

線形力学系の静的出力フィードバック制御による
安定化と最適化に関する研究

高久 雄一

電気通信大学
2015年3月

線形力学系の静的出力フィードバック制御
による安定化と最適化に関する研究

高久 雄一

電気通信大学大学院 情報理工学研究科
博士(工学)の学位申請論文

2015年3月

線形力学系の静的出力フィードバック制御
による安定化と最適化に関する研究

博士論文審査委員

主査	木田	隆	教授
委員	新	誠一	教授
委員	田中	一男	教授
委員	明	愛国	教授
委員	樋口	幸治	准教授

著作権所有者

高久 雄一

2015

Static Output Feedback Controller Design to Stabilize and Optimize Linear Mechanical Systems

Yuichi Takaku

Abstract

This doctoral thesis studies design methods of static output feedback controllers to achieve the closed-loop robust stability and optimality. The control problem is known to be NP hard for general linear systems. However, if we restrict our discussions to linear time invariant (LTI) mechanical systems described by second order linear differential equations with symmetric mass, damping and stiffness coefficient matrices, it is also known that static output feedback controllers having symmetric feedback gains robustly stabilize the closed-loop system. Based on the sufficient conditions, there have been many studies on robust optimal controllers design methods by solving linear matrix inequalities (LMI). We extend them, in this thesis, to wider class of systems, i.e., linear parameter varying (LPV) and linear time varying (LTV) mechanical systems. We apply the generalized KYP (GKYP) lemma to the LPV mechanical systems and derive a design method in the frequency-domain to yield optimal robust gain scheduled static output feedback controllers. For LTV mechanical systems, we propose a time-domain approach using the time-dependent Lyapunov functions to obtain the static output feedback controllers with time varying feedback gain matrices. Both methods are described with LMI which is easily solved as convex feasibility and optimization problems. We then apply them to some attitude control problems of LPV and LTV spacecraft systems such as large spacecraft having rotating flexible solar panels, launch vehicles under varying mass property conditions and space structures extended in orbits. Through the numerical studies, we confirm the validity of the proposed design methods. Finally, by confining the Lyapunov based design method developed

for LTV systems to LTI systems, we show that it can be applied to wider class of LTI mechanical systems having skew-symmetric coefficient matrices, compared with existing approaches.

線形力学系の静的出力フィードバック制御による 安定化と最適化に関する研究

高久 雄一

概要

本論文は簡単な構造を持つ静的な出力フィードバック制御によるロバスト安定化および最適化に関する研究結果をまとめる。一般の線形時不変 (LTI) システムでは、この設計問題は NP 困難であることが知られている。しかし、制御対象を 2 階の行列微分方程式で記述できる対称な力学システム： $M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = Lu$ に限定すると、フィードバックゲイン行列が対称のとき、その閉ループ系の係数行列が正定であれば漸近安定となる。そこで、この十分条件を利用して線形行列不等式 (LMI) を解くことで静的出力フィードバック制御系のロバスト安定化、最適化設計を行えることが知られている。本論文ではまず、これまでの知見を線形パラメータ変動 (LPV) の力学システムに拡張して、一般化 KYP 補題を利用した周波数領域における設計法について議論する。次に線形時変 (LTV) 力学システムについて拡張した力学的エネルギーをリアプノフ関数として用いる時間領域の設計法を提案し、いずれも LMI 解法によって効率よく制御系が設計できることを示す。そして、これらの設計法を、回転太陽パネルをもつ人工衛星の姿勢制御、軌道上での伸展中の大型構造物の制御および質量が変動する打ち上げロケットなどの宇宙機の問題に適用して数値シミュレーションによってその有効性を検証する。次に、後者のリアプノフ関数を用いた LTV 力学システムについての設計法を LTI 力学システムの問題に限定することによって、非対称項をもつ力学システム： $M\ddot{q} + (D + G)\dot{q} + (K + N)q = Lu$ を非対称なゲイン行列をもつ静的フィードバック制御によってロバスト安定化できること、最適化制御則も係数行列の性質のみを使って設計できることを示す。これによって LTI システムに対する従来の設計法をより広いクラスの対象に拡張できることになる。そして、この拡張した設計法を用いて、再び宇宙機の問題に適用して数値的に有効性を示す。

目次

第1章	序論	1
1.1	研究背景と研究目的	1
1.2	本論文の構成	2
第2章	問題設定と従来の研究結果	3
2.1	まえがき	3
2.2	線形力学システム	3
2.2.1	線形時不変力学システム	3
2.2.2	線形時変力学システム	4
2.2.3	線形パラメータ変動力学システム	4
2.3	従来の研究結果	5
2.4	問題設定	5
2.5	あとがき	6
第3章	GKYP 補題を用いた周波数領域での設計	7
3.1	まえがき	7
3.2	線形時不変力学系に対する制御器設計	7
3.3	線形パラメータ変動力学系に対する制御器設計	10
3.4	柔軟宇宙機への適用	14
3.5	あとがき	25
第4章	リアプノフ関数に基づく時間領域での設計	26
4.1	まえがき	26
4.2	線形時変力学システムの安定化	26
4.3	L_2 ゲイン性能の最適化	29
4.4	制御器設計	30
4.5	数値評価	33
4.5.1	3 質点システム	33
4.5.2	状態フィードバック制御	33
4.5.3	静的出力フィードバック制御 (2 入力 4 出力)	34
4.5.4	静的出力フィードバック制御 (1 入力 2 出力)	35
4.6	宇宙システムへの適用	39

4.6.1	伸展する宇宙構造物	39
4.6.2	柔軟宇宙機	42
4.6.3	打ち上げロケット	45
4.7	あとがき	48
第5章	線形時不変系への適用	49
5.1	まえがき	49
5.2	線形時不変力学システムへの適用	49
5.3	数値検証	51
5.4	あとがき	59
第6章	結論	60
6.1	結論	60
6.2	今後の研究課題	61
	参考文献	64
	付録A 一般化KYP(GKYP)補題	68
	付録B 柔軟宇宙機	71
B.1	姿勢運動モデル	71
B.2	低次元化	72
B.3	3章で用いるポリトープモデル	73
B.4	4章で用いるポリトープモデル	74
	付録C 全ての係数行列が時変行列のときの制御器設計	78
	付録D 伸展する宇宙構造物	83
D.1	姿勢運動モデル	83
D.2	4章で用いるポリトープモデル	84
	付録E 打ち上げロケット	86
E.1	姿勢運動モデル	86
E.2	4章で用いるポリトープモデル	87

目 次

3.1	ブロック線図	8
3.2	一巡伝達関数の特異値線図 (パドル角 45[deg])	16
3.3	$V(j\omega)S(j\omega)$ の特異値線図 (パドル角 45[deg])	17
3.4	$W(j\omega)T(j\omega)$ の特異値線図 (パドル角 45[deg])	17
3.5	インパルス外乱	18
3.6	インパルス外乱に対する姿勢角応答結果 (初期パドル角度 0[deg])	19
3.7	インパルス外乱に対する制御入力結果 (初期パドル角度 0[deg])	19
3.8	インパルス外乱に対する姿勢角応答結果 (初期パドル角度 90[deg])	20
3.9	インパルス外乱に対する制御入力結果 (初期パドル角度 90[deg])	20
3.10	$w \rightarrow y_d$ の特異値線図 (パドル角 45[deg])	21
3.11	ステップ目標値	21
3.12	参照入力に対する姿勢角応答結果 (初期パドル角 0[deg])	22
3.13	参照入力に対する制御入力結果 (初期パドル角 0[deg])	22
3.14	参照入力に対する姿勢角応答結果 (初期パドル角 90[deg])	23
3.15	参照入力に対する制御入力結果 (初期パドル角 90[deg])	23
3.16	$r \rightarrow y_d$ の特異値線図 (パドル角 45[deg])	24
4.1	状態フィードバック適用時の外乱応答と制御入力 [18]	36
4.2	ϵ と γ の関係	36
4.3	最適な静的出力フィードバック適用時の外乱応答と制御入力 ($\gamma^2 = 2.41$)	37
4.4	最適な静的出力フィードバック適用時の外乱応答と制御入力 ($\gamma^2 = 5$)	37
4.5	最適な静的出力フィードバック適用時の外乱応答と制御入力 (1 入力)	38
4.6	姿勢角応答結果 (伸展する宇宙構造物: $t=0$ [sec])	40
4.7	姿勢角応答結果 (伸展する宇宙構造物: $t=150$ [sec])	40
4.8	制御入力 (伸展する宇宙構造物: $t=0$ [sec])	41
4.9	制御入力 (伸展する宇宙構造物: $t=150$ [sec])	41
4.10	姿勢角 (柔軟宇宙機)	43
4.11	制御入力 (柔軟宇宙機)	43
4.12	姿勢角 (柔軟宇宙機)	44
4.13	制御入力 (柔軟宇宙機)	44
4.14	姿勢角 (打ち上げロケット)	46

4.15	姿勢角速度 (打ち上げロケット)	46
4.16	制御入力 (打ち上げロケット)	47
5.1	開ループ特異値線図	53
5.2	閉ループ特異値線図 (提案手法)	54
5.3	閉ループ特異値線図 (従来手法)	54
5.4	外乱応答結果 (提案手法)	55
5.5	外乱応答結果 (従来手法)	55
5.6	開ループ特異値線図	56
5.7	閉ループ特異値線図 ((5.3) 式による設計)	57
5.8	閉ループ特異値線図 ((5.4) 式による設計)	57
5.9	外乱応答結果 ((5.3) 式による設計)	58
5.10	外乱応答結果 ((5.4) 式による設計)	58
B.1	ETS-VIII の外観図 (C)JAXA	72
B.2	ETS-VIII の開ループ特異値線図 ($u \rightarrow y_d$)	73
B.3	$\Delta_c(t)$ の値とその近似値 (左上:(1,1) 要素, 右下:(4,4) 要素を示す)	75
B.4	$\Delta_c(t)$ の値とその近似値 (左上:(1,1) 要素, 右下:(4,4) 要素を示す)	77
D.1	伸展する宇宙構造物	84
E.1	ロケットモデル	88
E.2	$l_{OG}(t)$ の変動	89
E.3	$l_{GA}(t)$ の変動	89
E.4	$K(t)$ の変動	90
E.5	$L(t)$ の変動	90

表 目 次

4.1	ϵ の可解範囲	35
4.2	伸展する宇宙構造物のパラメータ値	39
A.1	行列 Ψ	69
E.1	M-V ロケット時系列	86
E.2	打ち上げロケットのパラメータ値	87

第1章 序論

1.1 研究背景と研究目的

線形化した機械システムのダイナミクスは2階の行列微分方程式で記述される [1, 2]. 柔軟マニピレータや大型宇宙構造物をはじめとする振動系の力学システムもその一つである [3]. このような振動系のダイナミクスは一般的に多くの振動モードを持つ高次システムとなる. したがって, このモデルに基づいて設計された制御則もまた高次数となり, 実装に支障をきたすことになる. 制御器が高次数となることを回避するために, 一般には高周波数帯域の振動モードを残余モードとして扱い, 高次モデルを低次元化し, 低次元化モデルに対し制御器を設計する手法がとられる. このとき, 低次元化によって無視された残余モードが, 制御系と干渉し閉ループ系が不安定となることが問題となる. このスピルオーバー不安定化問題を抑制するために, 低次元化したモデルに対し, 閉ループ系を安定とすると同時に残余モードに対してロバスト安定性を保証する H_∞ 制御 [4, 5, 6, 7] がよく知られている. H_∞ 制御は閉ループ系の H_∞ ノルムが最小となるように制御則を設計することで, 小ゲイン定理に基づいたロバスト安定性を保証する手法であり, 残余モードの特異値の上界を与えることにより, 高次モデルに対してロバスト安定性を保証する制御則を求めることができる. また, 実システムを正確にモデリングすることは困難であり, モデルには変動やパラメータ誤差が存在する. このような, 制御対象のモデル変動やパラメータ誤差を許容するロバスト制御器の設計も可能である [8, 9, 10, 11]. しかしながら, これらの動的出力フィードバック制御器は高次となり, 実装への負担は大きい. また, 制御系設計にはモデル誤差のノルムの上限を正確に把握する必要があるが, そのためには高精度のシステム同定が不可欠である. 一方, 制御対象を線形時不変 (LTI) の力学システムに限定すれば, その微分方程式の係数行列のみを用いた静的出力フィードバック制御によってロバスト安定性を保証できることが知られている [12, 13, 14, 15, 16]. これらの手法では制御対象のセンサとアクチュエータが同位置, 同方向にあるというコロケーション条件を満たすとき, 物理パラメータに依存せずに, システムの安定性を保証するロバストな制御則を設計することができる. したがって, システムのモデル変動や残余モードの影響を受けずに, システムの安定性を保証できるという特徴がある. しかしながら, 適用できる制御対象は狭いクラスの LTI 力学システムに限定されていた.

そこで本研究では, LTI 力学システムを制御対象としていた静的出力フィードバック制御器の設計に関する従来研究を発展させ, より広いクラスである線形パラ

メータ変動 (LPV) および線形時変 (LTV) 力学システムを制御対象とする静的出力フィードバック制御器の設計法を導出することが目的である。LTV システムに対する制御器設計法は文献 [17, 18] で示されているが, 設計される制御器は状態フィードバック制御器であり, 本研究とは異なる。静的出力フィードバック制御器は簡単な構造であり, またすべての状態量を得る必要がない点で有用である。

1.2 本論文の構成

本論文ではこれまでの知見を線形パラメータ変動 (LPV) の力学システムに拡張して, 一般化 KYP (GKYP) 補題 [19, 20] を利用した周波数領域における設計法と, 線形時変 (LTV) 力学システムについて拡張した力学的エネルギーリアプノフ関数として用いる時間領域の設計法の2つをまず提案して, いずれも LMI 解法によって効率よく制御系が設計できることを示す。そして, これらの設計法を, 回転する太陽電池パドルをもつ人工衛星の姿勢制御, 軌道上での伸展中の大型建造物の制御および質量が変動する打ち上げロケットなどの宇宙機の問題に適用して数値シミュレーションによってその有効性を検証する。次に, リアプノフ関数を用いた後者の設計法を LTI 力学システムの問題に限定することによって, 非対称項をもつ力学システムを非対称なゲイン行列をもつ静的フィードバック制御によってロバスト安定化できること, そして最適化制御則も係数行列の性質のみを使って設計できることを示す。まず1章: 序論に続いて, 本論文の問題設定と従来の研究結果について2章でまとめる。次に3章で, LPV 力学システムの静的出力フィードバック制御の周波数領域での設計法と設計例を示す。これには GKYP 補題を適用する。4章では, 力学的エネルギーを拡張したリアプノフ関数を使った LTV システムの安定条件と L_2 ゲイン最適性条件を導出し, これに基づいて LMI を使った設計法と設計例を示す。5章は4章の結果を LTI システムに適用して従来法よりも広いクラスの制御対象, 制御則に拡張する。最後に, まとめと今後の展望を述べる。

第2章 問題設定と従来の研究結果

2.1 まえがき

本論文では線形力学システムを制御対象とする。線形力学システムは一般的に2階の行列微分方程式で表すことができ、係数行列は質量、減衰、剛性といった物理的意味を持つと同時に、正定や半正定であるという定性的な特徴を持つ。そして、この特徴を使ったパラメータの具体的な数値に依存しない安定条件が知られている [21]。また、センサとアクチュエータがコロケーション条件を満たすとき、静的出力フィードバック制御器を用いて容易にロバスト安定化が可能であることも知られている [12, 13, 14, 15, 16]。本章ではまず、線形力学システムを定義する。次に線形力学システムの特徴を利用した制御器設計に関する従来研究について述べる。そして、本論文で取り扱う問題を設定する。

2.2 線形力学システム

2.2.1 線形時不変力学システム

平衡点近傍で線形化された力学系の運動方程式は一般的に2階の行列微分方程式で表される [1, 2]。運動方程式の係数行列が時間に依存しない線形時不変 (LTI) 力学システムは次のように記述される。

$$M\ddot{q} + (D + G)\dot{q} + (K + N)q = Lu + Fw \quad (2.1)$$

ただし、 $q \in R^n$ は変位ベクトル、 $u \in R^m$ は制御入力ベクトル、 $w \in R^l$ は外乱ベクトルである。係数行列 M, D, G, K, N はそれぞれ慣性、減衰、ジャイロ剛性、剛性、サーキュラ項を表す行列であり、

$$M = M^T > 0, D = D^T, G = -G^T, K = K^T, N = -N^T \quad (2.2)$$

となる力学的特徴を持つ。また、 L, F はそれぞれ制御入力 u 、外乱 w の作用点と方向を表す列フルランクの行列であるとする。また、観測量はアクチュエータとコロケーションされたセンサから

$$y_d = L^T q, y_v = L^T \dot{q} \quad (2.3)$$

と得られるものと仮定する. ただし, y_d, y_v はそれぞれ変位と速度の物理量の観測出力ベクトルである. このような線形時不変システムに対しては, システムの係数行列に着目した静的出力フィードバックによるロバスト安定化の研究が行われてきた [12, 13, 14, 15, 16].

2.2.2 線形時変力学システム

また, 係数行列が時間に依存する線形時変 (LTV) 力学システムは時刻を t として次のように記述できる.

$$M(t)\ddot{q} + (D(t) + G(t))\dot{q} + (K(t) + N(t))q = L(t)u + F(t)w \quad (2.4)$$

係数行列 $M(t), D(t), G(t), K(t), N(t)$ はすべての $t \geq 0$ において

$$M(t) = M^T(t) > 0, \quad D(t) = D^T(t), \quad G(t) = -G^T(t), \quad (2.5)$$

$$K(t) = K^T(t), \quad N(t) = -N^T(t) \quad (2.6)$$

となる力学的特徴を持つ. 観測量はアクチュエータとコロケーションされたセンサから

$$y_d = L^T(t)q, \quad y_v = L^T(t)\dot{q} \quad (2.7)$$

と得られるものとする.

2.2.3 線形パラメータ変動力学システム

また, 運動方程式の係数行列がパラメータ θ に依存する線形パラメータ変動 (LPV) 力学システムは次のように記述できる.

$$M(\theta)\ddot{q} + (D(\theta) + G(\theta))\dot{q} + (K(\theta) + N(\theta))q = L(\theta)u + F(\theta)w \quad (2.8)$$

係数行列 $M(\theta), D(\theta), G(\theta), K(\theta), N(\theta)$ はすべての θ において

$$M(\theta) = M^T(\theta) > 0, \quad D(\theta) = D^T(\theta), \quad G(\theta) = -G^T(\theta), \quad (2.9)$$

$$K(\theta) = K^T(\theta), \quad N(\theta) = -N^T(\theta) \quad (2.10)$$

となる力学的特徴を持つ. 観測量はアクチュエータとコロケーションされたセンサから

$$y_d = L^T(\theta)q, \quad y_v = L^T(\theta)\dot{q} \quad (2.11)$$

と得られるものとする.

2.3 従来の研究結果

線形力学システムの制御に関する従来研究の概要をまとめる.

- 文献 [13]
(2.3) 式のコロケーション条件を満たす LTI 力学システム (2.1) のうち, $N = 0$ と限定したシステムを制御対象としている. そのシステムの係数行列が持つ定性的な特徴に着目し, 対称な行列を制御ゲインとする静的出力フィードバック制御器の設計法が提案されており, 数値シミュレーションによってその制御器の有効性が示されている. また, その制御則によって最適レギュレータが構成できることが示されている.
- 文献 [14, 22]
文献 [13] と同じ (2.3) 式のコロケーション条件を満たす LTI 力学システム (2.1) のうち, $N = 0$ と限定したシステムを制御対象としている. ただし, 出力として変位しか得られない場合を考えている. このとき, システムの係数行列が持つ定性的な特徴を利用した, システムをロバスト安定化する変位の出力フィードバック制御器の設計法が提案されている. しかし, この手法で設計される制御器は動的である.
- 文献 [15]
 $G = 0$, $N = 0$ とした線形力学システムのうち, 質量行列 M がパラメータ変動する線形パラメータ変動 (LPV) システムを制御対象とした研究である. H_∞ 制御理論に基づき, 外乱抑制性能を最適化するパラメータ依存の対称行列を制御ゲインとする静的出力フィードバック制御器の設計法が示されている.
- 文献 [16]
制御対象は文献 [13] と同じ LTI 力学システムである. しかし制御器の構造が異なっており, 変位に対する制御ゲインは対称行列, 速度に対する制御ゲインは非対称行列としている. そして, H_∞ 制御理論に基づき, 外乱抑制性能を最適化する静的出力フィードバック制御器設計法が示されている.

このように, 従来研究が扱ってきた制御対象のクラスは多くの場合 LTI 力学システムであり, かつ, $N = 0$ の場合に限定されている. また, 静的出力フィードバック制御器の構造も, 変位・速度に対する制御ゲインいずれも対称か, 速度に対する制御ゲインのみ対称となる場合のみであり, どちらも非対称の場合は考えられていない.

2.4 問題設定

本論文では, 線形時変システムに対する静的出力フィードバック制御器の設計問題を扱う. まず, LTV 力学システム (2.4), (2.7) 式に適用する時変の静的出力フィー

ドバック制御器を

$$u = -K_c(t)y_d - D_c(t)y_v \quad (2.12)$$

と定義する. ただし, $K_c(t)$, $D_c(t)$ はすべての $t \geq 0$ において以下の条件を満たす時変のフィードバックゲイン行列とする.

$$K_c(t) + K_c^T(t) > 0, \quad D_c(t) + D_c^T(t) > 0 \quad (2.13)$$

ここで正方行列 $K_c(t)$, $D_c(t)$ をそれぞれ対称行列 $K_s(t)$, $D_s(t)$ および歪対称行列 $K_w(t)$, $D_w(t)$ に分割し, 以下のように定義する.

$$\begin{aligned} K_c(t) &= K_s(t) + K_w(t), \quad D_c(t) = D_s(t) + D_w(t) \\ K_s(t) &= \frac{1}{2} (K_c(t) + K_c^T(t)), \quad K_w(t) = \frac{1}{2} (K_c(t) - K_c^T(t)) \\ D_s(t) &= \frac{1}{2} (D_c(t) + D_c^T(t)), \quad D_w(t) = \frac{1}{2} (D_c(t) - D_c^T(t)) \end{aligned} \quad (2.14)$$

すると, (2.4), (2.7), (2.12) 式からなる閉ループ系は

$$M(t)\ddot{q} + (\tilde{D}(t) + \tilde{G}(t))\dot{q} + (\tilde{K}(t) + \tilde{N}(t))q = Fw \quad (2.15)$$

と与えられる. ただし,

$$\begin{aligned} \tilde{D}(t) &= D(t) + L(t)D_s(t)L^T(t), \quad \tilde{G}(t) = G(t) + L(t)D_w(t)L^T(t) \\ \tilde{K}(t) &= K(t) + L(t)K_s(t)L^T(t), \quad \tilde{N}(t) = N(t) + L(t)K_w(t)L^T(t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

である. 本論文では閉ループ系 (2.15) の安定化, 最適化を考える. 一方, LPV 力学システム (2.8), (2.11) 式に適用する静的出力フィードバック制御は

$$u = -K_c(\theta)y_d - D_c(\theta)y_v \quad (2.17)$$

と定義し, 同様に得られる閉ループ系

$$M(\theta)\ddot{q} + (\tilde{D}(\theta) + \tilde{G}(\theta))\dot{q} + (\tilde{K}(\theta) + \tilde{N}(\theta))q = Fw \quad (2.18)$$

の安定化, 最適化問題を考える.

2.5 あとがき

本論文で制御対象とする線形力学システムが2階の行列微分方程式で記述されることを述べた. そして, システムの係数行列が持つ特徴を利用した制御器設計法に関する従来研究の結果をまとめ, 本論文で扱う問題を定めた.

第3章 GKYP 補題を用いた周波数領域での設計

3.1 まえがき

本章では, LPV 力学システムを制御対象として, GKYP 補題 (付録 A) を用いた正定対称なフィードバックゲイン行列を持つ最適な静的出力フィードバック制御器の周波数領域での設計法を示す. GKYP 補題は有限周波数帯域で与えられた周波数特性条件を, それと等価な LMI 条件に変換するものである. 線形時不変力学システムに対しては, 正定対称なフィードバックゲイン行列を持つ静的出力フィードバックを施すことでロバスト安定化が可能である. そのゲインを決定するためには, 何らかの設計指標を定める必要がある. そこで, 本論文では標準的な H_∞ 問題で用いられる, 混合感度問題を用いて制御器の最適化をはかる. しかし, 混合感度問題を適用して得る閉ループ系の設計仕様では, 静的出力フィードバック制御器の設計問題は BMI となり, 設計は困難である. この問題を回避するために, 開ループ一巡伝達関数を用いて, その設計仕様を表す. そして, 有限周波数帯域で与えられた周波数特性条件を扱うことができる GKYP 補題を用いて, 設計仕様を LMI 条件で表す. その LMI を解き, 低周波数帯域と高周波数帯域で異なる制御仕様を満たすことができる制御器を設計する. まず, LTI 力学システムに対する設計法を示し, 続いてそれを LPV 力学システムに拡張する. 最後に, LPV 力学システムである柔軟宇宙機の数値モデルを用いてシミュレーションを実施し, 有効性を検証する.

3.2 線形時不変力学系に対する制御器設計

まず LTI 力学システムの H_∞ 混合感度問題を考える. そのための標準的な一般化プラントは図 3.1 のように表現できる. ここで, $P(s)$ は制御対象, $V(s)$, $W(s)$ は重み関数, C_{dv} はコントローラを表す. 外乱 w から制御量 z_S , z_T までの閉ループ系によって, 混合感度問題は次式で定義される.

$$\left\| \begin{array}{c} V(s)S(s) \\ W(s)T(s) \end{array} \right\|_\infty < 1 \quad (3.1)$$

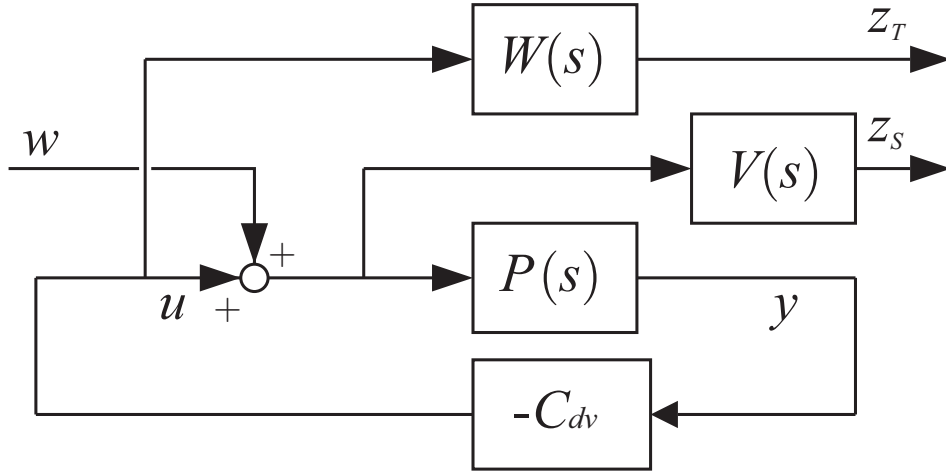


図 3.1 ブロック線図

最大特異値を $\bar{\sigma}(\cdot)$ で表すこととすると, (3.1) 式と以下の式は等価である.

$$\bar{\sigma}(V(j\omega)S(j\omega)) < 1, \omega < \omega_l \quad (3.2)$$

$$\bar{\sigma}(W(j\omega)T(j\omega)) < 1, \omega > \omega_h \quad (3.3)$$

ただし, ω_l, ω_h はそれぞれ低周波数帯域の上限, 高周波数帯域の下限を表す. 一般的な H_∞ 動的出力フィードバック制御器の設計法では, 閉ループ系の設計条件 (3.1) を有界実補題に適用し, LMI を解くことによって最適制御器を設計することができる [23]. しかしながら, 静的出力フィードバック制御器の設計を考えると, その設計問題は行列変数と設計変数である制御器ゲイン行列の積を含む BMI となるため最適制御器を設計するのは困難である. この問題を回避するために, 閉ループ系の設計条件 (3.2), (3.3) を開ループ一巡伝達関数 $L_t(s)$ を用いた設計条件で表現する. その結果, (3.2) 式は, $\underline{\sigma}(\cdot)$ を最小特異値として

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(V(j\omega)S(j\omega)) < 1, \omega < \omega_l \\ \Leftrightarrow \underline{\sigma}(L_t(j\omega)) > \bar{\sigma}(V(j\omega)) + 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

と表される. 同様に, (3.3) 式の条件は

$$\bar{\sigma}(W(j\omega)T(j\omega)) < 1, \omega > \omega_h \quad (3.5a)$$

$$\Leftrightarrow \bar{\sigma}(W(j\omega))\bar{\sigma}(T(j\omega)) < 1 \quad (3.5b)$$

$$\Leftrightarrow \bar{\sigma}(W(j\omega))\bar{\sigma}((I + L_t(j\omega))^{-1})\bar{\sigma}(L_t(j\omega)) < 1 \quad (3.5c)$$

$$\Leftrightarrow \bar{\sigma}(W(j\omega))\frac{\bar{\sigma}(L_t(j\omega))}{1 - \bar{\sigma}(L_t(j\omega))} < 1, \bar{\sigma}(L_t(j\omega)) < 1 \quad (3.5d)$$

$$\Leftrightarrow \bar{\sigma}(L_t(j\omega)) < \frac{1}{\bar{\sigma}(W(j\omega)) + 1} \quad (3.5e)$$

となる。以上の関係より, (3.2), (3.3) 式の十分条件が以下のように得られる。

$$\underline{\sigma}(L_t(j\omega)) > \gamma_l > \overline{\sigma}(V(j\omega)), \quad \omega < \omega_l \quad (3.6)$$

$$\overline{\sigma}(L_t(j\omega)) < \gamma_h < \frac{1}{\overline{\sigma}(W(j\omega))}, \quad \omega > \omega_h \quad (3.7)$$

GKYP 補題を用いることによって, (3.6), (3.7) 式と等価の LMI を求められる。設計のために, システム

$$M\ddot{q} + (D + G)\dot{q} + (K + N)q = L(u + w) \quad (3.8)$$

$$u = -K_s y_d - D_s y_v \quad (3.9)$$

の開ループ一巡伝達関数 $L_t(s)$ をディスクリプタ方程式によって表現すると¹,

$$E\dot{x} = Ax + B(u + w) \quad (3.10)$$

$$u = Cx$$

となる。ただし, $x = [q^T \dot{q}^T]^T$ であり

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -(K + N) & -(D + G) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -K_s L^T & -D_s L^T \end{bmatrix}$$

である。ディスクリプタ方程式 (3.10) を用いて, はじめに GKYP 補題を高周波数帯域での設計条件

$$\overline{\sigma}(L_t(j\omega)) < \gamma_h, \quad |\omega| > \omega_h \quad (3.12)$$

に適用すると, 以下の LMI を求められる。

$$\begin{bmatrix} A^T Q A + Y - \omega_h^2 X & A^T Q B + Z & C^T \\ B^T Q A + Z^T & B^T Q B - \gamma_h^2 I & 0 \\ C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.13)$$

ただし, $P = P^T, Q = Q^T > 0$ であり

$$X = E^T Q E, \quad Y = A^T P E + E^T P A, \quad Z = E^T P B \quad (3.14)$$

である。一方, 低周波数帯域での設計仕様は

$$\underline{\sigma}(L_t(j\omega)) > \gamma_l, \quad |\omega| < \omega_l \quad (3.15)$$

¹ディスクリプタ方程式を用いることで, システムの係数行列が変動するとき (3.3), 行列 $M(\theta)$ の変動を行列 $E(\theta)$ に局所化できる。また, $M(\theta)$ の逆行列を扱う必要がないという利点がある。

となる. しかしながら, (3.15) 式は GKYP 補題を用いて LMI を導出するときの制約を満たさない. そこで, 感度低減のための近似条件

$$\Im[L_t(j\omega)] < \tilde{\gamma}_l I, \quad \omega_{l1} \leq \omega \leq \omega_{l2} \quad (3.16)$$

を用いる. $\Im[L_t(j\omega)]$ は $L_t(j\omega)$ の虚数部を表す. GKYP 補題を (3.16) 式に適用し, 以下の LMI を得る.

$$\mu + j\nu < 0 \quad (3.17)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \mu &= \begin{bmatrix} -A^T Q A + Y - \omega_{l1} \omega_{l2} X & -A^T Q B + Z \\ -B^T Q A + Z^T & -B^T Q B + \tilde{\gamma}_l I \end{bmatrix} \\ \nu &= \begin{bmatrix} \omega_c H_a^T - \omega_c H_a & -\omega_c H_b + \frac{1}{2} C^T \\ \omega_c H_b^T - \frac{1}{2} C^T & 0 \end{bmatrix} \\ H_a &= E^T Q A, \quad H_b = E^T Q B, \quad \omega_c = \frac{\omega_{l1} + \omega_{l2}}{2} \end{aligned}$$

である. ここで, 複素 LMI(3.17) 式は以下の実 LMI と等価である [24].

$$\mu + j\nu < 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{bmatrix} < 0 \quad (3.18)$$

まとめると, (3.13), (3.17) 式, および $K_s > 0$, $D_s > 0$, $Q = Q^T > 0$ の LMI を連立し, γ_h または $\tilde{\gamma}_l$ に対する凸最適化計算により制御器を求める.

3.3 線形パラメータ変動力学系に対する制御器設計

次に, 上記の LTI 力学システムについての考え方をを用いて, 変動パラメータ θ に依存する LPV 力学システム

$$M(\theta)\ddot{q} + (D(\theta) + G(\theta))\dot{q} + (K(\theta) + N(\theta))q = L(\theta)u + F(\theta)w \quad (3.19)$$

に設計法を拡張する. フィードバックゲイン行列 $K_s(\theta)$, $D_s(\theta)$ もパラメータ依存とする. このとき, ディスクリプタ方程式の係数行列は

$$\begin{aligned} E(\theta) &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(\theta) \end{bmatrix}, \quad A(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -(K(\theta) + N(\theta)) & -(D(\theta) + G(\theta)) \end{bmatrix} \\ B(\theta) &= \begin{bmatrix} 0 \\ L(\theta) \end{bmatrix}, \quad C(\theta) = \begin{bmatrix} -K_s(\theta)L^T(\theta) & -D_s(\theta)L^T(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.20)$$

となる. ここで, システム (3.19) の係数行列が

$$\begin{aligned} M(\theta) &= M_n + M_\Delta(\theta), \quad D(\theta) = D_n + D_\Delta(\theta), \quad G(\theta) = G_n + G_\Delta(\theta), \\ K(\theta) &= K_n + K_\Delta(\theta), \quad N(\theta) = N_n + N_\Delta(\theta), \quad L(\theta) = L_n + L_\Delta(\theta), \\ F(\theta) &= F_n + F_\Delta(\theta) \end{aligned}$$

と表されるとし, その変動はゆるやかであると仮定する. ただし, $M_n, D_n, G_n, K_n, N_n, L_n, F_n$ はそれぞれのノミナル値, $M_\Delta(\theta), D_\Delta(\theta), G_\Delta(\theta), K_\Delta(\theta), N_\Delta(\theta), L_\Delta(\theta), F_\Delta(\theta)$ はパラメータ θ による摂動とする. このとき, GKYP 補題を (3.12) 式に適用すると, 高周波帯域の条件

$$\begin{bmatrix} A^T(\theta)QA(\theta) + Y(\theta) - \omega_h^2 X(\theta) & A^T(\theta)QB(\theta) + Z(\theta) & C^T(\theta) \\ B^T(\theta)QA(\theta) + Z^T(\theta) & B^T(\theta)QB(\theta) - \gamma_h^2 I & 0 \\ C(\theta) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.21)$$

が得られる. ただし, $P = P^T$, $Q = Q^T > 0$ であり,

$$X(\theta) = E^T(\theta)QE(\theta), \quad Y(\theta) = A^T(\theta)PE(\theta) + E^T(\theta)PA(\theta), \quad (3.22)$$

$$Z(\theta) = E^T(\theta)PB(\theta) \quad (3.23)$$

である. 係数行列が有界であると仮定すると, 以下のポリトープモデルで表現できる.

$$M(\theta) = \sum_{i=1}^{\zeta} \alpha_i(\theta)M_i, \quad \alpha_i(\theta) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\zeta} \alpha_i(\theta) = 1 \quad (3.24)$$

$$D(\theta) = \sum_{i=1}^{\zeta} \alpha_i(\theta)D_i, \quad K(\theta) = \sum_{i=1}^{\zeta} \alpha_i(\theta)K_i, \quad G(\theta) = \sum_{i=1}^{\zeta} \alpha_i(\theta)G_i \quad (3.25)$$

$$N(\theta) = \sum_{i=1}^{\zeta} \alpha_i(\theta)N_i, \quad L(\theta) = \sum_{i=1}^{\zeta} \alpha_i(\theta)L_i, \quad F(\theta) = \sum_{i=1}^{\zeta} \alpha_i(\theta)F_i \quad (3.26)$$

$$K_s(\theta) = \sum_{i=1}^{\zeta} \alpha_i(\theta)K_{si}, \quad D_s(\theta) = \sum_{i=1}^{\zeta} \alpha_i(\theta)D_{si} \quad (3.27)$$

これより, $E(\theta), X(\theta), Y(\theta), Z(\theta), C(\theta)$ は

$$\begin{aligned}
E(\theta) &= \sum_{i=1}^{\zeta} \alpha_i(\theta) E_i \\
X(\theta) &= \sum_{i=1}^{\zeta} \sum_{k=i+1}^{\zeta} \alpha_i^2(\theta) X_i + \alpha_i(\theta) \alpha_k(\theta) (X_{ik} + X_{ki}) \\
Y(\theta) &= \sum_{i=1}^{\zeta} \sum_{k=i+1}^{\zeta} \alpha_i^2(\theta) Y_i + \alpha_i(\theta) \alpha_k(\theta) (Y_{ik} + Y_{ki}) \\
Z(\theta) &= \sum_{i=1}^{\zeta} \sum_{k=i+1}^{\zeta} \alpha_i^2(\theta) Z_i + \alpha_i(\theta) \alpha_k(\theta) (Z_{ik} + Z_{ki}) \\
C(\theta) &= \sum_{i=1}^{\zeta} \sum_{k=i+1}^{\zeta} \alpha_i^2(\theta) C_i + \alpha_i(\theta) \alpha_k(\theta) (C_{ik} + C_{ki})
\end{aligned} \tag{3.28}$$

と書ける. ただし,

$$\begin{aligned}
E_i &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M_i \end{bmatrix}, \\
X_i &= E_i Q E_i, \quad X_{ik} = E_i Q E_k, \quad X_{ki} = E_k Q E_i \\
Y_i &= A_i^T P E_i + E_i^T P A_i, \quad Y_{ik} = A_i^T P E_k + E_i^T P A_k, \quad Y_{ki} = A_k^T P E_i + E_k^T P A_i, \\
Z_i &= E_i^T P B_i, \quad Z_{ik} = E_i^T P B_k, \quad Z_{ki} = E_k^T P B_i \\
A_i &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -(K_i + N_i) & -(D_i + G_i) \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ L_i \end{bmatrix} \\
C_i &= -[K_{ci} F_i \quad D_{ci} F_i], \quad C_{ik} = -[K_{si} F_k \quad D_{si} F_k], \quad C_{ki} = -[K_{sk} F_i \quad D_{sk} F_i]
\end{aligned}$$

である. すると, (3.21) 式は

$$\sum_{i=1}^{\zeta} \alpha_i^2(\theta) \Xi_{hi} + \sum_{i=1}^{\zeta} \sum_{k=i+1}^{\zeta} \alpha_i(\theta) \alpha_k(\theta) (\Xi_{hik} + \Xi_{hki}) < 0 \tag{3.29}$$

と得られる. ただし, $\Xi_{hi}, \Xi_{hik}, \Xi_{hki}$ は次の通りである.

$$\Xi_{hi} = \begin{bmatrix} A_i^T Q A_i + Y_i - \omega_h^2 X_i & A_i^T Q B_i + Z_i & C_i^T \\ B_i^T Q A_i + Z_i^T & B_i^T Q B_i - \gamma_h^2 I & 0 \\ C_i & 0 & -I \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\Xi_{hik} = \begin{bmatrix} A_i^T Q A_k + Y_{ik} - \omega_h^2 X_{ik} & A_i^T Q B_k + Z_{ik} & C_{ik}^T \\ B_k^T Q A_i + Z_{ik}^T & B_i^T Q B_k - \gamma_h^2 I & 0 \\ C_{ik} & 0 & -I \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\Xi_{hki} = \begin{bmatrix} A_k^T Q A_i + Y_{ki} - \omega_h^2 X_{ki} & A_k^T Q B_i + Z_{ki} & C_{ki}^T \\ B_i^T Q A_k + Z_{ki}^T & B_k^T Q B_i - \gamma_h^2 I & 0 \\ C_{ki} & 0 & -I \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

したがって, 不等式条件 (3.29) は

$$\begin{aligned} \Xi_{hi} &< 0, i = 1, \dots, \zeta \\ \Xi_{hik} + \Xi_{hki} &< 0, i = 1, \dots, \zeta, k = i + 1, \dots, \zeta. \end{aligned} \quad (3.33)$$

と LMI で記述される.

次に, (3.15) 式に GKYP 補題を適用し, 低周波数帯域の設計条件

$$\mu(\theta) + j\nu(\theta) < 0 \quad (3.34)$$

を得る. ただし,

$$\begin{aligned} \mu(\theta) &= \begin{bmatrix} -A^T(\theta)QA(\theta) + Y(\theta) - \omega_{l1}\omega_{l2}X(\theta) & -A^T(\theta)QB(\theta) + Z(\theta) \\ -B^T(\theta)QA(\theta) + Z^T(\theta) & -B^T(\theta)QB(\theta) + \tilde{\gamma}_l I \end{bmatrix} \\ \nu(\theta) &= \begin{bmatrix} \omega_c H_a^T(\theta) - \omega_c H_a(\theta) & -\omega_c H_b(\theta) + \frac{1}{2}C^T(\theta) \\ \omega_c H_b^T(\theta) - \frac{1}{2}C^T(\theta) & 0 \end{bmatrix} \\ H_a(\theta) &= E^T(\theta)QA(\theta), H_b = E^T(\theta)QB(\theta) \end{aligned}$$

であり, ポリトープ表現 (3.24), (3.25), (3.26), (3.27) 式を適用すると,

$$\mu(\theta) = \sum_{i=1}^{\zeta} \sum_{k=i+1}^{\zeta} \alpha_i^2(\theta) \mu_i + \alpha_i(\theta) \alpha_k(\theta) (\mu_{ik} + \mu_{ki}), \quad (3.35)$$

$$\nu(\theta) = \sum_{i=1}^{\zeta} \sum_{k=i+1}^{\zeta} \alpha_i^2(\theta) \nu_i + \alpha_i(\theta) \alpha_k(\theta) (\nu_{ik} + \nu_{ki}) \quad (3.36)$$

である. ここで, (3.28) 式より

$$\begin{aligned}\mu_i &= \begin{bmatrix} -A_i^T Q A_i + Y_i - \omega_{l1} \omega_{l2} X_i & -A_i^T Q B_i + Z_i \\ B_i^T Q A_i + Z_i^T & -B_i^T Q B_i + \tilde{\gamma}_l I \end{bmatrix} \\ \mu_{ik} &= \begin{bmatrix} -A_i^T Q A_k + Y_{ik} - \omega_{l1} \omega_{l2} X_{ik} & -A_i^T Q B_k + Z_{ik} \\ B_k^T Q A_i + Z_{ik}^T & -B_i^T Q B_k + \tilde{\gamma}_l I \end{bmatrix} \\ \mu_{ki} &= \begin{bmatrix} -A_k^T Q A_i + Y_{ki} - \omega_{l1} \omega_{l2} X_{ki} & -A_k^T Q B_i + Z_{ki} \\ B_i^T Q A_k + Z_{ki}^T & -B_k^T Q B_i + \tilde{\gamma}_l I \end{bmatrix} \\ \nu_i &= \begin{bmatrix} \omega_c H_{ai}^T - \omega_c H_{ai} & -\omega_c H_{bi} + \frac{1}{2} C_i^T \\ \omega_c H_{bi}^T - \frac{1}{2} C_i & 0 \end{bmatrix} \\ \nu_{ik} &= \begin{bmatrix} \omega_c H_{aik}^T - \omega_c H_{aik} & -\omega_c H_{bik} + \frac{1}{2} C_{ik}^T \\ \omega_c H_{bik}^T - \frac{1}{2} C_{ik} & 0 \end{bmatrix} \\ \nu_{ki} &= \begin{bmatrix} \omega_c H_{aki}^T - \omega_c H_{aki} & -\omega_c H_{bki} + \frac{1}{2} C_{ki}^T \\ \omega_c H_{bki}^T - \frac{1}{2} C_{ki} & 0 \end{bmatrix} \\ H_{ai} &= E_i^T Q A_i, \quad H_{aik} = E_i^T Q A_k, \quad H_{aki} = E_k^T Q A_i \\ H_{bi} &= E_i^T Q B, \quad H_{bik} = E_i^T Q B_k, \quad H_{bki} = E_k^T Q B_i\end{aligned}$$

である. 以上より, (3.34) 式は

$$\sum_{i=1}^{\zeta} \alpha_i^2(\theta) \Xi_{li} + \sum_{i=1}^{\zeta} \sum_{k=i+1}^{\zeta} \alpha_i(\theta) \alpha_k(\theta) (\Xi_{lik} + \Xi_{lki}) < 0 \quad (3.37)$$

となる. 行列 $\Xi_{li}, \Xi_{lik}, \Xi_{lki}$ は以下の通りである.

$$\Xi_{li} = \begin{bmatrix} \mu_i & \nu_i \\ -\nu_i & \mu_i \end{bmatrix}, \quad \Xi_{lik} = \begin{bmatrix} \mu_{ik} & \nu_{ik} \\ -\nu_{ik} & \mu_{ik} \end{bmatrix}, \quad \Xi_{lki} = \begin{bmatrix} \mu_{ki} & \nu_{ki} \\ -\nu_{ki} & \mu_{ki} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

したがって, LMI 条件が

$$\begin{aligned}\Xi_{li} &< 0, \quad i = 1, \dots, \zeta \\ \Xi_{lik} + \Xi_{lki} &< 0, \quad i = 1, \dots, \zeta, \quad k = i + 1, \dots, \zeta\end{aligned} \quad (3.39)$$

と得られる. 以上より, 最適制御器は (3.33), (3.39) 式, $K_s(\theta) > 0$, $D_s(\theta) > 0$, $Q = Q^T > 0$ のもと, γ_h または, $\tilde{\gamma}_l$ に対する凸最適化計算を行なうことで求められる. 制御器のみを時不変としても設計は可能である.

3.4 柔軟宇宙機への適用

ここでは, 前節 3.3 で導出した設計法を付録 B に示す大型柔軟衛星 ETS-VIII の数値モデルに適用する. 設計には付録 (B.3) に示したポリトープモデルを用いる.

設計パラメータを $\omega_h = 10$, $\gamma_h = 10^{-1/2}$, $\omega_{l1} = 0.05$, $\omega_{l2} = 0.1$ と定める. また, 重み関数 $V(s)$ は単位行列, $W(s)$ は

$$W_{ii}(s) = \frac{3s + 10}{s + 10} \quad (3.40)$$

を要素とする対角行列とする. 以上より, 設計仕様は次のようになる.

$$|L(j\omega)| < 10^{-1/2} : |\omega| \geq 10 \quad (3.41)$$

$$\Im[L(j\omega)] < \tilde{\gamma}_l : 0.05 \leq \omega \leq 0.1 \quad (3.42)$$

GKYP 補題を (3.41), (3.42) 式に適用し, $\tilde{\gamma}_l$ を最小化する解を求めた. 制御器設計の際に用いるシステムの係数行列のノミナル値はパドル角 45[deg] のときのものを用い, 角速度は 360/24[deg/hour] とし, フィードバックゲイン行列 K_s , D_s を定数とした時不変制御器 (LTI-DVDFB) とパラメータ依存のゲイン行列 $K_s(\theta)$, $D_s(\theta)$ を用いたゲインスケジューリング制御器 (GS-DVDFB) の2つの制御器を設計した. いずれの場合も, 最小値 $\tilde{\gamma}_l = -0.1000$ を得た. パドル角 45[deg] のときの $L_t(j\omega)$ の特異値線図と γ_h を図 3.2, $V(j\omega)S(j\omega)$, $W(j\omega)T(j\omega)$ の特異値線図を図 3.3, 図 3.4 に示す. 図 3.2, 3.3, 3.4 では, 上が LTI-DVDFB, 下が GS-DVDFB の結果を表す. どちらの制御器も開ループの設計条件 (3.41), (3.42) 式および閉ループの設計条件 (3.2), (3.3) 式を満たすことが確認できる. それぞれの制御器の性能を比較するために, パドルの初期角度が 0, 90[deg] のときの図 3.5 に示す外乱入力に対する応答を求めた. その結果を図 3.6 から図 3.9 に示す. どちらの制御器もすべての初期角に対して ETS-VIII の最大姿勢制御トルク 0.04[Nm] を飽和することなく, 姿勢角度精度 0.05[deg] を満たしていることがわかる. これより, LPV 宇宙機に対して制御器がうまく働いていることがわかる. しかしながら, 外乱抑制性能については GS-DVDFB の方が LTI-DVDFB より優れている. これはパドル角 45[deg] のときの w から y_d の特異値線図 3.10 の DC ゲインからも確認できる. 次に, 図 3.11 に示す参照入力に対するステップ目標値応答を図 3.12 から図 3.15 に示す. 制御器が LPV システムに対してうまく働いていることがわかる. また, GS-DVDFB の方が立ち上がり時間が短くなっている. この事実は, パドル角 45[deg] のときの r から y_d の特異値線図 3.16 から確認でき, GS-DVDFB の方がバンド幅が広く, ピークゲインが大きい結果となっている.

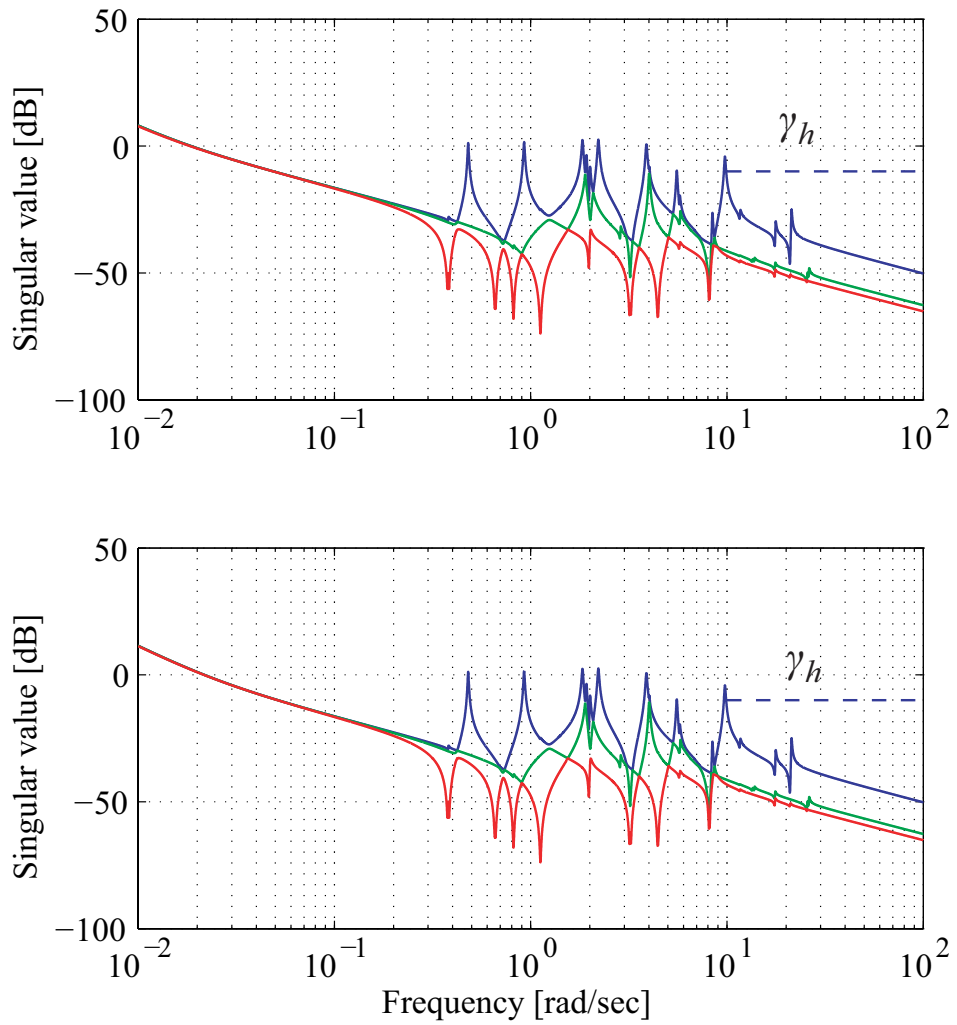


図 3.2 一巡伝達関数の特異値線図 (パドル角 45[deg])

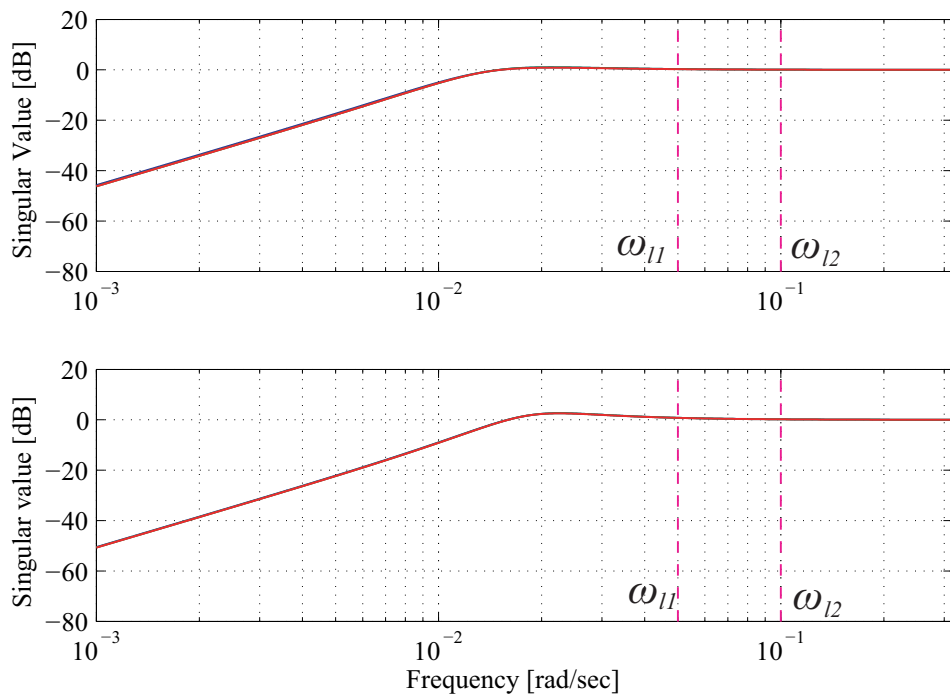


図 3.3 $V(j\omega)S(j\omega)$ の特異値線図 (パドル角 45[deg])

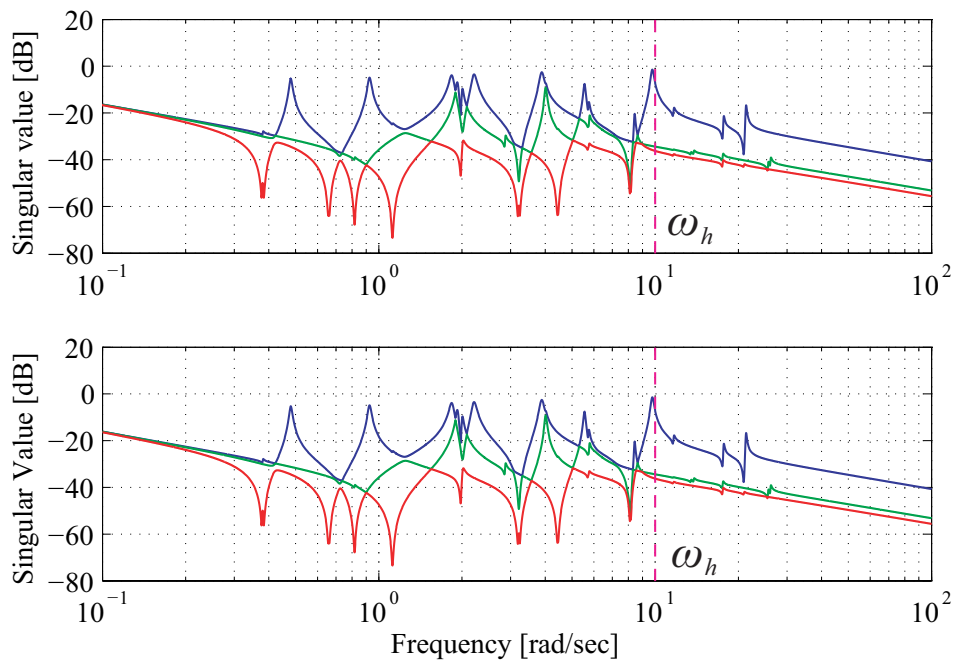


図 3.4 $W(j\omega)T(j\omega)$ の特異値線図 (パドル角 45[deg])

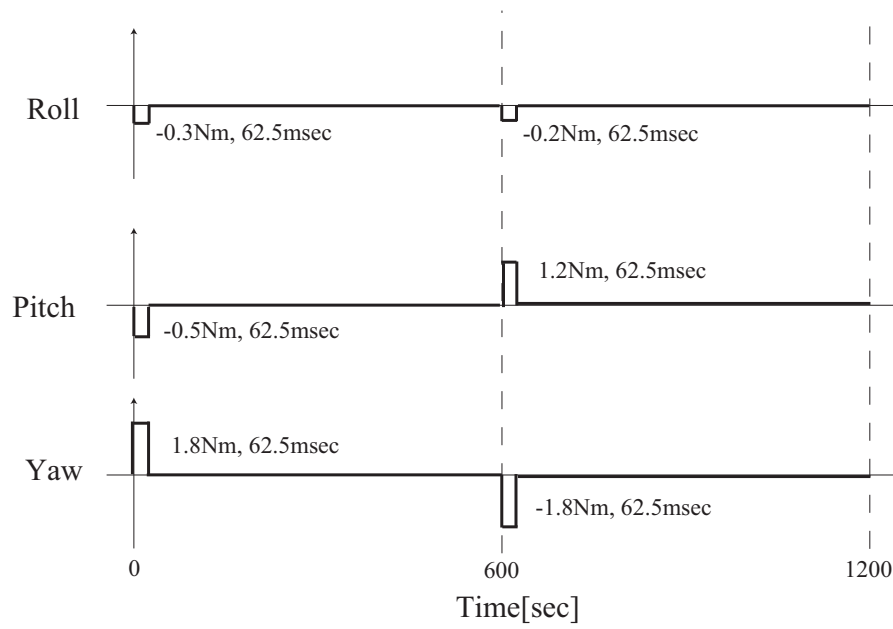


図 3.5 インパルス外乱

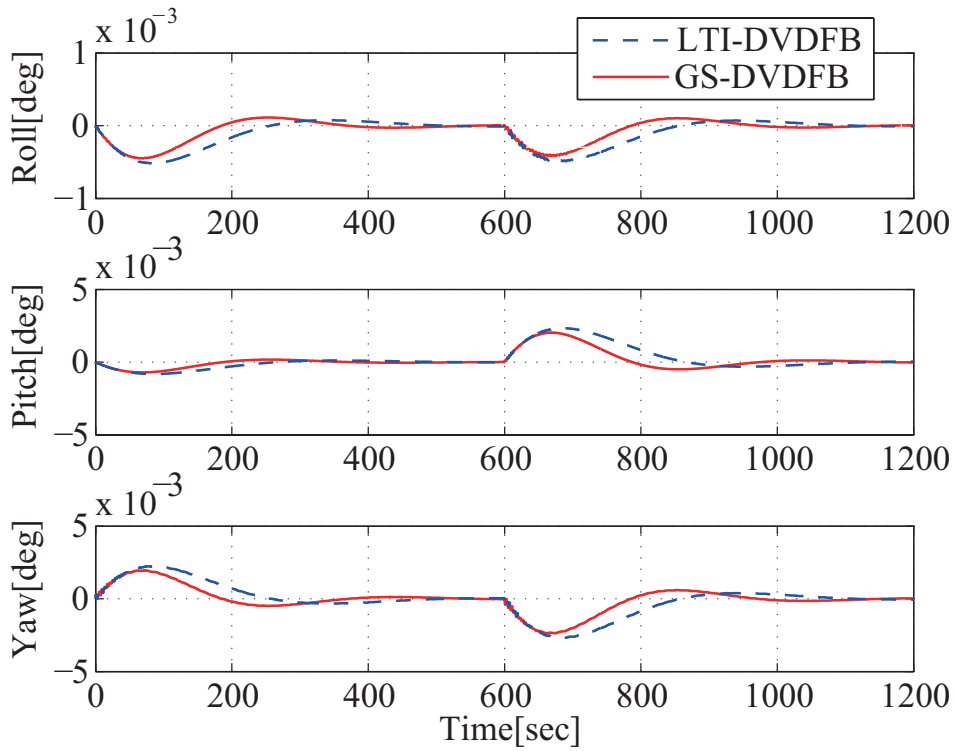


図 3.6 インパルス外乱に対する姿勢角応答結果 (初期パドル角度 0[deg])

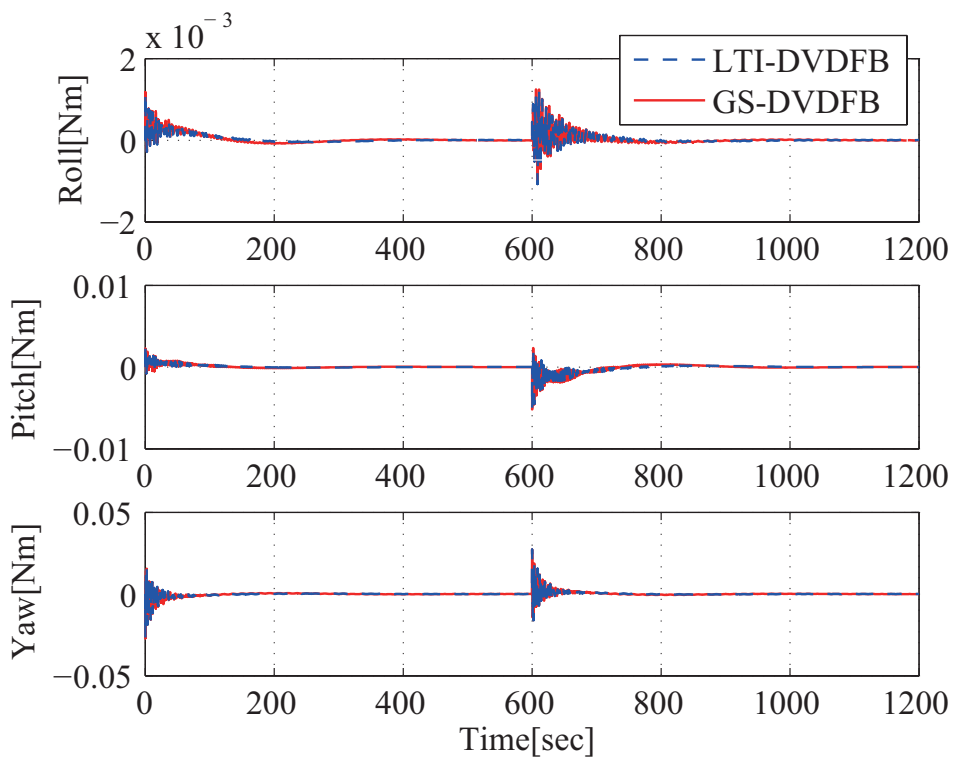


図 3.7 インパルス外乱に対する制御入力結果 (初期パドル角度 0[deg])

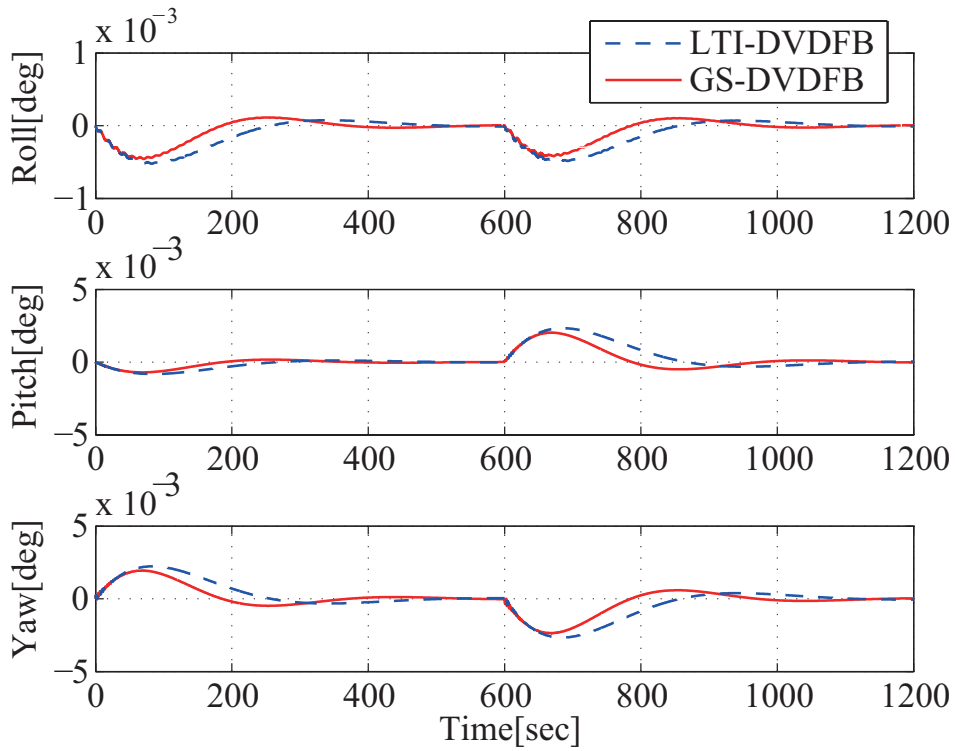


図 3.8 インパルス外乱に対する姿勢角応答結果 (初期パドル角度 90[deg])

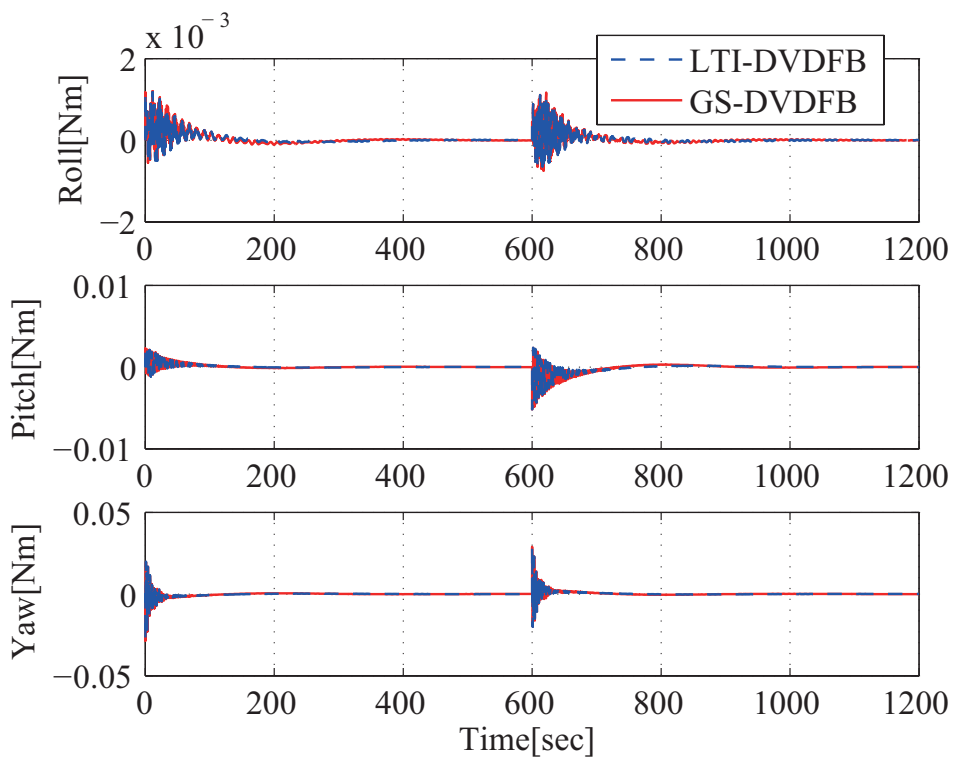


図 3.9 インパルス外乱に対する制御入力結果 (初期パドル角度 90[deg])

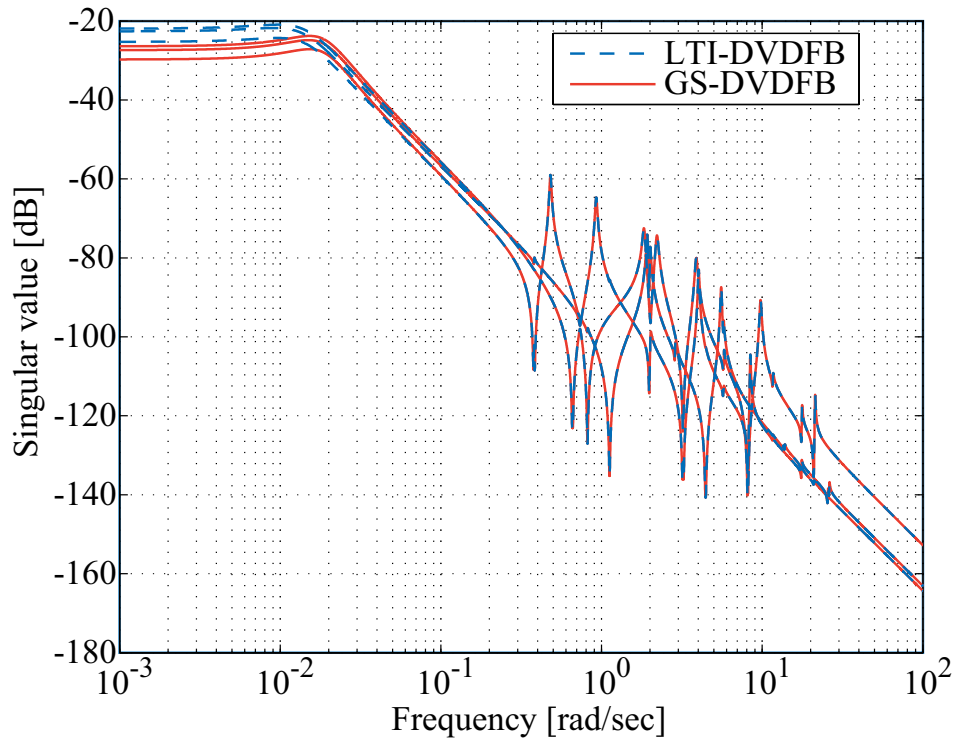


図 3.10 $w \rightarrow y_d$ の特異値線図 (パドル角 45[deg]).

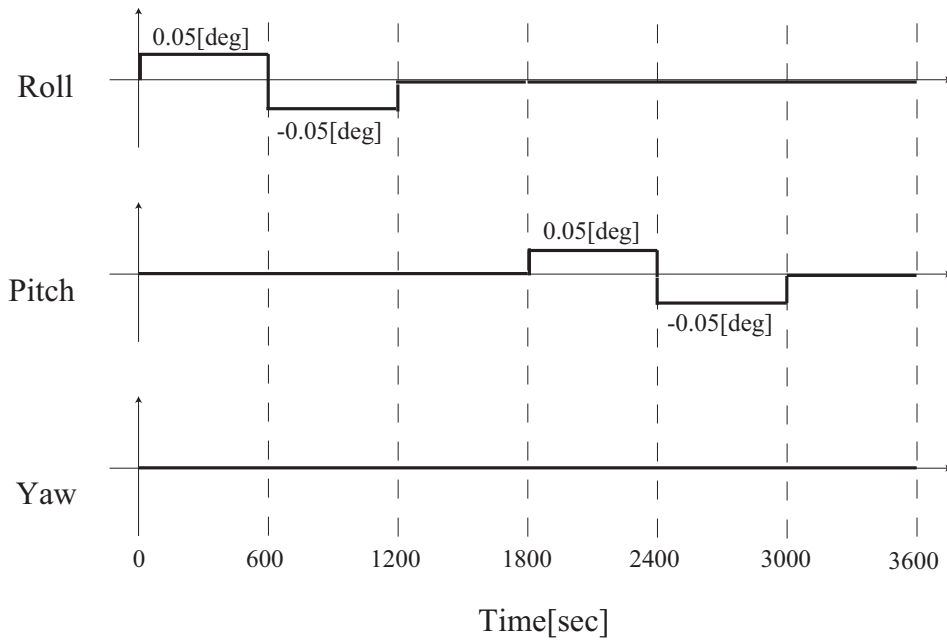


図 3.11 ステップ目標値

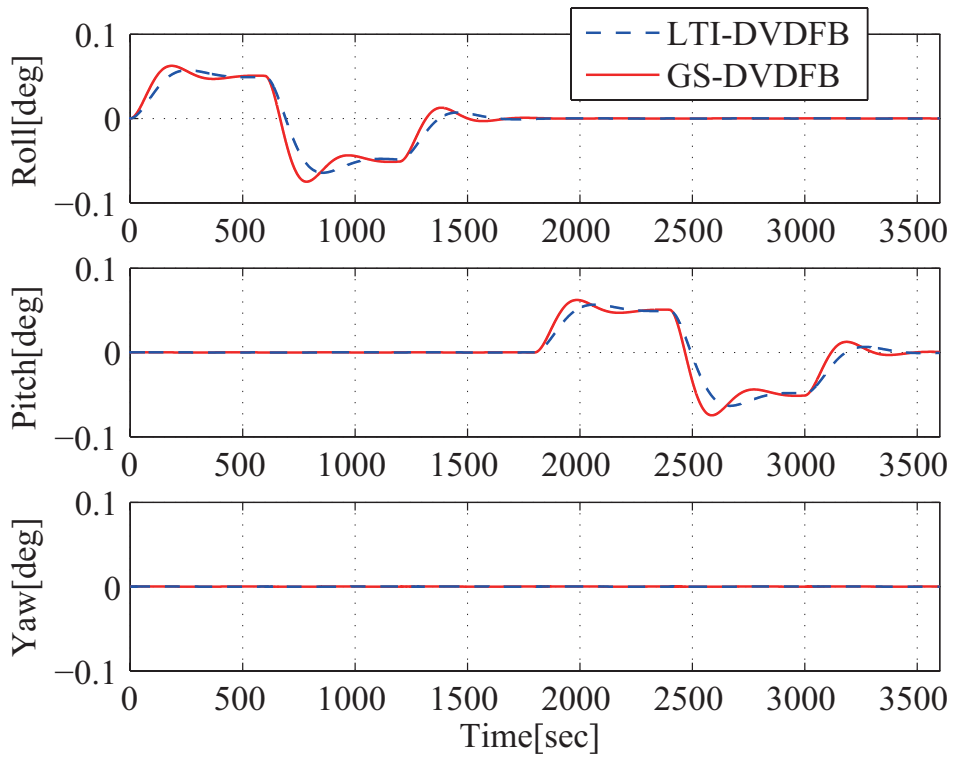


図 3.12 参照入力に対する姿勢角応答結果 (初期パドル角 0[deg])

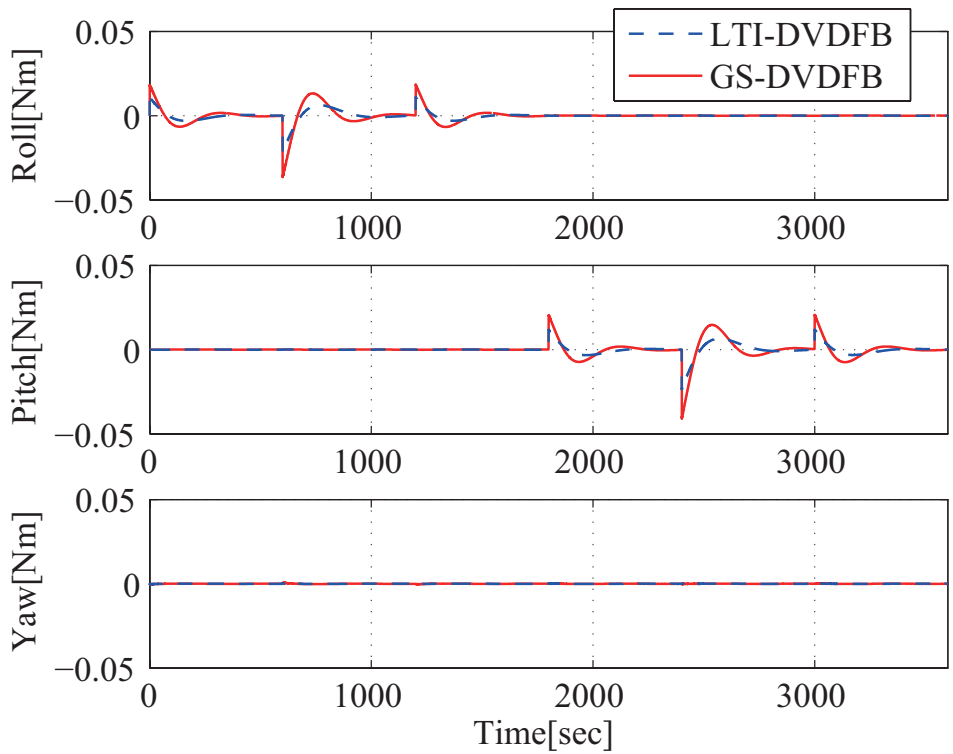


図 3.13 参照入力に対する制御入力結果 (初期パドル角 0[deg])

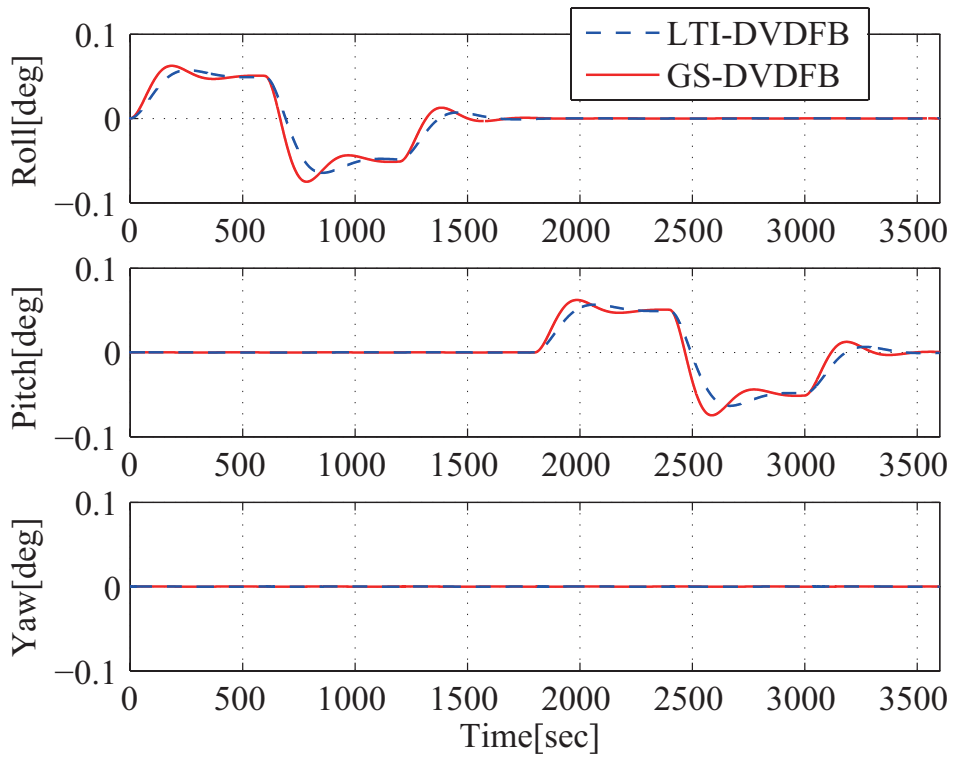


図 3.14 参照入力に対する姿勢角応答結果 (初期パドル角 90[deg])

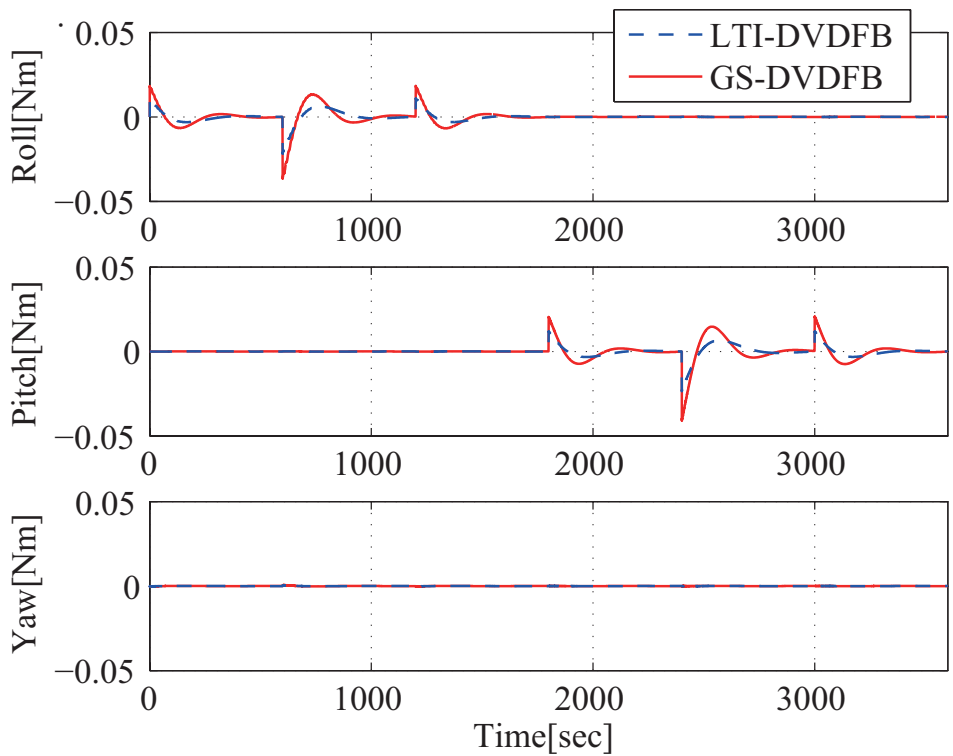
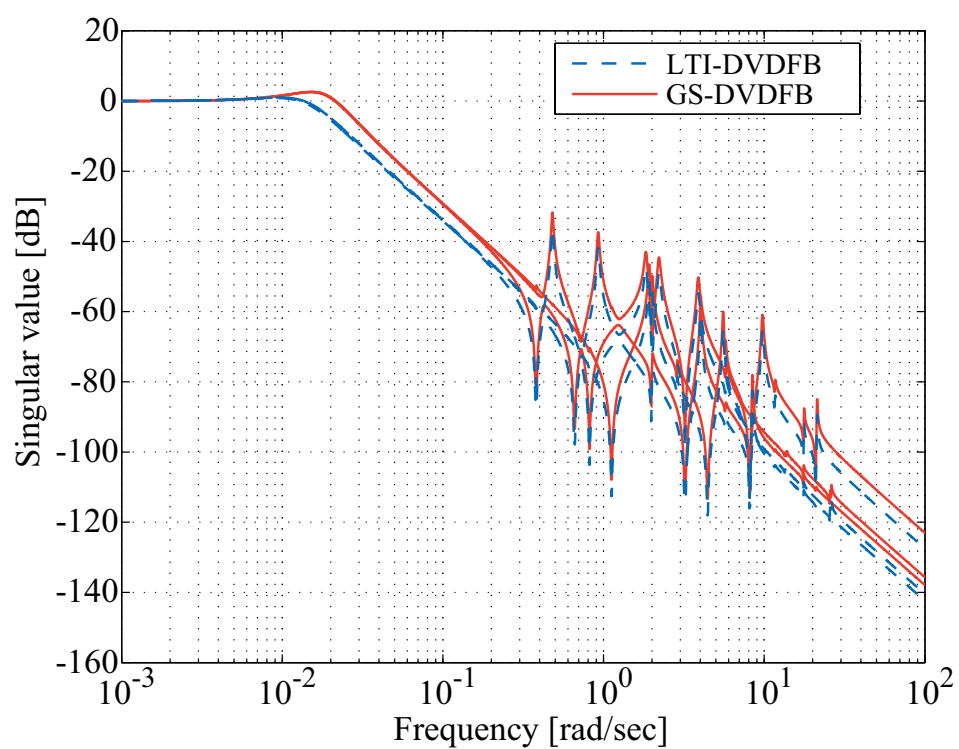


図 3.15 参照入力に対する制御入力結果 (初期パドル角 90[deg])

図 3.16 $r \rightarrow y_d$ の特異値線図 (パドル角 45[deg]).

3.5 あとがき

LPV 力学システムをポリトープモデルで表現し, H_∞ 制御理論における混合感度問題を適用して, 最適静的出力フィードバック制御器を設計する手法を示した. このために, 設計仕様を一巡伝達関数を用いて表すことで制御器設計問題が BMI となることを回避した. また, GKYP 補題の特長を利用し, 高周波数帯域と低周波数帯域それぞれの仕様を満たす制御器を設計した. 得られた結果を柔軟宇宙機の数値モデルに適用して制御性能を検証した. ここで述べた設計法は文献 [19] の結果を多入力多出力系の LPV システムに拡張し, ゲインスケジューリング制御器を求める手法である.

第4章 リアプノフ関数に基づく時間領域での設計

4.1 まえがき

LPV, LTV 力学システムなどの係数行列が変動するシステムに対して, 制御ゲインが固定の制御器では所望の制御性能を達成することは困難となる. その問題に対し, 制御ゲインをモデルの変動に応じて変化させるゲインスケジューリング制御 [25, 26] の有効性が知られており, リアプノフ関数を用いたゲインスケジューリング制御器の設計法が示されている [27, 28, 29, 30, 31, 32, 33]. しかし, リアプノフ関数を用いてゲインスケジューリング制御器を設計する際, リアプノフ関数の解をパラメータ変動に対して共通解とする, つまり, パラメータに依存しない固定の解とすると解の存在範囲を狭め, 保守的な結果となることが知られている [28]. これに対し, リアプノフ関数の解をパラメータ依存にし, 時間微分項を考慮することで保守性の低減されたゲインスケジューリング制御器を設計することができる. パラメータ依存リアプノフ関数を用いたゲインスケジューリング制御器設計法として, Dilated LMI を用いた制御器設計法がある [31, 32]. また, この手法を宇宙機の姿勢制御問題に適用し, 動的出力フィードバック制御器を設計する手法も提案されている [33]. 本章では, LTV 力学システムを対象として, リアプノフ関数を用いた時間領域での静的出力ゲインスケジューリングフィードバック制御器の設計法を示す. はじめに, Dilated LMI を用いる手法と異なるアプローチでシステムの安定性に関する定理を示す. 次に, 外乱抑制性能の最適条件を考え, L_2 ゲインに関する定理を導く. そして, 静的出力フィードバック制御器の LMI に基づいたゲインスケジューリング設計法を求める. 最後に, 本手法を検証するための簡単な 3 質点モデルと宇宙システムの数値シミュレーション結果を示す.

4.2 線形時変力学システムの安定化

制御対象 (2.4), (2.7) に適用する静的出力フィードバック制御器を次のように定義する.

$$u = -K_c(t)y_d - D_c(t)y_v \quad (4.1)$$

ただし, $K_c(t)$, $D_c(t)$ はすべての $t \geq 0$ において以下の条件を満たす時変のフィードバックゲイン行列とする.

$$K_c(t) + K_c^T(t) > 0, D_c(t) + D_c^T(t) > 0 \quad (4.2)$$

ここで正方行列 $K_c(t)$, $D_c(t)$ をそれぞれ対称行列 $K_s(t)$, $D_s(t)$ および歪対称行列 $K_w(t)$, $D_w(t)$ に分割し, 以下のように定義する.

$$\begin{aligned} K_c(t) &= K_s(t) + K_w(t), D_c(t) = D_s(t) + D_w(t) \\ K_s(t) &= \frac{1}{2} (K_c(t) + K_c^T(t)), K_w(t) = \frac{1}{2} (K_c(t) - K_c^T(t)) \\ D_s(t) &= \frac{1}{2} (D_c(t) + D_c^T(t)), D_w(t) = \frac{1}{2} (D_c(t) - D_c^T(t)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

このとき, (4.2) 式より $K_s(t) > 0$, $D_s(t) > 0$ である. また, (2.4), (2.7), (4.1) 式からなる閉ループ系は

$$M(t)\ddot{p} + (\tilde{D}(t) + \tilde{G}(t))\dot{p} + (\tilde{K}(t) + \tilde{N}(t))p = F(t)w \quad (4.4)$$

となる. ここで明らかに

$$\tilde{D}(t) = \tilde{D}^T(t), \tilde{K}(t) = \tilde{K}^T(t), \tilde{G}(t) = -\tilde{G}^T(t), \tilde{N}(t) = -\tilde{N}^T(t) \quad (4.5)$$

である. ただし,

$$\begin{aligned} \tilde{D}(t) &= D(t) + L(t)D_s(t)L^T(t), \tilde{G}(t) = G(t) + L(t)D_w(t)L^T(t) \\ \tilde{K}(t) &= K(t) + L(t)K_s(t)L^T(t), \tilde{N}(t) = N(t) + L(t)K_w(t)L^T(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

である. 閉ループ系 (4.4) は状態量を $x = [q^T \dot{q}^T]^T$ とすると次の状態方程式で表現できる.

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)w \quad (4.7)$$

ただし,

$$\begin{aligned} A(t) &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{bmatrix}, B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(t)F(t) \end{bmatrix} \\ A_{21}(t) &= -M^{-1}(t) (\tilde{K}(t) + \tilde{N}(t)) \\ A_{22}(t) &= -M^{-1}(t) (\tilde{D}(t) + \tilde{G}(t)) \end{aligned} \quad (4.8)$$

である. ここで, 線形時変力学システムの安定条件 [34] を閉ループ系 (4.4) に適用すると次の定理が導かれる.

定理 4.1

外乱 $w = 0$ のとき, すべての $t \geq 0$ で以下の2つの条件を満たすスカラー定数 $\epsilon \geq 0$ が存在すれば, 閉ループ系 (4.7) の平衡点 $x = 0$ は一様漸近安定である.

$$P(t) > 0, Q(t) + \dot{P}(t) < 0 \quad (4.9)$$

ただし,

$$P(t) = \begin{bmatrix} \tilde{K}(t) + \epsilon \tilde{D}(t) & \epsilon M(t) \\ \epsilon M(t) & M(t) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

であり, $Q(t), \dot{P}(t)$ はそれぞれ

$$Q(t) = \begin{bmatrix} -2\epsilon \tilde{K}(t) & \tilde{N}(t) - \epsilon \tilde{G}(t) \\ \tilde{N}^T(t) - \epsilon \tilde{G}^T(t) & 2(\epsilon M(t) - \tilde{D}(t)) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\dot{P}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{K}}(t) + \epsilon \dot{\tilde{D}}(t) & \epsilon \dot{M}(t) \\ \epsilon \dot{M}(t) & \dot{M}(t) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

である.

(証明) よく知られているように, リアプノフ関数

$$V(x, t) = x^T P(t) x \quad (4.13)$$

を考えると, (4.13) 式の (4.7) 式の解軌道に沿った微分は $w = 0$ のとき

$$\dot{V}(x, t) = x^T \left(A^T(t) P(t) + P(t) A(t) + \dot{P}(t) \right) x \quad (4.14)$$

となる. したがって, 閉ループ系 (4.7) がすべての $t \geq 0$ において以下の不等式を満たせば漸近安定である.

$$P(t) > 0, A^T(t) P(t) + P(t) A(t) + \dot{P}(t) < 0 \quad (4.15)$$

ここで, $Q(t) = A^T(t) P(t) + P(t) A(t)$ とおくと (4.9) 式を得る. また, (4.10), (4.13) 式より

$$\begin{aligned} V(x, t) &\leq \max\{\|M(t)\|_2\} \|\dot{p}\|_2^2 + \max\{\|\tilde{K}(t)\|_2\} \|p\|_2^2 \\ &\quad + \epsilon \max\{\|\tilde{D}(t)\|_2\} \|p\|_2^2 + 2\epsilon \max\{\|M(t)\|_2\} \|p\|_2 \|\dot{p}\|_2 \end{aligned}$$

と $V(x, t)$ の上界が導かれる². ここで行列 $M(t), \tilde{D}(t), \tilde{K}(t)$ は対称なので, そのノルムはそれぞれの行列の固有値の絶対値の最大値と等しい. したがって, すべての時刻 t において, $M(t), \tilde{D}(t), \tilde{K}(t)$ の固有値が有界であれば $V(x, t) \leq \hat{V}(x)$ を満たす $\hat{V}(x)$ が存在し, $V(x, t)$ はデクレセントとなるので, システム (4.7) の平衡点 $x = 0$ は一様漸近安定となる. さらに, システム (4.7) は線形系なので指数安定である. \square

² $\|\cdot\|_2$ は時刻 t におけるベクトルのユークリッドノルムとそれによって誘導された行列ノルムを表す.

4.3 L_2 ゲイン性能の最適化

次に、外乱抑制性能の最適条件を考える。そのために、制御量 z を

$$z = C(t)x, \quad C = [E^T(t) \ 0] \quad (4.16)$$

と定義する³。このとき、閉ループ系 (2.15) の外乱入力 w から制御量 z までの L_2 ゲインに関する次の定理が得られる。

定理 4.2

すべての $t \geq 0$ において以下の2つの条件を満たすスカラー定数 $\epsilon \geq 0$ が存在するとき、閉ループ系 (4.7) の平衡点 $x = 0$ は漸近安定であり、 w から $z(t)$ までの L_2 ゲインを $\gamma > 0$ 未満にする。

$$P(t) > 0, \quad Q(t) + \dot{P}(t) + \frac{1}{\gamma^2} S(t) S^T(t) < 0 \quad (4.17)$$

ただし、 $P(t)$, $Q(t)$, $\dot{P}(t)$ はそれぞれ (4.10), (4.11), (4.12) 式に示した行列であり、 S は以下の定数行列である。

$$S(t) = \begin{bmatrix} \epsilon F(t) & \gamma E(t) \\ F(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

(証明) 外乱 w から制御量 z までの L_2 ゲインが $\gamma > 0$ 未満となる条件は任意の正数 $T > 0$ を用いて次のように記述される [35, 36]。

$$\int_0^T \|z\|^2 dt < \gamma^2 \int_0^T \|w\|^2 dt \quad (4.19)$$

ただし、 $\|\cdot\|$ はベクトルのノルムを表す。ここで、リアプノフ関数 (4.13) の微分 $\dot{V}(x, t)$ に関して次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \dot{V}(x, t) + \|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 \\ &= x^T \left(A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + \dot{P}(t) + C^T(t)C(t) \right) x \\ & \quad - \gamma^2 \left\| w - \frac{1}{\gamma^2} B(t)^T P(t)x \right\|^2 + \frac{1}{\gamma^2} x^T P(t)B(t)B^T(t)P(t)x \\ & \leq x^T H(t)x \end{aligned} \quad (4.20)$$

ただし、

$$\begin{aligned} H(t) &= A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + \dot{P}(t) + C^T(t)C(t) \\ & \quad + \frac{1}{\gamma^2} P(t)B(t)B^T(t)P(t) \end{aligned} \quad (4.21)$$

³制御入力 u と観測量 y はコロケーションを仮定しているが、外乱 w と制御量 z にはその仮定は不要である。

である。したがって、すべての $t \geq 0$ において $H(t) < 0$ を満たすとき

$$\dot{V}(x, t) + \|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 < 0 \quad (4.22)$$

が成り立つ。(4.22) 式の両辺の $t = 0$ から時刻 $t = T$ までの積分を $x(0)=0, V(0)=0$ に注意し求めると

$$V(x(T)) < \gamma^2 \int_0^T \|w\|^2 dt - \int_0^T \|z\|^2 dt \quad (4.23)$$

となる。そして、 $P(t) > 0$ であれば $V(x(T)) > 0$ なので (4.19) 式が成り立つ。

以上より、 w から z までの L_2 ゲインが $\gamma > 0$ 未満となるための十分条件は

$$P(t) > 0, H(t) < 0 \quad (4.24)$$

である。(4.24) 式に (4.8), (4.10), (4.16), (4.21) 式を代入すると (4.17) 式を得る⁴。

□

4.4 制御器設計

外乱抑制性能を最適化する制御器の設計法を (4.17) 式より導出する。(4.17) 式は時間依存の不等式なので、直接解くことは困難である。そこで、時変行列をポリトープ表現し、端点に対する条件式を求める。そのために、 $M(t), D(t), G(t), K(t), N(t)$ は有界であり、以下のポリトープモデルで記述されると仮定する。ここでは、簡単のために行列 L と F は定数行列として議論する。ただし、 L, F を時変行列としても設計は可能である (付録 C および数値例 4.6.3)。

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) M_i, & D(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) D_i \\ G(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) G_i, & K(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) K_i \\ N(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) N_i \end{aligned} \quad (4.25)$$

⁴Schur complement より、(4.17) 式の $Q(t) + \dot{P}(t) + \gamma^{-2} S S^T < 0$ は以下の条件と同値である。

$$\begin{bmatrix} -2\epsilon \tilde{K}(t) + \dot{\tilde{K}}(t) + \epsilon \dot{\tilde{D}}(t) & \tilde{N}(t) - \epsilon \tilde{G}(t) + \epsilon \dot{M}(t) & \epsilon F(t) & E(t) \\ \tilde{N}^T(t) - \epsilon \tilde{G}^T(t) + \epsilon \dot{M}^T(t) & 2(\epsilon M(t) - \tilde{D}(t)) + \dot{M}(t) & F(t) & 0 \\ \epsilon F^T(t) & F^T(t) & -\gamma^2 I & 0 \\ E^T(t) & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

ただし, $\alpha_i(t)$ は以下の条件を満たす連続で微分可能なスカラー関数であり, σ は端点数である.

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) = 1, \quad \alpha_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, \sigma \quad (4.26)$$

同様にフィードバックゲイン $K_c(t)$, $D_c(t)$ も凸分解によって次式で与えられる.

$$\begin{aligned} K_c(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) K_{ci} = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) (K_{si} + K_{ki}) \\ D_c(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) D_{ci} = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) (D_{si} + D_{ki}) \end{aligned} \quad (4.27)$$

このとき, $\tilde{D}(t)$, $\tilde{K}(t)$, $\tilde{G}(t)$, $\tilde{N}(t)$ はそれぞれ以下となる.

$$\begin{aligned} \tilde{D}(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) (D_i + LD_{si}L^T) = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) \tilde{D}_i \\ \tilde{K}(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) (K_i + LK_{si}L^T) = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) \tilde{K}_i \\ \tilde{G}(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) (G_i + LD_{wi}L^T) = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) \tilde{G}_i \\ \tilde{N}(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) (N_i + LK_{wi}L^T) = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) \tilde{N}_i \end{aligned} \quad (4.28)$$

これらの準備に基づいて, $P(t)$, $Q(t)$ の凸分解を求めると

$$P(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) P_i, \quad P_i = \begin{bmatrix} \tilde{K}_i + \epsilon \tilde{D}_i & \epsilon M_i \\ \epsilon M_i & M_i \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) Q_i \quad (4.30)$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} -2\epsilon \tilde{K}_i & \tilde{N}_i - \epsilon \tilde{G}_i \\ \tilde{N}_i^T - \epsilon \tilde{G}_i^T & 2(\epsilon M_i - \tilde{D}_i) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

と得られる. また, (4.29) 式より

$$\dot{P}(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \dot{\alpha}_i(t) P_i \quad (4.32)$$

である. したがって, (4.17) 式は

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) P_i > 0 \quad (4.33)$$

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) \left(Q_i + \sum_{j=1}^{\sigma} \dot{\alpha}_j(t) P_j + \frac{1}{\gamma^2} S S^T \right) < 0 \quad (4.34)$$

となる. ここで, $\alpha_i(t)$ の変化率は有界であり, その上界値が次式で与えられると仮定する.

$$|\dot{\alpha}_i(t)| \leq \rho_i, \quad i = 1, \dots, \sigma \quad (4.35)$$

このとき, (4.33), (4.34) 式の十分条件は $\alpha_i(t) \geq 0$ なので

$$P_i > 0 \quad (4.36)$$

$$Q_i \pm \rho_1 P_1 \pm \dots \pm \rho_\sigma P_\sigma + \frac{1}{\gamma^2} S S^T < 0 \quad (4.37)$$

となる. ただし, $i = 1, \dots, \sigma$ であり \pm は複号任意である. ここで, (4.26) 式より

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \dot{\alpha}_i(t) = 0 \quad (4.38)$$

であるから

$$\dot{\alpha}_\sigma(t) = - \sum_{i=1}^{\sigma-1} \dot{\alpha}_i(t) \quad (4.39)$$

となり, (4.35) 式より

$$|\dot{\alpha}_\sigma(t)| \leq \sum_{i=1}^{\sigma-1} |\dot{\alpha}_i(t)| \leq \sum_{i=1}^{\sigma-1} \rho_i \quad (4.40)$$

が成り立つ [17]. したがって, (4.36), (4.37) 式の十分条件は

$$K_{ci} + K_{ci}^T > 0, \quad D_{ci} + D_{ci}^T > 0 \quad (4.41)$$

のもとで

$$P_i > 0 \quad (4.42)$$

$$Q_i \pm \rho_1 (P_1 - P_\sigma) \pm \dots \pm \rho_{\sigma-1} (P_{\sigma-1} - P_\sigma) + \frac{1}{\gamma^2} S S^T < 0 \quad (4.43)$$

が成り立つことである. このように (4.43) 式では (4.37) 式より複号が1つ減少し, 制御器設計の際に解くべき LMI の個数を半減できる. しかし, 端点数 σ が増加するに
したがって, (4.40) 式に示すように保守性が大きくなる. 以上より設計パラメータ ϵ
を与えれば, 最適な静的出力フィードバック制御器は変数を $K_{ci}, D_{ci} (i = 1, \dots, \sigma)$,
 γ^2 とする次の凸最適化問題を解くことで求められる.

$$\min \gamma^2 \text{ s.t. } (4.41), (4.42) \text{ and } (4.43) \quad (4.44)$$

そして, (4.27) 式を用いて, ゲインスケジューリング制御器が設計できる. このとき, 最適化問題 (4.44) から制御ゲイン K_{ci}, D_{ci} を直接求めることができるので, たとえばそれらの大きさに対する LMI 制約条件を端点ごとに課すことにより, 過度な制御入力を回避する設計を行うことも可能である.

4.5 数値評価

4.5.1 3質点システム

数値モデルとして、時変ばねと定数ダンパで結合した3質点システムを考える。質点の変位を $q = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T \in R^3$ とし、運動方程式の係数行列はそれぞれ

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \\ K(t) &= \begin{bmatrix} k(t) & -k(t) & 0 \\ -k(t) & 2k(t) & -k(t) \\ 0 & -k(t) & k(t) \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ E &= L, \quad G = 0, \quad N = 0, \quad F = [0 \ 1 \ 1]^T \end{aligned} \quad (4.45)$$

とする。いま、 $k(t) = 1 + 0.5 \cos(\pi t/6)$ とすると、時変行列 $K(t)$ のポリトープモデルは

$$\begin{aligned} K(t) &= \alpha_1(t)K_1 + \alpha_2(t)K_2 \\ \alpha_1(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{6} t \right), \quad \alpha_2(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{6} t \right) \\ K_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.46)$$

と表せる。このとき、 $\alpha_1(t)$ 、 $\alpha_2(t)$ の変化率の上界値は

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{\pi}{12} \quad (4.47)$$

となる。以下の制御器はすべて、リアプノフ行列を

$$P(t) = \alpha_1(t)P_1 + \alpha_2(t)P_2 \quad (4.48)$$

として設計を行った。

4.5.2 状態フィードバック制御

静的出力フィードバック制御の制御性能を比較評価するために、まず、すべての状態量が観測できるものと仮定して、2入力の状態フィードバック制御器

$$u = -K_c(t)q - D_c(t)\dot{q} \quad (4.49)$$

を設計する. 線形時変系の状態フィードバック制御器はLMI解法によって求めることができる. ここでは文献 [18] の方法を用いて制御器設計を行った. 最適設計の結果, $\gamma^2 = 0.0005$ であった. 外乱 $w = 10[\text{N}]$ が $t = 0$ から $0.1[\text{s}]$ の間, 質点2および3に加わったときの変位 q と制御入力 $u = [u_1 \ u_2]^T$ の応答を図4.1に示す. 閉ループ系が安定化されていること, 変位の最大振幅が $0.5[\text{m}]$ 程度に抑制されていることがわかる. しかし, すべての状態量が得られない場合はこの設計法は適用できない.

4.5.3 静的出力フィードバック制御 (2入力4出力)

2入力4出力の静的出力フィードバック制御器を考える. 凸最適化問題 (4.44) の解は設計パラメータとして与える ϵ の値に依存する. また, 問題によっては解が存在しない場合もある. そこで, ここでは $\epsilon \in [0, 1]$ の範囲で ϵ の値を変えて, 決定変数を $K_{ci}, D_{ci} (i = 1, \dots, \sigma), \gamma^2$ とする凸最適化問題 (4.44) を解いた. 解が得られた ϵ の範囲と ϵ に対する γ の値を表4.1, 図4.2に示す. この結果より, γ を最小とする ϵ の値が $\epsilon = 0.39$ と得られた. このとき, $\gamma^2 = 2.41$ であり, フィードバックゲイン行列は

$$K_{c1} = \begin{bmatrix} 284 & 0.303 \\ 0.586 & 648 \end{bmatrix}, K_{c2} = \begin{bmatrix} 284 & 0.961 \\ 1.21 & 389 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$D_{c1} = \begin{bmatrix} 169 & 0 \\ 1.23 & 1420 \end{bmatrix}, D_{c2} = \begin{bmatrix} 169 & 0 \\ 0.696 & 168 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

となった. 外乱応答と制御入力の結果を図4.3に示す. 状態フィードバック制御の結果 (図4.1) と比較すると, 制御入力のピーク値は減少しているが, 同等の安定化と外乱抑制性能を持つことがわかる. 次に, 外乱抑制性能を比較するために, $\epsilon = 0.39, \gamma^2 = 5$ と与え, (4.41), (4.42), (4.43) 式を凸可解問題として解いて準最適制御器を設計した結果, 以下の制御器を得た.

$$K_{c1} = \begin{bmatrix} 3.75 & 0.222 \\ 0.516 & 4.03 \end{bmatrix}, K_{c2} = \begin{bmatrix} 3.01 & 0.955 \\ 1.28 & 3.14 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$D_{c1} = \begin{bmatrix} 1.43 & 0 \\ 1.20 & 3.04 \end{bmatrix}, D_{c2} = \begin{bmatrix} 1.41 & 0 \\ 1.10 & 2.35 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

このときの外乱応答と制御入力の結果を図4.4に示す. 最適制御器の応答 (図4.3) と比較すると, 制御入力は減少し, その代償として性能は劣化していることがわかる.

表 4.1 ϵ の可解範囲

controller	ϵ
2 inputs 4 outputs	[0.27, 0.79]
1 input 2 output	[0.27, 0.30]

4.5.4 静的出力フィードバック制御 (1 入力 2 出力)

さらに, $L = E = [1 \ 0 \ 0]^T$ とし, 1 入力 2 出力の場合の静的出力フィードバック制御器設計を行った. 前節と同様に, ϵ の値を変えて, 凸最適化問題 (4.44) を解いた. 解が得られた ϵ の範囲と ϵ に対する γ の値を表 4.1, 図 4.2 に示す. 入出力数の減少に伴って ϵ に関する可解範囲が減少し, 達成できる γ 値も増大することがわかる. $\epsilon = 0.28$ のとき γ^2 は最小値 $\gamma^2 = 58.6$ となり, 以下の最適制御器が得られた.

$$K_{c1} = 15600, K_{c2} = 20460 \quad (4.54)$$

$$D_{c1} = 91600, D_{c2} = 7740 \quad (4.55)$$

この制御器を用いたときの外乱応答と制御入力の結果を図 4.5 に示す. 2 入力 4 出力のときに比べ性能は劣化する.

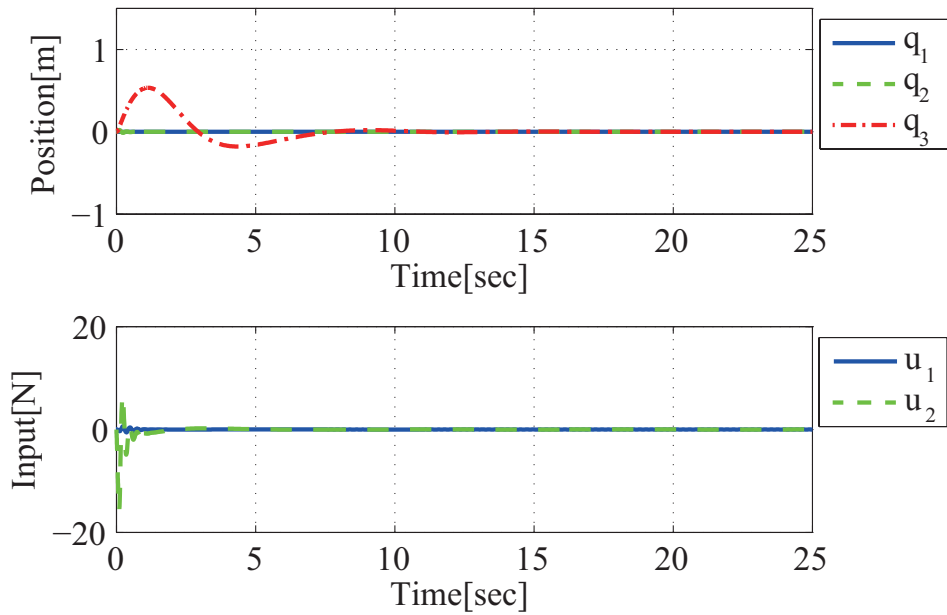


図 4.1 状態フィードバック適用時の外乱応答と制御入力 [18]

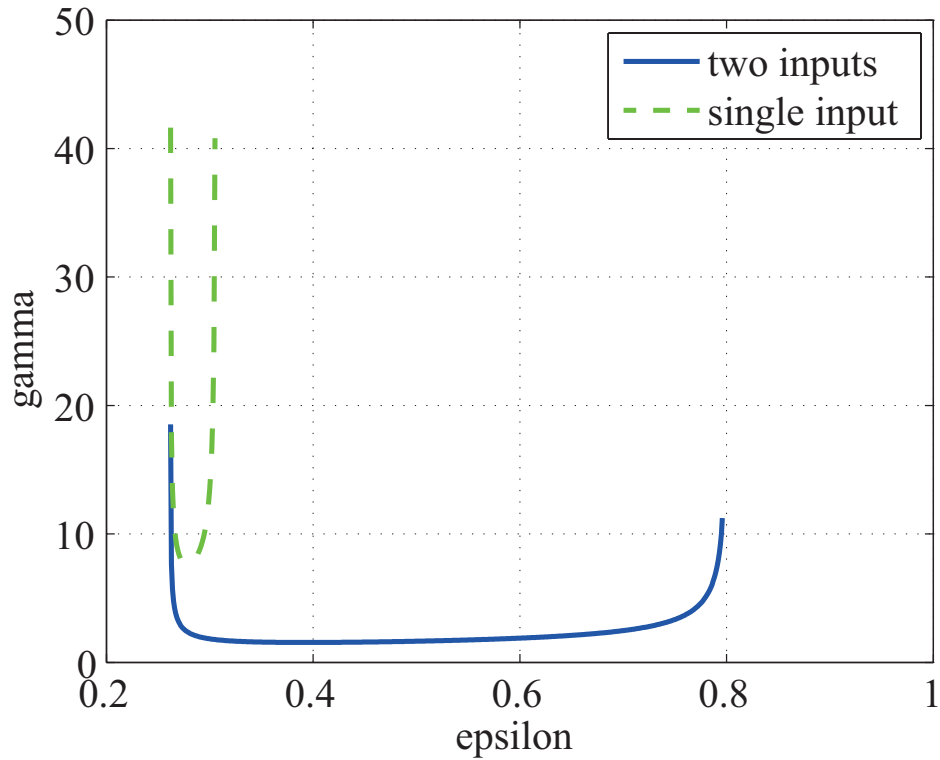


図 4.2 ϵ と γ の関係

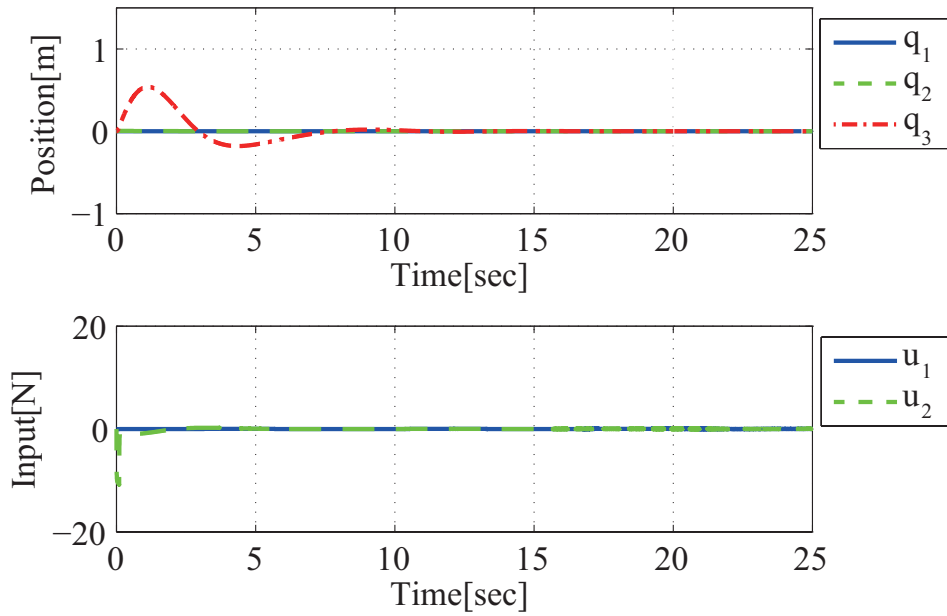


図 4.3 最適な静的出力フィードバック適用時の外乱応答と制御入力 ($\gamma^2 = 2.41$)

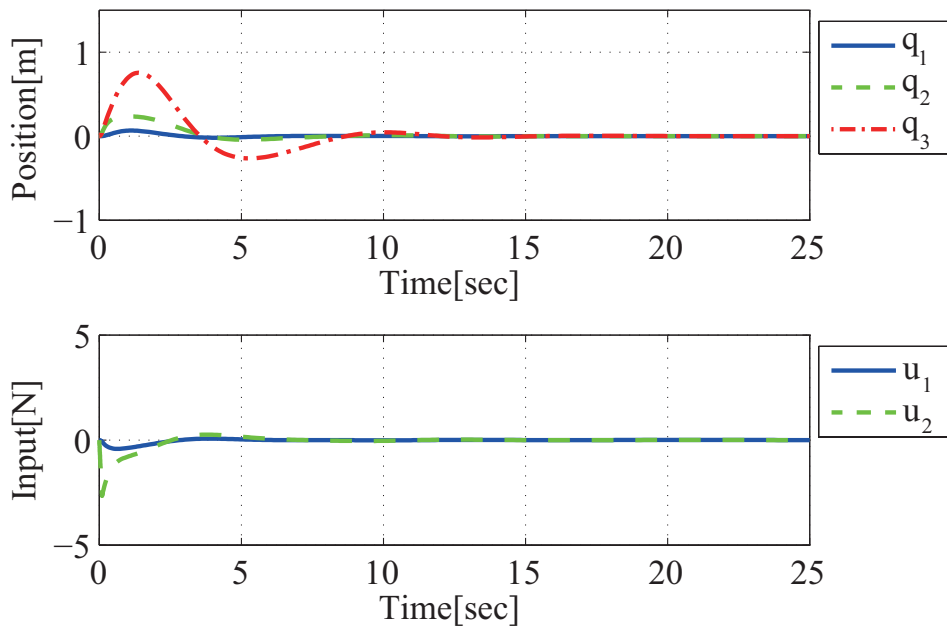


図 4.4 最適な静的出力フィードバック適用時の外乱応答と制御入力 ($\gamma^2 = 5$)

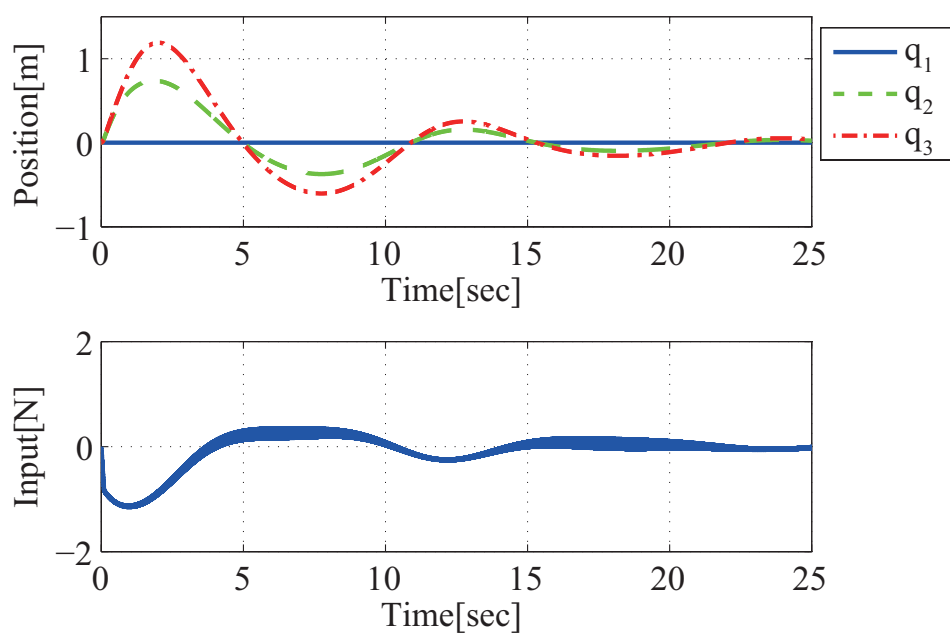


図 4.5 最適な静的出力フィードバック適用時の外乱応答と制御入力 (1 入力)

4.6 宇宙システムへの適用

4.6.1 伸展する宇宙構造物

伸展する宇宙構造物 (付録 D) のポリトープモデル (付録 D.2) を用いた設計結果を示す. パラメータ値は表 4.2 とした. また, (D.8) 式のパラメータ $a_1(t)$, $a_2(t)$ は

$$a_1(t) = \frac{500-t}{500}, \quad a_2(t) = \frac{t}{500} \quad (4.56)$$

と定めた. すると, $\dot{\alpha}_i$ の絶対値の最大値が

$$|\dot{\alpha}_1| \leq \frac{3}{500}, \quad |\dot{\alpha}_2| \leq \frac{6}{500}, \quad |\dot{\alpha}_3| \leq \frac{3}{500}, \quad |\dot{\alpha}_4| \leq \frac{3}{500}, \quad |\dot{\alpha}_5| \leq \frac{6}{500}, \quad |\dot{\alpha}_6| \leq \frac{3}{500} \quad (4.57)$$

と得られる. そして, フィードバックゲイン行列

$$K_c(t) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i K_{ci}, \quad D_c(t) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i D_{ci} \quad (4.58)$$

として, 凸最適化問題を解き制御器を得た. インパルス外乱 $w = [10 \ 10 \ 10][\text{Nm}]$ が $0.01[\text{sec}]$ 間, $t = 0[\text{sec}]$, $t = 150[\text{sec}]$ に入力したときの姿勢角を図 4.6, 4.7, 制御入力を図 4.8, 4.9 に示す. 伸展開始直後, 伸展中に外乱が加わっても安定化できていることがわかる.

表 4.2 伸展する宇宙構造物のパラメータ値

m	300[kg]
a	2.5[m]
$l(0)$	5[m]
l_v	0.1[m/sec]
μ	$3.986 \times 10^{14}[\text{m}^3/\text{sec}^2]$
R	6778[km]

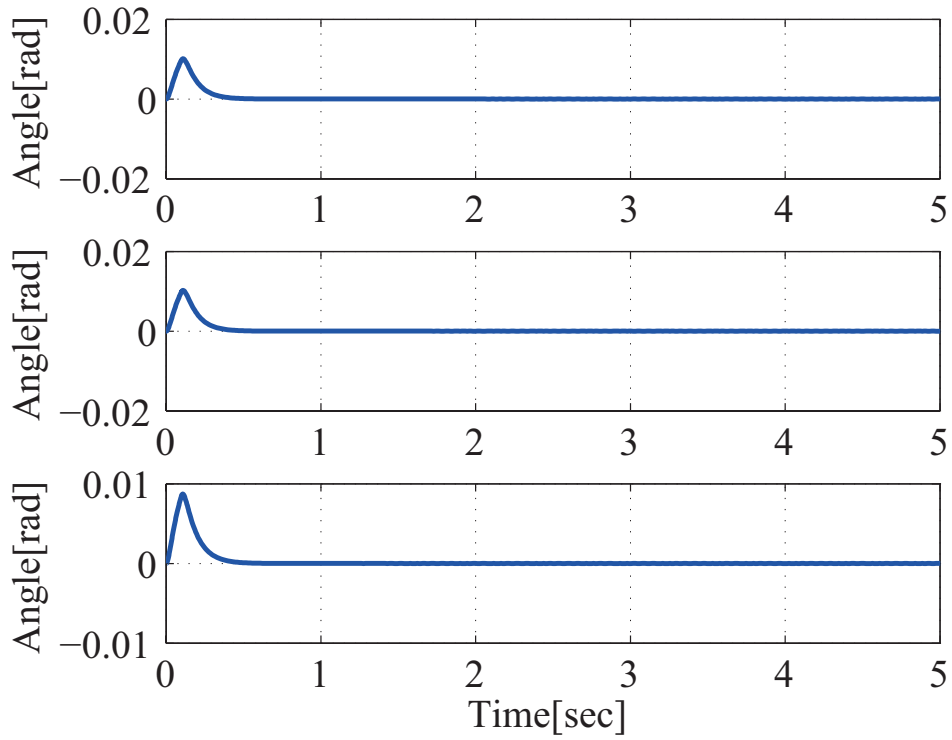


図 4.6 姿勢角応答結果 (伸展する宇宙構造物: $t=0$ [sec])

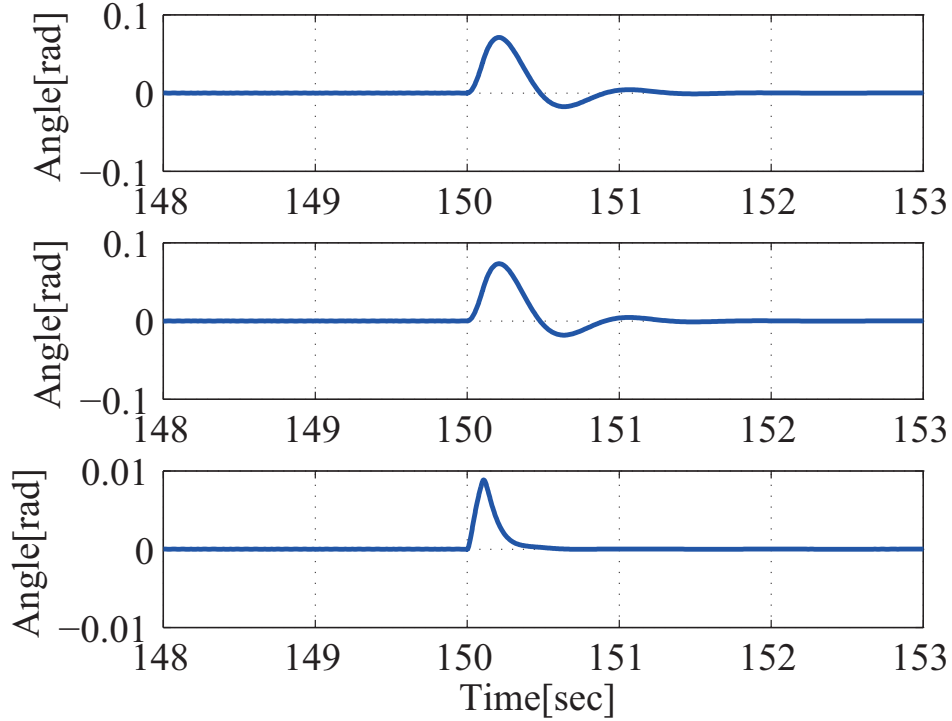


図 4.7 姿勢角応答結果 (伸展する宇宙構造物: $t=150$ [sec])

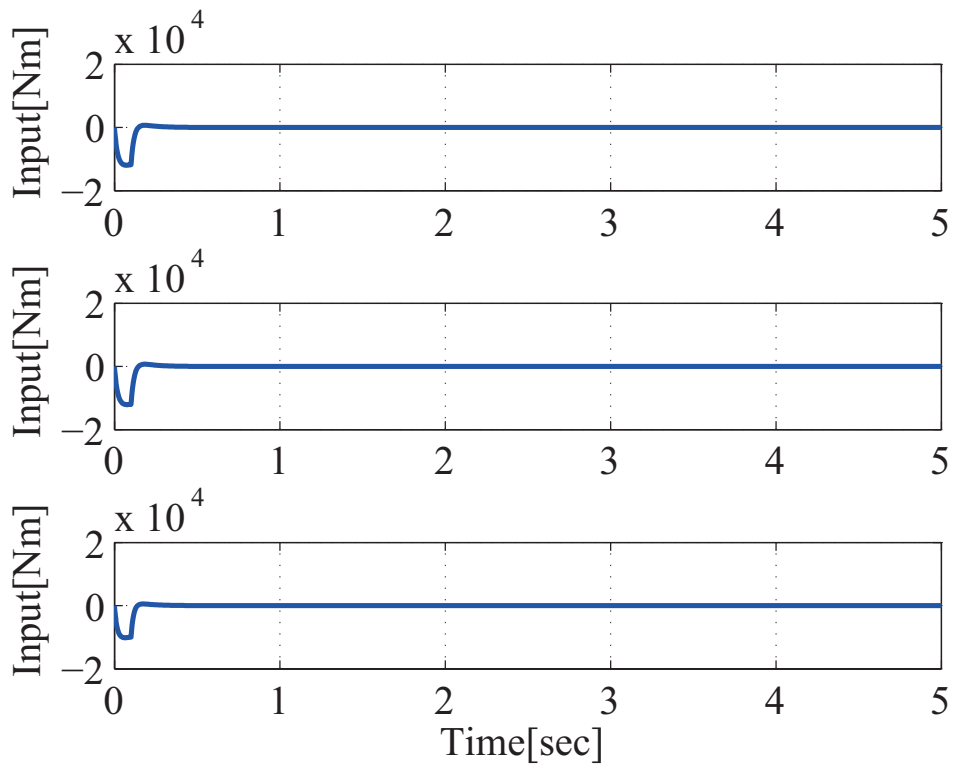


図 4.8 制御入力 (伸展する宇宙構造物: $t=0$ [sec])

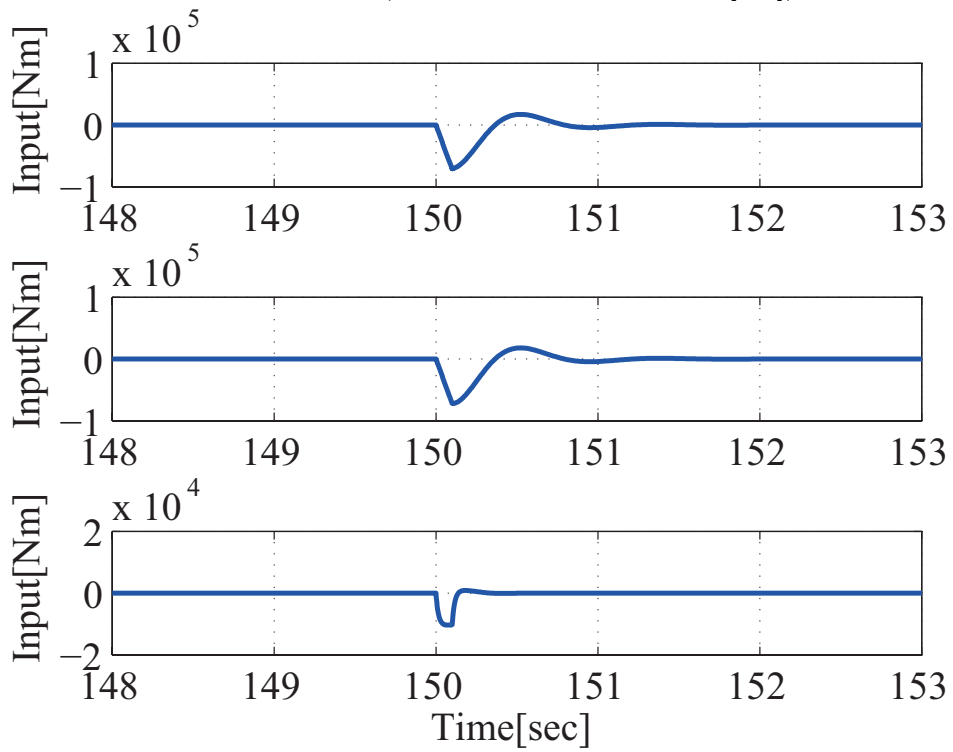


図 4.9 制御入力 (伸展する宇宙構造物: $t=150$ [sec])

4.6.2 柔軟宇宙機

大型柔軟衛星 ETS-VIII(付録 B) について, 3.4.1 節では太陽電池パドルの回転によるモデル変動を LPV モデルとして定式化し, GKYP 補題を用いたゲインスケジューリング制御の設計例を示した. ここでは, 同一の制御問題を LTV 力学システムで表現して, 本章の制御器設計法を適用し, 設計結果を示す. いま, ポリトープモデル (付録 B.4) の (B.18), (B.19) 式で

$$a_1 = \frac{1 - \sin \theta}{2}, \quad a_2 = \frac{1 + \sin \theta}{2} \quad (4.59)$$

$$b_1 = \frac{1 - \cos \theta}{2}, \quad b_2 = \frac{1 + \cos \theta}{2} \quad (4.60)$$

とすると,

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \text{ [rad/sec]} \quad (4.61)$$

であるから, $|\dot{\alpha}_i|$ は

$$|\dot{\alpha}_1| \leq 4\dot{\theta}, \quad |\dot{\alpha}_2| \leq 8\dot{\theta}, \quad |\dot{\alpha}_3| \leq 4\dot{\theta} \quad (4.62)$$

$$|\dot{\alpha}_4| \leq 8\dot{\theta}, \quad |\dot{\alpha}_5| \leq 16\dot{\theta}, \quad |\dot{\alpha}_6| \leq 8\dot{\theta} \quad (4.63)$$

$$|\dot{\alpha}_7| \leq 4\dot{\theta}, \quad |\dot{\alpha}_8| \leq 8\dot{\theta}, \quad |\dot{\alpha}_9| \leq 4\dot{\theta} \quad (4.64)$$

となる. パドル初期角度 $45[\text{deg}]$, フィードバックゲイン行列

$$K_c(t) = \sum_{i=1}^9 \alpha_i K_{ci}, \quad D_c(t) = \sum_{i=1}^9 \alpha_i D_{ci} \quad (4.65)$$

として, 凸最適化問題を解き制御器を得た. そして, パドルの初期角度が $0, 90[\text{deg}]$ のときの図 3.5 に示す外乱入力に対する外乱応答を求めた. 姿勢角の応答結果, 制御入力結果を図 4.10 から図 4.13 に示す. 青色の実線は本章で示した手法, 赤色の一点鎖線が 3 章で示した手法を用いて設計した制御器による結果を表す. 設計された制御器が十分な性能を持つことが確認できる. 性能を比べると, 本章で示した手法による制御器の方が外乱抑制に優れていることがわかる. 制御入力も本章で示した手法による制御器の方が大きくなっている.

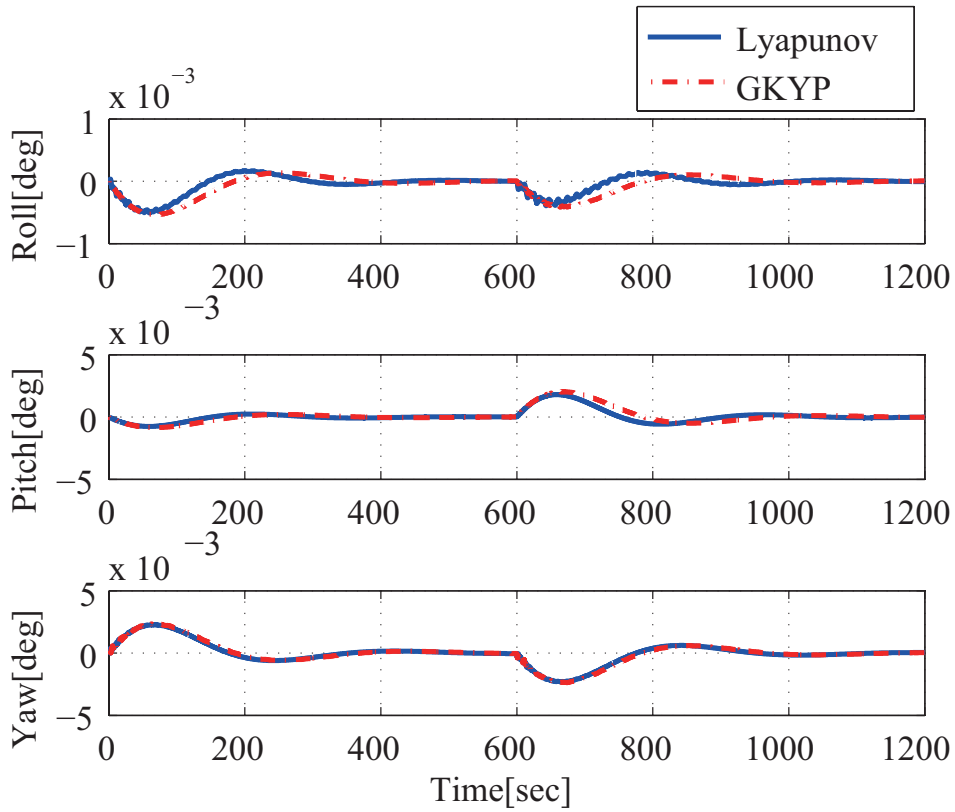


図 4.10 姿勢角 (柔軟宇宙機)

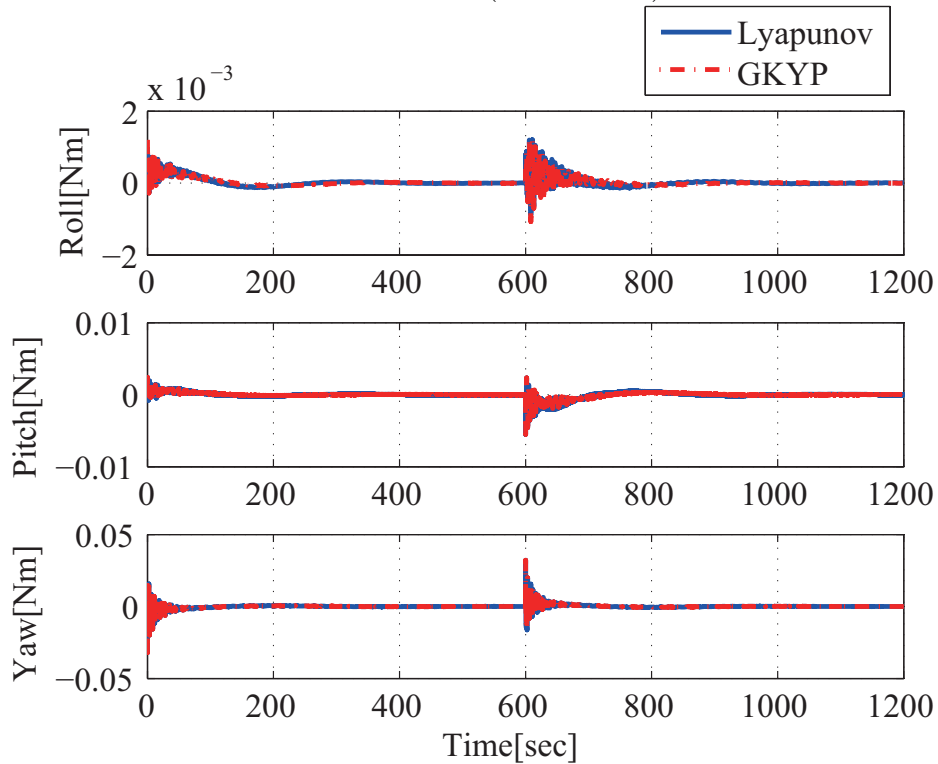


図 4.11 制御入力 (柔軟宇宙機)

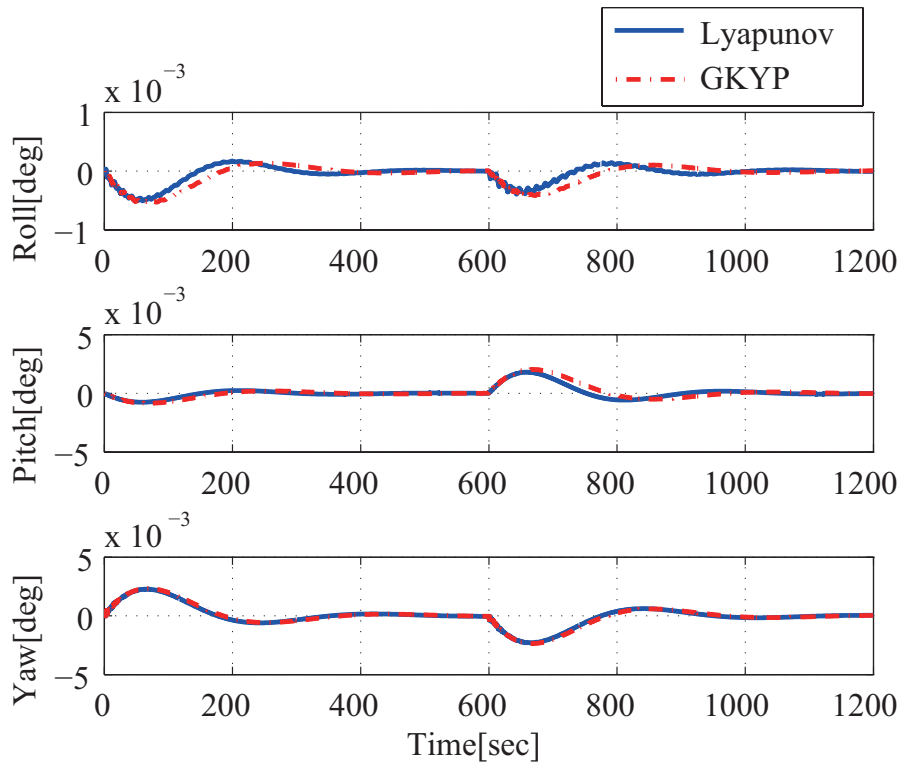


図 4.12 姿勢角 (柔軟宇宙機)

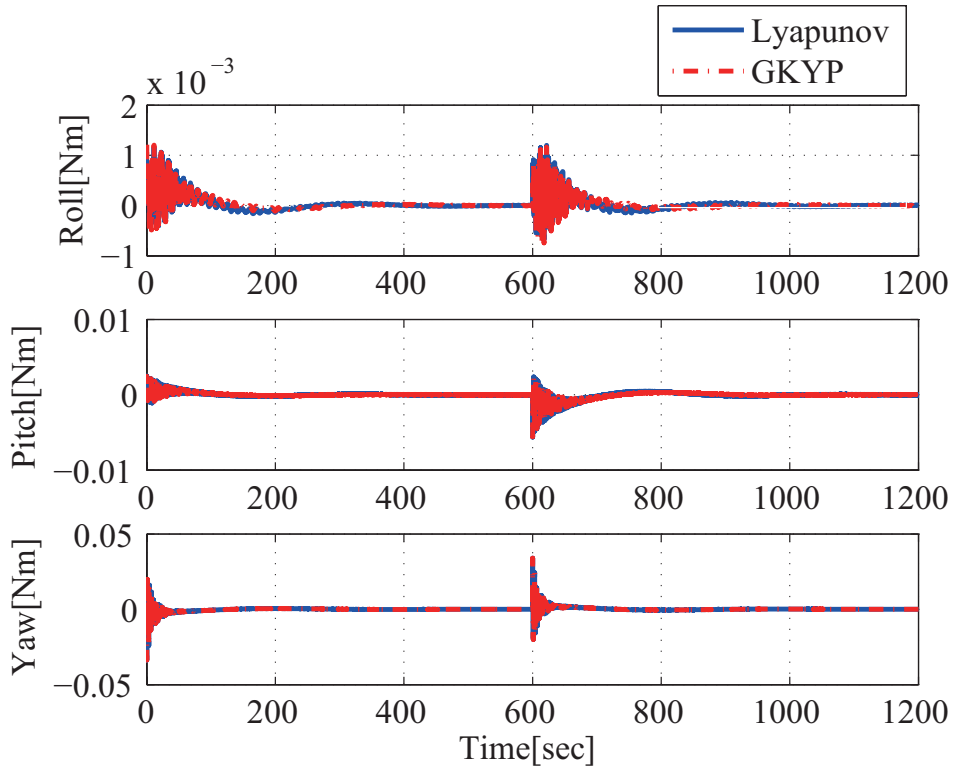


図 4.13 制御入力 (柔軟宇宙機)

4.6.3 打ち上げロケット

ロケットのポリトープモデル (付録 E.2) を用いた数値シミュレーション結果を示す. このモデルは $L(t)$ が時変となるシステムである. (E.5) 式の a_1, a_2 は

$$a_1 = e^{-\frac{(t-36)^2}{288}}, \quad a_2 = 1 - e^{-\frac{(t-36)^2}{288}} \quad (4.66)$$

とした. また,

$$|\dot{b}_1| = |\dot{b}_2| \leq \max \left| \frac{\dot{L}(t)}{L_1 - L_2} \right| \quad (4.67)$$

であるから, $|\dot{\alpha}_i|$ の上界値が得られる. これより, フィードバックゲイン行列

$$K_c(t) = \sum_{i=1}^2 a_i K_{ci}, \quad D_c(t) = \sum_{i=1}^2 a_i D_{ci} \quad (4.68)$$

とする制御器を凸最適化問題を解き得た. そして, インパルス外乱 $w = 0.5$ が $0.1[\text{sec}]$ 間, $t = 0[\text{sec}]$ に加わったときの応答を調べた. 姿勢角, 姿勢角速度, 制御入力の結果を図 4.14, 4.15, 4.16 に示す. 制御器がうまく働いていることがわかる.

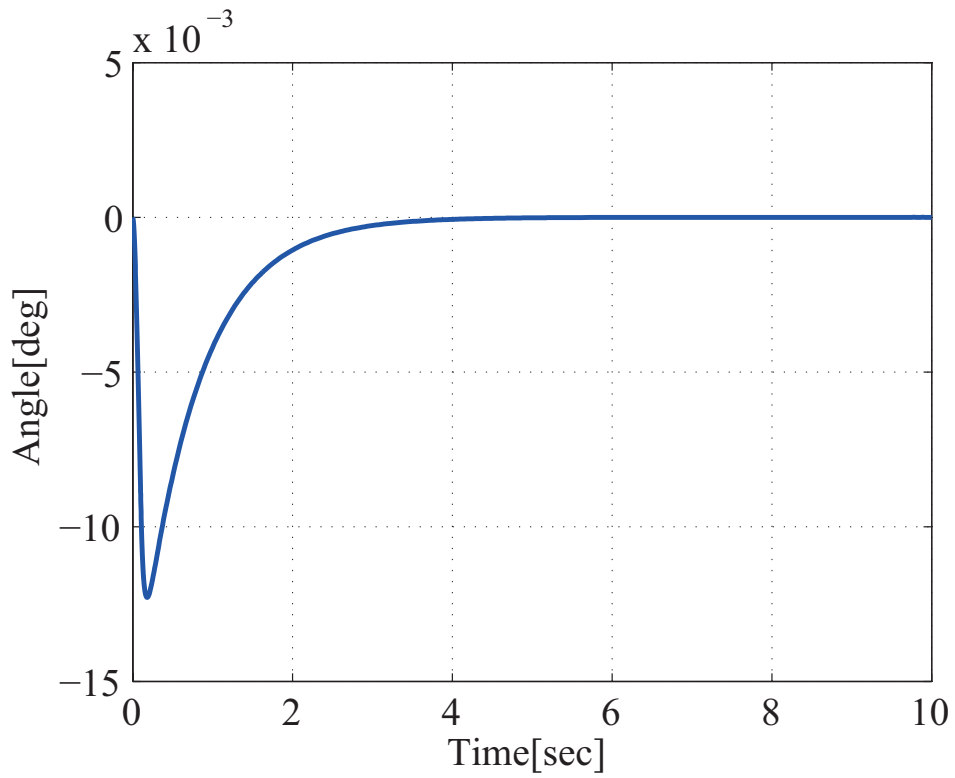


図 4.14 姿勢角 (打ち上げロケット)

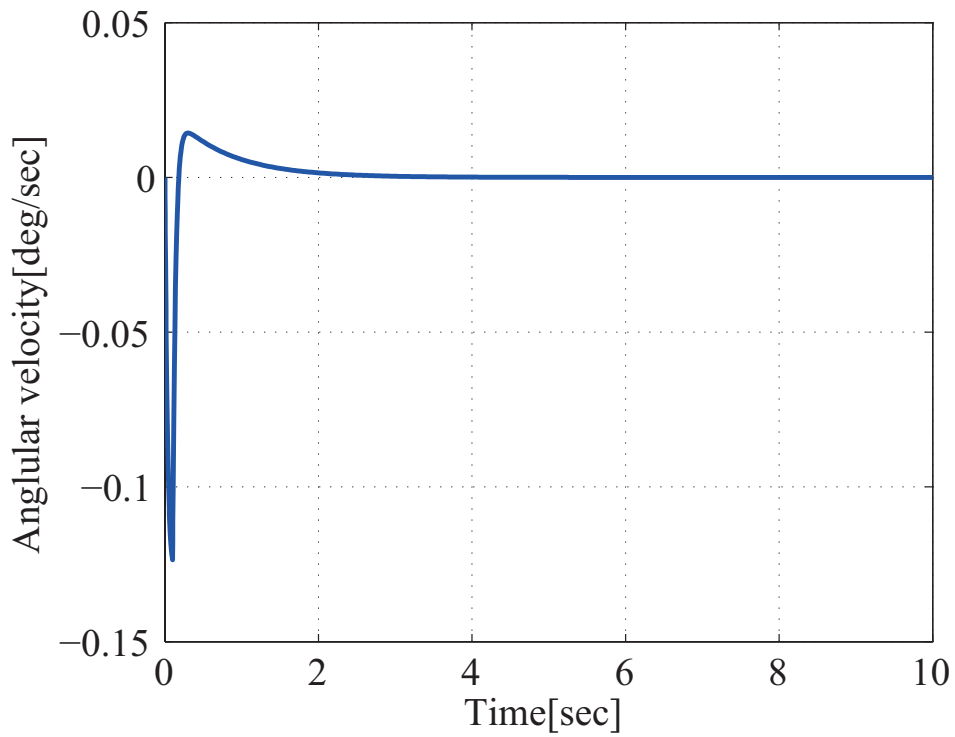


図 4.15 姿勢角速度 (打ち上げロケット)

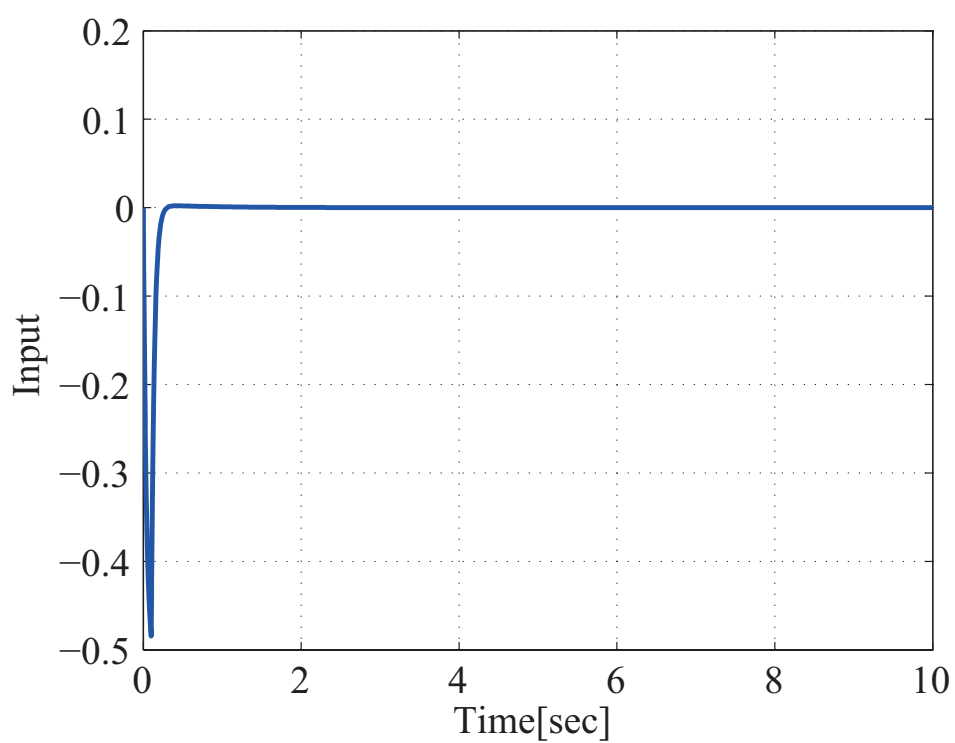


図 4.16 制御入力 (打ち上げロケット)

4.7 あとがき

線形時変力学システムの安定化・最適化に関する定理を示し、その定理を用いた静的出力フィードバック制御器設計法を示した。そして、数値シミュレーションを実施し、有効性を検証した。ここで提案した設計法はLTV力学システムの状態フィードバック制御 [17, 18] を静的出力フィードバック制御に拡張したのとなっており、実用性が高い。

第5章 線形時不変系への適用

5.1 まえがき

これまでにコロケーション条件を満たす線形力学システムの静的出力フィードバック制御の設計法が検討されている [15, 16]. 本章では, これら従来の設計法と, 4章で示した LTV 力学システムの結果を LTI 力学システムに特化した設計法とを比較する. そして, 後者がより一般的な制御システムを扱えることを示す.

5.2 線形時不変力学システムへの適用

次の線形時不変システムを考える.

$$M\ddot{q} + (\tilde{D} + \tilde{G})\dot{q} + (\tilde{K} + \tilde{N})q = Fw \quad (5.1)$$

(5.1) 式を $x = [q^T \ \dot{q}^T]^T$ として状態方程式で表現すると,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}(\tilde{K} + \tilde{N}) & -M^{-1}(\tilde{D} + \tilde{G}) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}F \end{bmatrix} w \quad (5.2)$$

となる. 定理 4.2 を LTI 閉ループシステム (5.1) に適用すると最適性に関する次の定理を得る.

定理 5.1

以下の 2 つの条件を満たすスカラー定数 $\epsilon > 0$ が存在するとき, 閉ループ系 (5.2) の平衡点 $x = 0$ は漸近安定であり, w から z までの L_2 ゲインは $\gamma > 0$ 未満となる.

$$\begin{bmatrix} \tilde{K} + \epsilon\tilde{D} & \epsilon M \\ \epsilon M & M \end{bmatrix} > 0 \quad (5.3)$$

$$\begin{bmatrix} -2\epsilon\tilde{K} & \tilde{N} - \epsilon\tilde{G} \\ \tilde{N}^T - \epsilon\tilde{G}^T & 2(\epsilon M - \tilde{D}) \end{bmatrix} + \frac{1}{\gamma^2} S S^T < 0$$

さらに $\tilde{N} = 0$ のとき, 閉ループ系 (5.2) の平衡点 $x = 0$ が漸近安定となり, w から z までの L_2 ゲインが $\gamma > 0$ 未満になる十分条件は

$$M > 0, \tilde{D} - D^* > 0, \tilde{K} - K^* > 0 \quad (5.4)$$

である。ただし, D^*, K^* は次式で定義される行列である。

$$D^* = \frac{1}{2\gamma^2} FF^T, \quad K^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\gamma^2} FF^T + \frac{1}{\epsilon} EE^T \right) \quad (5.5)$$

(証明) 条件 (5.3) は (4.17) 式より明らかである。さらに, (5.3) 式に Schur complement を適用し整理すると,

$$M > 0, \quad \tilde{K} - K^* > 0 \quad (5.6)$$

$$\tilde{D} - \epsilon M + \frac{1}{\epsilon} \tilde{K} > 0 \quad (5.7)$$

$$\tilde{D} - D^* - \epsilon M - \frac{1}{4\epsilon} W^T \left(\tilde{K} - K^* \right)^{-1} W > 0 \quad (5.8)$$

となる。ただし,

$$W = -\tilde{N} + \epsilon \tilde{G} - \frac{\epsilon}{\gamma^2} FF^T \quad (5.9)$$

である。(5.6), (5.8) 式を満たせば, (5.7) 式は満たされる。 $\tilde{N} = 0$ のとき, (5.8) 式の左辺について

$$\begin{aligned} & \tilde{D} - D^* - \epsilon M - \frac{\epsilon}{4} W^{*T} \left(\tilde{K} - K^* \right)^{-1} W^* \\ & \geq \tilde{D} - D^* - \epsilon \kappa I \end{aligned} \quad (5.10)$$

が成り立つ。ただし,

$$W^* = \tilde{G} - \frac{1}{\gamma^2} FF^T \quad (5.11)$$

$$\kappa = \|M\|_2 + \frac{1}{4} \|W^{*T} \left(\tilde{K} - K^* \right)^{-1} W^*\|_2 \quad (5.12)$$

である。ここで, ϵ を

$$0 < \epsilon < \frac{\lambda_{\min} \left(\tilde{D} - D^* \right)}{\kappa} \quad (5.13)$$

とすると,

$$\begin{aligned} & \tilde{D} - D^* - \epsilon \kappa I \\ & > \tilde{D} - D^* - \lambda_{\min} \left(\tilde{D} - D^* \right) I \\ & \geq 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

と得られる。したがって, $\tilde{D} - D^* > 0$ であれば (5.13) 式を満たす ϵ が存在し, (5.8) 式が成り立つ。以上より (5.4) 式が導かれる。□

また, 安定化だけが制御目的の場合にはこの定理 5.1 より次の定理を得る。

定理 5.2

外乱 $w = 0$ のとき, 以下の2つの条件を満たすスカラー定数 $\epsilon > 0$ が存在すれば, 閉ループ系 (5.2) の平衡点 $x = 0$ は漸近安定である.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{K} + \epsilon\tilde{D} & \epsilon M \\ \epsilon M & M \end{bmatrix} &> 0 \\ \begin{bmatrix} -2\epsilon\tilde{K} & \tilde{N} - \epsilon\tilde{G} \\ \tilde{N}^T - \epsilon\tilde{G}^T & 2(\epsilon M - \tilde{D}) \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

また, $\tilde{N} = 0$ のとき, 閉ループ系 (5.2) の平衡点 $x = 0$ が漸近安定となる条件は

$$M > 0, \tilde{D} > 0, \tilde{K} > 0 \quad (5.16)$$

である.

(証明) 文献 [34]

□

従来の LTI 力学システムの静的出力フィードバック制御 [15, 16] では閉ループシステム (2.15) において $\tilde{N} = 0$ の場合のみを考えていた. このために, 適用できる制御対象 (2.1) はサーキュラー項を持たない場合 ($N = 0$) に限定されていた. それと同時に, フィードバックゲイン行列 (2.13) に $K_c > 0, D_c > 0$ [15], あるいは $K_c > 0, D_c + D_c^T > 0$ [16] の制約を与える必要があった. 本手法では定理 5.3, 定理 5.4 より LMI 条件 (5.3), (5.15) を用いることで, 適用できる制御対象と制御器のクラスを拡張できることがわかる. また, 問題を $\tilde{N} = 0$ の場合限定すれば, 安定性は Kelvin-Tait-Chetaev の定理 [1, 21] として知られる係数行列のみに関する条件 (5.16) で簡潔に表現できる. 定理 5.1 は最適性の十分条件も同様に式 (5.4) のように係数行列のみを用いて表現できることを示している.

5.3 数値検証

線形力学システム (5.1) の変位ベクトルを $q = [q_1, q_2, q_3]^T$ とし, 係数行列を次のように定める.

$$M = \begin{bmatrix} 3000 & 10 & -20 \\ 10 & 1000 & 300 \\ -20 & 300 & 2000 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -100 & 100 \\ 100 & 0 & 0 \\ -100 & 0 & 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 & -100 & 100 \\ 100 & 0 & 0 \\ -100 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

はじめに

$$L = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

のときを考える. このときの開ループ特異値線図を図 5.1 に示す. このシステムに対し, (5.3) 式を用い $\epsilon = 10^{-6}$ とした提案手法による非対称な制御器ゲイン $K_c = K_s + K_w$, $D_c = D_s + D_w$ と従来手法である正定対称なゲイン K_s, D_s を求めた. 提案手法では以下の制御器が得られた.

$$K_s = 10^6 \times \begin{bmatrix} 1.76 & 0 & 0 \\ 0 & 1.76 & 0 \\ 0 & 0 & 1.76 \end{bmatrix}, K_w = \begin{bmatrix} 0 & 100 & -100 \\ -100 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$D_s = 10^5 \times \begin{bmatrix} 3.96 & 0 & 0 \\ 0 & 3.96 & 0 \\ 0 & 0 & 3.96 \end{bmatrix}, D_w = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0 & -0.08 & -0.62 \\ 0.08 & 0 & -0.60 \\ 0.62 & 0.60 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

このとき, \tilde{N} の値は

$$\tilde{N} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0 & -0.10 & 0.10 \\ 0.10 & 0 & 0 \\ -0.10 & -0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

となり, サーキュラ項 N を相殺するような制御器が設計されていることがわかる. 一方, 従来手法では以下の制御器が得られた.

$$K_s = 10^5 \times \begin{bmatrix} 5.86 & 0 & 0 \\ 0 & 6.01 & 0.15 \\ 0 & 0.15 & 6.01 \end{bmatrix}, D_s = 10^5 \times \begin{bmatrix} 1.73 & 0 & 0 \\ 0 & 1.57 & -0.16 \\ 0 & -0.16 & 1.57 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

γ^2 の最小値は非対称のとき $\gamma^2 = 9.87 \times 10^{-6}$, 対称のとき $\gamma^2 = 1.53 \times 10^{-5}$ となり, 非対称の方が小さくなった. 非対称ゲインのときの閉ループ系特異値線図を図 5.2, 対称ゲインのときの閉ループ系特異値線図を図 5.3 に示す. 特異値線図からも, ゲインが小さくなっていることが確認できる. また, 外部入力 $w = [10^8 \ 0 \ 0]^T$ が $t = 0[\text{sec}]$ から $0.1[\text{sec}]$ の間加わったときの q_1, q_2, q_3 の応答を調べた. 非対称ゲイン適用時の結果を図 5.4, 対称ゲイン適用時の結果を図 5.5 に示す. 非対称ゲインのときの方が外乱抑制されていることが確認できる. 次に,

$$L = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

のとき, つまり 2 入力 4 出力のときを考える. 同様に, $\epsilon = 2 \times 10^{-8}$ として非対称な制御器ゲイン K_c, D_c と正定対称なゲイン K_s, D_s を求めたところ γ^2 の最小値は非対称のとき $\gamma^2 = 698.8123$, 対称のとき $\gamma^2 = 816.8435$ となり, 非対称の方が小さく

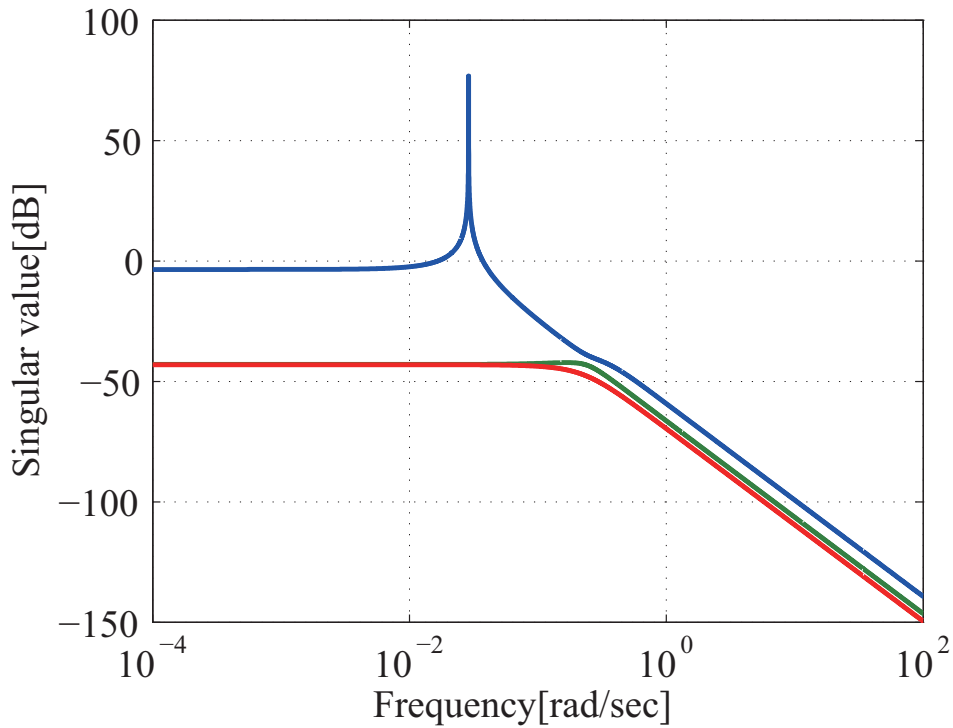


図 5.1 開ループ特異値線図

なった. 非対称制御器ゲインの値は

$$K_s = 10^{13} \times \begin{bmatrix} 1.37 & 0 \\ 0 & 0.27 \end{bmatrix}, K_w = \begin{bmatrix} 0 & 85.3 \\ -85.3 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$D_s = 10^{12} \times \begin{bmatrix} 1.37 & 0 \\ 0 & 1.37 \end{bmatrix}, D_w = \begin{bmatrix} 0 & 306 \\ -306 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

であり, \tilde{N} の値を求めると

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} 0 & -14.7 & 100 \\ 14.7 & 0 & 0 \\ -100 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

となり, 部分的にサーキュラ項 N を相殺するような制御器が設計されていることがわかる. 一方, 対称制御器ゲインの値は

$$K_s = 10^{13} \times \begin{bmatrix} 1.36 & 0 \\ 0 & 0.28 \end{bmatrix}, D_s = 10^{12} \times \begin{bmatrix} 1.40 & 0 \\ 0 & 1.73 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

となった.

次に, (5.3) 式と (5.4) 式を用いたときに設計される制御器の違いを調べる. そのた

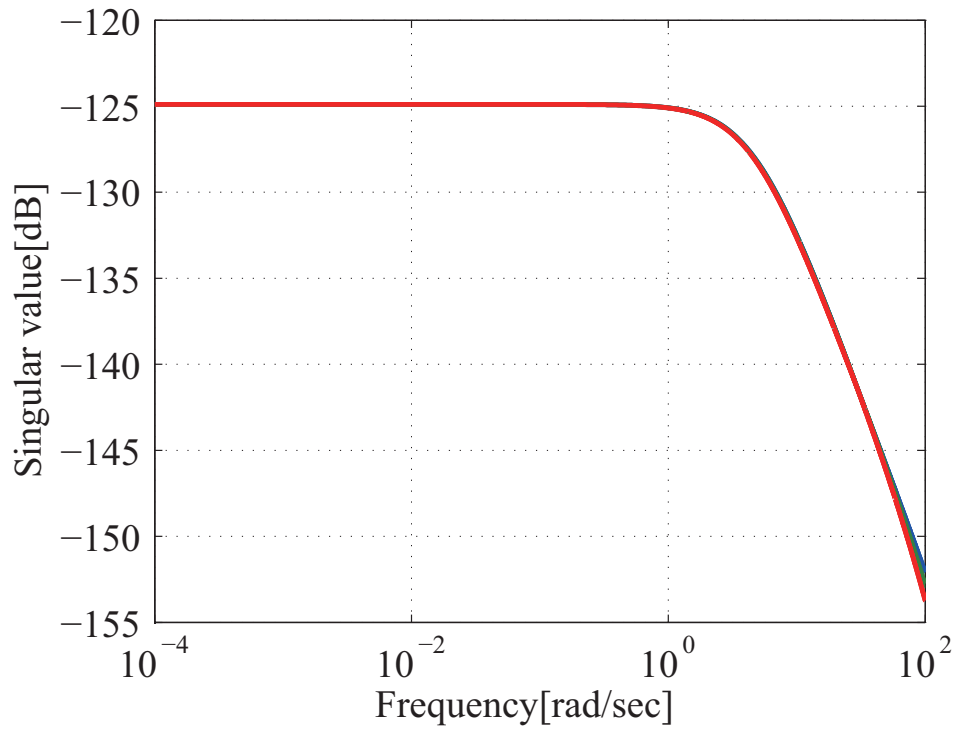


図 5.2 閉ループ特異値線図 (提案手法)

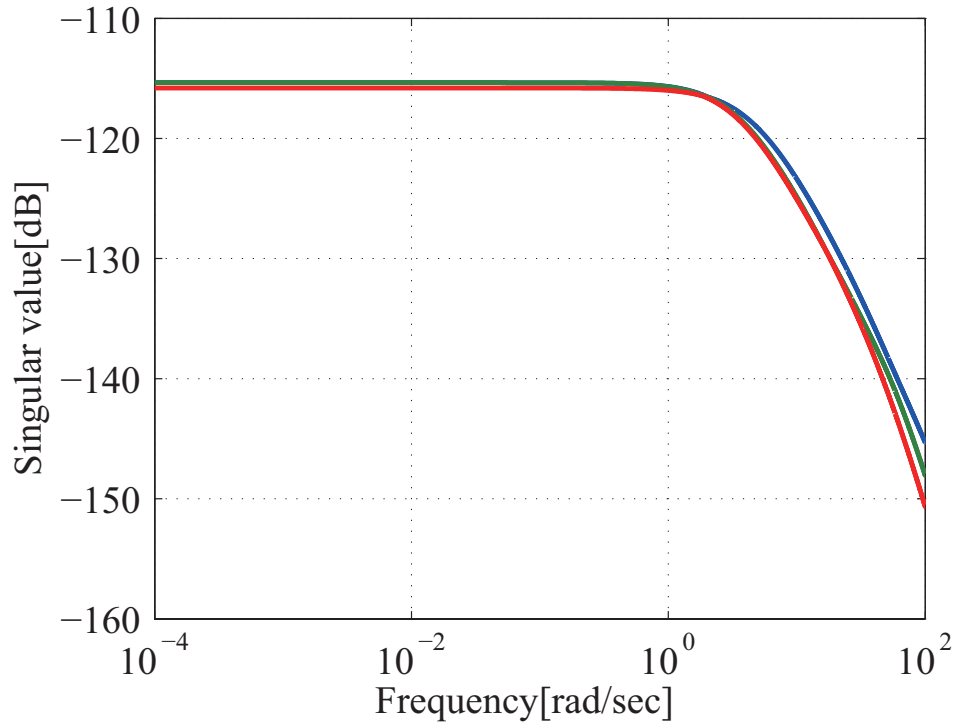


図 5.3 閉ループ特異値線図 (従来手法)

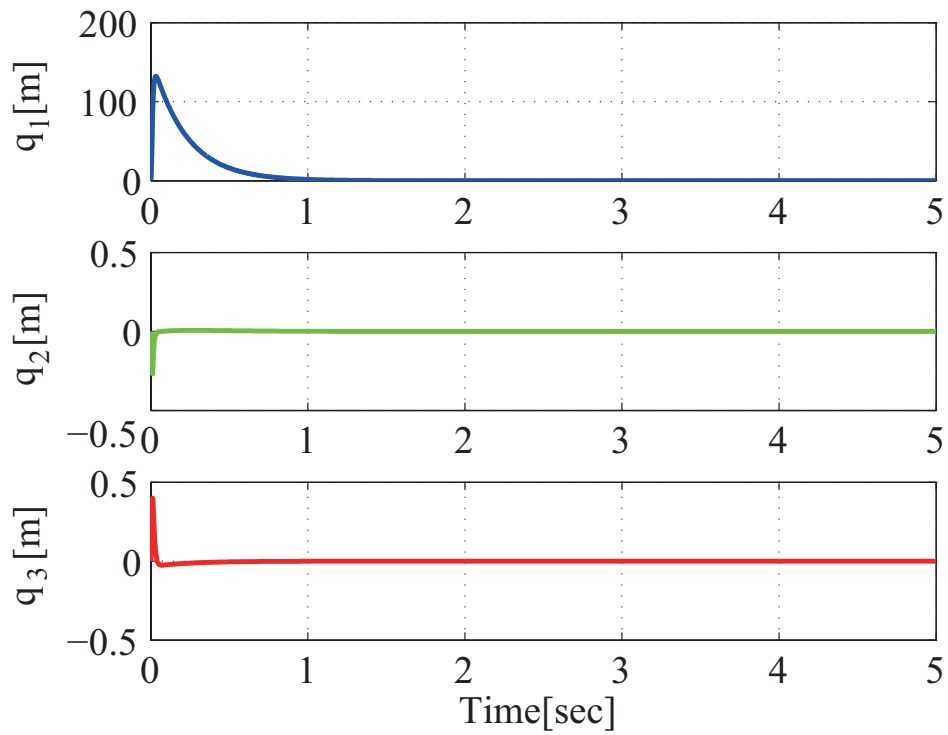


図 5.4 外乱応答結果 (提案手法)

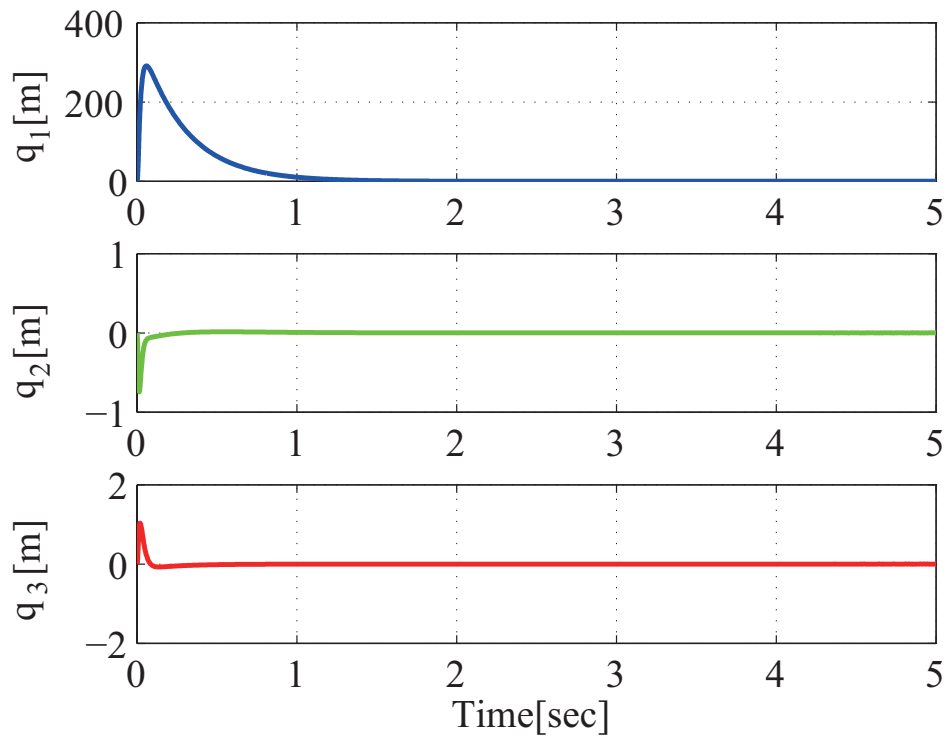


図 5.5 外乱応答結果 (従来手法)

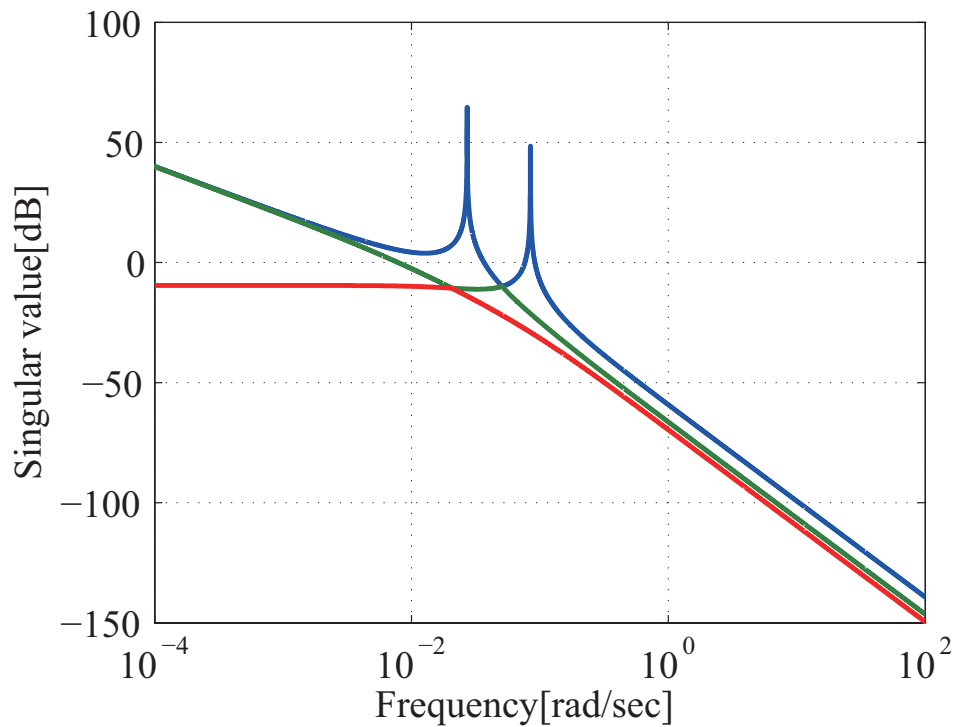


図 5.6 開ループ特異値線図

めに,

$$N = 0, L = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

のときを考える. このときの開ループ特異値線図を図 5.6 に示す. (5.3) 式と (5.4) 式を用い, $\epsilon = 10^{-6}$ としてそれぞれ対称ゲインの制御器を設計した. γ^2 の最小値は (5.3) 式を用いて設計したとき $\gamma^2 = 9.87 \times 10^{-6}$, (5.4) 式を用いて設計したとき $\gamma^2 = 7.10 \times 10^{-4}$ となり, (5.3) 式を用いて設計したときの方が小さくなった. (5.3) 式による設計時の閉ループ系特異値線図を図 5.7, (5.4) 式による設計時の閉ループ系特異値線図を図 5.8 に示す. (5.3) 式による設計時の方が, ピークゲインが下げられていることがわかる. また, 外部入力 $w = [10^8 \ 0 \ 0]^T$ が $t = 0[\text{sec}]$ から $0.1[\text{sec}]$ の間加わったときの q_1, q_2, q_3 の応答を調べた. (5.3) 式による設計時の結果を図 5.9, (5.4) 式による設計時の結果を図 5.10 に示す. (5.3) 式を用いて設計された制御器の方が外乱抑制性能が高いことがわかる.

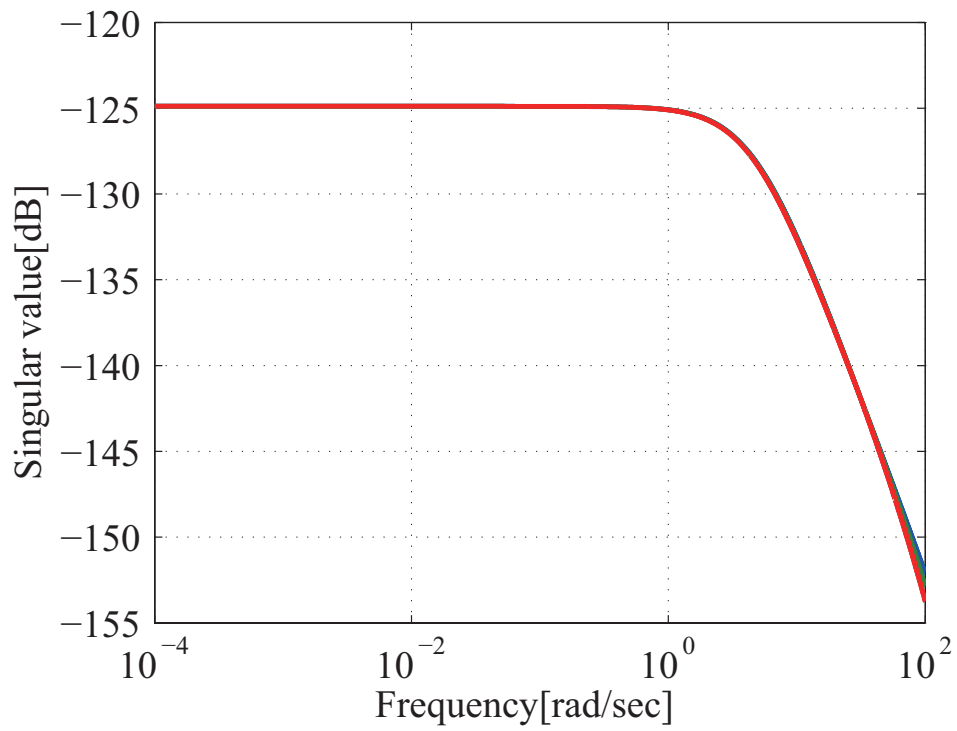


図 5.7 閉ループ特異値線図 ((5.3) 式による設計)

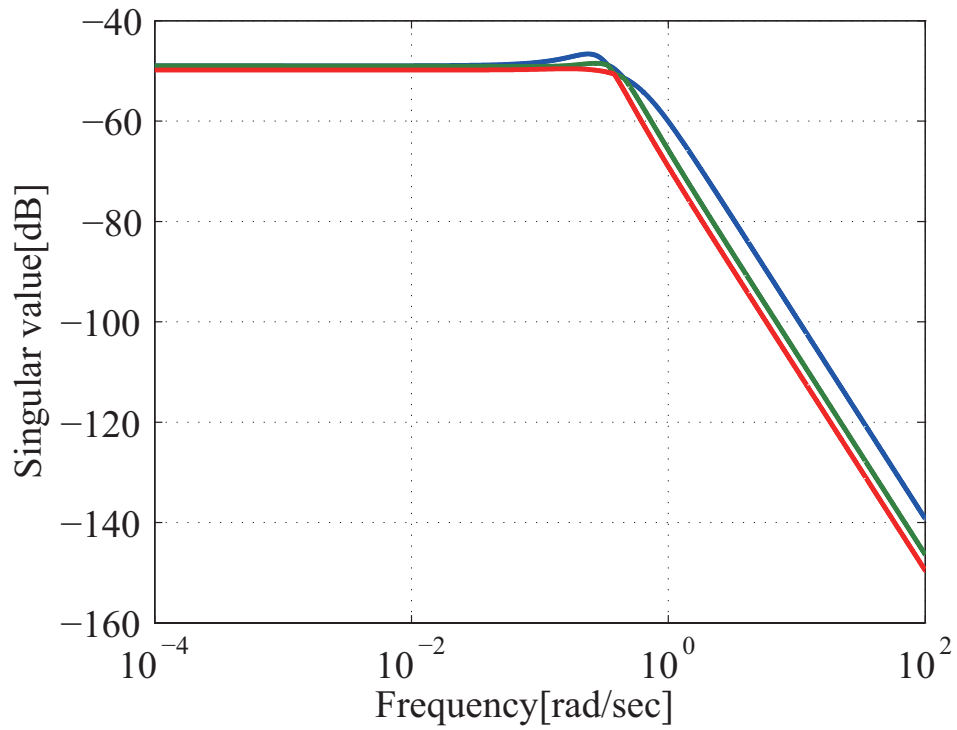


図 5.8 閉ループ特異値線図 ((5.4) 式による設計)

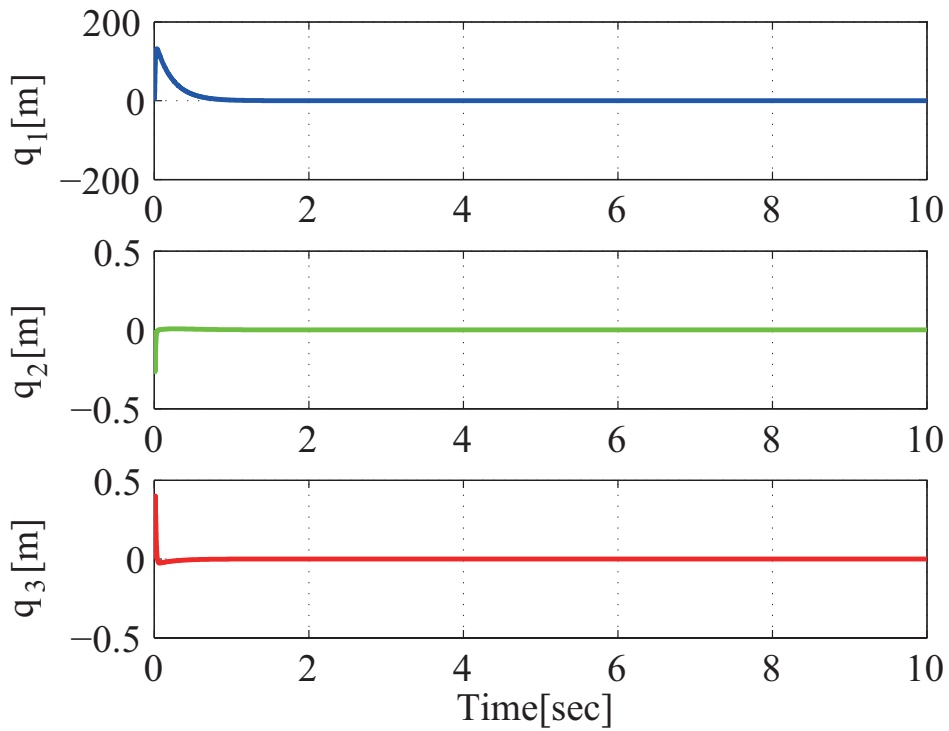


図 5.9 外乱応答結果 ((5.3) 式による設計)

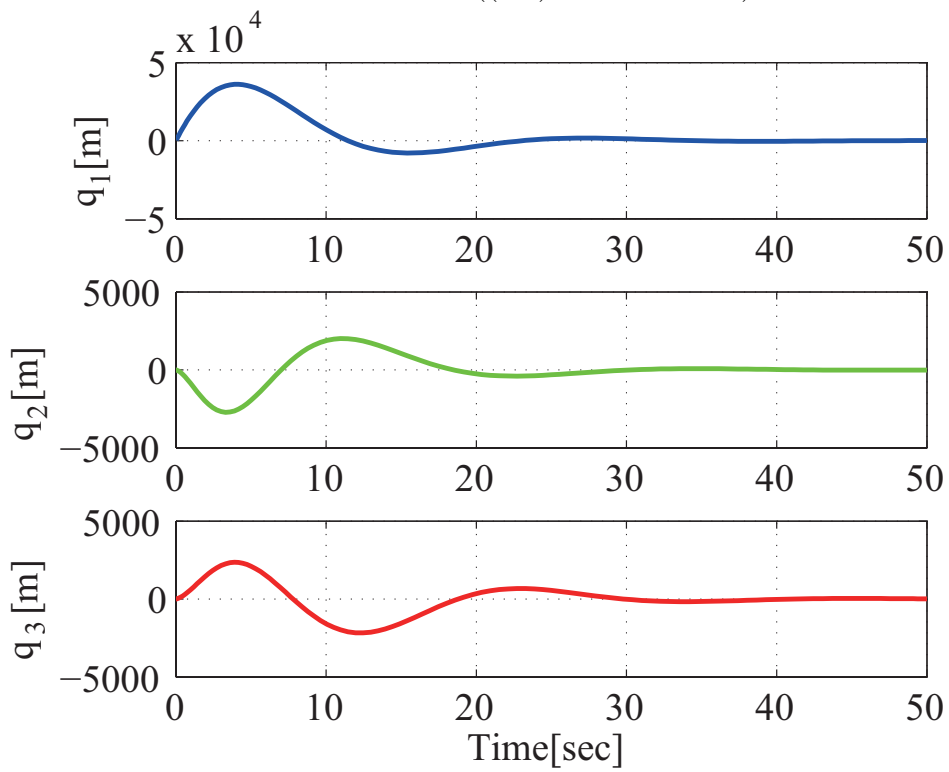


図 5.10 外乱応答結果 ((5.4) 式による設計)

5.4 あとがき

4章で示した定理を LTI 力学システムに適用し, 本手法が従来手法より広いクラスの問題を扱えることを示した. また, 数値シミュレーションを実施し有効性を検証した.

第6章 結論

6.1 結論

本論文では線形力学システムの静的出力フィードバック制御器による安定化と最適化について述べた。提案した設計法は2つである。ひとつはLPV力学システムにGKYP補題を用いた周波数領域での設計法である。この手法では、安定性についてはシステムの対称性を利用して保証し、最適性についてはGKYP補題を適用して周波数帯域ごとの制御仕様を満たす設計を考えた。もうひとつはLTV力学システムを制御対象として、拡張した力学的エネルギーをリアプノフ関数として用いる時間領域の設計法である。この手法では、安定性については2階の行列微分方程式の各係数行列が持つ性質を利用した安定条件を考えた。最適性については外乱抑制性能の最適化条件を求めることを試みた。これらの設計法で得られる静的出力フィードバック制御器は簡単な構造を持ち、同時にロバスト安定性、最適性を持つ制御法であることを示した。以下に各章の結果と結論をまとめる。

第1章

- 本論文の研究背景, 研究目的, 構成を述べた。

第2章

- 本論文で扱う線形力学システムを定義し, 問題設定を行った。

第3章

- LPV力学システムに対する静的出力フィードバック制御器の設計法を導出した。
- そのためにまず, 混合感度問題を適用した閉ループ系の設計仕様を, 一巡伝達関数を用いた開ループの設計仕様で表し, 制御器の設計問題がBMIとなる問題を回避した。
- 次に, GKYP補題を適用し, 高周波数帯域・低周波数帯域それぞれの設計仕様をLMIで表現し, それを解くことで最適な静的出力フィードバック制御器を設計できることを示した。

- 定数ゲイン行列とスケジュールドゲイン行列を持つ2種の静的出力フィードバック制御器を設計し、柔軟宇宙機の数値モデルを用いてシミュレーションを行って、両者の性能比較を行った。

第4章

- LTV 力学システムに対する静的出力フィードバック制御器の設計法を導出した。
- まず、リアプノフ関数に基づいた線形時変力学システムの安定化・最適化に関する定理を述べた。
- 次に、システムをポリトープ表現し、時変関数である安定化条件・最適化条件を有限個のLMIで表した。
- 3質点モデル、伸展衛星、柔軟宇宙機、ロケットの数値モデルを用いて、スケジュールドゲイン行列を持つ制御器を設計し、シミュレーションを実施して、その有効性を示した。

第5章

- 4章で示した定理をLTI力学システムに適用し、従来の研究成果との比較を行った。
- 本論文で示した手法の方がより広いクラスを扱えることを示し、シミュレーションによって性能を確認した。

6.2 今後の研究課題

今後の研究課題を述べる。

第3章

- 本章では低周波数帯域と高周波数帯域の2つの周波数帯域での制御仕様を満たす制御器設計を示した。制御性能を高めるために、より多くの帯域での設計仕様を与えることを検討する必要がある。
- 数値シミュレーションでは太陽電池パドルを持つ柔軟宇宙機モデルを用いた検証を行った。このシステムの2階行列微分方程式の係数行列は対称であるが、係数行列が非対称となるシステムにも拡張が可能である。

第4章

- 本章の設計法はリアプノフ関数の構造を限定することによる十分条件を使用している. それによる設計の保守性について更なる研究が必要である.
- また, この設計手法ではパラメータ ϵ を設計者が与えることで, 条件式を LMI で表現することが可能となっている. したがって, その制御性能はパラメータ ϵ に依存し, 場合によっては解が得られない. 設計パラメータ ϵ の存在条件, 最適値の選定法の確立が必要である.

第5章

- 実システムでの有効性の検証を行うことが必要である.

謝辞

本研究を進めるにあたり、電気通信大学大学院 知能機械工学専攻 木田隆教授には、学部4年生から現在に至るまで、終始、懇切なご指導とご助言を賜りました。謹んで、感謝申し上げます。

また、本論文の審査において、大変有益なご指導とご教示を頂いた、電気通信大学 知能機械工学専攻 新誠一教授、田中一男教授、明愛国教授、樋口幸治准教授に、深甚なる感謝の意を表します。

さらに、研究の細部に渡り、適切なお助言を頂いた、故長塩知之氏に厚く感謝の意を表します。

そして、日頃の議論を通じて共に研究活動を行ってきた、電気通信大学 木田研究室の諸氏にも、心から感謝致します。

最後に、両親を始めとして、研究に従事する機会と環境を提供して下さった皆様方に深く感謝致します。

参考文献

- 1) P.C. Hughes: Spacecraft Attitude Dynamics, John Wiley & Sons, NY (1986)
- 2) P. C. ミュラー (森訳): 安定性と行列－線形動的システムの安定理論における行列論的手法, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1989)
- 3) 木田 隆: スペースクラフトの制御, コロナ社 (1999)
- 4) 美多 勉: H_∞ 制御, 昭晃堂 (1994)
- 5) 細江, 荒木: 制御系設計: H_∞ 制御とその応用, 朝倉書店 (1994)
- 6) 劉 康志: 線形ロバスト制御, コロナ社 (2002)
- 7) P. Gahinet and P. Apkarian: A linear matrix inequality approach to H_∞ control, International Journal of Robust and Nonlinear Control, **4-4**, 421/448 (1994)
- 8) P. Apkarian and P. Gahinet: A Convex Characterization of Gain-Scheduled H_∞ Controllers, IEEE Transactions on Automatic Control, **40-5**, 853/864 (1995)
- 9) P. Apkarian and P. Gahinet: Self-Scheduled H_∞ Control of Linear Parameter-Varying Systems, Automatica, **31-9**, 1254/1261 (1995)
- 10) P. Apkarian and R. J. Adams: Advanced Gain-Scheduling Techniques for Uncertain Systems, American Control Conference, 3331/3335 (1997)
- 11) Y. Hamada, T. Ohtania, T. Kida, and T. Nagashio Synthesis of a linearly interpolated gain scheduling controller for large flexible spacecraft ETS-VIII, Control Engineering Practice, **19-6**, 611/625 (2011)
- 12) 糺谷, 池田, 木田: Collocated FeedBack による宇宙構造物の最適制御, 計測自動制御学会論文集, **25-8**, 882/888 (1989)
- 13) M. Ikeda, M. Koujitani and T. Kida: Optimality of Direct Velocity and Displacement Feedback for Large Space Structures with Collocated Sensors and Actuators, 12th IFAC World Congress, **vol. VI**, 91/94 (1993)

- 14) 藤崎 泰正: 運動方程式に基づく機械システムの解析と制御系設計, システム/制御/情報, **44-4**, 190/197 (2000)
- 15) 長塩, 木田, 濱田, 大谷: きく 8号 (ETS-VIII) のロバスト姿勢制御系設計 - DVDFB の特徴を活かした二自由度制御系の適用 -, 計測自動制御学会論文集, **44-6**, 499/507 (2008)
- 16) 黒滝, 長塩, 木田: コロケーション条件を満たすジャイロシステムの入力フィードバックによるロバスト安定化と LMI による最適設計, 計測自動制御学会論文集, **48-10**, 952/960 (2013)
- 17) V. F. Montagner and P. L. D. Peres: H_∞ parameter-dependent state feedback control of linear time-varying systems in polytopic domains, 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, 5006/5011 (2005)
- 18) V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres: Design of H_∞ Gain-Scheduled Controllers for Linear Time-Varying Systems by means of Polynomial Lyapunov Functions, 45th IEEE Conference on Decision and Control, 5839/5844 (2006)
- 19) T. Iwasaki and S. Hara: Generalized KYP Lemma: Unified Frequency Domain Inequalities With Design Applications, IEEE Transactions on Automatic Control, **50** 41/59 (2005)
- 20) 塩形, 原: 一般化 KYP 補題に制御系設計ツール, Journal of the Japan Society for Simulation Technology, **25-1**, 69/78, (2006)
- 21) E.E.Zajac: The Kelvin-Tait-Chetaev Theorem and Extensions, Journal of Astronautical Sciences, Vol.11, No.2, pp.46-49 (1964)
- 22) Y. Fujisaki, M. Ikeda and K. Miki: Robust Stabilization of Large Space Structures Via Displacement Feedback, IEEE Transactions on Automatic Control, **46-12**, 1993/1996 (2001)
- 23) 岩崎: LMI と制御, 昭晃堂 (1997)
- 24) P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali: LMI Control Toolbox, The Math Work Inc., (1996)
- 25) J. S. Shamma and M. Athans: Analysis of Gain Scheduled Control for Nonlinear Plants, IEEE Transactions on Automatic Control, **35-8**, 898/907 (1990)

- 26) J. S. Shamma and M. Athans: Guaranteed Properties of Gain Scheduled Control for linear Parameter-Varying Plants, *Automatica*, **27-3**, 559/564 (1991)
- 27) G. Backer and A. Packard: Robust Performance of Linear Parametrically Varying Systems Using Parametrically-Dependent Linear Feedback, *Systems & Control Letters*, **23-3**, 205/215 (1994)
- 28) H. D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, Y. Yamamoto: Parameterized Linear Matrix Inequality Techniques in Fuzzy Control System Design, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **9-2**, 324/332 (2001)
- 29) 嘉藤, 増淵, 佐伯, 小原: LPV システムのディスクリプタ表現を用いたゲインスケジューリング補償器の設計-飛行制御系設計問題への適用-, 第4回制御部門大会, 5/10 (2004)
- 30) 増淵, 久米, 示村: スプライン型のパラメータ依存二次形式を用いたゲインスケジューリング制御系の設計, 計測自動制御学会論文集, **48-2**, 322/328 (2000)
- 31) Y. Ebihara and T. Hagiwara: New Dilated LMI Characterizations for Continuous-Time Control Design and Robust Multi objective Control, *Proceedings of the American Control Conference*, 47/52 (2002)
- 32) 下村 卓: パラメータ依存リアプノフ関数を許容する拡張空間での制御系設計, 計測自動制御学会論文集, **41-5**, 411/418 (2005)
- 33) 濱田, 大谷, 木田, 長塩: きく8号 (ETS-VIII) のロバスト姿勢制御系設計-ゲインスケジューリング制御の適用-, 計測自動制御学会論文集, **44-6**, 508/517 (2008)
- 34) R. Okano, T. Kida and T. Nagashio: Asymptotic Stability of Second-Order Linear Time-Varying Systems, *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **29-6**, 1472/1476 (2006)
- 35) A. J. van der Schaft: L_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **37-6**, 770/783 (1992)
- 36) R. Watanabe, K. Uchida, M. Fujita, and E. Shimemura: L_2 Gain and H_∞ Control of Linear Systems with Scheduling Parameter, 33th IEEE Conference on Decision and Control, 1412/1414 (1994)
- 37) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会, (1978)

-
- 38) E. クライツィグ (阿部訳): フーリエ解析と偏微分方程式 (原書第8版), 培風館, (2003)
 - 39) 岡野, 木田: 伸展する宇宙構造物の安定性と安定化, 計測自動制御学会論文集, **38-3**, 284/292 (2002)
 - 40) M. Rotunno, T. Fiorenzani, P. Petritoli and S. Bennani, "Modern Analysis Techniques For Gain Scheduled Thrust Vector Controllers Of Launchers", Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Control Applications, Munich, 2006.

付録A 一般化KYP(GKYP)補題

ここでは、一般化KYP(GKYP)補題 [20] の概要を述べる。

$n \times n$ エルミート行列集合を H_n とし、関数 $\sigma : C^{p \times m} \times H_{p+m} \rightarrow H_m$ を次のように定義する。

$$\sigma(G, \Pi) = \begin{bmatrix} G \\ I_m \end{bmatrix}^* \Pi \begin{bmatrix} G \\ I_m \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

そして、周波数帯域を表す集合 Λ を、

$$\Lambda = [\lambda \in C \mid \sigma(\lambda, \Phi) = 0, \sigma(\lambda, \Psi) \geq 0] \quad (\text{A.2})$$

と定義する。ここで行列を Φ, Ψ を適切に定めることにより、連続時間、離散時間の低、中間、高周波数帯域に対応する集合 Λ が定義される。 Φ は連続時間系・離散時間系を定める行列であり、連続時間系のときは

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

である。 Ψ は周波数帯域を設定する行列であり、連続時間系の場合は表 A.1 に表される。ただし、 $\omega_c = (\omega_1 + \omega_2)/2$ である。集合 $\bar{\Lambda}$ を

$$\bar{\Lambda} = \Lambda(\Lambda \text{ が有界}), \Lambda \cup \infty(\text{それ以外}) \quad (\text{A.4})$$

と定義すると以下の定理が成り立つ。

定理 A.1

行列 $A \in C^{n \times n}, B \in C^{n \times m}, \Theta \in H_{n \times m}$ および $\Phi, \Psi \in H_2$ が与えられるとき、(A.4) 式によって $\bar{\Lambda}$ を定義し、 Ω を A の固有値のうち $\bar{\Lambda}$ に含まれるものの集合とすると、次の二つの条件が同値である。

1. すべての $\lambda \in \bar{\Lambda} \setminus \Omega$ に対して

$$\begin{bmatrix} (\lambda I - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} (\lambda I - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{A.5})$$

が成り立つ。

2. $Q \geq 0$ となるような $P, Q \in H_2$ が存在し

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \Theta \leq 0 \quad (\text{A.6})$$

表 A.1 行列 Ψ

帯域	ω	Ψ
低周波数	$ \omega < \omega_l$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \omega_l^2 \end{bmatrix}$
中周波数	$\omega_1 < \omega < \omega_2$	$\begin{bmatrix} -1 & j\omega_c \\ -j\omega_c & -\omega_1\omega_2 \end{bmatrix}$
高周波数	$ \omega > \omega_h$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\omega_h^2 \end{bmatrix}$

が成り立つ.

(A.6) 式は変数行列 P, Q に対する線形行列不等式となっている. ここで, システムの伝達関数の状態空間実現が

$$G(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B + D \quad (\text{A.7})$$

で与えられるとする. ただし, $C \in C^{p \times n}$, $D \in C^{p \times n}$ である. このとき, 行列 $\Pi \in H_{p+n}$ に対して Θ を

$$\Theta = \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^* \Pi \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

と定義すると (A.5) 式の条件は

$$\sigma(G(\lambda), \Pi) \leq 0 \quad (\text{A.9})$$

と同値である. すなわち, $G(\lambda)$ のベクトル軌跡が特定の周波数帯域 Λ において, (A.9) 式によって表される複素平面上の領域に含まれているかどうかを, (A.6) 式の LMI を解くことによって知ることができる. GKYP 補題で指定された周波数帯域において $G(\lambda)$ のベクトル軌跡が (A.9) 式によって示される領域に含まれるような $G(\lambda)$ を求めるという設計問題を考えるときは, (A.6) 式および (A.8) 式がシステムのパラメータ (A, B, C, D) に対して一般には二次になる. そのため, 次のように工夫をする.

$G(\lambda)$ が $p \times m$, すなわち m 入力 p 出力システムであるとき, (A.8) 式における $\Pi \in H_{m+p}$ を

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix}, \quad \Pi_{11} \in H_p, \quad \Pi_{11} \geq 0 \quad (\text{A.10})$$

とする. ここで新たに加えられた条件 $\Pi_{11} \geq 0$ は, (A.9) 式を満たす領域が凸であるということを意味する. 例えば $m=p=1$, すなわち $G(\lambda)$ が1入出力系するとき, $\Pi_{11} = 0$ は直線の片側, $\Pi_{11} > 0$ は円の内側を意味し, どちらの領域も凸である. 有界実性や正実性などのシステムの設計において必要な特性の多くは, この形で記述される.

以上の条件を満たしているとき, Schur complement を適用すると (A.6) 式は

$$\begin{bmatrix} \Gamma(P, Q, C, D) & [C \ D]^* \Pi_{11} \\ [C \ D] \Pi_{11} & -\Pi_{11} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{A.11})$$

となる. ここで, $\Gamma(P, Q, C, D)$ は次の式で表される.

$$\begin{aligned} \Gamma(P, Q, C, D) = & \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & C^* \Pi_{12} \\ \Pi_{12}^* C & D^* \Pi_{12} + \Pi_{12}^* D + \Pi_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

この式は (A.6) 式に比べて, 行列のサイズが大きくなるため, システムのパラメータ A, B, C, D が固定されている解析問題では式 A.6 を解くほうが効率よく計算することができる. しかし, (A.11) 式は C, D についても一次となるため, これらのパラメータを LMI の変数として解くことができる. ここで, Π の最適化について考えると, システムの解析問題では Π を変数として計算することができる. 一方, C, D を変数として設計問題では解く C, D を係数をとらない Π_{22} のみ LMI の変数として解くことができる. 例として1入出力系を考える. 境界が直線となる条件

$$a\Re[G(\lambda)] + b\Im[G(\lambda)] + c < 0, a, b, c \in R \quad (\text{A.13})$$

に対して, $\sigma(G(\lambda), \Pi) \leq 0$ となる Π は

$$\Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & a + jb \\ a - jb & 2c \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$(\text{A.15})$$

と書ける. また, 境界が円となる条件

$$|G(\lambda) - c| < r, c \in C, r \in R \quad (\text{A.16})$$

に対して, $\sigma(G(\lambda), \Pi) \leq 0$ となる Π は

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & -c \\ -c^* & c^*c - r^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

と書ける. したがって, 設計問題において, 境界が直線の場合は c を円のときは r^2 を変数とすることができる.

付録B 柔軟宇宙機

B.1 姿勢運動モデル

姿勢制御系設計に用いる柔軟宇宙機のモデルは、本体部の三自由度剛体運動と本体部に付加された柔軟構造物のモード方程式から以下のように記述される。

$$J(t)\ddot{\theta} + N(t)\dot{\eta} = u + w \quad (\text{B.1})$$

$$N^T(t) + I\ddot{\eta} + \Lambda\dot{\eta} + \Omega^2\eta = 0 \quad (\text{B.2})$$

ただし、 θ は本体部姿勢角度ベクトル、 η は柔軟構造物のモード座標を表す。 $J(t)$ は慣性行列、 $N(t)$ は干渉行列であり、時間 t の関数である。 Ω^2 , Λ はそれぞれモード剛性行列、モード減衰行列を表す。この式を $q = [\theta^T \ \eta^T]^T$ としてまとめると

$$M(t)\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = Lu + Fw \quad (\text{B.3})$$

が得られる。ここで、

$$M(t) = \begin{bmatrix} J(t) & N(t) \\ N^T(t) & I \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$L = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

である。姿勢制御に用いる観測量 y には、アクチュエータと同位置、同方向に配置 (コロケーション) されたセンサから計測される本体部の姿勢角度、及び、角速度を用いる。

$$y = \begin{bmatrix} y_d \\ y_v \end{bmatrix}, \quad y_d = \theta = L^T q, \quad y_v = \dot{\theta} = L^T \dot{q} \quad (\text{B.6})$$

本論文では ETS-VIII の数値モデルを用いる。ETS-VIII は 2 枚の大型アンテナと 2 枚の大型太陽電池パドルを持つ。太陽電池パドルが軌道周期でピッチ軸回りに回転することから、この宇宙機モデルは時変システムとなる。パドル角 0, 45, 90 度のときの u から y_d の開ループ特異値線図を図 B.2 に示す。パドル角に依存してモード周波数が大きく異なっていることがわかる。もとの ETS-VIII のプラントモデルは 3 つの角度と 30 個の振動モードで構成されている。しかしながら、高次のモデルでは LMI を用いて解を得るのが困難であり、また、一般的にいくつかの低次のモー



図 B.1 ETS-VIII の外観図 (C)JAXA

ド周波数を用いれば十分な宇宙機の姿勢制御性能が得られる。そこで、3つの剛体モードとモード周波数が最も低い振動モードを含む低次元モデルを構成し、制御器設計を行う。

B.2 低次元化

はじめに、(B.3) 式の一般化固有値問題を解いてモード方程式に変換する [37].

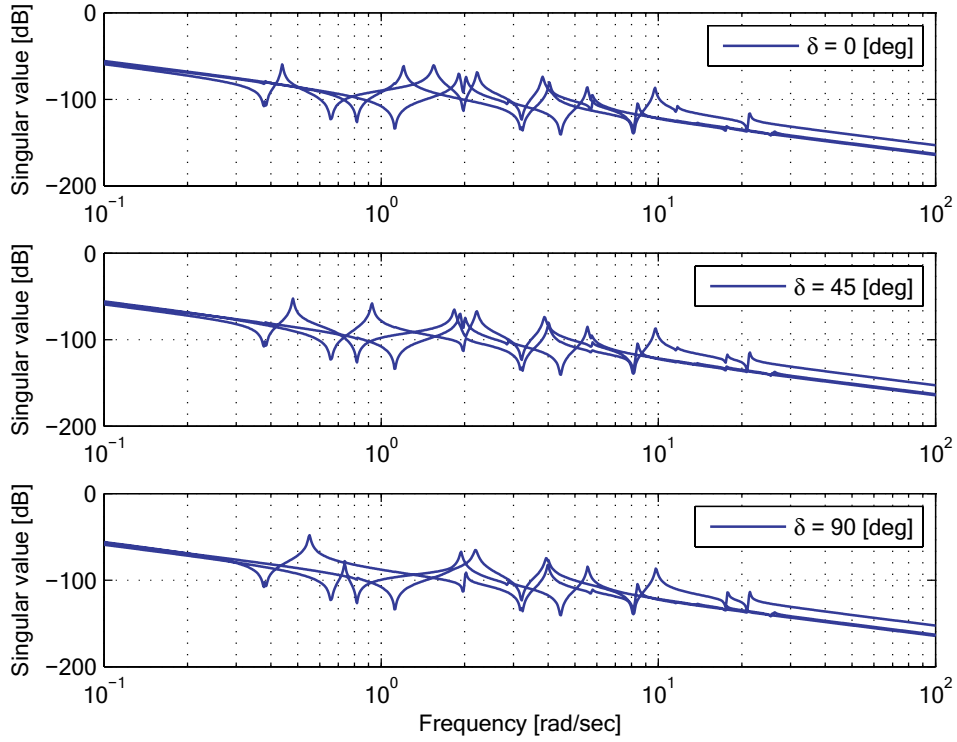
$$(I + \Delta(t))\ddot{\epsilon} + \Pi\dot{\epsilon} + \Sigma\epsilon = \Gamma(u + w) \quad (\text{B.7})$$

$$y = \begin{bmatrix} \Gamma^T & 0 \\ 0 & \Gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

ただし、

$$\begin{aligned} \Psi^T M_0 \Psi &= I, \quad \Psi^T M_\Delta(t) \Psi = \Delta(t) \\ \Psi^T D \Psi &= \Pi, \quad \Psi^T K \Psi = \Sigma, \quad \Psi^T L = \Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

である。また、 $M_0 = M(t_0)$ として $M(t)$ を $M(t) = M_0 + M_\Delta(t)$ と定義する。本論文では $t = t_0$ のときのパドルの角度、つまりノミナル角を $\delta_0 = 45[\text{deg}]$ と定める。低次元化によって、モードベクトル ϵ を制御モードベクトル ϵ_c と残余モードベクトル

図 B.2 ETS-VIII の開ループ特異値線図 ($u \rightarrow y_d$)

ル ϵ_r に分割できる. この操作により, 以下の低次元化モデルを得る.

$$(I + \Delta_c(t))\ddot{\epsilon}_c + \Omega_c\dot{\epsilon}_c + \Lambda_c\epsilon_c = \Gamma_c u \quad (\text{B.10})$$

$$y = \begin{bmatrix} \Gamma_c^T & 0 \\ 0 & \Gamma_c^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_c \\ \dot{\epsilon}_c \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

B.3 3章で用いるポリトープモデル

時変項 $\Delta_c(t)$ は 16 個の要素からなる行列である. $\Delta_c(t)$ のポリトープモデルの端点は 2^{16} 個となり, 制御器を設計するのは困難である. この問題に対し, $\Delta_c(t)$ は周期 2π の周期関数であることに注目し, $\Delta_c(t)$ の各成分 $\Delta_{c(m,n)}(\delta)$ ($m, n = 1, 2, 3, 4$) に対して, 次のようにフーリエ 1 次級数展開 [38] を適用する.

$$\begin{aligned} \Delta_{c(m,n)}(t) &= \Delta_{c0(m,n)} + \Delta_{ccos(m,n)} \cos f(t) + \Delta_{csin(m,n)} \sin f(t) \\ \Delta_c(t) &= \Delta_{c0} + \Delta_{ccos} \cos f(t) + \Delta_{csin} \sin f(t) \\ m &= 1, \dots, 4, \quad n = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

すると, 4 端点の近似モデルが得られる. ノミナル角 $\delta_0 = 45[\text{deg}]$ としたときの $\Delta_c(t)$ の元モデルとフーリエ 1 次級数近似モデルの値を図 B.3 に示す. ただし, 横

軸はパドル角度であり, 実線が元モデル, 破線が近似モデルを表す. (1, 1), (1, 3), (3, 3) 要素以外はよく近似できていることがわかる. 近似の次数を増やせば, 精度の良い近似モデルが得られると考えられるが, 次数の増加により LMI の解が得られない可能性がある. また, 近似できていない要素も値が小さいため誤差は問題にならないと考えられる. $E(t)$ の近似モデルは以下となる.

$$E(t) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I + \Delta_{c0} + \Delta_{ccos} \cos f(t) + \Delta_{csin} \sin f(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

(B.13) 式のポリトープモデルは

$$E(t) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i E_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1 \quad (\text{B.14})$$

となる. ただし,

$$\alpha_i = \frac{1}{4}(1 \mp \cos f(t))(1 \mp \sin f(t)) \quad (\text{B.15})$$

$$E_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I + \Delta_{c0} \mp \Delta_{ccos} \mp \Delta_{csin} \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

である.

B.4 4章で用いるポリトープモデル

行列 $\Delta_c(t)$ が

$$\begin{aligned} \Delta_c(t) = & \Delta_{c0} + \Delta_{ccos1} \cos f(t) + \Delta_{csin1} \sin f(t) \\ & + \Delta_{ccos2} \cos 2f(t) + \Delta_{csin2} \sin 2f(t) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

と表されるものとする. そして

$$\sin f(t) = a_1 S_1 + a_2 S_2, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1 + a_2 = 1 \quad (\text{B.18})$$

$$\cos f(t) = b_1 C_1 + b_2 C_2, \quad b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad b_1 + b_2 = 1 \quad (\text{B.19})$$

とすると

$$\sin 2f(t) = 2 \sin f(t) \cos f(t), \quad \cos 2f(t) = \cos^2 f(t) - \sin^2 f(t) \quad (\text{B.20})$$

であるから,

$$\begin{aligned} \sin 2f(t) = & \alpha_1 2S_1 C_1 + \alpha_2 (S_1 C_1 + S_1 C_2) + \alpha_3 2S_1 C_2 + \alpha_4 (S_1 C_1 + S_2 C_1) \\ & + \alpha_5 \left(\frac{1}{2} S_1 C_1 + \frac{1}{2} S_1 C_2 + \frac{1}{2} S_2 C_1 + \frac{1}{2} S_2 C_2 \right) + \alpha_6 (S_1 C_2 + S_2 C_2) \\ & + \alpha_7 2S_2 C_1 + \alpha_8 (S_1 C_1 + S_2 C_2) + \alpha_9 2S_2 C_2 \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

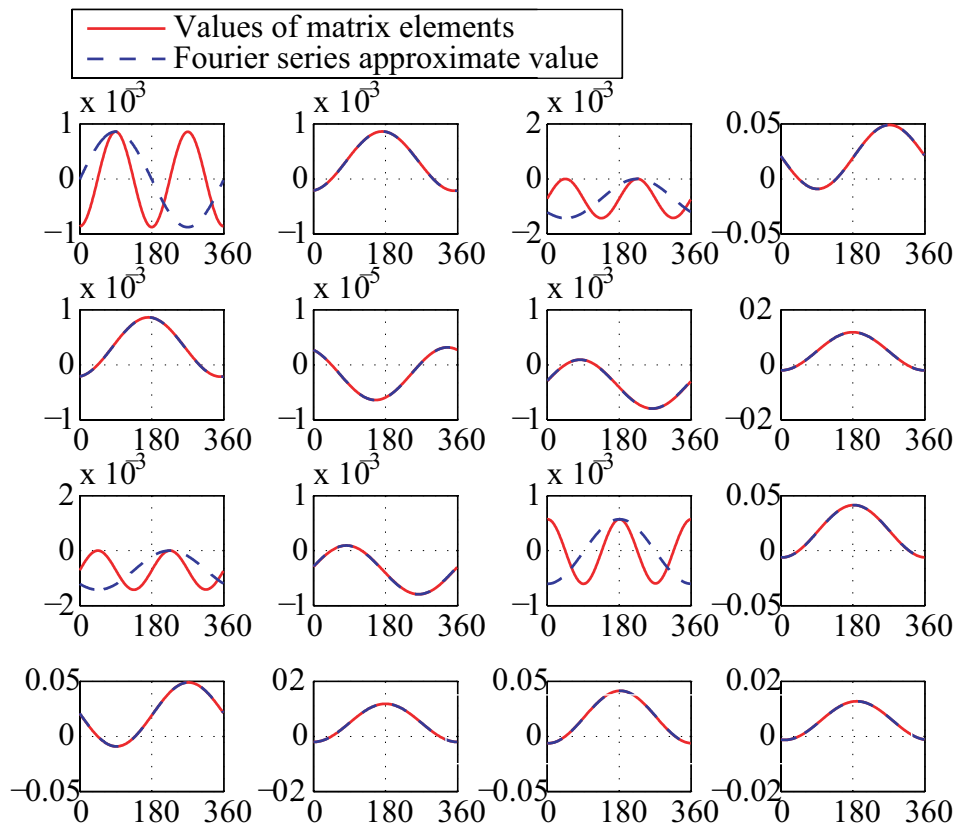


図 B.3 $\Delta_c(t)$ の値とその近似値 (左上:(1,1) 要素, 右下:(4,4) 要素を示す)

$$\begin{aligned}
\cos 2f(t) = & \alpha_1(C_1^2 - S_1^2) + \alpha_2(C_1C_2 - S_1^2) + \alpha_3(C_2^2 - S_1^2) \\
& + \alpha_4(C_1^2 - S_1S_2) + \alpha_5(C_1C_2 - S_1S_2) + \alpha_6(C_2^2 - S_1S_2) \\
& + \alpha_7(C_1^2 - S_2^2) + \alpha_8(C_1C_2 - S_2^2) + \alpha_9(C_2^2 - S_2^2)
\end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

を得る。ただし,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = a_1^2 b_1^2, \quad \alpha_2 = 2a_1^2 b_1 b_2, \quad \alpha_3 = a_1^2 b_2^2, \quad \alpha_4 = 2a_1 a_2 b_1^2, \quad \alpha_5 = 4a_1 a_2 b_1 b_2 \\
\alpha_6 = 2a_1 a_2 b_2^2, \quad \alpha_7 = a_2^2 b_1^2, \quad \alpha_8 = 2a_2^2 b_1 b_2, \quad \alpha_9 = a_2^2 b_2^2
\end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

である。このとき, $\dot{\alpha}_i(t)$ は

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}_1 = 2a_1 b_1^2 \dot{a}_1 + 2a_1^2 b_1 \dot{b}_1, \quad \dot{\alpha}_2 = 4a_1 b_1 b_2^2 \dot{a}_1 + 2a_1^2 b_2 \dot{b}_1 + 2a_1^2 + 2a_1^2 b_1 \dot{b}_2 \\
\dot{\alpha}_3 = 2a_1 b_1 b_2^2 \dot{a}_1 + 2a_1^2 b_2 \dot{b}_2 \dot{\alpha}_4 = 2a_2 b_1^2 \dot{a}_1 + 2a_1 b_1^2 \dot{a}_2 + 4a_1 a_2 b_1 \dot{b}_1 \\
\dot{\alpha}_5 = 4a_2 b_1 b_2 \dot{a}_1 + 4a_1 b_1 b_2 \dot{a}_2 + 4a_1 a_2 b_2 \dot{b}_1 + 4a_1 a_2 b_1 \dot{b}_2 \\
\dot{\alpha}_6 = 2a_2 b_2^2 \dot{a}_1 + 2a_1 b_2^2 \dot{a}_2 + 4a_1 a_2 b_2 \dot{b}_2, \quad \dot{\alpha}_7 = 2a_2 b_1^2 \dot{a}_2 + 2a_2^2 b_1 \dot{b}_1 \\
\dot{\alpha}_8 = 4a_1 b_1 b_2 \dot{a}_2 + 2a_2^2 b_2 \dot{b}_1 + 2a_2^2 b_1 \dot{b}_2, \quad \dot{\alpha}_9 = 2a_2 b_2^2 \dot{a}_2 + 2a_2^2 b_2 \dot{b}_2
\end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

である。また, $\sin f(t)$, $\cos f(t)$ も以下のように書き換えられる。

$$\sin f(t) = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_1 + \alpha_3 S_1 + \alpha_4 \left(\frac{1}{2} S_1 + \frac{1}{2} S_2 \right) \quad (\text{B.25})$$

$$+ \alpha_5 \left(\frac{1}{2} S_1 + \frac{1}{2} S_2 \right) + \alpha_6 \left(\frac{1}{2} S_1 + \frac{1}{2} S_2 \right) \quad (\text{B.26})$$

$$+ \alpha_7 S_2 + \alpha_8 S_2 + \alpha_9 S_2 \quad (\text{B.27})$$

$$\cos f(t) = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 \left(\frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{2} C_2 \right) + \alpha_3 C_2 + \alpha_4 C_1 \quad (\text{B.28})$$

$$+ \alpha_5 \left(\frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{2} C_2 \right) + \alpha_6 C_2 \quad (\text{B.29})$$

$$+ \alpha_7 C_1 + \alpha_8 \left(\frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{2} C_2 \right) + \alpha_9 C_2 \quad (\text{B.30})$$

以上より, $\Delta_c(t)$ は以下の9端点のポリトープモデルで記述できる。

$$\Delta_c(t) = \sum_{i=1}^9 \alpha_i(t) \Delta_{ci} \quad (\text{B.31})$$

ノミナル角 $\delta_0 = 45[\text{deg}]$ としたときの $\Delta_c(t)$ の元モデルと近似モデルの値を示す。精度のよい近似モデルが得られている。

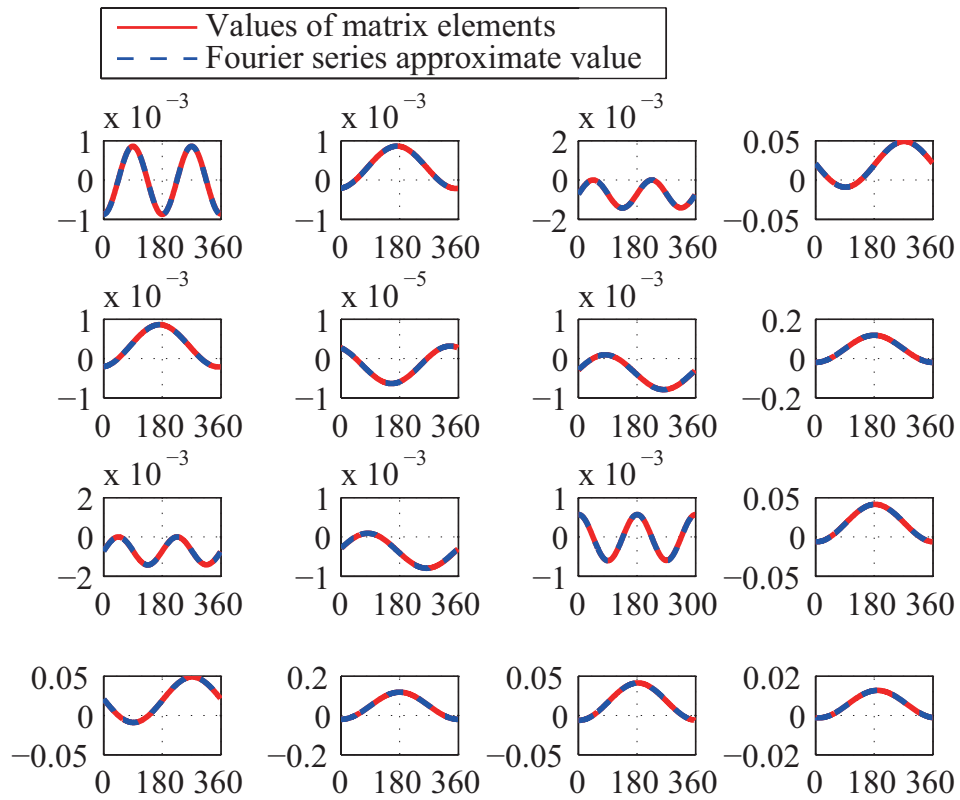


図 B.4 $\Delta_c(t)$ の値とその近似値 (左上:(1,1) 要素, 右下:(4,4) 要素を示す)

付録C 全ての係数行列が時変行列のときの制御器設計

$L(t), F(t), E(t)$ が時変行列に拡張可能であることを示す. 各係数行列が

$$M(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) M_i, \quad D(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) D_i, \quad G(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) G_i \quad (\text{C.1})$$

$$K(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) K_i, \quad N(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) N_i, \quad L(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) L_i, \quad (\text{C.2})$$

$$E(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) E_i, \quad F(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) F_i \quad (\text{C.3})$$

と表されるとする. $\alpha_i(t)$ は次の通り.

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) = 1, \quad \alpha_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, \sigma \quad (\text{C.4})$$

σ は端点数である. $S(t)$ は

$$S(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) S_i, \quad S_i = \begin{bmatrix} \epsilon F_i & \gamma E_i \\ F_i & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

と表せる. 制御器も以下のように表されるものとする.

$$K_c(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) K_{ci} = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) (K_{si} + K_{wi}), \quad (\text{C.6})$$

$$D_c(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) D_{ci} = \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i(t) (D_{si} + D_{wi}) \quad (\text{C.7})$$

このとき

$$\begin{aligned} \tilde{D}(t) = & \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i^3(t) \tilde{D}_i + \sum_{i=1}^{\sigma-1} \sum_{j=i+1}^{\sigma} \left(\alpha_i^2(t) \alpha_j(t) \tilde{D}_{ij} + \alpha_i(t) \alpha_j^2(t) \tilde{D}_{ji} \right) \\ & + \sum_{i=1}^{\sigma-2} \sum_{j=i+1}^{\sigma-1} \sum_{k=j+1}^{\sigma} \alpha_i(t) \alpha_j(t) \alpha_k(t) \tilde{D}_{ijk} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i^3(t) \tilde{G}_i + \sum_{i=1}^{\sigma-1} \sum_{j=i+1}^{\sigma} \left(\alpha_i^2(t) \alpha_j(t) \tilde{G}_{ij} + \alpha_i(t) \alpha_j^2(t) \tilde{G}_{ji} \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\sigma-2} \sum_{j=i+1}^{\sigma-1} \sum_{k=j+1}^{\sigma} \alpha_i(t) \alpha_j(t) \alpha_k(t) \tilde{G}_{ijk} \\
\tilde{K}(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i^3(t) \tilde{K}_i + \sum_{i=1}^{\sigma-1} \sum_{j=i+1}^{\sigma} \left(\alpha_i^2(t) \alpha_j(t) \tilde{K}_{ij} + \alpha_i(t) \alpha_j^2(t) \tilde{K}_{ji} \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\sigma-2} \sum_{j=i+1}^{\sigma-1} \sum_{k=j+1}^{\sigma} \alpha_i(t) \alpha_j(t) \alpha_k(t) \tilde{K}_{ijk} \\
\tilde{N}(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i^3(t) \tilde{N}_i + \sum_{i=1}^{\sigma-1} \sum_{j=i+1}^{\sigma} \left(\alpha_i^2(t) \alpha_j(t) \tilde{N}_{ij} + \alpha_i(t) \alpha_j^2(t) \tilde{N}_{ji} \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\sigma-2} \sum_{j=i+1}^{\sigma-1} \sum_{k=j+1}^{\sigma} \alpha_i(t) \alpha_j(t) \alpha_k(t) \tilde{N}_{ijk}
\end{aligned}$$

と得られる。ただし、

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_i &= D_i + L_i D_{si} L_i^T, \\
\tilde{D}_{ij} &= 2D_i + D_j + L_i D_{si} L_j^T + L_i D_{sj} L_i^T + L_j D_{si} L_i^T, \\
\tilde{D}_{ji} &= D_i + 2D_j + L_i D_{sj} L_j^T + L_j D_{si} L_j^T + L_j D_{sj} L_i^T, \\
\tilde{D}_{ijk} &= 2D_i + 2D_j + 2D_k + L_i D_{sj} L_k^T + L_i D_{sk} L_j^T + L_j D_{si} L_k^T \\
&\quad + L_j D_{sk} L_i^T + L_k D_{si} L_j^T + L_k D_{sj} L_i^T \\
\tilde{G}_i &= G_i + L_i D_{wi} L_i^T, \\
\tilde{G}_{ij} &= 2G_i + G_j + L_i D_{wi} L_j^T + L_i D_{wj} L_i^T + L_j D_{wi} L_i^T, \\
\tilde{G}_{ji} &= G_i + 2G_j + L_i D_{wj} L_j^T + L_j D_{wi} L_j^T + L_j D_{wj} L_i^T, \\
\tilde{G}_{ijk} &= 2G_i + 2G_j + 2G_k + L_i D_{wj} L_k^T + L_i D_{wk} L_j^T + L_j D_{wi} L_k^T \\
&\quad + L_j D_{wk} L_i^T + L_k D_{wi} L_j^T + L_k D_{wj} L_i^T \\
\tilde{K}_i &= K_i + L_i K_{si} L_i^T, \\
\tilde{K}_{ij} &= 2K_i + K_j + L_i K_{si} L_j^T + L_i K_{sj} L_i^T + L_j K_{si} L_i^T, \\
\tilde{K}_{ji} &= K_i + 2K_j + L_i K_{sj} L_j^T + L_j K_{si} L_j^T + L_j K_{sj} L_i^T, \\
\tilde{K}_{ijk} &= 2K_i + 2K_j + 2K_k + L_i D_{sj} L_k^T + L_i D_{sk} L_j^T + L_j D_{si} L_k^T \\
&\quad + L_j K_{sk} L_i^T + L_k K_{si} L_j^T + L_k K_{sj} L_i^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_i &= N_i + L_i K_{wi} L_i^T, \\
\tilde{N}_{ij} &= 2N_i + N_j + L_i K_{wi} L_j^T + L_i K_{wj} L_i^T + L_j K_{wi} L_i^T, \\
\tilde{N}_{ji} &= N_i + 2N_j + L_i K_{wj} L_j^T + L_j K_{wi} L_j^T + L_j K_{wj} L_i^T, \\
\tilde{N}_{ijk} &= 2N_i + 2N_j + 2N_k + L_i D_{wj} L_k^T + L_i D_{wk} L_j^T + L_j D_{wi} L_k^T \\
&\quad + L_j K_{wk} L_i^T + L_k K_{wi} L_j^T + L_k K_{wj} L_i^T
\end{aligned}$$

である。また、 $M(t)$ は以下のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned}
M(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i^3(t) \tilde{M}_i + \sum_{i=1}^{\sigma-1} \sum_{j=i+1}^{\sigma} \left(\alpha_i^2(t) \alpha_j(t) \tilde{M}_{ij} + \alpha_i(t) \alpha_j^2(t) \tilde{M}_{ji} \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\sigma-2} \sum_{j=i+1}^{\sigma-1} \sum_{k=j+1}^{\sigma} \alpha_i(t) \alpha_j(t) \alpha_k(t) \tilde{M}_{ijk}
\end{aligned} \tag{C.8}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_i &= M_i, \quad \tilde{M}_{ij} = 2M_i + M_j, \quad \tilde{M}_{ji} = M_i + 2M_j, \\
\tilde{M}_{ijk} &= 2(M_i + M_j + M_k)
\end{aligned}$$

である。さらに $S(t)S^T(t)$ が以下のように求まる。

$$\begin{aligned}
S(t)S^T(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i^3(t) \tilde{S}_i + \sum_{i=1}^{\sigma-1} \sum_{j=i+1}^{\sigma} \left(\alpha_i^2(t) \alpha_j(t) \tilde{S}_{ij} + \alpha_i(t) \alpha_j^2(t) \tilde{S}_{ji} \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\sigma-2} \sum_{j=i+1}^{\sigma-1} \sum_{k=j+1}^{\sigma} \alpha_i(t) \alpha_j(t) \alpha_k(t) \tilde{S}_{ijk}
\end{aligned} \tag{C.9}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_i &= S_i S_i^T, \quad \tilde{S}_{ijk} = S_i S_j^T + S_j S_i^T + S_i S_k^T + S_k S_i^T + S_j S_k^T + S_k S_j^T \\
\tilde{S}_{ij} &= S_i S_i^T + S_i S_j^T + S_j S_i^T, \quad \tilde{S}_{ji} = S_j S_j^T + S_i S_j^T + S_j S_i^T
\end{aligned}$$

である。これらの式に基づいて、 $P(t)$ 、 $Q(t)$ が以下のように求まる。

$$\begin{aligned}
P(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i^3(t) P_i + \sum_{i=1}^{\sigma-1} \sum_{j=i+1}^{\sigma} \left(\alpha_i^2(t) \alpha_j(t) P_{ij} + \alpha_i(t) \alpha_j^2(t) P_{ji} \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\sigma-2} \sum_{j=i+1}^{\sigma-1} \sum_{k=j+1}^{\sigma} \alpha_i(t) \alpha_j(t) \alpha_k(t) P_{ijk},
\end{aligned} \tag{C.10}$$

$$\begin{aligned}
Q(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i^3(t) Q_i + \sum_{i=1}^{\sigma-1} \sum_{j=i+1}^{\sigma} \left(\alpha_i^2(t) \alpha_j(t) Q_{ij} + \alpha_i(t) \alpha_j^2(t) Q_{ji} \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\sigma-2} \sum_{j=i+1}^{\sigma-1} \sum_{k=j+1}^{\sigma} \alpha_i^2(t) \alpha_j(t) \alpha_k(t) Q_{ijk}
\end{aligned} \tag{C.11}$$

$$\begin{aligned}
P_i &= \begin{bmatrix} \tilde{K}_i + \epsilon \tilde{D}_i & \epsilon \tilde{M}_i \\ \epsilon \tilde{M}_i & \tilde{M}_i \end{bmatrix}, \quad P_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{ij} + \epsilon \tilde{D}_{ij} & \epsilon \tilde{M}_{ij} \\ \epsilon \tilde{M}_{ij} & \tilde{M}_{ij} \end{bmatrix}, \\
P_{ji} &= \begin{bmatrix} \tilde{K}_{ji} + \epsilon \tilde{D}_{ji} & \epsilon \tilde{M}_{ji} \\ \epsilon \tilde{M}_{ji} & \tilde{M}_{ji} \end{bmatrix}, \quad P_{ijk} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{ijk} + \epsilon \tilde{D}_{ijk} & \epsilon \tilde{M}_{ijk} \\ \epsilon \tilde{M}_{ijk} & \tilde{M}_{ijk} \end{bmatrix} \\
Q_i &= \begin{bmatrix} -2\epsilon \tilde{K}_i & \tilde{N}_i - \epsilon \tilde{G}_i \\ \tilde{N}_i^T - \epsilon \tilde{G}_i^T & 2(\epsilon \tilde{M}_i - \tilde{D}_i) \end{bmatrix}, \quad Q_{ij} = \begin{bmatrix} -2\epsilon \tilde{K}_{ij} & \tilde{N}_{ij} - \epsilon \tilde{G}_{ij} \\ \tilde{N}_{ij}^T - \epsilon \tilde{G}_{ij}^T & 2(\epsilon \tilde{M}_{ij} - \tilde{D}_{ij}) \end{bmatrix}, \\
Q_{ji} &= \begin{bmatrix} -2\epsilon \tilde{K}_{ji} & \tilde{N}_{ji} - \epsilon \tilde{G}_{ji} \\ \tilde{N}_{ji}^T - \epsilon \tilde{G}_{ji}^T & 2(\epsilon \tilde{M}_{ji} - \tilde{D}_{ji}) \end{bmatrix}, \quad Q_{ijk} = \begin{bmatrix} -2\epsilon \tilde{K}_{ijk} & \tilde{N}_{ijk} - \epsilon \tilde{G}_{ijk} \\ \tilde{N}_{ijk}^T - \epsilon \tilde{G}_{ijk}^T & 2(\epsilon \tilde{M}_{ijk} - \tilde{D}_{ijk}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ここで、 $P(t)$, $Q(t)$, $S(t)S^T(t)$ は次のように書き直すことができる。

$$P(t) = \sum_{i=1}^{\tau} \xi_i(t) \bar{P}_i, \quad Q(t) = \sum_{i=1}^{\tau} \xi_i(t) \bar{Q}_i, \quad S(t)S^T(t) = \sum_{i=1}^{\tau} \xi_i(t) \bar{S}_i \quad (\text{C.12})$$

ただし、 τ は

$$\tau = \sigma + \sigma(\sigma - 1) +_{\sigma} C_3 \quad (\text{C.13})$$

と元の端点数 σ に依存する新たな端点数であり、次式を満たす。

$$\sum_{i=1}^{\tau} \xi_i(t) = 1, \quad \xi_i(t) > 0, \quad i = 1, \dots, \tau \quad (\text{C.14})$$

$\sigma = 3$ のとき、 $\tau = 10$ であり $\xi_i(t)$, $i = 1, \dots, \tau$ は

$$\begin{aligned}
\xi_1(t) &= \alpha_1^3(t), \quad \xi_2(t) = \alpha_2^3(t), \quad \xi_3(t) = \alpha_3^3(t), \quad \xi_4(t) = 3\alpha_1^2(t)\alpha_2(t), \\
\xi_5(t) &= 3\alpha_1^2(t)\alpha_3(t), \quad \xi_6(t) = 3\alpha_2^2(t)\alpha_3(t), \quad \xi_7(t) = 3\alpha_1(t)\alpha_2^2(t), \\
\xi_8(t) &= 3\alpha_1(t)\alpha_3^2(t), \quad \xi_9(t) = 3\alpha_2(t)\alpha_3^2(t), \quad \xi_{10}(t) = 6\alpha_1(t)\alpha_2(t)\alpha_3(t)
\end{aligned}$$

と表せる。また、

$$\begin{aligned}
\bar{P}_1 &= P_1, \quad \bar{P}_2 = P_2, \quad \bar{P}_3 = P_3, \quad \bar{P}_4 = \frac{1}{3}P_{12}, \quad \bar{P}_5 = \frac{1}{3}P_{13}, \quad \bar{P}_6 = \frac{1}{3}P_{23} \\
\bar{P}_7 &= \frac{1}{3}P_{21}, \quad \bar{P}_8 = \frac{1}{3}P_{31}, \quad \bar{P}_9 = \frac{1}{3}P_{32}, \quad \bar{P}_{10} = \frac{1}{6}P_{123}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_1 &= Q_1, \quad \bar{Q}_2 = Q_2, \quad \bar{Q}_3 = Q_3, \quad \bar{Q}_4 = \frac{1}{3}Q_{12}, \quad \bar{Q}_5 = \frac{1}{3}Q_{13}, \quad \bar{Q}_6 = \frac{1}{3}Q_{23} \\
\bar{Q}_7 &= \frac{1}{3}Q_{21}, \quad \bar{Q}_8 = \frac{1}{3}Q_{31}, \quad \bar{Q}_9 = \frac{1}{3}Q_{32}, \quad \bar{Q}_{10} = \frac{1}{6}Q_{123}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{S}_1 &= \tilde{S}_1, \quad \bar{S}_2 = \tilde{S}_2, \quad \bar{S}_3 = \tilde{S}_3, \quad \bar{S}_4 = \frac{1}{3}\tilde{S}_{12}, \quad \bar{S}_5 = \frac{1}{3}\tilde{S}_{13}, \quad \bar{S}_6 = \frac{1}{3}\tilde{S}_{23} \\
\bar{S}_7 &= \frac{1}{3}\tilde{S}_{21}, \quad \bar{S}_8 = \frac{1}{3}\tilde{S}_{31}, \quad \bar{S}_9 = \frac{1}{3}\tilde{S}_{32}, \quad \bar{S}_{10} = \frac{1}{6}\tilde{S}_{123}
\end{aligned}$$

である。このとき,

$$\dot{P}(t) = \sum_{i=1}^{\tau} \dot{\xi}_i(t) \bar{P}_i \quad (\text{C.15})$$

であるから

$$\sum_{i=1}^{\tau} \xi_i(t) \left(\bar{Q}_i + \sum_{j=1}^{\tau} \dot{\xi}_j(t) \bar{P}_j + \frac{1}{\gamma^2} \bar{S}_i \right) < 0 \quad (\text{C.16})$$

となる。ここで, $\xi_i(t)$ の変化率は有界であり, その上界値が次式で与えられると仮定する。

$$|\dot{\xi}_i(t)| \leq \rho_i, \quad i = 1, \dots, \tau \quad (\text{C.17})$$

すると (C.16) の十分条件が

$$\bar{Q}_i + \frac{1}{\gamma^2} \bar{S}_i \pm \rho_1 \bar{P}_1 \pm \dots \pm \rho_\tau \bar{P}_\tau < 0, \quad i = 1, \dots, \tau \quad (\text{C.18})$$

と得られる。

付録D 伸展する宇宙構造物

D.1 姿勢運動モデル

線形化した宇宙空間で伸展をする構造物の姿勢運動に関する運動方程式は以下のようになる [39].

$$I_1\ddot{\phi}_1 + \dot{I}_1\dot{\phi}_1 - \Omega(I_1 - I_2 + I_3)\dot{\phi}_3 + 4\Omega^2(I_2 - I_3)\phi_1 - \Omega\dot{I}_1\phi_3 = u_1 \quad (\text{D.1})$$

$$I_2\ddot{\phi}_2 + \dot{I}_2\dot{\phi}_2 + 3\Omega^2(I_1 - I_3)\phi_2 = u_2 + \Omega\dot{I}_2 \quad (\text{D.2})$$

$$I_3\ddot{\phi}_3 + \Omega(I_1 - I_2 + I_3)\dot{\phi}_1 + \dot{I}_3\dot{\phi}_3 + \Omega\dot{I}_3\phi_1 + \Omega^2(I_2 - I_1)\phi_3 = u_3 \quad (\text{D.3})$$

これを行列表現すると

$$M\ddot{q} + (D + G)\dot{q} + (K + N)q = Lu + Fw \quad (\text{D.4})$$

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{I}_3 \end{bmatrix} \\ G &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega(I_1 - I_2 + I_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega(I_1 - I_2 + I_3) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} 4\omega^2(I_2 - I_3) & 0 & \frac{\omega}{2}(-\dot{I}_1 + \dot{I}_3) \\ 0 & 3\omega^2(I_1 - I_3) & 0 \\ \frac{\omega}{2}(-\dot{I}_1 + \dot{I}_3) & 0 & \omega^2(I_2 - I_1) \end{bmatrix} \\ N &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\omega}{2}(\dot{I}_1 + \dot{I}_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\omega}{2}(\dot{I}_1 + \dot{I}_3) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ L = F &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

となる. ここで, $q = [\phi^T \dot{\phi}^T]^T$ であり, $\phi \in R^3$ は姿勢角ベクトル, $\dot{\phi} \in R^3$ は角速度ベクトルを表す. I_1, I_2, I_3 は慣性行列, $\omega = \sqrt{\mu/r^3}$ は軌道角速度, μ は地球の重力定数, r は軌道半径を表す. 宇宙構造物として図 D.1 に示す円柱モデルを考える.

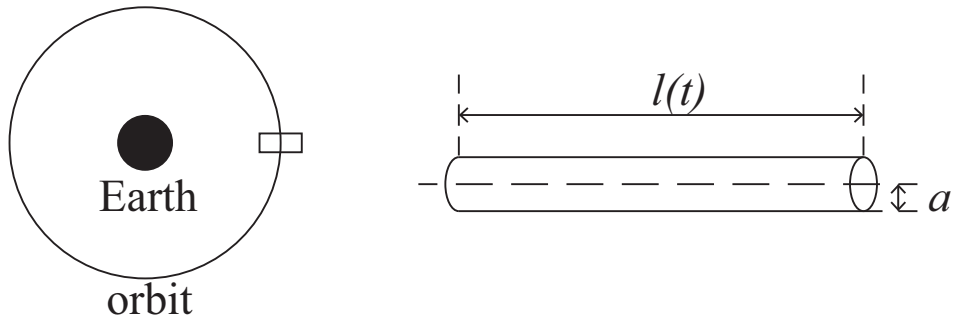


図 D.1 伸展する宇宙構造物

宇宙構造物が半径方向に伸展するとき、慣性行列と I_1, I_2, I_3 とその変動レート \dot{I}_1, \dot{I}_2 は以下となる。

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4}m \left(a^2 + \frac{1}{3}l^2(t) \right), \quad I_3 = \frac{1}{2}ma^2, \quad (\text{D.6})$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \frac{1}{6}l_v l(t) \quad (\text{D.7})$$

ただし、 m は質量、 a は円柱の半径、 $l(t)$ は円柱の長さを表す。定数パラメータ l_v は伸展速度である。

D.2 4章で用いるポリトープモデル

$l(t)$ が

$$l(t) = a_1(t)l_1 + a_2(t)l_2, \quad a_i(t) > 0, \quad \sum_{i=1}^2 a_i(t) = 1 \quad (\text{D.8})$$

と表されるとすると、

$$l^2(t) = a_1^2(t)l_1^2 + 2a_1(t)a_2(t)l_1l_2 + a_2^2(t)l_2^2 \quad (\text{D.9})$$

であるから、

$$l(t) = \alpha_1(t)l_1 + \frac{1}{2}\alpha_2(t)(l_1 + l_2) + \alpha_3(t)l_2 \quad (\text{D.10})$$

$$l^2(t) = \alpha_1(t)l_1^2 + \alpha_2(t)l_1l_2 + \alpha_3(t)l_2^2 \quad (\text{D.11})$$

$$\alpha_1(t) = a_1^2(t), \quad \alpha_2 = 2a_1(t)a_2(t), \quad \alpha_3 = a_2^2(t) \quad (\text{D.12})$$

となる. 以上から, 係数行列は

$$\begin{aligned}
 M(t) &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i(t) M_i, & D(t) &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i(t) D_i, \\
 G(t) &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i(t) G_i, & K(t) &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i(t) K_i, \\
 N(t) &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i(t) N_i
 \end{aligned} \tag{D.13}$$

と3端点のポリトープモデルで表現することができる. このとき, $\dot{\alpha}_i(t)$ は

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha}_1(t) &= 2a_1(t)\dot{a}_1(t), & \dot{\alpha}_2(t) &= 2a_2(t)\dot{a}_1(t) + 2a_1(t)\dot{a}_2(t) \\
 \dot{\alpha}_3(t) &= 2a_2(t)\dot{a}_2(t)
 \end{aligned} \tag{D.14}$$

となる.

付録E 打ち上げロケット

E.1 姿勢運動モデル

図 E.1 で表されるような剛体ロケットの姿勢制御モデルを考える. 図 E.1 において G は機体の質量中心, A は空力中心, O はノズル回転の支点, u は推進剤噴射ノズルの角度, ϕ は目標飛行経路と機体のなす角である. 推進剤噴射ノズルの角度 u を適切に変化させることで ϕ を 0 に保つフィードバック制御を設計することが目的となる. 飛行中に機体が周囲の気体から受ける揚力は, 空力中心 A に働くものとする. この打ち上げロケットの姿勢制御モデルの運動方程式は,

$$J_y(t)\ddot{\phi} - q(t)SC_{N\alpha}l_{GA}(t)\phi = -Tl_{OG}(t)(u + w) \quad (\text{E.1})$$

で表わされる [40]. T は推進力, J_y は質量中心 G 回りの慣性モーメント, q は動圧, $C_{N\alpha}$ は揚力係数, S は機体の代表面積である. l_{OG} は O から G の長さ, l_{GA} は G から A の長さである. ロケットの全長は 30.7m で, 第 1 段の長さは 13.5m, 第 2 段および第 3 段の長さはともに 8.6m である. M-V ロケットは 3 段構成であり, 表 4.1 のようなスケジュールで各段を点火, 分離する. ただし, 本論文では 1 段目の点火

表 E.1 M-V ロケット時系列

time [sec]	
0	fire of 1st stage
75	separation of 1st stage , fire of 2nd stage
172	burnout of 2nd stage
213	separation of 2nd stage
218	fire of 3rd stage
324	burnout of 3rd stage

から分離するまでの 0[sec] から 75[sec] までの制御を考えることとし, 1 段目の質量のみが推進剤の消費とともに減少するものとする. 表 4.2 に各パラメータの値を示す. また, 図 E.2, E.3 それぞれに $l_{OG}(t)$, $l_{GA}(t)$ を示す. 図 E.2, E.3 よりパラメータが大きく変動していることが確認できる.

表 E.2 打ち上げロケットのパラメータ値

T	3.78×10^6 [N]
S	4.91 [m ²]
$C_{N\alpha}$	4.4
J_y	$\frac{8.06t-735}{9.53t-1290} \times 10^7$ [kg·m ²]
l_{OG}	$\frac{6.43t-1470}{0.953t-129}$ [m]
l_{GA}	$\frac{7.84t-763}{0.48t-64.5}$ [m]
q	$1.1 \times \exp\left(\frac{-(t-36)^2}{288}\right) \times 10^5$ [N/m ²]

E.2 4章で用いるポリトープモデル

(E.1) 式は次式に書き直される.

$$\ddot{\phi} + K(t)\phi = L(t)u + F(t)w \quad (\text{E.2})$$

$$K(t) = -\frac{q(t)SC_{N\alpha}l_{GA}(t)}{J_y(t)} \quad (\text{E.3})$$

$$L(t) = F(t) = -\frac{Tl_{OG}(t)}{J_y(t)} \quad (\text{E.4})$$

このときの, $K(t)$, $L(t)$ を 図 E.4, E.5 にそれぞれ示す. $K(t)$, $L(t)$, $K_c(t)$, $D_c(t)$ は以下の式で表されるとする.

$$K(t) = a_1K_1 + a_2K_2, L(t) = b_1L_1 + b_2L_2 \quad (\text{E.5})$$

$$K_c(t) = a_1K_{c1} + a_2K_{c2}, D_c(t) = a_1D_{c1} + a_2D_{c2} \quad (\text{E.6})$$

$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_1 + a_2 = 1, b_1 > 0, b_2 > 0, b_1 + b_2 = 1 \quad (\text{E.7})$$

この仮定より,

$$\tilde{K}(t) = \sum_{i=1}^6 \alpha_i \tilde{K}_i, \tilde{D}(t) = \sum_{i=1}^6 \alpha_i \tilde{D}_i \quad (\text{E.8})$$

が得られる. ただし,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1b_1^2, \alpha_2 = 2a_1b_1b_2, \alpha_3 = a_1b_2^2 \\ \alpha_4 &= a_2b_1^2, \alpha_5 = 2a_2b_1b_2, \alpha_6 = a_2b_2^2 \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

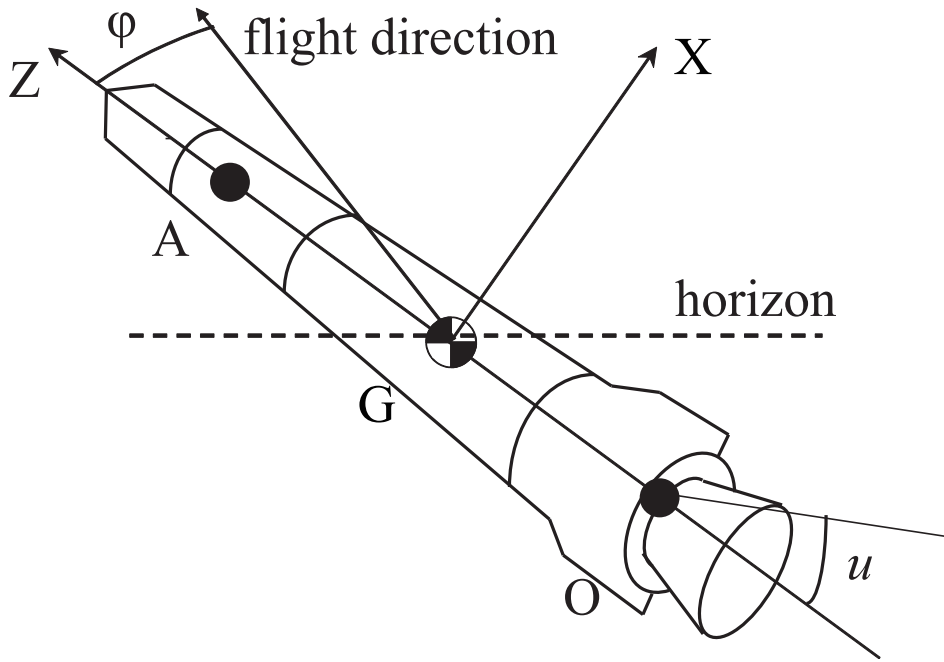


図 E.1 ロケットモデル

であり,

$$\tilde{K}_1 = K_1 + L_1 K_{c1} L_1^T \quad (\text{E.10a})$$

$$\tilde{K}_2 = K_1 + \frac{1}{2}(L_1 K_{c1} L_2^T + L_2 K_{c1} L_1^T) \quad (\text{E.10b})$$

$$\tilde{K}_3 = K_1 + L_2 K_{c1} L_2^T \quad (\text{E.10c})$$

$$\tilde{K}_4 = K_2 + L_1 K_{c2} L_1^T \quad (\text{E.10d})$$

$$\tilde{K}_5 = K_2 + \frac{1}{2}L_1 K_{c2} L_2^T + L_2 K_{c2} L_1^T \quad (\text{E.10e})$$

$$\tilde{K}_6 = K_2 + L_2 K_{c2} L_2^T \quad (\text{E.10f})$$

$$\tilde{D}_1 = L_1 D_{c1} L_1^T \quad (\text{E.10g})$$

$$\tilde{D}_2 = \frac{1}{2}(L_1 D_{c1} L_2^T + L_2 D_{c1} L_1^T) \quad (\text{E.10h})$$

$$\tilde{D}_3 = L_2 D_{c1} L_2^T \quad (\text{E.10i})$$

$$\tilde{D}_4 = L_1 D_{c2} L_1^T \quad (\text{E.10j})$$

$$\tilde{D}_5 = \frac{1}{2}(L_1 D_{c2} L_2^T + L_2 D_{c2} L_1^T) \quad (\text{E.10k})$$

$$\tilde{D}_6 = L_2 D_{c2} L_2^T \quad (\text{E.10l})$$

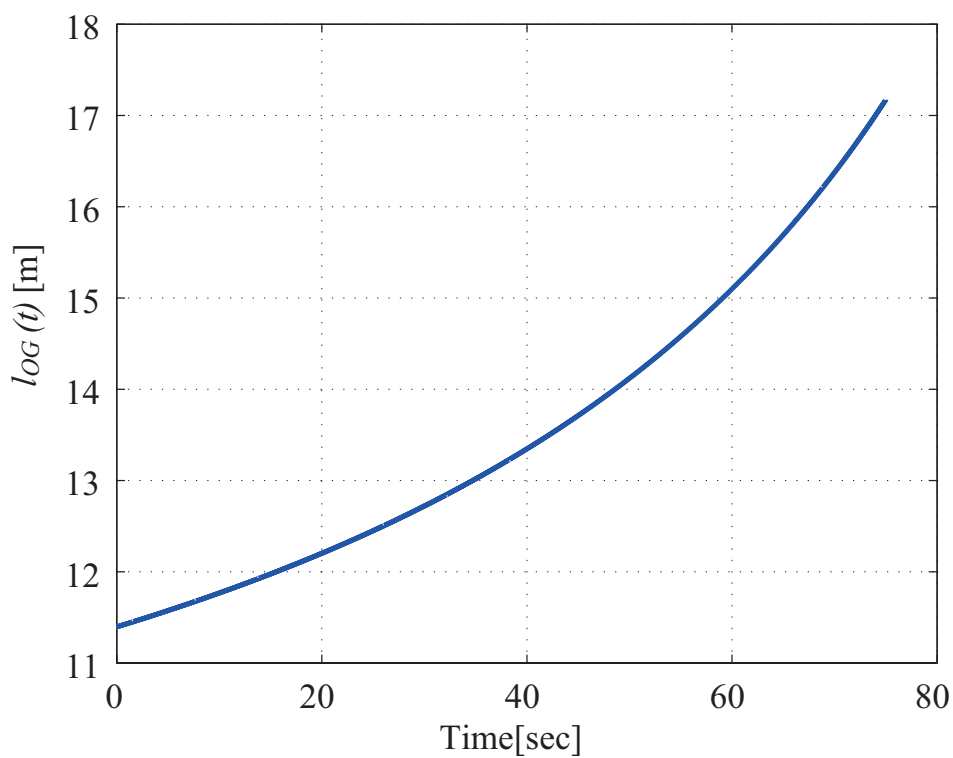


図 E.2 $l_{OG}(t)$ の変動

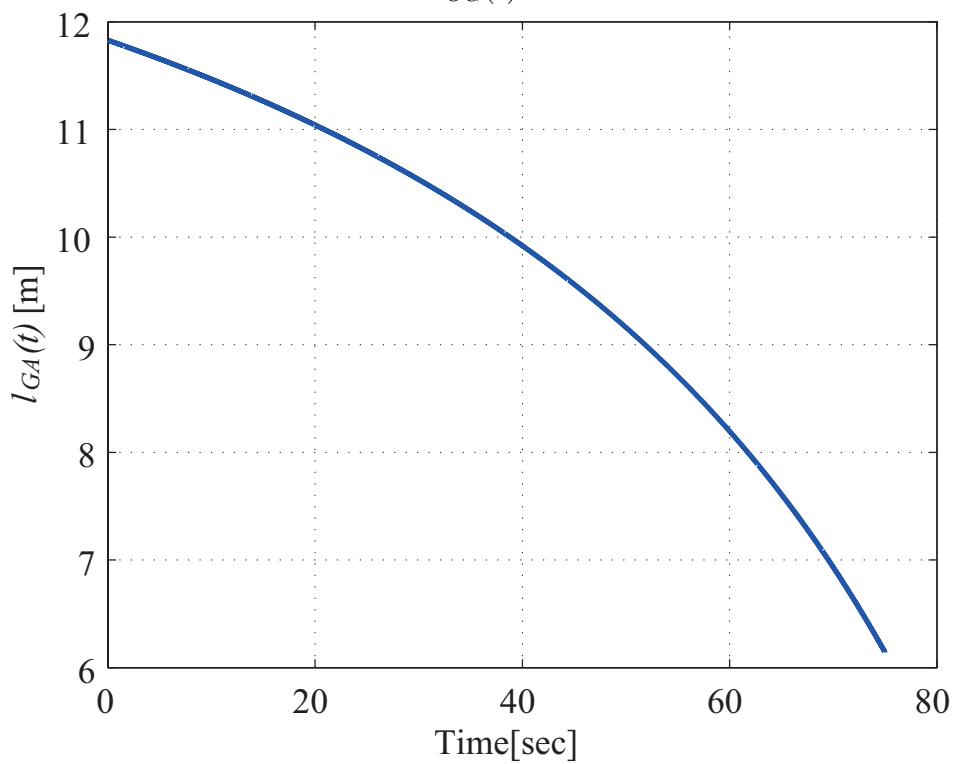


図 E.3 $l_{GA}(t)$ の変動

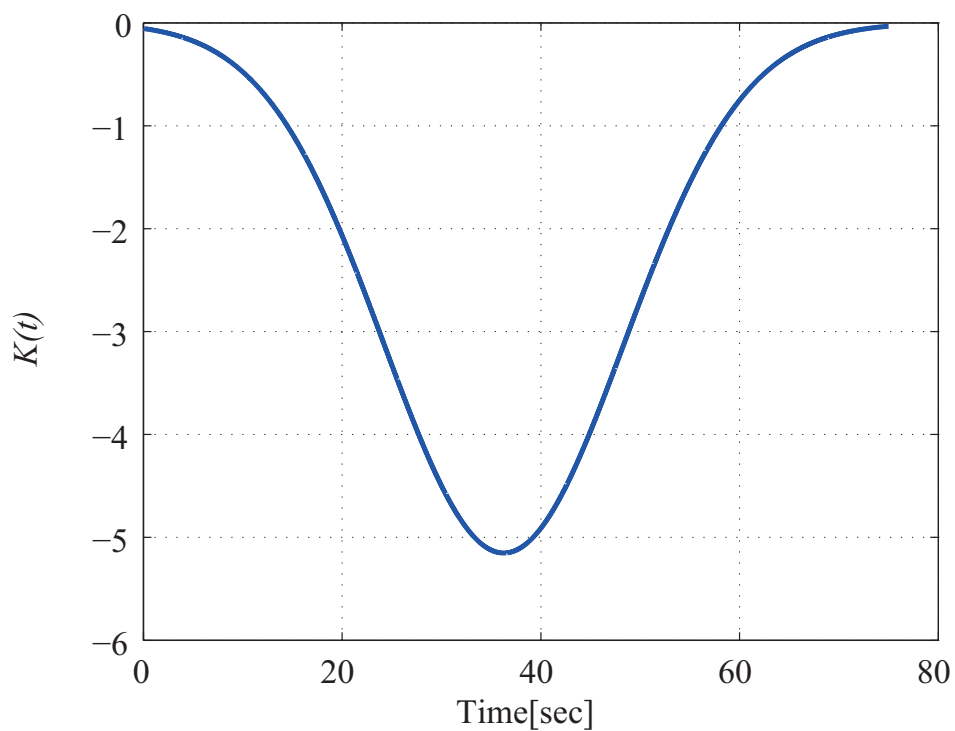


図 E.4 $K(t)$ の変動

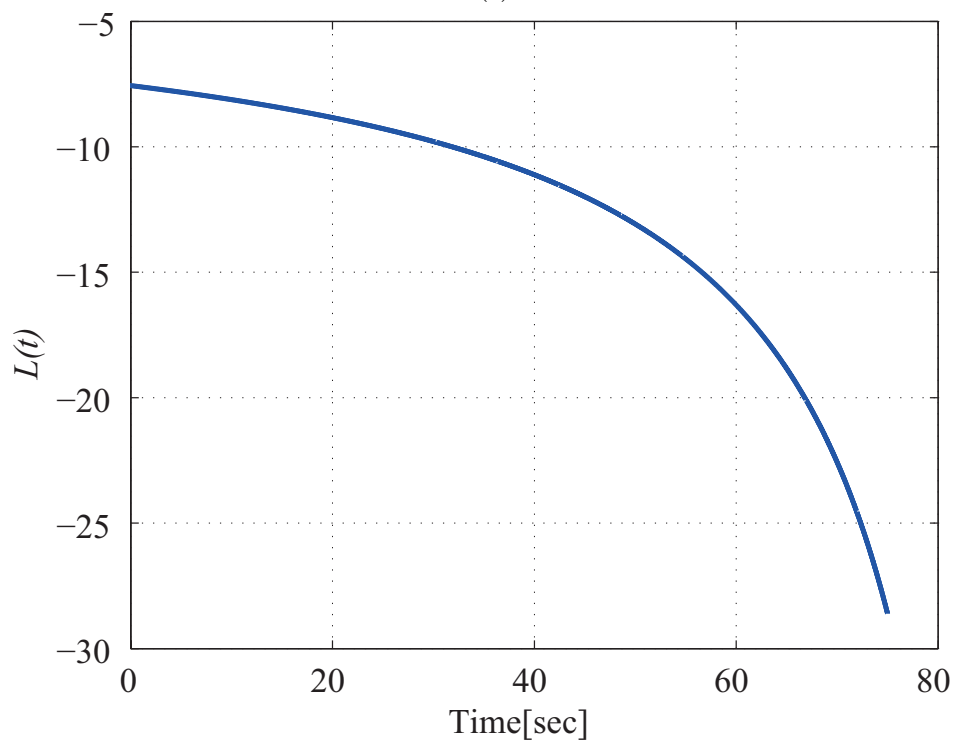


図 E.5 $L(t)$ の変動

となる。また、 $\dot{\alpha}_i$ は

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1(t) &= \dot{a}_1 b_1^2 + 2a_1 b_1 \dot{b}_1, & \dot{\alpha}_2(t) &= 2(\dot{a}_1 b_1 b_2 + a_1 \dot{b}_1 b_2 + a_1 b_1 \dot{b}_2) \\ \dot{\alpha}_3(t) &= \dot{a}_1 b_2^2 + 2a_1 b_2 \dot{b}_2, & \dot{\alpha}_4(t) &= \dot{a}_2 b_1^2 + 2a_2 b_1 \dot{b}_1 \\ \dot{\alpha}_5(t) &= 2(\dot{a}_2 b_1 b_2 + a_2 \dot{b}_1 b_2 + a_2 b_1 \dot{b}_2), & \dot{\alpha}_6(t) &= \dot{a}_2 b_2^2 + 2a_2 b_2 \dot{b}_2\end{aligned}$$

である。これより、 $P(t)$ 、 $Q(t)$ は

$$P(t) = \sum_{i=1}^6 \alpha_i(t) P_i, \quad P_i = \begin{bmatrix} \tilde{K}_i + \epsilon \tilde{D}_i & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.11})$$

$$Q(t) = \sum_{i=1}^6 \alpha_i(t) Q_i, \quad (\text{E.12})$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} -2\epsilon \tilde{K}_i & 0 \\ 0 & 2(\epsilon - \tilde{D}_i) \end{bmatrix} \quad (\text{E.13})$$

と書ける。 $E(t)$ を

$$E(t) = L(t) \quad (\text{E.14})$$

定義すると、 $S(t)$ が

$$S(t) = b_1 S_1 + b_2 S_2, \quad S_i = \begin{bmatrix} \epsilon L_i & \gamma L_i \\ L_i & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (\text{E.15})$$

と表される。したがって、 $S(t)S^T(t)$ は

$$S(t)S^T(t) = \sum_{i=1}^6 \alpha_i(t) \tilde{S}_i \quad (\text{E.16})$$

と求められる。ただし、

$$\begin{aligned}\tilde{S}_1 &= S_1 S_1^T, & \tilde{S}_2 &= \frac{1}{2}(S_1 S_2^T + S_2 S_1^T), \\ \tilde{S}_3 &= S_2 S_2^T, & \tilde{S}_4 &= S_1 S_1^T, \\ \tilde{S}_5 &= \frac{1}{2}(S_1 S_2^T + S_2 S_1^T), & \tilde{S}_6 &= S_2 S_2^T\end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

である。以上より、(4.17) 式の十分条件が

$$P_i > 0, \quad (\text{E.18})$$

$$Q_i \pm \rho_1 P_1 \pm \cdots \pm \rho_\sigma P_\sigma + \frac{1}{\gamma^2} \tilde{S}_i < 0 \quad (\text{E.19})$$

と得られる。

関連論文の印刷公表の方法及び時期

- (1) 全著者 : Yuichi Takaku, Tomoyuki Nagashio, Takashi Kida
論文題目 : An Optimal H-Infinity Design Using GKYP Lemma for DVDFB Controller and Its Application to Flexible Spacecraft
印刷公表の方法及び時期 : Trans. JSASS Aerospace Tech., Vol.10, No.28, pp. 53-60, 2012 年 1 月
(第 3 章に関連)
- (2) 全著者名 : 高久 雄一, 木田 隆
論文題目 : 線形時変力学系の LMI を用いた静的出力フィードバック制御の L2 ゲイン性能最適設計
印刷公表の方法及び時期計測自動制御学会論文集, Vol.50, No.10, pp. 739-745, 2014 年 10 月
(第 4 章および第 5 章に関連)
- (3) 全著者名 : Yuichi Takaku, Tomoyuki Nagashio and Takashi Kida
論文題目 : Static Output Feedback Controller Design Based on LMI for Linear Time-Varying Collocated Mechanical System
印刷公表の方法及び時期 : IEEE International Conference on Control and Automation, pp.467-472, June 18-20, Taiwan (2014)
(4 章に関連)
- (4) 全著者名 : Yuichi Takaku and Takashi Kida
論文題目 : Static Output Feedback Controller Design for Linear Time-Varying Second-order System with Space Application
印刷公表の方法及び時期 : Proceedings of SICE Annual Conference 2014, September 9-12, Sapporo (2014)
(4 章に関連)

著者略歴

高久 雄一 (たかく ゆういち)

2009年3月 電気通信大学電気通信学部知能機械工学科卒業

2009年4月 電気通信大学大学院電気通信学研究科知能機械工学専攻博士前期課程入学

2011年3月 電気通信大学大学院電気通信学研究科知能機械工学専攻博士前期課程修了

2011年4月 電気通信大学大学院情報理工学研究科知能機械工学専攻博士後期課程入学

2015年3月 電気通信大学大学院情報理工学研究科知能機械工学専攻博士後期課程修了予定