$\iota_\beta \geq 0, \forall \beta \in S, \tag{74}$$

$$\kappa_\beta \geq 0, \forall \beta \in S, \tag{75}$$

$$\lambda_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}, \tag{76}$$

$$\delta_{i\beta} \geq 0, \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}, \beta \in S \tag{77}$$

であるため，式 (66) を各制約に代入し確認する．式 (67) に関しては，自明である．式 (68) について，式 (66) を代入して計算すると，

$$\begin{aligned}
\text{式 (68)} &= I^* \cdot 0 + I^* \cdot 0 - n \cdot 0 + 0 \\
&= 0 \geq 0
\end{aligned}$$

になる．式 (69) について，式 (66) を代入して計算すると，

- $v_i^* = 0$ である $i \in \mathcal{N}$ について，

$$
\begin{aligned}
\text{式 (69)} &= c^* \cdot 0 + 0 - \frac{0}{2^{n-1}|\mathcal{K}|}\epsilon + 0 \\
&= 0 \geq 0
\end{aligned}
$$

となる．

- $v_i^* = 1$ である $i \in \mathcal{N}$ について，

$$
\begin{aligned}
\text{式 (69)} &= c^* \cdot 0 + 0 - \frac{1}{2^{n-1}|\mathcal{K}|} \cdot 0 + 0 \\
&= 0 \geq 0
\end{aligned}
$$

となる．

式 (70) について，式 (66) を代入して計算すると，任意の $i \in \mathcal{N}, \beta \in S(i, v_i^{*c})$ について，

$$
\begin{aligned}
\text{式 (70)} &= c^* \cdot 0 + 0 + 0 \\
&= 0 \geq 0
\end{aligned}
$$

となる．式 (71) について，式 (66) を代入して計算すると，

- $v_i^* = 0$ である $i \in \mathcal{N}$ について，$\frac{1}{2^{n-1}|\mathcal{K}|} > 0, \epsilon > 0$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
\text{式 (71)} &= -0 - 0 + \frac{1}{2^{n-1}|\mathcal{K}|}\epsilon \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\epsilon > 0
\end{aligned}
$$

となる．

- $v_i^* = 1$ である $i \in \mathcal{N}$ について，

$$
\begin{aligned}
\text{式 (71)} &= -0 - 0 + \frac{1}{2^{n-1}|\mathcal{K}|}0 \\
&= 0 \geq 0
\end{aligned}
$$

となる．

式 (72) から式 (77) については自明である．よって，解

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{|S|}, \\
&\boldsymbol{\iota} = \mathbf{0}_{|S|}, \\
&\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}_{|S|}, \\
&\lambda_i = \begin{cases} 0 & \text{if } v_i^* = 1 \\ \epsilon & \text{if } v_i^* = 0 \end{cases}, \forall i \in \mathcal{N}, \\
&\Delta = O_{(n+1)\times|S|}
\end{aligned}
$$

は $\mathcal{DFILP}$ の要素である． □

補題 4.3 と補題 4.4 より，すべての顧客 $i \in \mathcal{N}$ が真に事業を評価している時，$\mathcal{FILP}$ は非空である，それ以外の場合は $\mathcal{FILP}$ は空である．

5 モラルハザードを考慮したクラウドファンディングメカニズムに対する提案手法

次に，モラルハザードを考慮した場合の CFM について考える．モラルハザードを考慮したクラウドファンディングでは，起業家は事前送金を得た後に，モラルハザードを起こすかどうかの意思決定をする．このとき，起業家は期待利得 $\Pi_0(T|(I,c),(I^*,c^*))$ を計算する．事前送金 T を受けとった後に起業家が意思決定を行うという構造を表すため，帰結ベクトル $\boldsymbol{x}$ と事前送金ベクトル $\boldsymbol{t}^a$ を決定した後，事後送金ベクトル $\boldsymbol{t}^p$ を決める．すなわち，モラルハザードを考慮した場合のクラウドファンディングを 2 つの線形システムで表現する．

はじめに，起業家の期待利得 $\Pi_0(T|(I,c),(I^*,c^*))$ を計算するために必要な諸定理を示す．まず，起業家の真のコスト (I^*,c^*) に対し，コスト $(I,c)\in\mathcal{K}$ を申告し，事前送金 $T\in\tau(I,c)$ を得たとき，事業を行った起業家が得る期待利得は

$$
\begin{aligned}
\bar{\Pi}_0(T|(I,c),(I^*,c^*)) &= \sum_{\boldsymbol{v}\in V(T|(I,c))} \eta(\boldsymbol{v}|T,(I,c))\Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*)) && (78)\\
&= \sum_{\boldsymbol{v}\in V(T|(I,c))} \frac{\pi(\boldsymbol{v})}{\sum_{\boldsymbol{v}'\in V(T|(I,c))}\pi(\boldsymbol{v}')}\Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*)) && (79)\\
&= \sum_{\boldsymbol{v}\in V(T|(I,c))} \frac{1}{2^n}\frac{2^n}{|V(T|(I,c))|}\Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*)) && (80)\\
&= \frac{1}{|V(T|(I,c))|}\sum_{\boldsymbol{v}\in V(T|(I,c))} \Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*)) && (81)
\end{aligned}
$$

である．これを用いて，事前送金について以下の性質を示す．

定理 5.1. 起業家がコスト $(I,c)\in\mathcal{K}$ を申告したとき，とりうる事前送金の集合 $\tau(I,c)$ は次の集合で表すことが出来る．

$$
\left\{ \sum_{i\in\mathcal{N}} t^a_{i\beta} \;\middle|\; \beta\in S(I,c), x_{0\beta}=1 \right\}.
$$

証明. $\tau(I,c)$ の定義より，

$$
\tau(I,c) = \left\{ \sum_{i\in\mathcal{N}} \widetilde{\mathrm{PM}}^a_i(((I,c),\boldsymbol{v}) \;\middle|\; \boldsymbol{v}\in\mathcal{V}, \widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v})=1 \right\}
$$

である．入力 $((I,c),\boldsymbol{v})$ に対応する CFM の出力する起業家の帰結と顧客 $i\in\mathcal{N}$ の事前送金を，行列 X,T^A で表すと，

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v})&=x_{0\beta},\\ \widetilde{\mathrm{PM}}_i^a((I,c),\boldsymbol{v})&=t_{i\beta}^a\end{aligned}$$

である．ここで，起業家がコスト (I,c) を申告している入力の集合は，$S(I,c)$ である．よって，起業家がコスト $(I,c)\in\mathcal{K}$ を申告したときに送金される事前送金の総額の集合 $\tau(I,c)$ は

$$\tau(I,c)=\left\{\sum_{i\in\mathcal{N}}t_{i\beta}^a\;\middle|\;\beta\in S(I,c),x_{0\beta}=1\right\}$$

である． □

今後，行列 X,T^A,T^P による，起業家がコスト (I,c) を申告したときの事前送金の集合を

$$T^{X,T^A}(I,c)=\left\{\sum_{i\in\mathcal{N}}t_{i\beta}^a\;\middle|\;\beta\in S(I,c)\wedge x_{0\beta}=1\right\}\tag{82}$$

とする．

次に，コスト (I,c) と事前送金 T を与える評価ベクトルの集合 $V(T|(I,c))$ の要素 $\boldsymbol{v}$ から構成される入力の組 $((I,c),\boldsymbol{v})$ に対応するインデックスの集合を以下に示す．

定理 5.2. 起業家のコスト (I,c) と事前送金 T を与える評価ベクトル $\boldsymbol{v}$ のから構成される組 $((I,c),\boldsymbol{v})$ の集合は，

$$S^{X,T^A}(T|(I,c))=\left\{\beta\in S(I,c)\;\middle|\;\sum_{i\in\mathcal{N}}t_{i\beta}^a=T\wedge\sum_{i\in\mathcal{N}}x_{i\beta}=1\right\}$$

である．

証明. 起業家がコスト (I,c) を申告したとき事前送金が T になるような評価ベクトル $\boldsymbol{v}$ の集合 $V(T|(I,c))$ は，定義より

$$V(T|(I,c))=\left\{\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}\;\middle|\;\sum_{i\in\mathcal{N}}\widetilde{\mathrm{PM}}_i^a((I,c),\boldsymbol{v})=T\wedge\widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v})=1\right\}$$

である．入力 $((I,c),\boldsymbol{v})$ に対応する CFM の出力する起業家の帰結と顧客 $i \in \mathcal{N}$ の事前送金を，インデックス $\beta = f((I,c),\boldsymbol{v})$ を用いて行列 X, T^A で表すと，

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}) = x_{0\beta},\\&\widetilde{\mathrm{PM}}_i^a((I,c),\boldsymbol{v}) = t_{i\beta}^a\end{aligned}$$

である．□

以降，$S^X(I,c) = \{\, \beta \in S(I,c) \mid x_{0\beta} = 1 \,\}$ とする．以上を用いて，起業家の真のコスト (I^*,c^*) に対し，起業家がコスト $(I,c) \in \mathcal{K}$ を申告し，T を得たとき，事業を行った起業家の期待利得を行列 X, T^A, T^P で表現すると，

$$\begin{aligned}&\bar{\Pi}_0(T|(I,c),(I^*,c^*))\\&= \frac{1}{|S^{X,T^A}(T|(I,c))|}\sum_{\beta \in S^{X,T^A}(T|(I,c))}\left\{\sum_{i\in\mathcal{N}}(t_{i\beta}^a + t_{i\beta}^p) - I^* x_{0\beta} - c^* \sum_{i\in\mathcal{N}} x_{i\beta}\right\}\end{aligned}$$

となる．行列 X, T^A, T^P を用いて，起業家の真のコスト (I^*,c^*) に対し，起業家がコスト $(I,c) \in \mathcal{K}$ を申告し T を得たとき，事業を行った起業家の期待利得を，

$$\begin{aligned}&\bar{\Pi}_0^{X,T^A,T^P}(T|(I,c),(I^*,c^*))\\&= \frac{1}{|S^{X,T^A}(T|(I,c))|}\sum_{\beta \in S^{X,T^A}(T|(I,c))}\left\{\sum_{i\in\mathcal{N}}(t_{i\beta}^a + t_{i\beta}^p) - I^* x_{0\beta} - c^* \sum_{i\in\mathcal{N}} x_{i\beta}\right\}\end{aligned}$$

とする．

上の定義を用いて *obedient* 性を行列 X, T^A, T^P で表現する．

定理 5.3. CFM が *obedient* 性を満たす事と，行列 X, T^A, T^P が次の不等式を満たすことは同値である．

$$\begin{aligned}&\forall T \in T^{X,T^A}(I,c),\\&\bar{\Pi}_0^{X,T^A,T^P}(T|(I,c),(I^*,c^*)) \geq \alpha T.\end{aligned}$$

証明. CFM が *obedient* 性を満たすとは，

$$\forall T \in \tau((I^*,c^*)), \bar{\Pi}_0(T|(I^*,c^*),(I^*,c^*)) \geq \alpha T$$

を満たすことである．コスト (I,c) を申告し，事前送金 T を得た起業家の期待利得を行列 X, T^A, T^P で表すと，$\bar{\Pi}_0^{X,T^A,T^P}(T|(I,c),(I^*,c^*))$ である．□

つぎに，起業家の真のコスト (I^*, c^*) に対し，コスト (I, c) を宣言したときの期待利得も行列 X, T^A, T^P を用いて表現する．

定理 5.4. 起業家の真のコスト (I, c) に対して，コスト (I, c) を申告したときの期待利得は，次の式と同値である．

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}((I,c)|(I^*,c^*)) = \quad & \frac{1}{2^n} \sum_{T \in T^{X,T^A}(I,c)} |S^{X,T^A}(T|(I,c))| \max\left\{\bar{\Pi}_0^{X,T^A,T^P}(T|(I,c),(I^*,c^*)), \alpha T\right\} \\ & + \frac{1}{2^n} \sum_{\beta \in S(I,c) \setminus S^X(I,c)} \Pi^{X,T^A,T^P}(\beta|(I^*,c^*)).\end{aligned}$$

証明. 起業家の真のコスト (I, c) に対して，コスト (I, c) を申告したときの期待利得は，

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}((I,c)|(I^*,c^*)) = & \sum_{T \in \tau(I,c)} P(T|(I,c)) \max\{\bar{\Pi}_0(T|(I,c),(I^*,c^*)), \alpha T\} \\ & + \sum_{\boldsymbol{v}|\widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v})=0} \pi(\boldsymbol{v}) \Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*))\end{aligned}$$

である．第一項について，$P(T|(I,c)) = \sum_{\boldsymbol{v} \in V(T|(I,c))} \pi(\boldsymbol{v})$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}& \sum_{T \in \tau(I,c)} P(T|(I,c)) \max\{\bar{\Pi}_0(T|(I,c),(I^*,c^*)), \alpha T\} \\ & = \frac{1}{2^n} \sum_{T \in T^{X,T^A}(I,c)} |S^{X,T^A}(T|(I,c))| \max\left\{\bar{\Pi}_0^{X,T^A,T^P}(T|(I,c),(I^*,c^*)), \alpha T\right\}\end{aligned}$$

である．ここで,起業家の申告したコスト (I, c) と評価ベクトル $\boldsymbol{v} \in \left\{ \boldsymbol{v} \,\middle|\, \widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v}) = 0 \right\}$ に対するインデックスの集合は，$S(I,c) \setminus S^X(I,c)$ である．よって，

$$\begin{aligned}& \sum_{\boldsymbol{v}|\widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v})=0} \pi(\boldsymbol{v}) \Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*)) \\ & = \frac{1}{2^n} \sum_{\boldsymbol{v}|\widetilde{\mathrm{RM}}_0((I,c),\boldsymbol{v})=0} \Pi((I,c),\boldsymbol{v}|(I^*,c^*)) \\ & = \frac{1}{2^n} \sum_{\beta \in S(I,c) \setminus S^X(I,c)} \Pi^{X,T^A,T^P}(\beta|(I^*,c^*))\end{aligned}$$

である． □

さらに，モラルハザードを考慮した場合の *E–truthful* を行列 X, T^A, T^P で表す．

定理 5.5. CFM が *E–truthfuld* であることと，行列 X, T^A, T^P が以下の不等式を満たす事は同値である．

$$\forall (I,c) \in \mathcal{K}, \bar{\Pi}^{X,T^A,T^P}((I^*,c^*)|(I^*,c^*)) \geq \bar{\Pi}^{X,T^A,T^P}((I,c)|(I^*,c^*)).$$

証明. CFM が *E–truthful* であるとは，起業家にとって正直に申告することが最良の戦略である事を意味する．行列 X, T^A, T^P において，起業家がコスト (I,c) を宣言したときの期待利得は，$\bar{\Pi}^{X,T^A,T^P}(((I,c))|(I^*,c^*))$ であるので，任意のコスト (I,c) に対して，

$$\bar{\Pi}^{X,T^A,T^P}((I^*,c^*)|(I^*,c^*)) \geq \bar{\Pi}^{X,T^A,T^P}((I,c)|(I^*,c^*))$$

である． □

CFM が *obedient* であるとき，起業家は正直申告をした際にモラルハザードを起こすことはない．故に，正直な申告をしている起業家の期待利得 $\bar{\Pi}^{X,T^A,T^P}((I^*,c^*)|(I^*,c^*))$ は，正直な申告を行い事業を行う起業家の期待利得 $\tilde{\Pi}^{X,T^A,T^P}((I^*,c^*)|(I^*,c^*))$ に等しい．よって，CFM が *obedient* であるとき，CFM が *E–truthful* であることと，行列 X, T^A, T^P が，任意のコスト (I,c) について以下の不等式を満たすことは同値である．

$$\tilde{\Pi}^{X,T^A,T^P}((I^*,c^*)|(I^*,c^*)) \geq \bar{\Pi}^{X,T^A,T^P}(((I,c))|(I^*,c^*)).$$

起業家の期待利得 $\bar{\Pi}^{X,T^A,T^P}(((I,c))|(I^*,c^*))$ は，max の演算を含むため，線形方程式ではない．起業家の期待利得 $\bar{\Pi}^{X,T^A,T^P}(((I,c))|(I^*,c^*))$ を条件に含む *E–truthful* を線型方程式として表現する事を目標とする．初めに，起業家がコスト (I,c) を宣言したときの期待利得は

$$\begin{aligned}
&\bar{\Pi}^{X,T^A,T^P}(((I,c))|(I^*,c^*)) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{T \in T^{X,T^A}(I,c)} |S^{X,T^A}(T|(I,c))| \max\left\{\bar{\Pi}_0^{X,T^A,T^P}(T|(I,c),(I^*,c^*)), \alpha T\right\} \\
&\quad + \frac{1}{2^n} \sum_{\beta \in S(I,c) \setminus S^X(I,c)} \Pi^{X,T^A,T^P}(\beta|(I^*,c^*))
\end{aligned}$$

である．ここで，事前送金 T に対して変数 Z_T を導入する．変数 Z_T は以下の方程式系を満たす．

$$Z_T \geq \bar{\Pi}_0^{X,T^A,T^P}(T|(I,c),(I^*,c^*)), Z_T \geq \alpha T.$$

よって，事前送金 T について，変数 Z_T は，$Z_T \geq \max\left\{\bar{\Pi}_0^{X,T^A,T^P}(T|(I,c),(I^*,c^*)), \alpha T\right\}$ である．

この Z_T を用いて，CFM が *obedient* であるとき，CFM が *E–truthful* である事を表す．

$$\forall (I,c) \in \mathcal{K}, \tilde{\Pi}^{X,T^A,T^P}((I^*,c^*)|(I^*,c^*)) \geq \frac{1}{2^n} \sum_{T \in T^{X,T^A}(I,c)} \frac{|S^{X,T^A}(T|(I,c))|}{2^n} Z_T$$
$$+ \frac{1}{2^n} \sum_{\beta \in S(I,c) \setminus S^X(I,c)} \Pi^{X,T^A,T^P}(\beta|(I^*,c^*)),$$
$$\forall (I,c) \in \mathcal{K}, \forall T \in T^{X,T^A}(I,c), Z_T \geq \bar{\Pi}_0^{X,T^A,T^P}(T|(I,c),(I^*,c^*)),$$
$$\forall (I,c) \in \mathcal{K}, \forall T \in T^{X,T^A}(I,c), Z_T \geq \alpha T.$$

クラウドファンディング $(\mathcal{K}, \mathcal{N}, (I^*,c^*), \boldsymbol{v}, \alpha, \mathrm{CFM})$ において，実行可能な CFM のすべての入力に対して，帰結と事前送金を先に決定し，事後送金を決定する．はじめに線形システム $\langle TAP \rangle$ を解き，帰結と事前送金を決定する．

$$\langle TAP \rangle \begin{cases} \text{find} & X, T^A \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i \in \mathcal{N}} t^a_{i\beta} \geq I^* x_{0\beta}, \forall \beta \in S, \\ & nx_{0\beta} \geq \displaystyle\sum_{i \in \mathcal{N}} x_{i\beta}, \forall \beta \in S, \\ & X \in \{0,1\}^{(n+1)\times|S|}, \\ & T^A \in \mathbb{R}_+^{n\times|S|}. \end{cases}$$

ここで，I^*, c^* は定数である．$\langle TAP \rangle$ の解 X の集合を $\mathscr{X}$ とし，解 T^A の集合を $\mathscr{T}^A$ とする．$\mathscr{X}$ の要素 X と $\mathscr{T}^A$ の要素 T^A を用いて，次の線形システム $\langle TPP \rangle$ を解き，事後

送金を決定する．

$$
\langle TPP\rangle \begin{cases}
\text{find} & T^P, \boldsymbol{Z} \\
\text{s.t.} & \sum_{i\in\mathcal{N}}(t^a_{i\beta}+t^p_{i\beta}) \geq I^* x_{0\beta} + c^* \sum_{i\in\mathcal{N}} x_{i\beta}, \forall \beta \in S, \\
& \bar{U}_i^{X,T^A,T^P}(v_i^*|v_i^*) \geq 0 \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}, \\
& \bar{U}_i^{X,T^A,T^P}(v_i^*|v_i^*) \geq \bar{U}_i^{X,T^A,T^P}(v_i^{*c}|v_i^*), \forall i \in \mathcal{N}, \\
& \bar{\Pi}_0^{X,T^A,T^P}(T|(I,c),(I^*,c^*)) \geq \alpha T, \forall T \in T^{X,T^A}(I^*,c^*), \\
& \tilde{\Pi}^{X,T^A,T^P}((I^*,c^*)|(I^*,c^*)) \geq \quad \frac{1}{2^n} \sum_{T\in T^{X,T^A}(I,c)} \frac{|S^{X,T^A}(T|(I,c))|}{2^n} Z_T \\
& +\frac{1}{2^n} \sum_{\beta\in S(I,c)\setminus S^X(I,c)} \Pi^{X,T^A,T^P}(\beta|(I^*,c^*)), \forall (I,c) \in \mathcal{K}, \\
& Z_T \geq \bar{\Pi}_0^{X,T^A,T^P}(T|(I,c),(I^*,c^*)), \forall (I,c) \in \mathcal{K}, \forall T \in T^{X,T^A}(I,c), \\
& Z_T \geq \alpha T, \forall (I,c) \in \mathcal{K}, \forall T \in T^{X,T^A}(I,c), \\
& T^P \in \mathbb{R}_+^{n\times|S|}, \\
& Z_T \in \mathbb{R}_+, \forall (I,c) \in \mathcal{K}, \forall T \in T^{X,T^A}(I,c).
\end{cases}
$$

なお，問題 $\langle TPP\rangle$ において，I^*, c^*, X, T^A は定数であり，おこりうる事前送金の集合 $\mathscr{T} = \bigcup_{(I,c)\in\mathcal{K}} T^{X,T^A}(I,c)$ を用いて，ベクトル $\boldsymbol{Z} = (Z_T)_{T\in\mathscr{T}}$ とする．$\langle TPP\rangle$ を実行可能とする X, T^A とその問題 $\langle TPP\rangle$ の解 T^P は，制約から実行可能性，個人合理性，誘因両立性を満たす．したがって，問題 $\langle TAP\rangle$ の解 X, T^A と X, T^A を用いて得られる問題 $\langle TPP\rangle$ の解 T^P を求めることで実行可能なメカニズムを得ることができる．

ここで，問題 $\langle TPP\rangle$ の解空間は，問題 $\langle TAP\rangle$ の解によって定まることに注意する．このため，モラルハザードを考慮しないときと同様の解析は難しいと考えられる．よって，モラルハザードを考慮した場合の解析は今後の課題とする．

6　まとめと考察

6.1　まとめ

本研究では Roland のモデルにおける実行可能な CFM を線形システムとして表現する手法を提案した．先行研究では実行可能な CFM を求める事は困難であり，緩和問題を用いることで求めていたが，提案した線形システムを解けば，緩和問題を用いずとも実行可能なメカニズムを得ることが出来る．また，線形システムとして表現することで様々な解析手法の適用が可能になると考えられる．

また，モラルハザードを考慮しないクラウドファンディング $(\mathcal{V}, \mathcal{N}, (I^*, c^*), \boldsymbol{v})$ において，実行可能性と個人合理性を持つ CFM について線形システムを緩和し，緩和問題に対して二者択一の定理を用いて内点許容解が存在するか議論した．この手法を用いれば，制約の多い CFM に対しても解析の糸口を与えることが出来る．

6.2　今後の展望

本研究で取り扱ったクラウドファンディングのモデルはシンプルなものである．例えば，本研究では顧客の評価を二値として扱った．しかし，実際の市場において，顧客は財をいくつか希望し，それに対してどこまでなら払ってもいう情報を持つと考える事ができる．特に，先行研究 [8] では，プロジェクトを高く評価する顧客がより多く支払うことで事業を成功させようとする，クラウドファンディング市場特有の現象が報告されている．

そこでモデルの拡張として，顧客の評価値を二値から整数値に変更する事を提案する．また今回，顧客は他の顧客の評価がわからないという仮定の下で行ったが，実際のクラウドファンディングプラットフォームは現在の支援状況が公開されている事が多い．そこで，顧客が順にプロジェクトに到着し評価を行うようなモデルが考えられる．このとき，顧客は自身より先に到着した顧客の評価を予想し意思決定を行う為，より実例に近いモデルとなることが予想される．

CFM は，元問題に整数制約が存在するため，線形システムとして表現した CFM に非自明な解が存在するかどうかの判定は難しい．この問題は財がどのようにでも分割可能であれば解消することが出来るが，一般的に財は非分割である．一方，緩和した問題に対して，内点許容解ではなく非自明な解の存在を判定する方法が存在する．そういった手法は，顧客へ財を複数割当てる事を許すことで，線形システムを同次形のシステムとして扱っている．同形系のシステムには分離定理 [9] から，本研究で取り扱ったものとは別の

二者択一の定理が存在し，それを用いることで非自明な解の存在を判定する [1] ことができる．また，線形システムとして表現した CFM に，内点許容解が存在しなくなるような制約を追加することで，CFM の存在にどの制約が大きく関わっているかの解析を行う事が考えられる．

謝辞

本論文を執筆するにあたって，指導教員の高橋先生から多くのご指導を頂いた．ここに深謝の意を表する．また，本研究や最適化ゼミにおいて，特に本研究で用いた二者択一の定理について，ご指導を頂いた村松先生に感謝の意を表する．副査として論文の細部にわたりご指導を頂いた岡本先生に，感謝の意を表する．最後に，研究活動を行う上で，多くのサポートを行って頂いた高橋研究室，村松研究室，保木研究室の学生に感謝する．

参考文献

[1] Bruno F. Laurenco, Tomonari Kitahara, Masakazu Muramatsu and Takashi Tsuchiya:An extension of Chubanov's algorithm to symmetric cones. Mathematical Programming,Mathematical Programming,pp 1–33,2018

[2] Bernard Salanie,(訳) 守紀 細江, 功 三浦, 宣明 堀:契約の経済学. 勁草書房,2005 年

[3] CAMPFIRE,`https://camp-fire.jp/about`, 最終閲覧日 2017 年 9 月 27 日

[4] プロジェクトを始める CAMPFIRE,`https://camp-fire.jp/proposals/readyfor`, 最終確認日 2018/7/17

[5] Kickstarter `https://www.kickstarter.com/about?ref=global-footer`, 最終確認日 2018/12/23

[6] G. ストラング, 山口 山口 昌哉, 井上 昭:線形代数とその応用. 産業図書株式会社,2015

[7] Hayato Waki,Masakazu Muramatsu:Facial Reduction Algorithms for Conic Optimazation Journal of Optimization Theory and Applications,vol158, pp188–215,2013

[8] Hu Ming,Li Xi, Shi Mengze:Product and pricing decisions in crowdfunding. Marketing Science,vol3,pp331-345,2015

[9] 福島雅夫:非線形最適化の基礎. 朝倉書店, 2001 年

[10] Roger B.Myerson:Optimal coordination mechanisms in generalized principal–agent problems. Mathematical Economics vol10 issue1,pp67-81,1982

[11] Stausz Roland:A Theory of Crowdfunging :Mechanism Design Approach with Dedand Uncertainly and Moral Hazard. American Economics Paper vol107 No6, pp.1430-76, 2017

[12] 田村 昭久, 村松 正和:最適化法. 共立出版株式会社, 2013

[13] US Court Punishes Kickstarter Campaign For Crowdfunding Theft,`https://www.ubergizmo.com/2015/09/us-courts-punish-kickstarter-campaign/`, 最終確認日 2018/12/23

[14] Yiannis Giannakopoulos:Duality Theory for Optimal Mechanism Design. Doctor of Philosophy,University of Oxford,2015

付録 A　二者択一の定理の証明

本章では，二者択一の定理について証明を行う．その前に，凸集合や錐について導入を行う．

A.1　凸集合，錐と分離定理

集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ について，

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{s} \in C, \forall \alpha \in [0,1], \alpha \boldsymbol{u} + (1-\alpha)\boldsymbol{s} \in C$$

が成り立つならば，C を凸集合と呼ぶ．

集合 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ が錐であるとは，任意の $\boldsymbol{u} \in K, \lambda > 0$ について，$\lambda \boldsymbol{u} \in K$ である事をいう．また，錐 K の双対錐は，集合 $\left\{ \boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \forall \boldsymbol{u} \in K, \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{m} \geq 0 \right\}$ と定義され，K^* で表記される．特に，錐 K とその双対錐が一致する時，錐 K を自己双対錐と呼ぶ．$\mathbb{R}^n_{++}$ の双対錐は $\mathbb{R}^n_+$ である．実際，$\mathbb{R}^n_+$ の任意の要素 $\boldsymbol{u}$ は $\forall \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n_{++}, \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{u} \geq 0$ である．

凸集合において，次の分離定理が知られている．

定理 付録 A.1. 空でない互いに素な凸集合 $C, E \subseteq \mathbb{R}^n$ について，ある $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}_n$ が存在し，

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{y} (\boldsymbol{c} \in C, \boldsymbol{e} \in E)$$

が成り立つ．

詳しくは，書籍 [9] を参照にされたい．

A.2　二者択一の定理の証明

行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ と m 次元ベクトル $\boldsymbol{b}$ について考える．本研究で扱った二者択一の定理 2.1 を示す．ここで，集合 $\mathcal{P}$ を $\{\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n | A\boldsymbol{s} > \boldsymbol{b}, \boldsymbol{s} > \boldsymbol{0}_n\}$ と定義し，集合 $\mathcal{D}$ を $\{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m | A^T \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{0}_n, \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{u} \geq 0, \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}_m, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}_m\}$ と定義する．二者択一の定理を集合 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{D}$ に適用すると，

- $\mathcal{P} = \emptyset \implies \mathcal{D} \neq \emptyset$.
- $\mathcal{D} = \emptyset \implies \mathcal{P} \neq \emptyset$.

である．二者択一の定理を示す為に，次の補題を示す．

補題 付録 A.1. $\mathcal{P} = \emptyset \vee \mathcal{D} = \emptyset$.

証明. $\mathcal{P} \neq \emptyset \wedge \mathcal{D} \neq \emptyset$ と仮定する．$\boldsymbol{s} \in \mathcal{P}$ と $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}$ を用いて式 $\boldsymbol{u}^T(A\boldsymbol{s} - \boldsymbol{b})$ について考える．$\boldsymbol{s} \in \mathcal{P}$ なので，$(A\boldsymbol{s} - \boldsymbol{b}) > \boldsymbol{0}_m$．また，$\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}$ より，$\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}_m$，かつ $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}_m$ であるため，$\boldsymbol{u}^T(A\boldsymbol{s} - \boldsymbol{b}) > 0$ である．更に，式 $\boldsymbol{u}^T(A\boldsymbol{s} - \boldsymbol{b})$ を展開して，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^T(A\boldsymbol{s} - \boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{u}^T A\boldsymbol{s} - \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \\ &= (A^T\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{s} - \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

である．ここで，$A^T\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{0}_n$ かつ $\boldsymbol{s} > \boldsymbol{0}_n$ より，$(A^T\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{s} \leq 0$ である．$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u} \geq 0$ より，$(A^T\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{s} - \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \leq 0$ である．これは $(A^T\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{s} - \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} > 0$ に矛盾する． □

補題 付録 A.2. $\mathcal{P} = \emptyset \implies \mathcal{D} \neq \emptyset$.

証明. m 次元ベクトルの集合 $\mathcal{A} = \{\, A\boldsymbol{s} - \boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{s} > \boldsymbol{0}_n \,\}$ を考える．ここで，$\mathcal{P}$ が空であるため，$\exists i \in [m], \sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_j \leq b_i \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_j - b_i \leq 0$ である．$\mathbb{R}^m_{++} = \{\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^m | \forall i \in [m], c_i > 0\}$ より，$\mathcal{A} \cap \mathbb{R}^m_{++} = \emptyset$ である．分離定理より，ある $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}_m$ が存在し，$\forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{A}, \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m_{++}, \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{w} \leq \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{v}$ が成り立つ．

ここで，後の議論の為に $\forall \boldsymbol{v} \in R^m_{++}, \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{v} \geq 0$ である事を示しておく．$\exists \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m_{++}, \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{v} < 0$ を仮定する．仮定より，任意の $\lambda > 0$ を用いて，$\lambda\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{v} < 0$ である．$\lambda\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m_{++}$ であり，λ を大きくする事で，$\lambda\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{v}$ はいくらでも小さくする事ができる．これは，$\left\{\, \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{v} \;\middle|\; \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m_{+} \,\right\}$ が下に有界であることに矛盾する．よって，$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{v} \geq 0$ である．

$\forall \boldsymbol{v} \in R^m_{++}, \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{v} \geq 0$ より，$\boldsymbol{y}$ は $\mathbb{R}^m_{++}$ の双対錐 $\mathbb{R}^{m*}_{++}$ に含まれる．$\mathbb{R}^{m*}_{++}$ の双対錐は $\mathbb{R}^m_{+}$ なので，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m_{+}$ である．

したがって，

$$\begin{aligned} &\forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{A}, \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{w} \leq 0 \\ \iff &\forall \boldsymbol{s} > \boldsymbol{0}_n, \boldsymbol{y}^T(A\boldsymbol{s} - \boldsymbol{b}) \leq 0 \\ \iff &\forall \boldsymbol{s} > \boldsymbol{0}_n, (A^T\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

ここで，$(A^T\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{s} \leq 0$ を示す．$\exists \boldsymbol{s} > \boldsymbol{0}_n, (A^T\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{s} > 0$ と仮定する．任意の正の実数 λ を用いる事で $(A^T\boldsymbol{y})^T\lambda\boldsymbol{s}$ をいくらでも大きくすることができる．$\lambda\boldsymbol{s} > \boldsymbol{0}_n$ より $\left\{\, (A^T\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{s} \;\middle|\; \boldsymbol{s} > \boldsymbol{0}_n \,\right\}$ が上に有界で有ることに矛盾する．よって，$(A^T\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{s} \leq 0$ である．$\boldsymbol{s} > \boldsymbol{0}_n$ より，$A^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{0}_n$ であり，$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \geq 0$ である．したがって，$\boldsymbol{y}$ は $\mathcal{D}$ の要素である． □

補題 付録 A.3. $\mathcal{D} = \emptyset \implies \mathcal{P} \neq \emptyset$.

証明. $\mathcal{P} = \emptyset$ の場合を考える．補題付録 A.2 より，$\mathcal{D} \neq \emptyset$ である．これは前提に矛盾する． □

補題付録 A.1，補題付録 A.2，補題付録 A.3 より，二者択一の定理は示された．