

修 士 論 文 の 和 文 要 旨

研究科・専攻	大学院 情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻 博士前期課程		
氏 名	富田 渉平	学籍番号	1631100
論 文 題 目	降着円盤における制動放射の降着率への影響		
<p style="text-align: center;">要 旨</p> <p>2 つの恒星が両者の重心の周りを回転している天体を連星系という。その恒星の一方の質量が巨大だと、もう一方の恒星のガス成分を吸い込み、自身の周りを高速に回転し円盤を形成するようになる。これを降着円盤という。本研究では、降着円盤内での粒子軌道の解析および制動放射を伴う粒子運動の降着率への影響について検討解析を行った。先行研究ではニュートン力学で重力場・電磁場での粒子軌道の解析が行われており、中心物体に対してサイクロトロン運動をしながら回転するような軌道が確認されている。また、粒子の持つ一般化角運動量がゼロの場合のみ中心物体に落ちていくことが示されている。</p> <p>今回、保存的中心力を考え、特殊相対論に基づいた粒子軌道を理論・数値シミュレーションによって解析を行った。特に中心力が重力やクーロン力などの逆二乗則の場合は粒子の軌道の方程式は解析的に導くことができる。また、軌道の解析方法として、古典論で径方向の運動を解析するために用いられる実効ポテンシャルを不等式に関するものと解釈することで、新しく特殊相対論における実効ポテンシャルを定義することができた。</p> <p>軌道の方程式は、一般化角運動量大きい場合は一般化円錐曲線と呼ばれる曲線の方程式になり、古典論で導かれる楕円軌道や双曲線軌道の他に原点を周回して発散するような軌道も含まれている。また、一般化角運動量が小さい場合では有限の角運動量を持つ粒子でも中心物体に捉えられ、落下していくことを示し、降着円盤における降着率に影響を与えている。今回モデルとしている降着円盤ははくちょう座 X-1 である。実際に降着円盤の温度を 500 億度として、速度の初期条件に相対論的マクスウェル分布を用いると、降着円盤内での粒子の中心に落ちる割合は約 0.0012% であり、わずかではあるが降着に影響を与えている結果となった。また、荷電粒子が加速度運動をする際に電磁波を放射し、エネルギーを失う現象である制動放射が粒子の降着に影響を与えていると考えた。中心力に磁場を加えて制動放射を考慮し、座標 $(x, y) = (200 R_g, 0)$ から様々な初期速度でシミュレーションを行うと、約 20% 以上の粒子が降着することが見積もられた。</p>			

降着円盤における制動放射の降着率への影響

情報数理工学プログラム

学籍番号 1631100

富田 渉平

指導教員 龍野智哉

副指導教員 仲谷栄伸

目次

1	序論	3
2	特殊相対性理論	6
2.1	相対論的力学	7
2.1.1	ローレンツ変換	7
2.1.2	4元速度	8
2.1.3	運動方程式	9
2.2	角運動量保存	13
2.3	エネルギー保存	15
3	ポテンシャル中を運動する相対論的粒子軌道の分類	18
3.1	実効ポテンシャルの導出	18
3.2	逆二乗則に従う力のもとでの軌道の方程式	20
3.3	実効ポテンシャルと軌道の方程式の考察	22
4	シミュレーション	25
4.1	デカルト座標における運動方程式	25
4.2	運動方程式の規格化	26
4.3	シミュレーション結果	27
4.3.1	シミュレーションと方程式による軌道の比較	27
4.3.2	実効ポテンシャルによる軌道の分類	28
4.3.3	電磁場中での粒子軌道	32
5	制動放射	35
5.1	電磁場の波動方程式	35
5.1.1	マクスウェル方程式	35
5.1.2	電磁ポテンシャルと電磁場	35
5.1.3	遅延ポテンシャル	36
5.2	点電荷による電磁波の放射	37
5.2.1	点電荷による電磁場	37
5.2.2	加速された点電荷による電磁波	39
5.3	電磁波の放射と反作用	40
5.3.1	減衰力と自己加速	40
5.3.2	放射の反作用	41
5.4	相対論的な場合の放射減衰	42
5.5	制動放射を含む運動方程式による数値実験	44
6	降着円盤	45
6.1	降着円盤と標準モデル	45
6.2	磁気回転不安定性 (MRI)	47

6.3	降着率について	48
6.3.1	マクスウェル分布	48
6.3.2	相対論的マクスウェル分布	48
6.3.3	相対論的マクスウェル分布と非相対論マクスウェル分布の比較 . . .	50
6.3.4	降着率	50
7	おわりに	56
A	非相対論における平面極座標での運動	58
A.1	保存量と実効ポテンシャル	58
B	減衰力を含む相対論的な運動方程式	59
B.1	電磁波のエネルギー	59
B.2	LAD 方程式	60
C	降着円盤モデルの粘性パラメータ α	61
D	LL 方程式の摂動近似	62

1 序論

白色矮性、中性子星、ブラックホールのように物質の密度が極端に高くなると電子が相互に接近し退け合うので圧力が生じる。この圧力を縮退圧という。この縮退圧が自身の重力と釣り合った状態にあるコンパクト星と呼ばれる高密度天体の周りに形成される円盤を降着円盤という。ガス物質がコンパクト星に落下するときに、ガス物質の回転運動の遠心力とコンパクト星による重力との釣り合いにより回転ガスが形成される。降着円盤の場合の回転ガスは差動回転(ケプラー回転)であり、回転の中心に近づくほど角速度が大きくなる運動である [26–29]。コンパクト星から黒体放射では説明のつかないエネルギーがコンパクト星から観測されているため、降着円盤の周りのガス物質がコンパクト星に落下するときに、その膨大な位置エネルギーを解放すると考えられている。

しかし、降着円盤のガス物質は角運動量を持っているため、そのままでは降着することはできない。そこで、角運動量が円盤の内側から外側へ輸送されればガス物質は降着することができる。この角運動量の輸送するメカニズムは長いあいだ解明されておらず、Shakura と Sunyaev が提唱した現象的な粘性モデルが用いられてきた [5]。このモデルは、降着円盤内部で激しい乱流運動に伴う粘性や磁場の存在による異常粘性をパラメータ α を用いて表したため、 α 粘性モデルと呼ばれている。1990年代になると磁気回転不安定性 (Magneto-Rotational Instability, 以下 MRI) によって生じる磁気乱流のマクスウェル応力によって角運動量輸送が起きることが Balbus と Hawley によって再発見された [2]。再発見というのも磁気回転不安定性そのものは Velikhov によって 1959 年に発見されており、Chandrasekhar によっても取り上げられていたが、降着円盤におけるこの不安定性の重要性は Balbus と Hawley に指摘されるまで見落とされていたからだ。

MRI のシミュレーションでは、図 1 のように中心天体の周りを差動回転している降着円盤の一部を切り取り Shearing Box 境界条件を課してシミュレーションを行うことが多い [1, 6]。これは図 2 のように差動回転を考慮してシミュレーションを行う領域を時間とともに変化させていくものである。しかし、これは計算領域が準周期的であることが仮定されているが、電磁流体力学 (magnetohydrodynamics, 以下 MHD) ではマクロな動きが記述されており、実際にその領域を通過する粒子の軌道はどのようなものがあるのか調べる必要がある。

先行研究では Bellan によって古典論での重力場・電磁場中の粒子軌道が調べられている [4]。図 3 は先行研究でのシミュレーションによる粒子軌道である。図 3 (c),(d) は中心物体に対してサイクロトロン運動を行うような軌道である。また、図 3 (e),(f) は一般化角運動量がゼロの場合の粒子軌道であり、中心物体に落下することが確認されている。これは一般化角運動量を持つほとんどの粒子が中心物体に捉えられることはないことを示している。

本研究では、先行研究である古典論での粒子軌道を特殊相対論に拡張することにより、粒子の軌道がどのように変化するかを調べる。また、粒子が加速度運動した際に電磁波を放射する制動放射という現象に着目することにより、粒子の降着する割合にどのような影響を与えるかを考察し、降着率への影響を検討する。

2 章では特殊相対性理論の概要を説明し、特殊相対論に基づいた力学や保存量などの導出を行っている。3 章では特殊相対論に従う粒子軌道の分類として、新たに中心力ポテン

シャルの場合の実効ポテンシャルを提案している。また、逆二乗則に従う力のもとでの軌道の方程式を導出し、古典力学における軌道との違いなどを考察している。4章ではシミュレーションを行う準備として、運動方程式の規格化を行っている。今回求めた軌道の方程式とシミュレーションによる軌道が一致するかを確認し、特殊相対論における実効ポテンシャルによる軌道の分類が正しく行えているか検証をする。5章では荷電粒子が加速度運動をした際に電磁波を放射する制動放射という現象に着目することで、電磁波を放射したときのエネルギー損失を考慮した運動方程式の導出を行い、特殊相対論に拡張した運動方程式を考察する。6章では Shakura と Sunyaev によって提唱された降着円盤のモデルについて説明する。また、Bulbus と Hawley によって再発見された磁気回転不安定性について簡単に述べ、今回提案したモデルを利用して粒子の中心物体への降着率を求める。7章では本研究のまとめを行い、今後の展望についても触れる。

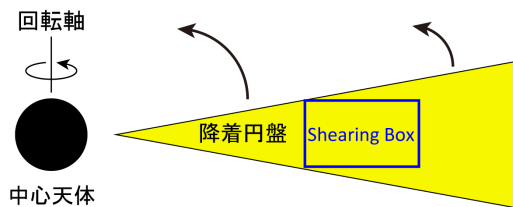


図 1: 中心天体の周りを差動回転している降着円盤の概念図。シミュレーションを行う場合は青線のようにシミュレーション範囲を切り取り計算することが多い。

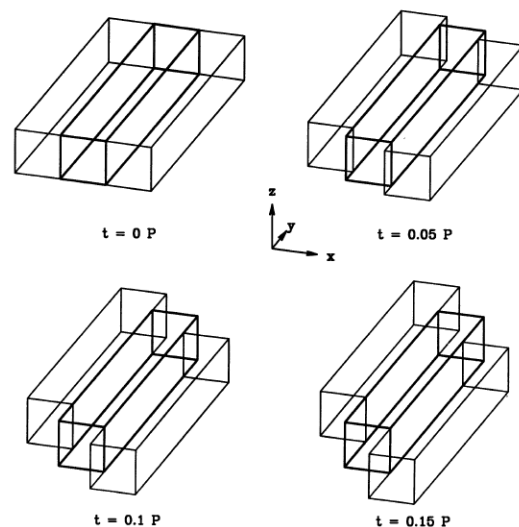


図 2: Shearing Box 境界条件によるシミュレーション範囲 [5]。降着円盤は差動回転をしているためシミュレーションでは時間とともにシミュレーションボックスをずらして計算を行っている。

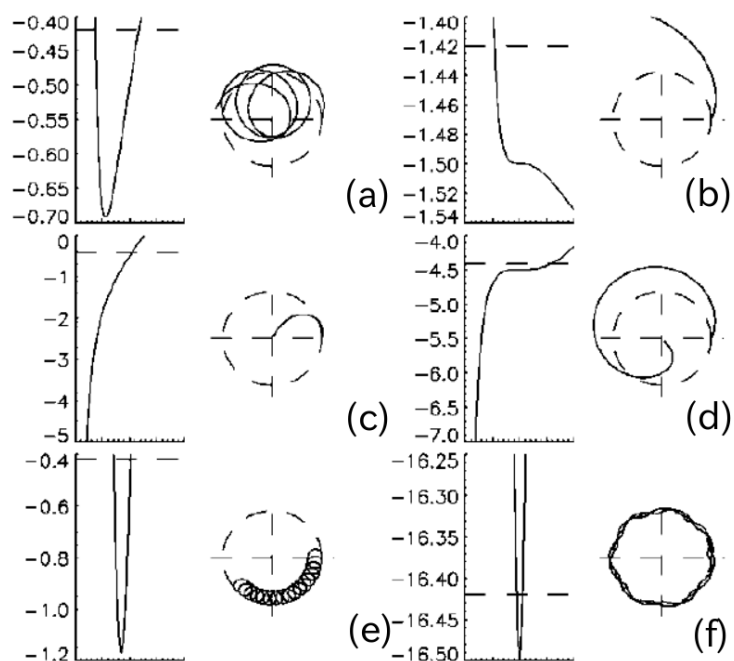


図 3: 先行研究であるニュートン力学での重力場・電磁場中のシミュレーションによる粒子軌道 [4]。
 各列の左側に実効ポテンシャル、右側に実効ポテンシャルに対応する軌道が書かれている。
 (a) は中心に対して位相がずれながら周回している軌道である。(b) は双曲線軌道であり、無
 限遠に飛んでいってしまうような軌道である。(c),(d) は角運動量が 0 の場合であり、この
 ときのみ中心に落下していくことがわかる。(e),(f) は中心物体に対してサイクロトロン運
 動をしているような軌道になっている。

2 特殊相対性理論

特殊相対性理論は次の二つの原理に基づいている [12–14]。一つ目の原理は相対性原理である。相対性原理とは、互いに等速運動をしているすべての慣性系において、すべての基本的物理法則はまったく同じ形で表され、それらの慣性系の中から特別なものを選び出すことはできないということである。二つ目の原理は光速不変の原理である。光速不変の原理とは、いかなる慣性系からみても光の速さは一定値 c であるということである。また、真空中での光速 c は $c = 2.99792458 \times 10^8$ [m/s] である。

今回はこの二つの原理に基づいた運動方程式によって記述される粒子の運動を考えていく。特殊相対性理論では、時間と空間をまとめた 4 次元空間 (ミンコフスキー空間) を考えている。古典論では時間と空間は独立なものであって、時間 t はあらゆる慣性系に共通であると考えられていたが、特殊相対論では時間と空間は交じり合っている。その座標 (ct, x, y, z) をまとめて、4 次元空間上の 4 次元のベクトル (4 元ベクトル) としてみることができる。その成分は時間に対応する物理量 (時間成分) と空間に対応する 3 次元ベクトル (空間成分) をまとめて x^i と表している。また、空間成分だけを表す場合は $(x, y, z) = x$ のように太字で表すこととする。ここで i は 0, 1, 2, 3 という値を取る。4 元ベクトルの長さの 2 乗は

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (2.1)$$

という式で与えられ、これはローレンツ変換に対して不変であることが確かめられている (2.1.1 節)。また、4 元ベクトルの大きさを表すため 2 種類のベクトルを導入し、 A^i および A_i で表す。具体的には

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3 \quad (2.2)$$

とする。 A^i は 4 元ベクトルの反変成分、 A_i は共変成分という。これらを利用すると 4 元ベクトルの 2 乗は

$$\sum_{i=0}^3 A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 \quad (2.3)$$

と表せる。このような和については和の記号を省略して単に $A^i A_i$ と書くこととする。これはアインシュタインの縮約と呼ばれる。

また、反変成分と共変成分の役割を入れ替えるメトリックとして、計量テンソル g がある。テンソル g^{ik} と g_{ik} は同じ成分をもち、

$$g^{ik} = g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

という行列の式で表わされる。したがって、2 つの 4 元ベクトルのスカラー積は、

$$A^i A_i = g_{ik} A^i A^k = g^{ik} A_i A_k \quad (2.5)$$

の形に書ける。

2.1 相対論的力学

この節では、ニュートン力学を特殊相対論に基づくように4次元空間に拡張された力学について考えていく。始めにローレンツ変換について導出を行い、ローレンツ変換に対して不変な4元速度と3次元速度との関係について述べる。相対論的ラグランジアンから運動方程式や一般化運動量などを導く。また、一般化角運動量やエネルギー保存則などの保存量を導出することを目標とする。

2.1.1 ローレンツ変換

たがいに一定の速さ V で相対運動している2つの慣性系 K と K' を考える。それらの系における空間座標と時間座標を、それぞれ $(x, y, z, t), (x', y', z', t')$ とする。慣性系 K と K' の空間座標の原点が一致したその瞬間を、それぞれの系の時間座標の原点とする。つまりこのとき $t = t' = 0$ である。その瞬間に原点から放射された光が真空中を伝わる時、それぞれの系上で静止する観測者 A と B は光がどのように見えるのかを考える。

K 系の原点から光が放たれたとするとこの光は全方向に飛び去って、 t 秒後には原点から半径 ct だけ離れた球面上に現れるはずである。これを式で表せば、

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (2.6)$$

となる。一方、 K' 系の原点にいる観測者 B も相対性原理より光が自分を中心に同心円状に広がるように見える。これより同様に

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \quad (2.7)$$

と書ける。 K' 系が K 系の x 軸の正の方向に速さ V で運動しているとすると、ガリレイ変換の場合ではそれらの座標の間には

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (2.8)$$

という関係があった。しかし(2.8)式を(2.7)式に代入したのでは明らかに K 系の式(2.6)と矛盾する。そこでいま

$$x' = A(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = Bx + Dt \quad (2.9)$$

とにおいて、これを(2.7)式に代入したとき、(2.6)が成立するように未定係数 A, B, D を決めることにする。実際に(2.9)式を(2.7)式に代入すると

$$c^2(Bx + Dt)^2 - A^2(x - Vt)^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (2.10)$$

となり、展開して整理すると

$$(c^2D^2 - V^2A^2)t^2 + (2VA^2 + 2c^2BD)xt - (A^2 - c^2B^2)x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (2.11)$$

となる。これが (2.6) 式と同じになるので、係数を比較すると

$$\begin{cases} A^2 - c^2 B^2 = 1 \\ c^2 D^2 - V^2 A^2 = c^2 \\ 2VA^2 + 2c^2 BD = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

という式を得る。ここで実際に計算すると、各係数は正と負の2つの解が出てくることになるが、 $V \rightarrow 0$ のとき、 K と K' の系が一致するためには A と D の係数を正にする必要がある。また、結果として B は負になる必要がある。以上より

$$\begin{cases} A = D = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ B = -\frac{V/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (2.13)$$

よって、結果をまとめると

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.14)$$

となり、これがローレンツ変換である。これを逆にとけば

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.15)$$

これは (2.14) の速さ V の符号を変えただけで (2.14) と全く同じ形である。

2.1.2 4元速度

通常の3次元の速度から4元ベクトルを作ることができる [12-14]。粒子の4次元的な速度 (4元速度) u^i は

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} \quad (2.16)$$

である。ここでの微分は固有時 τ である。これらの成分は、

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\}} dt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (2.17)$$

を利用することで求まる。ここで v は粒子の3次元的な速度である。よって

$$u^1 \equiv \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{dx}{dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.18)$$

となる。同様に u^0 など計算できるので、まとめると

$$u^i = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}) \quad (2.19)$$

と表せる。ここでローレンツ因子

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.20)$$

を用いた。また、4元速度の性質として $u^i u_i = c^2$ がある。

4元速度の定義より、座標の固有時 τ での2階導関数

$$a^i = \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{du^i}{d\tau} \quad (2.21)$$

を4元加速度とよぶことができる。また、4元速度の性質 $u^i u_i = c^2$ を微分することによって

$$u^i a_i = 0 \quad (2.22)$$

が得られる。

2.1.3 運動方程式

古典論では粒子の速度 \mathbf{v} と位置 \mathbf{x} を変数とするある関数 $L(\mathbf{v}, \mathbf{x})$ の粒子軌道の時間積分は

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{v}, \mathbf{x}) dt \quad (2.23)$$

と表せた。ここで、 $L(\mathbf{v}, \mathbf{x})$ としてラグランジアンを取り、ラグランジアン粒子軌道に沿った積分 I のことを作用積分という。この節ではこの作用積分を相対論の領域に拡張することを考える [16, 20]。

まず、作用積分 (2.23) を相対論の下で不変量であるミンコフスキー空間での距離による線積分に置き換えたい。よって積分は

$$I = \lambda \int_a^b d\tau \quad (2.24)$$

と書き直せる。 a, b はミンコフスキー空間での時間であり、 λ はこれから決定する定数である。また、 $d\tau$ は (2.18) で定義したミンコフスキー空間での微小距離である。これより作用積分は

$$I = -\lambda \int_a^b d\tau = -\lambda \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_{t_1}^{t_2} L_0 dt \quad (2.25)$$

とおける。このとき L_0 は自由粒子のラグランジアンである。よってラグランジアンは

$$L_0 = -\lambda \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.26)$$

である。次に定数 λ について考える。古典力学では自由粒子のラグランジアンは運動エネルギーに等しかったので $v \ll c$ として L_0 を二項展開し、高次の項を省くと

$$L_0 = -\lambda \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -\lambda + \frac{\lambda v^2}{2c^2} \quad (2.27)$$

となる。ラグランジアンの変分をとるときに消えてしまうので運動方程式に影響しない。よって L_0 から定数 λc を省き、古典力学の $L_c = mv^2/2$ と比較すると、 $\lambda = mc^2$ となる。よって、自由粒子のラグランジアンは

$$L_0 = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -\frac{mc^2}{\gamma} \quad (2.28)$$

となる。一般化運動量の3次元成分 \mathbf{p} は $\partial L_0 / \partial \mathbf{v}$ であるから

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m\mathbf{v} \quad (2.29)$$

となる。相対論での運動量は $p^i = mu^i = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v})$ であるので一致する。また粒子のエネルギー E は $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L_0$ であるので

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma mc^2 \quad (2.30)$$

と求まる。ここで相対論的運動エネルギー K について考える。相対論的運動エネルギーは粒子が運動することによって静止エネルギーに付加されるエネルギーだから

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 \quad (2.31)$$

と表わされる。また $v \ll c$ のときには二項展開より

$$\begin{aligned} K &= mc^2 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] \\ &\approx mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots - 1 \right] \\ &= mc^2 \frac{v^2}{2c^2} \\ &= \frac{1}{2} mv^2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

となり、古典力学での運動エネルギーと一致している。次に (2.29) と (2.30) の両辺を2乗して比べると、粒子のエネルギーと運動量の間

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2 \quad (2.33)$$

という関係があることがわかる。これよりハミルトニアン H は

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \quad (2.34)$$

とわかる。また、力の 4 元ベクトルを次の導関数として定義しておく。

$$f^i = \frac{dp^i}{d\tau} = m \frac{du^i}{d\tau} \quad (2.35)$$

この 4 元ベクトルの成分は、普通の 3 次元的な力 $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ と

$$f^i = \left(\frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{f}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = (\gamma \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \gamma \mathbf{f}) \quad (2.36)$$

という関係によって結ばれている。時間成分については、 $dp^0/d\tau$ であり力のする仕事に比例している。

ポテンシャル $V(r)$ での運動方程式 ポテンシャル力について考え、ポテンシャル $V(r)$ を用いるとラグランジアン L_1 は

$$L_1 = L_0 - V = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V(r) \quad (2.37)$$

で、ラグランジュ方程式より x 成分を考えると

$$\frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}} = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\dot{x} = v_x), \quad \frac{\partial L_1}{\partial x} = -\frac{dV(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = f(r) \frac{x}{r} \quad (2.38)$$

したがって x 方向の運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = -\frac{dV(r)}{dx} = f(r) \frac{x}{r} \quad (2.39)$$

と導ける。したがって、特殊相対論での運動方程式は 3 次元的な力 \mathbf{F} が与えられたとき

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = -\frac{dV(r)}{d\mathbf{x}} = \mathbf{F} \quad (2.40)$$

と表せる。

電磁場中の運動方程式 電磁場中での運動方程式を考える。与えられた電磁場の中で運動する粒子に対する作用は自由粒子の作用 (2.28) と粒子の場との相互作用を記述する項からなっている。電磁場との相互作用に関する粒子の性質は粒子の電荷 e というパラメータで規定される。また、場の性質は 4 元ポテンシャルと呼ばれる 4 元ベクトル A^i によって特徴付けられる。この 4 元ベクトル A^i の時間成分は場のスカラーポテンシャルと呼ばれ、

$A^0 = \phi/c$ で表す。その空間成分は場のベクトルポテンシャルと呼ばれる 3 次元ベクトル \mathbf{A} を作る。したがって、4 元ポテンシャルは

$$A^i = \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right) \quad (2.41)$$

である。電磁場の中の粒子に対する作用積分はつぎのようになる。

$$S = \int_a^b (-mc^2 d\tau - eA_i dx^i) \quad (2.42)$$

$(A_i)_{i=1,2,3} = -\mathbf{A}$ に注意して書き直すと

$$S = \int_a^b (-mc^2 d\tau + e\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} - e\phi dt) \quad (2.43)$$

となる。また、粒子の速度 $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ を導入して、時間についての積分に変形すると、作用は

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (-mc^2 \gamma^{-1} + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi) dt \quad (2.44)$$

となる。この被積分関数は電磁場中の電荷のラグランジアン

$$L = -mc^2 \gamma^{-1} + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \quad (2.45)$$

になっている。

与えられた電磁場中での運動方程式はラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.46)$$

より導ける。また、 $\partial L/\partial \mathbf{v}$ は粒子の一般化運動量である。(2.46) の右辺は

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = e\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - e\nabla\phi \quad (2.47)$$

ベクトル解析の公式より

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} \quad (2.48)$$

この公式を適用すると (2.47) は

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = e\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A} + e\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - e\nabla\phi \quad (2.49)$$

となる。したがって、ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) = e\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A} + e\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - e\nabla\phi \quad (2.50)$$

となる。また、

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A} \quad (2.51)$$

であるので、(2.50) に代入して

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e \nabla \phi + e \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (2.52)$$

と求まる。これが電磁場中での粒子の運動方程式である。また、電磁場のポテンシャル表現

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (2.53)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.54)$$

を用いると、運動方程式 (2.52) は

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.55)$$

と書ける。これは速度が光速に比べて小さいときは、運動量 p は近似的に古典力学の mv に等しく、古典力学でのローレンツ力による運動方程式に等しいことが確認できる。

2.2 角運動量保存

ここでは、ポテンシャル $V(r)$ の場合と電磁場中での角運動量保存を導出する。

ポテンシャル $V(r)$ での角運動量保存 ポテンシャル $V(r)$ が定義できる場合のラグランジアンは

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - V(r) = -mc^2 \gamma^{-1} - V(r) \quad (2.56)$$

である。ここで $\beta = v/c$ である。また、極座標での速度は

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta} \quad (2.57)$$

と表わされる。ここで微分作用素の \cdot は座標時 t での微分である。また、ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (2.58)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (2.59)$$

である。(2.58) を計算すると

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \dot{\theta}} = m\gamma r^2 \dot{\theta} \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (2.61)$$

となるので、方程式は

$$\frac{d}{dt}(m\gamma r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (2.62)$$

となり、 $m\gamma r^2\dot{\theta}$ が保存量であることが確認できる。

電磁場中の角運動量保存 電磁場中のラグランジアンは (2.45) である。今回、背景磁場は $B = (0, 0, B_0)$ としている。ベクトルポテンシャル A を用いて、磁場 B を表すと

$$\begin{cases} B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \\ B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \\ B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0 \end{cases} \quad (2.63)$$

となる。このときローレンツゲージ

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.64)$$

を満たすベクトルポテンシャル A は

$$\begin{cases} A_x = -\frac{1}{2}yB_0 \\ A_y = \frac{1}{2}xB_0 \\ A_z = 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

がある。これを利用して、一般化角運動量を計算していく。 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ を (2.65) を利用し展開すると

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} &= A_x v_x + A_y v_y \\ &= -\frac{1}{2}yB_0 v_x + \frac{1}{2}xB_0 v_y \\ &= -\frac{1}{2}B_0(yv_x - xv_y) \end{aligned} \quad (2.66)$$

次に、 $yv_x - xv_y$ を極座標表示に変換すると

$$\begin{aligned} yv_x - xv_y &= r \sin \theta (\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}) - r \cos \theta (\dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}) \\ &= -r^2 \sin^2 \theta \dot{\theta} - r^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} \\ &= -r^2 \dot{\theta} \end{aligned} \quad (2.67)$$

となる。よって、(2.45) のラグランジアンは

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - e\phi + \frac{1}{2}eB_0 r^2 \dot{\theta} \quad (2.68)$$

(2.58) より

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\gamma r^2 \dot{\theta} + \frac{1}{2} e B_0 r^2 \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (2.70)$$

したがって、運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(m\gamma r^2 \dot{\theta} + \frac{1}{2} e B_0 r^2 \right) = 0 \quad (2.71)$$

である。よって、一般化角運動量 ℓ は

$$\ell = m\gamma r^2 \dot{\theta} + \frac{1}{2} e B_0 r^2 = \text{const} \quad (2.72)$$

と表わされ、保存することが確認できた。また、 $r^2 \dot{\theta}$ は

$$\begin{aligned} r \cdot r \dot{\theta} &= r v_\theta = r(-v_x \sin \theta + v_y \cos \theta) \\ &= -v_x r \sin \theta + v_y r \cos \theta \\ &= -v_x y + v_y x \end{aligned} \quad (2.73)$$

と書き換えられるので、デカルト座標での一般化角運動量は

$$\ell = m\gamma(-v_x y + v_y x) + \frac{1}{2} e B_0 (x^2 + y^2) \quad (2.74)$$

と書ける。

2.3 エネルギー保存

ここでは相対論におけるエネルギー保存則を考える [14]。

ポテンシャル $V(r)$ でのエネルギー保存 ポテンシャル $V(r)$ 中を運動する粒子の座標時における運動方程式 (2.40) より

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{u}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(r) \quad (2.75)$$

である。また、ここで $u_{i=1,2,3}^i = \mathbf{u}$ とした。両辺に \mathbf{u} をかけると左辺は

$$(\text{左辺}) = m\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \quad (2.76)$$

また、 $u^i u_i = c^2$ より、 $u^0 u_0 - c^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} u^0 u_0 = u^0 \frac{d}{dt} m u_0 \quad (2.77)$$

となる。(2.19)より4元速度 $u^i = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$ であるので、 $\mathbf{u} = \gamma \mathbf{v}$ となる。(2.75)の右辺は $\mathbf{u} = \frac{u^0}{c} \mathbf{v}$ を利用すると

$$(\text{右辺}) = -\frac{u^0}{c} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial V(r)}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{u^0}{c} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{\partial V(r)}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{u^0}{c} \frac{d}{dt} V(r) \quad (2.78)$$

と変形できる。よって

$$u^0 \frac{d}{dt} m u_0 = -\frac{u^0}{c} \frac{d}{dt} V(r) \quad (2.79)$$

と変形でき、両辺を u^0/c で割ると

$$\frac{d}{dt} m c u_0 = -\frac{d}{dt} V(r) \quad (2.80)$$

を得る。ここで $u_0 = c\gamma$ であるから

$$\frac{d}{dt} \frac{m c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = -\frac{d}{dt} V(r) \quad (2.81)$$

両辺積分してまとめると

$$\frac{m c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} + V(r) = E (= \text{const.}) \quad (2.82)$$

が得られる。これよりエネルギー保存則が成り立つことが確認できる。

電磁場中のエネルギー保存 今回考えている電磁場は時間に依存しないものを考えている。よって、不変な電場は

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.83)$$

になる。これを利用して、電磁場中の運動方程式を書くと

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{u}) = -e \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.84)$$

となる [(2.55)を参照]。ポテンシャル $V(r)$ でのエネルギー保存と同様に両辺に \mathbf{u} をかけると左辺は(2.77)、右辺は $\mathbf{u} = \gamma \mathbf{v}$ と $\mathbf{u} = \frac{u^0}{c} \mathbf{v}$ を利用すると

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= -e \frac{u^0}{c} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} + \gamma \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= -e \frac{u^0}{c} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \\ &= -e \frac{u^0}{c} \frac{d}{dt} \phi \end{aligned} \quad (2.85)$$

と変形できる。ここで、1行目から2行目への変形では $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$ を利用した。よって

$$u^0 \frac{d}{dt} m u_0 = -e \frac{u^0}{c} \frac{d}{dt} \phi(r) \quad (2.86)$$

となり、両辺を u^0/c で割り、両辺積分してまとめると

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + e\phi = E(= \text{const.}) \quad (2.87)$$

が得られる。これより不変な電磁場の場合にもエネルギー保存則が成り立ち、またそのエネルギーの値は磁場によらない。

3 ポテンシャル中を運動する相対論的粒子軌道の分類

この章では、一般的な中心力における軌道の分類を解析的に行う。解析の方法としては、実効ポテンシャルを用いた分類や軌道の方程式を計算することなどが挙げられる。特に中心力が重力や静電ポテンシャルなどの逆二乗則の場合にポテンシャル $V(r) = -\frac{k}{r}$ の下での軌道の方程式を導出する。

3.1 実効ポテンシャルの導出

2.1.3 節で導かれたラグランジアンを利用して解析的に軌道を分類するために、古典論 [19] と同様にエネルギーと実効ポテンシャルの不等式を導出する。(2.37) よりポテンシャル $V(r)$ が定義できるときのラグランジアンは

$$L_1 = L_0 - V(r) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V(r) = -mc^2 \gamma^{-1} - V(r) \quad (3.1)$$

である。極座標での速度は

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta} \quad (3.2)$$

と書ける。(2.62) より $m\gamma r^2 \dot{\theta}$ は保存量であることがわかる。ここで

$$m\gamma r^2 \dot{\theta} = \ell \quad (3.3)$$

とする。2.3 節のエネルギー保存則を利用して実効ポテンシャルを導きたい。(2.82) より

$$\frac{d}{dt} (mc^2 \gamma + V(r)) = 0 \quad (3.4)$$

であるのでここから (3.3) を利用して r と \dot{r} の関数にする。まず (3.3) を $\dot{\theta}$ について解く。両辺を二乗し整理すると

$$m^2 \gamma^2 r^4 \dot{\theta}^2 = \ell^2 \quad (3.5)$$

$$\dot{\theta}^2 = \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right) \left(\frac{\ell^2 c^2}{r^2 (m^2 r^2 c^2 + \ell^2)}\right) \quad (3.6)$$

となる。(3.4) 式のうち $\dot{\theta}$ が含まれているのは γ であるので計算していくと

$$\gamma^{-2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}{c^2} \quad (3.7)$$

$$= 1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r^2}{c^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right) \left(\frac{\ell^2 c^2}{r^2 (m^2 r^2 c^2 + \ell^2)}\right) \quad (3.8)$$

$$= \frac{m^2 r^2 (c^2 - \dot{r}^2)}{m^2 r^2 c^2 + \ell^2} \quad (3.9)$$

となるのでエネルギー保存則は

$$\frac{d}{dt} \left(mc^2 \sqrt{\frac{c^2 + \frac{\ell^2}{m^2 r^2}}{c^2 - \dot{r}^2}} + V(r) \right) = 0 \quad (3.10)$$

と書き換えられる。

次に実効ポテンシャルについて検討する。まず古典論の場合のエネルギー保存則は (A.13) より

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V = \text{const} \quad (3.11)$$

と書ける。このとき実効ポテンシャル V'_c は

$$V'_c = \frac{l^2}{2mr^2} + V \quad (3.12)$$

であり、原点からの距離 r の関数で表わされる。古典論の場合は $V(r) = -k/r$ とすると、実効ポテンシャル $V'_c(r)$ は

$$V'_c(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \quad (3.13)$$

と表せるので、 $V'_c(r)$ の遠方での極限值は

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V'_c(r) = 0 \quad (3.14)$$

となる。よって $V'_c(r)$ の漸近線は $V'_c(r) = 0$ である。この漸近線 $V'_c(r) = 0$ より大きいエネルギーの場合は軌道は非有界になり、小さいときには軌道は有界になる。また、実効ポテンシャルとエネルギーの関係は

$$E_c \geq \frac{l^2}{2mr^2} + V = V'_c \quad (3.15)$$

という不等式で表わされる。よって保存されたエネルギー E_c より実効ポテンシャルが小さいときに粒子の運動が起きることがわかり、軌道の種類も分類できる。

この議論を相対論の場合でも行うため、(3.10) より保存するエネルギー E_r を

$$E_r = mc^2 \sqrt{\frac{c^2 + \frac{\ell^2}{m^2 r^2}}{c^2 - \dot{r}^2}} + V = \text{const} \quad (3.16)$$

とおく。ここから先ほどと同じような不等式を作り、実効ポテンシャル V'_r を r の関数で表したい。ここで

$$c^2 - \dot{r}^2 \leq c^2 \quad (3.17)$$

であるので

$$\frac{1}{c^2 - \dot{r}^2} \geq \frac{1}{c^2} \quad (3.18)$$

となる。よって (3.16) より

$$mc^2 \sqrt{\frac{c^2 + \frac{\ell^2}{m^2 r^2}}{c^2 - \dot{r}^2}} \geq mc^2 \sqrt{\frac{c^2 + \frac{\ell^2}{m^2 r^2}}{c^2}} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{\ell^2}{m^2 c^2 r^2}} \quad (3.19)$$

という不等式が得られる。よって実効ポテンシャルを

$$V'_r = mc^2 \sqrt{1 + \frac{\ell^2}{m^2 c^2 r^2}} + V \quad (3.20)$$

とおくと r のみの関数になり、 $V(r) = -k/r$ のとき $V'_r(r)$ の極限は

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V'_r(r) = mc^2 \quad (3.21)$$

となり、漸近線は $V'_r(r) = mc^2$ と求まる。この漸近線 $V'_r(r) = mc^2$ より大きいエネルギーの場合は軌道は非有界になり、小さいときには軌道は有界になる。エネルギーとの関係は

$$E_r \geq mc^2 \sqrt{1 + \frac{\ell^2}{m^2 c^2 r^2}} + V = V'_r \quad (3.22)$$

と得る。以上より古典論の場合と同じ不等式が導け、相対論の場合でも同様な議論ができる。しかし、これは古典論のときのように、全エネルギーを運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和に分解できたわけではない。したがって実効ポテンシャルの解釈には注意が必要であるが、粒子が最も中心に近づく近日点と中心から最も離れる遠日点の交点が変わるはずであるので、粒子軌道が起こる範囲が確認できると考えられる。

3.2 逆二乗則に従う力のもとでの軌道の方程式

ここでは平面極座標における保存的中心力の下での質量 m の粒子の運動を考える。ポテンシャル $V(r)$ の場合、全エネルギーを E_r とすると (2.82) より

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + V(r) = E_r \quad (3.23)$$

が成り立っている。また、(2.62) より角運動量 ℓ は

$$m\gamma r^2 \dot{\theta} = \ell \quad (3.24)$$

であり、エネルギーと角運動量は保存している。(3.24) を $\dot{\theta}$ について解くと

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{1 - \beta^2} \frac{\ell}{mr^2} \quad (3.25)$$

となる。また、 \dot{r} は角運動量を利用して書き換えると

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{1 - \beta^2} \frac{\ell}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \quad (3.26)$$

を得る。ここで $w = 1/r$ とすると

$$\frac{dw}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \quad (3.27)$$

であるから (3.26) は

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{1-\beta^2} \frac{\ell}{m} \frac{dw}{d\theta} \quad (3.28)$$

と書ける。ここで γ^{-2} を (3.25), (3.28) を用いて計算すると

$$1 - \beta^2 = 1 - \frac{1}{c^2} \left(\dot{r}^2 + \frac{1}{w^2} \dot{\theta}^2 \right) = 1 - (1 - \beta^2) \frac{\ell^2}{m^2 c^2} \left\{ \left(\frac{dw}{d\theta} \right)^2 + w^2 \right\}, \quad (3.29)$$

$$\frac{1}{1 - \beta^2} = 1 + \left(\frac{\ell}{mc} \right)^2 \left\{ \left(\frac{dw}{d\theta} \right)^2 + w^2 \right\} \quad (3.30)$$

を得る。また、エネルギー保存 (3.23) を $1/(1 - \beta^2)$ について解くと

$$\left(\frac{E_r - V}{mc^2} \right)^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (3.31)$$

となり、これを (3.30) と比較すると

$$\left(\frac{1}{mc^2} \right)^2 (E_r - V)^2 = 1 + \left(\frac{\ell}{mc} \right)^2 \left\{ \left(\frac{dw}{d\theta} \right)^2 + w^2 \right\} \quad (3.32)$$

したがって、

$$\frac{1}{c^2 \ell^2} (E_r - V)^2 - \frac{m^2 c^2}{\ell^2} = \left(\frac{dw}{d\theta} \right)^2 + w^2 \quad (3.33)$$

と得る。ここでは逆二乗則の場合の軌道を考えたいので $V(r)$ は

$$V(r) = -\frac{k}{r} = -kw \quad (3.34)$$

である。これを (3.33) に代入し整理すると

$$\left(\frac{dw}{d\theta} \right)^2 + \left(1 - \frac{k^2}{c^2 \ell^2} \right) w^2 - \frac{2E_r k}{c^2 \ell^2} w + \frac{m^2 c^2}{\ell^2} - \frac{E_r^2}{c^2 \ell^2} = 0 \quad (3.35)$$

となる。よって積分の形で書くと

$$\theta = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{E_r^2}{c^2 \ell^2} - \frac{m^2 c^2}{\ell^2} + \frac{2E_r k}{c^2 \ell^2} w + \left(\frac{k^2}{c^2 \ell^2} - 1 \right) w^2}} dw \quad (3.36)$$

を得る。一般にこの不定積分は次のようになることが知られている [21]。

$R < 0$ のとき

$$\int \frac{1}{\sqrt{P + Qx + Rx^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{|R|}} \cos^{-1} \left(\frac{-Q - 2Rx}{\sqrt{Q^2 - 4PR}} \right) \quad (3.37)$$

$R > 0$ のとき

$$\int \frac{1}{\sqrt{P + Qx + Rx^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{R}} \log \left| 2Rx + Q + 2\sqrt{R(Rx^2 + Qx + P)} \right| \quad (3.38)$$

今回は

$$P = \frac{E_r^2}{c^2 \ell^2} - \frac{m^2 c^2}{\ell^2}, \quad Q = \frac{2E_r k}{c^2 \ell^2}, \quad R = \frac{k^2}{c^2 \ell^2} - 1 \quad (3.39)$$

であるので、軌道の方程式は $R < 0$ のとき

$$\frac{1}{r} = \frac{E_r k}{c^2 \ell^2 - k^2} \left(1 + \frac{c \sqrt{E_r^2 \ell^2 - m^2 c^4 \ell^2 + m^2 c^2 k^2}}{E_r k} \cos \left(\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2 \ell^2}} \theta + C \right) \right) \quad (3.40)$$

(3.40) は一般化円錐曲線と呼ばれる曲線の方程式を表し、古典論で現れる周期的な楕円軌道や発散するような双曲線軌道の他に原点を周回して発散するような軌道や準周期的な軌道も含んでいる。

また、 $R > 0$ のときは

$$\begin{aligned} \theta + C &= \frac{1}{\sqrt{R}} \log \left| 2Rw + Q + 2\sqrt{R(Rw^2 + Qw + P)} \right| \\ \sqrt{R}(\theta + C) &= \log \left| 2Rw + Q + 2\sqrt{R(Rw^2 + Qw + P)} \right| \\ e^{\sqrt{R}(\theta + C)} &= \left| 2Rw + Q + 2\sqrt{R(Rw^2 + Qw + P)} \right| \end{aligned} \quad (3.41)$$

$w = 1/r$ より

$$e^{\sqrt{R}(\theta + C)} = \left| \frac{2R}{r} + Q + 2\sqrt{R \left(\frac{R}{r^2} + \frac{Q}{r} + P \right)} \right| \quad (3.42)$$

となることがわかる。 r について解くことは困難であるが、 r が小さいときには

$$e^{\sqrt{R}(\theta + C)} \sim \frac{1}{r} \quad (3.43)$$

であることはわかる。よって θ が大きいときは半径 r は小さくなり、原点に近づいていく軌道を表す。

3.3 実効ポテンシャルと軌道の方程式の考察

ここで、古典論でのポテンシャル $V'_c(r)$ と相対論での実効ポテンシャル $V'_r(r)$ の違いについて、ポテンシャル $V(r) = -k/r$ として軌道の方程式から得られた粒子が中心に捉えられる条件 $R > 0$ すなわち $\ell < k/c$ とともに考察していく。

始めに、相対論での実効ポテンシャル (3.22) は $\ell \ll mcr$ のとき

$$V'_r \approx mc^2 \left(1 + \frac{\ell^2}{2m^2 c^2 r^2} \right) - \frac{k}{r} \quad (3.44)$$

と展開できる。相対論の場合は全エネルギーに静止エネルギーが付加されているので、静止エネルギー分を差し引くと

$$V'_r - mc^2 \approx \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \quad (3.45)$$

となる。いま、 $\ell \ll mcr$ としており、 $\ell = \gamma mrv_\theta$ を代入すると $\gamma v_\theta \ll c$ となる。(3.13) と比較をすれば、非相対論極限で相対論での実効ポテンシャルが古典論に漸近していることを意味している。

古典論での実効ポテンシャル V'_c と相対論での実効ポテンシャル V'_r はそれぞれ

$$V'_c = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}, \quad V'_r = mc^2 \sqrt{1 + \frac{\ell^2}{m^2 c^2 r^2}} - \frac{k}{r} \quad (3.46)$$

である。原点付近の V'_c と V'_r のそれぞれの実効ポテンシャルの振る舞いを考えていく。古典論の実効ポテンシャル V'_c では遠心力のポテンシャル $\ell^2/2mr^2$ と重力や中心力などのポテンシャル $-k/r$ の和で成り立っている。 r の依存性から十分大きな半径では中心力 ($1/r$) に比べて遠心力 ($1/r^2$) が無視できるので実効ポテンシャルは中心力ポテンシャルに近づく。半径が小さくなっていくと中心力ポテンシャルから徐々にずれ始め、ある半径で極小値になる。それよりも小さい半径では遠心力のポテンシャル ($1/r^2$) が中心力ポテンシャルに比べて支配的になるため、実効ポテンシャルの値は急激に増加して、中心で無限大となるような遠心力のポテンシャルに近づく。よって、古典論の場合では実効ポテンシャルが中心で発散するような形になっているため、中心での粒子の運動できる範囲が制限されてしまう。これは角運動量の障壁と呼ばれており、これにより粒子が中心に近づけなくなる原因となっている。つまり、原点付近では $+1/r^2$ が $-1/r$ より常に支配的であるため、どのような係数をとっても $\lim_{x \rightarrow 0} V'_c = \infty$ となり、角運動量の障壁が作られることがわかる。次に相対論での実効ポテンシャル V'_r について考えていく。実効ポテンシャルの第1項は $+1/r$ に比例し、中心力ポテンシャルは $-1/r$ に比例する。よって、中心付近で係数の値によっては古典のような角運動量の障壁が出来ずに、中心で負に発散するような場合が起きることがわかる。

一方、粒子が落ちる場合の条件 $\ell < k/c$ を考えていく。古典論でのエネルギー保存則は (A.13) より

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V = \text{const} \quad (3.47)$$

であった。ここでポテンシャル $V(r) = -k/r$ を考えているので

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \quad (3.48)$$

となる。古典論で粒子が最も中心に近づく近日点では、動径方向の速度 $\dot{r} = 0$ となるので

$$E_c = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \quad (3.49)$$

が満たされる。 $l = mrv_\theta$ を用いれば、

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = \frac{l m r v_\theta}{2mr^2} - \frac{k}{r} \\ &= \frac{l v_\theta}{2r} - \frac{k}{r} \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{l v_\theta}{2} - k \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

となる。ここで v_θ について変形すると

$$v_\theta = \frac{2}{l} (k + r E_c) \quad (3.51)$$

となる。今回考えているのは、近日点であるので中心からの距離である半径 r は小さいと考えると v_θ は

$$v_\theta \approx \frac{2k}{l} \quad (3.52)$$

となる。また、非相対論極限では $\gamma v_\theta \ll c$ を考えており、 γ はローレンツ因子である (≈ 1) ので $v_\theta \ll c$ と考えられる。よって、非相対論極限で v_θ は

$$v_\theta \approx \frac{2k}{l} \ll c \quad (3.53)$$

を満たさなければならない。この不等式を角運動量について解くと

$$l \gg \frac{2k}{c} \quad (3.54)$$

となり、近日点付近でも古典論が成立するのは粒子の角運動量 l が $2k/c$ より十分大きい場合であることがわかる。

一方、相対論に基づく軌道の方程式から求められた粒子が中心に落ちる条件は

$$\ell < \frac{k}{c} \quad (3.55)$$

であった。古典論極限で $\ell \rightarrow l$ を考えると (3.55) を満たす粒子は (3.54) より近日点付近で粒子の速度は光速に近くなり古典近似を破ることがわかる。相対論での実効ポテンシャルは

$$V'_r = mc^2 \sqrt{1 + \frac{\ell^2}{m^2 c^2 r^2}} - \frac{k}{r} \quad (3.56)$$

であった。ここで粒子が落ちる臨界を考えると $\ell = k/c$ であり、これを相対論での実効ポテンシャルに代入すると

$$\begin{aligned} V'_r &= mc^2 \sqrt{1 + \frac{k^2/c^2}{m^2 c^2 r^2}} - \frac{k}{r} \\ &= mc^2 \sqrt{1 + \frac{k^2}{m^2 c^4 r^2}} - \frac{k}{r} \\ &= \sqrt{m^2 c^2 + \frac{k^2}{r^2}} - \frac{k}{r} \end{aligned}$$

を得る。これより、 $r \sim 0$ で実効ポテンシャルの係数が打ち消しあうので障壁がなくなり粒子が落ちることが確認できる。

4 シミュレーション

3章で得られた方程式に基づきシミュレーションを行う。まずは、シミュレーションを行う準備として、運動方程式をシミュレーションできる形に変形をする。今回求めた軌道の方程式とシミュレーションによる軌道が一致するかを確認し、新たに提案した相対論における実効ポテンシャルによる軌道の分類が正しくできるか検証を行う。また、電磁場中での粒子軌道をシミュレーションを用いてどのようなものがあるのか確認する。

4.1 デカルト座標における運動方程式

今回は2次元でのシミュレーションを行うため、2次元での運動方程式を考える。(2.52)の運動方程式をシミュレーションで利用できる形に変形する。まずは座標時での運動方程式について計算していく。

座標時での運動方程式は3次元的な力の x 成分 y 成分をそれぞれ F_x, F_y とすると

$$\begin{cases} m \frac{d}{dt}(\gamma v_x) = F_x \\ m \frac{d}{dt}(\gamma v_y) = F_y \end{cases} \quad (4.1)$$

と書ける。 x 成分の運動方程式について計算を進めていくと、左辺は

$$\frac{d}{dt}(\gamma v_x) = \gamma \frac{dv_x}{dt} + v_x \frac{d\gamma}{dt} \quad (4.2)$$

(4.2) の第二項目を計算すると

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{v}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{dv}{dt} = \frac{v}{c^2} \gamma^3 \frac{dv}{dt} \quad (4.3)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{1}{2v} \frac{d}{dt} (v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{v} \left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} \right) \quad (4.4)$$

となる。よってまとめると (4.2) は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma v_x) &= \gamma \frac{dv_x}{dt} + v_x \frac{v}{c^2} \gamma^3 \frac{1}{v} \left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} \right) \\ &= \gamma \frac{dv_x}{dt} + \frac{v_x \gamma^3}{c^2} \left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} \right) \\ &= \frac{\gamma^3}{c^2} \left\{ (c^2 + v_x^2 - v^2) \frac{dv_x}{dt} + v_x v_y \frac{dv_y}{dt} \right\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

と書ける。 y 成分についても同様に計算できる。まとめると

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\gamma v_x) = \frac{\gamma^3}{c^2} \left\{ (c^2 + v_x^2 - v^2) \frac{dv_x}{dt} + v_x v_y \frac{dv_y}{dt} \right\} \\ \frac{d}{dt}(\gamma v_y) = \frac{\gamma^3}{c^2} \left\{ v_x v_y \frac{dv_x}{dt} + (c^2 + v_y^2 - v^2) \frac{dv_y}{dt} \right\} \end{cases} \quad (4.6)$$

これより運動方程式は

$$\begin{cases} m \frac{\gamma^3}{c^2} \left\{ (c^2 - v_y^2) \frac{dv_x}{dt} + v_x v_y \frac{dv_y}{dt} \right\} = F_x \\ m \frac{\gamma^3}{c^2} \left\{ v_x v_y \frac{dv_x}{dt} + (c^2 - v_x^2) \frac{dv_y}{dt} \right\} = F_y \end{cases} \quad (4.7)$$

となり、これを計算し整理すると

$$\begin{cases} m \frac{\gamma^3}{c^2} \left\{ (c^2 - v_y^2)(c^2 - v_x^2) - v_x^2 v_y^2 \right\} \frac{dv_x}{dt} = (c^2 - v_x^2) F_1 - v_x v_y F_2 \\ m \frac{\gamma^3}{c^2} \left\{ (c^2 - v_y^2)(c^2 - v_x^2) - v_x^2 v_y^2 \right\} \frac{dv_y}{dt} = (c^2 - v_y^2) F_1 - v_x v_y F_2 \end{cases} \quad (4.8)$$

dv_x/dt の係数について計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^3}{c^2} \left\{ (c^2 - v_y^2)(c^2 - v_x^2) - v_x^2 v_y^2 \right\} &= \frac{\gamma^3}{c^2} \left\{ c^4 - c^2(v_x^2 + v_y^2) + v_x^2 v_y^2 - v_x^2 v_y^2 \right\} \\ &= \gamma^3 (c^2 - v^2) = \gamma c^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

となる。ここで $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ を用いた。よって運動方程式は

$$\begin{cases} \gamma c^2 m \frac{dv_x}{dt} = (c^2 - v_x^2) F_x - v_x v_y F_y \\ \gamma c^2 m \frac{dv_y}{dt} = (c^2 - v_y^2) F_y - v_x v_y F_x \end{cases} \quad (4.10)$$

と求まる。

4.2 運動方程式の規格化

今回は中心力を考えるためポテンシャル $V(r)$ は

$$V(r) = -\frac{k}{r} \quad (4.11)$$

であるので、

$$\begin{cases} F_x = \frac{dV}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{k}{r^2} \frac{x}{r} \\ F_y = \frac{dV}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{k}{r^2} \frac{y}{r} \end{cases} \quad (4.12)$$

となる。よって、(4.12) を (4.10) に代入すると、運動方程式は

$$\begin{cases} \gamma c^2 m \frac{dv_x}{dt} = -(c^2 - v_x^2) \frac{k}{r^2} \frac{x}{r} + v_x v_y \frac{k}{r^2} \frac{y}{r} \\ \gamma c^2 m \frac{dv_y}{dt} = -(c^2 - v_y^2) \frac{k}{r^2} \frac{y}{r} + v_x v_y \frac{k}{r^2} \frac{x}{r} \end{cases} \quad (4.13)$$

ここで次のように規格化を行う。

$$\begin{aligned} x &= \frac{k}{mc^2} \hat{x}, \quad y = \frac{k}{mc^2} \hat{y}, \quad r = \frac{k}{mc^2} \hat{r} \\ v_x &= c\hat{v}_x, \quad v_y = c\hat{v}_y, \quad t = \frac{k}{mc^3} \hat{t} \end{aligned} \quad (4.14)$$

よって、規格化された運動方程式は

$$\begin{cases} \gamma \frac{d\hat{v}_x}{d\hat{t}} = -(1 - \hat{v}_x^2) \frac{\hat{x}}{\hat{r}^3} + \hat{v}_x \hat{v}_y \frac{\hat{y}}{\hat{r}^3} \\ \gamma \frac{d\hat{v}_y}{d\hat{t}} = -(1 - \hat{v}_y^2) \frac{\hat{y}}{\hat{r}^3} + \hat{v}_x \hat{v}_y \frac{\hat{x}}{\hat{r}^3} \end{cases} \quad (4.15)$$

となる。

4.3 シミュレーション結果

まず始めに中心力が重力などの逆二乗則の場合に規格化された運動方程式 (4.15) のシミュレーションを行い、解析的に求められた軌道の方程式と比較して正しい結果であるか確認を行う。次に、シミュレーションでの軌道が今回新たに提案した特殊相対論での実効ポテンシャルを用いることで実際に分類できるかを確認する。数値解法については、4次のルンゲクッタ法 (RK4) を用いる。

4.3.1 シミュレーションと方程式による軌道の比較

軌道の方程式とシミュレーションによる軌道の比較を行う。今回解析的にえられた軌道の方程式で粒子が中心に落ちる条件は

$$R = \frac{k^2}{c^2 \ell^2} - 1 < 0 \quad (4.16)$$

である。ここで角運動量 ℓ は

$$\ell = \frac{m(v_y x - v_x y)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.17)$$

である。よって、(4.17) を (4.16) に代入して、(4.14) の規格化を利用すると

$$\sqrt{1 - (\hat{v}_x^2 + \hat{v}_y^2)} < |\hat{v}_y \hat{x} - \hat{v}_x \hat{y}| \quad (4.18)$$

という条件が求まる。また、初期条件を

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (1, 0), \quad (\hat{v}_x, \hat{v}_y) = (0, \hat{v}_{y,\text{init}}) \quad (4.19)$$

として、 $\hat{v}_{y,\text{init}}$ を変化させていくことを考えると、原点に落ちる条件は

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < \hat{v}_{y,\text{init}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.20)$$

と求まる。よって、シミュレーションでは(4.20)の範囲で初期条件を与えることとする。今回行ったシミュレーションでは、 $\hat{v}_{y,\text{init}}$ を 0.75 から 0.90 まで 0.05 刻みで行った。結果としては、図4のようになった。赤線がシミュレーションによる粒子軌道、青線が軌道の方程式による粒子軌道になっている。図4のいずれの場合もシミュレーションと軌道の方程式による粒子軌道が一致していることが確認できる。(a),(b),(c)では粒子の移動できる上限があるように見える。また、(d)については一般化された双曲線軌道になっていることが見て取れる。これらの軌道の上限などについては次の節にて、実効ポテンシャルを用いて議論したい。

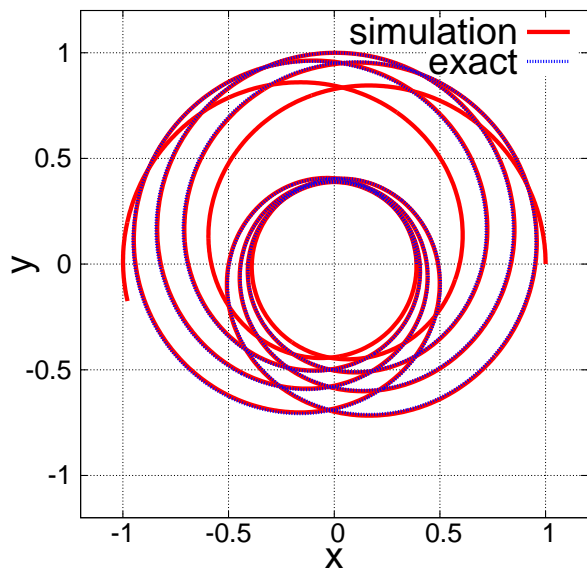
4.3.2 実効ポテンシャルによる軌道の分類

ここでは、3.1節で提案した特殊相対論での実効ポテンシャルに基づき軌道が正しく分類できるかを検証する。4.3.1節と同じ初期条件の軌道について、実効ポテンシャルを用いて軌道の範囲を確認する。次に粒子が中心に落ちる条件である $R < 0$ の場合の実効ポテンシャルを確認し、どのような軌道になるのか調べる。まず、実効ポテンシャルとエネルギーの関係は図5~8のようになる。それぞれ、縦軸がエネルギー、横軸が中心からの半径 \hat{r} を表しており、赤線が全エネルギー、青線が実効ポテンシャルを表している。また、左側には実効ポテンシャルの概形、右側には実効ポテンシャルとエネルギーの交点である近日点、遠日点を表している。

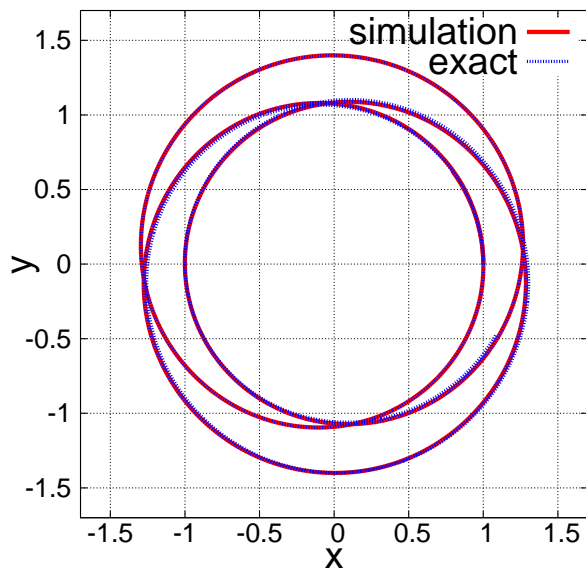
3.1節で提案した特殊相対論での実効ポテンシャル(3.22)により、図5~7では実効ポテンシャルとエネルギーが2つの交点で交わっていることが確認できた。近日点と遠日点の間では実効ポテンシャルがエネルギーよりも低いので、この間で粒子運動が起こることが確認できる。図5~7に対応する粒子軌道は図4(a),(b),(c)であり、近日点と遠日点の間で粒子軌道を描いていることが見て取れる。次に、図8では実効ポテンシャルの交点とエネルギーの交点はシミュレーションの初期条件である $\hat{r} = 1.0$ のみとなっており、軌道の半径に上限はないことがわかる。これより軌道は非有界軌道になることが確認できる。これに対応する粒子軌道は4(d)であり、軌道の半径に上限がない双曲線軌道のようにになっていることが確認できる。

次に実効ポテンシャルとの交点を実際に近日点もしくは遠日点になっているのかを確認するために初期条件である $\hat{r} = 1.0$ では無い方の近日点もしくは遠日点を図9にプロットする。また、 $\hat{v}_{y,\text{init}} = 0.90$ の場合は上限がないため図示していない。図9ではシミュレーションによる粒子軌道と実効ポテンシャルによる粒子の運動できる範囲を示しているものである。図9(a)では原点から粒子運動の下限である近日点までの長さを半径とした $\hat{r} \approx 0.38$ の円を赤色で書いてある。粒子運動は円の中に入らずに運動が起きていることが確認できる。図9(b),(c)では粒子運動の上限である遠日点を半径として、 $\hat{r} \approx 1.4, 8.3$ の円を赤色で書いてある。どちらの場合でも粒子運動は遠日点を半径とした円を超えることは無く運動していることがわかる。

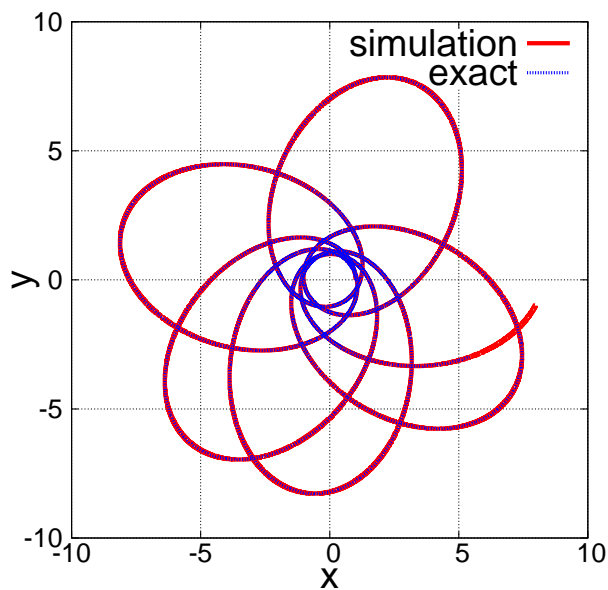
最後に $|\hat{v}_{y,\text{init}}| < 1/\sqrt{2}$ の場合の実効ポテンシャルを確認しておく。この場合での粒子は原点に捉えられることが解析的に示されており、今回はシミュレーションによる粒子軌道と実効ポテンシャルを図示する。図10は $\hat{v}_{y,\text{init}} = 0.7$ での軌道とそれに対応する実効ポテンシャルである。図10(a) $\hat{v}_{y,\text{init}} = 0.7$ では粒子は中心に捉えられて落下する軌道になるこ



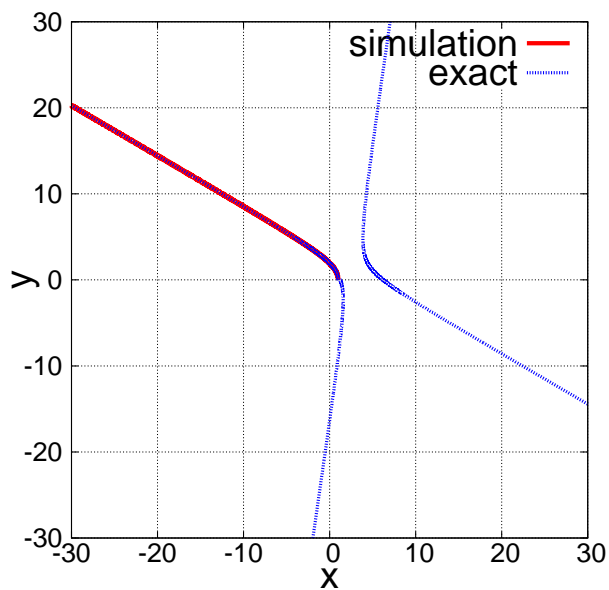
(a) $\hat{v}_{y,init} = 0.75$



(b) $\hat{v}_{y,init} = 0.80$

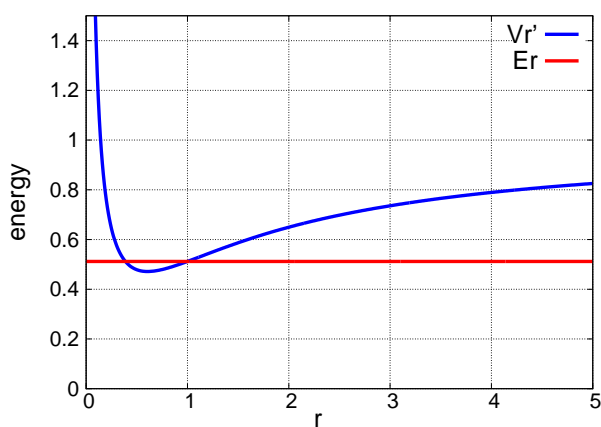


(c) $\hat{v}_{y,init} = 0.85$

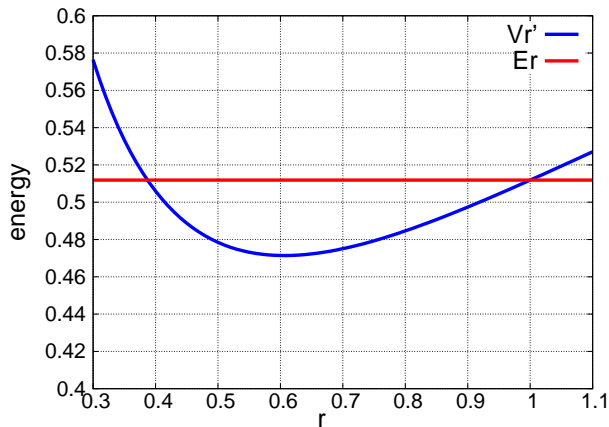


(d) $\hat{v}_{y,init} = 0.90$

図 4: シミュレーションによる粒子軌道と方程式による粒子軌道の比較。いずれの場合もシミュレーションの結果と解析解が一致していることが確認できる。(a),(b),(c) については有界な軌道となっており、(d) については非有界な軌道になっている。

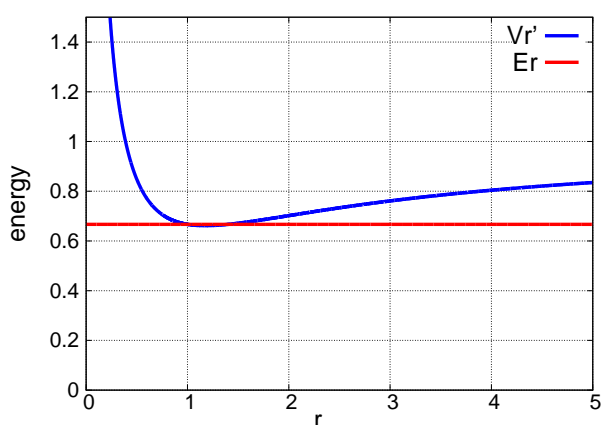


(a) 実効ポテンシャルの概形

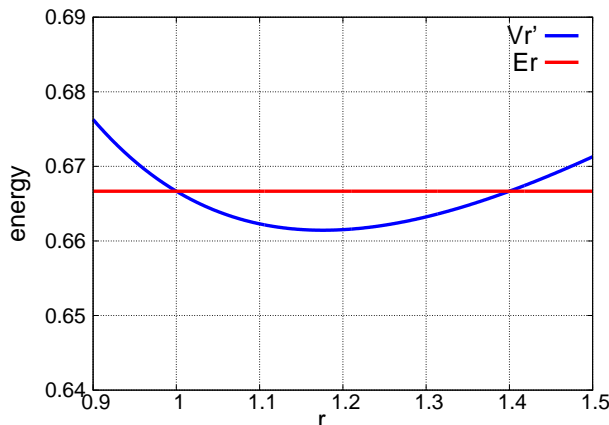


(b) 近日点と遠日点の交点

図 5: $\hat{v}_{y,init}=0.75$ での実効ポテンシャル(青)とエネルギー(赤)。この場合は近日点として $r \approx 0.38$ 、遠日点はシミュレーションの初期条件である $\hat{r} = 1.0$ となっていることが確認できる。粒子軌道は図 4(a) に対応しており、有界な軌道になっていることが確認できる。



(a) 実効ポテンシャルの概形



(b) 近日点と遠日点との交点

図 6: $\hat{v}_{y,init}=0.80$ での実効ポテンシャル(青)とエネルギー(赤)。この場合は近日点はシミュレーションの初期条件である $\hat{r} = 1.0$ となっており、遠日点は $r \approx 1.4$ になっていることが確認できる。粒子軌道は図 4(b) に対応しており、有界な軌道になっていることが確認できる。

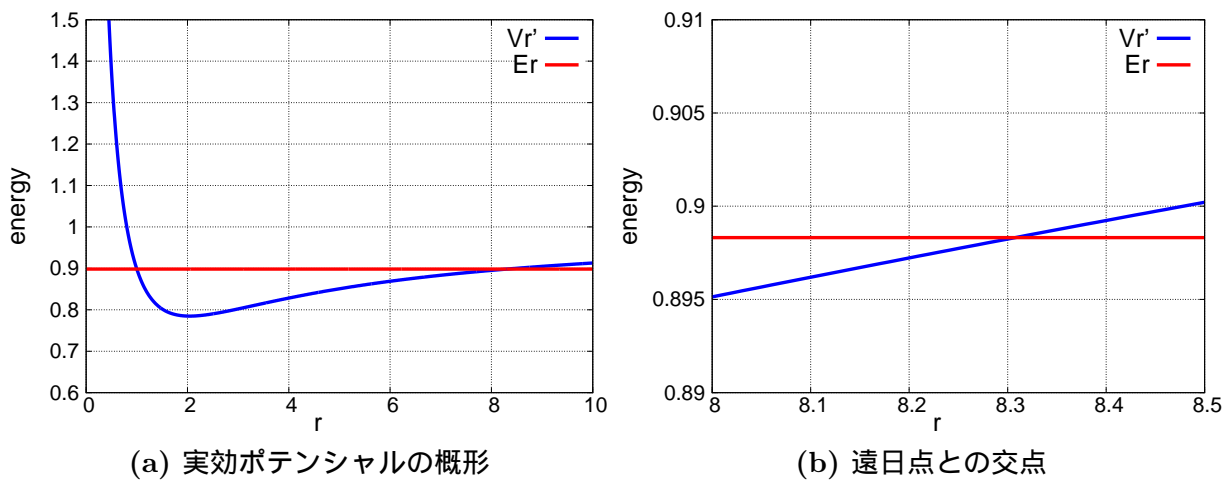


図 7: $\hat{v}_{y,init}=0.85$ での実効ポテンシャル (青) とエネルギー (赤)。近日点はシミュレーションの初期条件である $\hat{r} = 1.0$ となっており、遠日点は $r \approx 8.3$ になっていることが確認できる。粒子軌道は図 4(c) に対応しており、有界な軌道になっていることが確認できる。

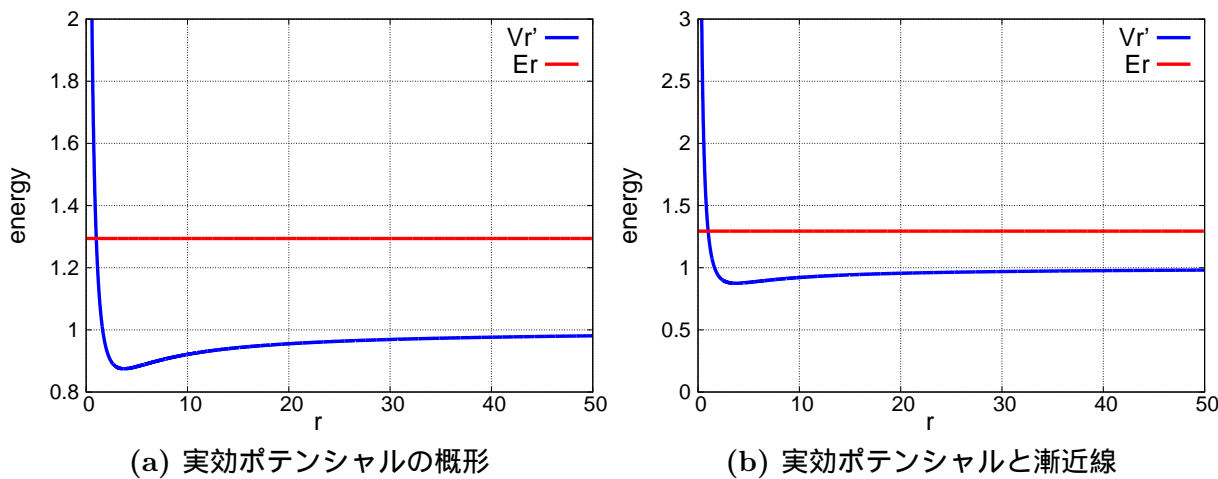


図 8: $\hat{v}_{y,init}=0.90$ での実効ポテンシャル (青) とエネルギー (赤)。近日点はシミュレーションの初期条件である $\hat{r} = 1.0$ となっている。この場合では $\hat{r} > 1$ の範囲でエネルギーが常に実効ポテンシャルよりも大きいため、遠日点を持たない。そのためこの軌道では非有界な軌道になっていることが確認できる。粒子軌道は図 4(d) に対応してる。

とがわかる。また、実効ポテンシャル (3.22) は図 10(b) であり、初期条件である $\hat{r} = 1$ で交点を持っている。 $\hat{r} < 1$ の範囲で実効ポテンシャルがエネルギーの値よりも小さくなっているため、 $\hat{r} < 1$ で粒子運動が起きることがわかる。すなわち、今回の場合は中心に落ちる軌道になることが実効ポテンシャルからも確認できる。

以上より今回新しく提案した特殊相対論での実効ポテンシャル (3.22) は粒子軌道の近日点・遠日点や粒子軌道の有界軌道・非有界軌道などが確認できることがわかった。

4.3.3 電磁場中での粒子軌道

ここでは、電磁場中の運動方程式 (2.55) による粒子軌道をシミュレーションで確認する。電磁場中の運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.21)$$

であり、右辺を F と書くことにする。背景磁場は z 方向に一様であり、 $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ とした。また、背景電場は中心力と同様に

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}} \quad (4.22)$$

である。また、 x 成分 y 成分の電場をそれぞれ E_x, E_y と書くこととすると、 F_x, F_y は

$$\begin{cases} F_x = e(E_x + v_x B_z) \\ F_y = e(E_y - v_y B_z) \end{cases} \quad (4.23)$$

となる。シミュレーションで利用する運動方程式は (4.10) であり、次のように規格化を行う。

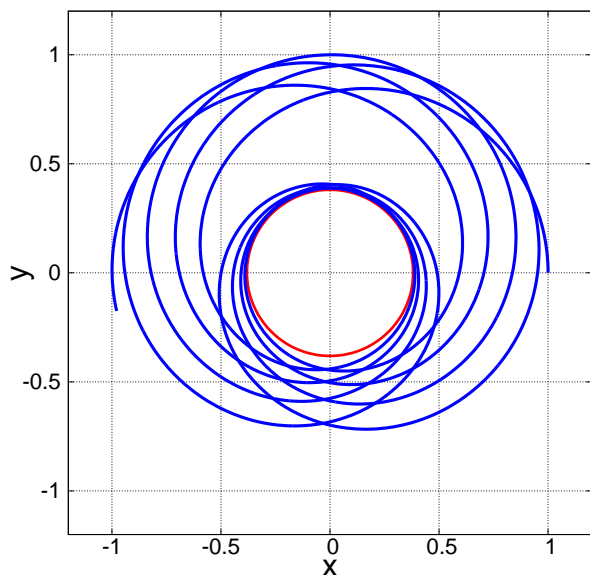
$$\begin{aligned} x &= \frac{k}{mc^2} \hat{x}, & y &= \frac{k}{mc^2} \hat{y}, & v_x &= c\hat{v}_x, & v_y &= c\hat{v}_y \\ F_x &= \frac{m^2 c^4}{k} \hat{F}_x, & F_y &= \frac{m^2 c^4}{k} \hat{F}_y, & t &= \frac{k}{mc^3} \hat{t}, & r &= \frac{k}{mc^2} \hat{r} \\ E_x &= \frac{m^2 c^4}{ek} \hat{E}_x, & E_y &= \frac{m^2 c^4}{ek} \hat{E}_y, & B_z &= \frac{m^2 c^3}{ek} \hat{B}_z \end{aligned} \quad (4.24)$$

規格化された運動方程式は

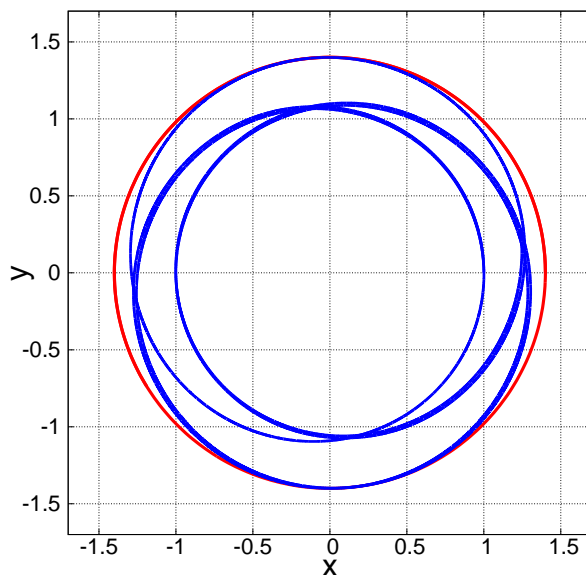
$$\begin{cases} \gamma \frac{d\hat{v}_x}{d\hat{t}} = (1 - \hat{v}_x^2) \hat{F}_x - \hat{v}_x \hat{v}_y \hat{F}_y \\ \gamma \frac{d\hat{v}_y}{d\hat{t}} = (1 - \hat{v}_y^2) \hat{F}_y - \hat{v}_x \hat{v}_y \hat{F}_x \end{cases} \quad (4.25)$$

となる。また、 F_x, F_y はそれぞれ

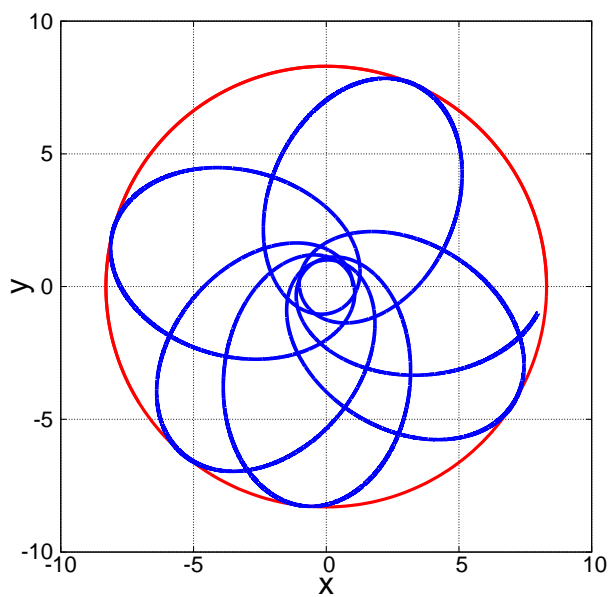
$$\begin{cases} \hat{F}_x = \hat{E}_x + \hat{v}_x \hat{B}_z \\ \hat{F}_y = \hat{E}_y - \hat{v}_y \hat{B}_z \end{cases} \quad (4.26)$$



(a) $\hat{v}_{y,init} = 0.75$

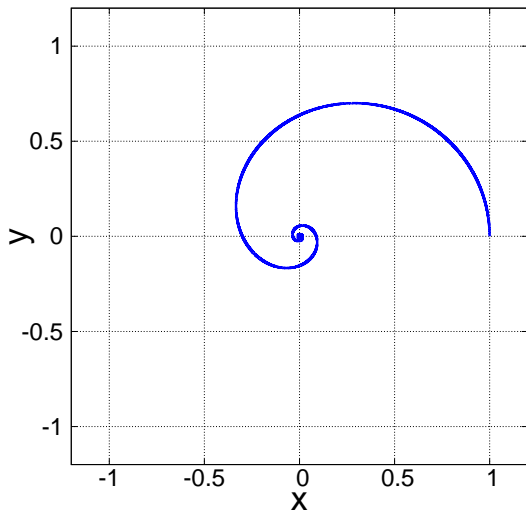


(b) $\hat{v}_{y,init} = 0.80$

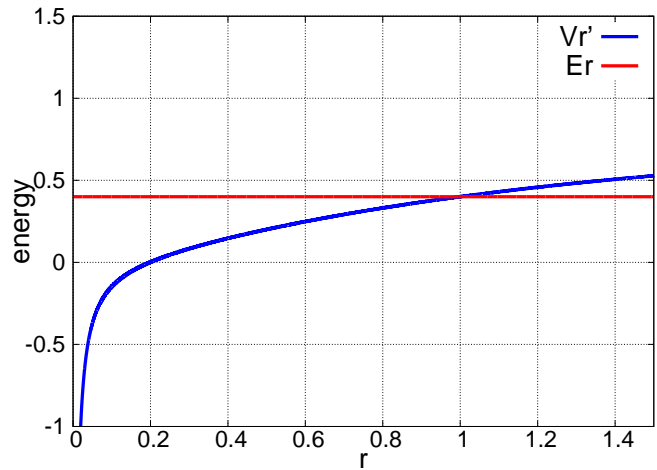


(c) $\hat{v}_{y,init} = 0.85$

図 9: シミュレーションによる粒子軌道と実効ポテンシャルによる粒子の運動できる範囲。青線がそれぞれの $\hat{v}_{y,init}$ での、粒子軌道であり、赤線が原点から近日点もしくは遠日点までの距離を半径とする円である。(a) では近日点が $\hat{r} \approx 0.38$ となっており、粒子運動範囲の下限となっていることがわかる。(b),(c) では遠日点がそれぞれ $\hat{r} \approx 1.4, 8.3$ となっており、粒子の運動範囲の上限となっていることが確認できた。



(a) $\hat{v}_y = 0.7$ のときの粒子軌道



(b) 実効ポテンシャル

図 10: $\hat{v}_{y,init} = 0.70$ での粒子軌道 (a) と実効ポテンシャル (b)。 $\hat{v}_{y,init} = 0.70$ では粒子は中心に落下する軌道になっている。実効ポテンシャル (b) より、初期条件の $\hat{r} = 1$ でエネルギーとの交点を持ち、 $\hat{r} < 1$ の範囲で粒子の運動が起きる。

である。

今回は背景に磁場を $\hat{B}_z = 0.01$, 電場は $\hat{E}_x = \hat{x}/\hat{r}^3, \hat{E}_y = \hat{y}/\hat{r}^3$ とした。初期位置は $(\hat{x}, \hat{y}) = (30, 0)$ とし、速度の初期条件は $(\hat{v}_x, \hat{v}_y) = (0, \hat{v}_{y,init})$ として $\hat{v}_{y,init}$ を 0.2 と 0.5 とし、シミュレーションを行った。 $\hat{v}_{y,init} = 0.2$ の場合は図 11 であり、原点を中心にサイクロトロン運動を行いながら周期的に回転していることがわかる。 $\hat{v}_{y,init} = 0.5$ の場合は図 12 であり、サイクロトロン運動の半径が大きくなっているが定性的な粒子運動は $\hat{v}_{y,init} = 0.2$ の場合と同じようである。

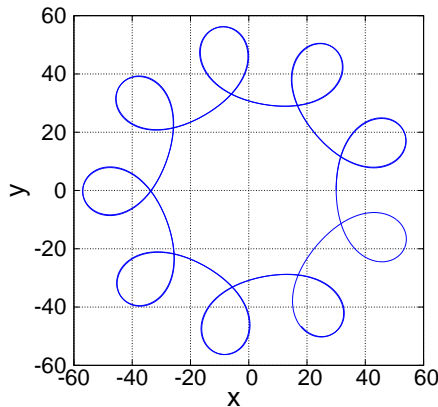


図 11: $\hat{v}_{y,init} = 0.2$ のときの粒子軌道。原点を中心にサイクロトロン運動のしていることが確認できる。

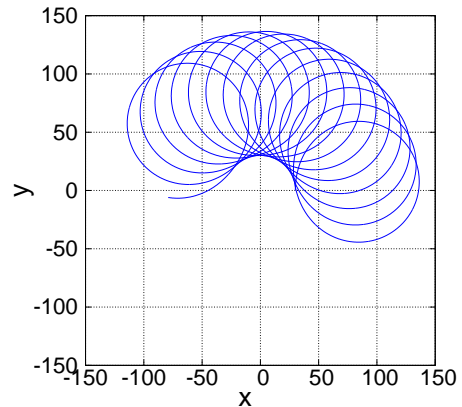


図 12: $\hat{v}_{y,init} = 0.5$ のときの粒子軌道。図 11 に比べてサイクロトロン運動の半径は大きくなっているが、定性的な運動は同じことが見て取れる。

5 制動放射

荷電粒子が加速度運動をした際に電磁波を放射する制動放射という現象がある [11, 13, 16, 22, 24]。荷電粒子の電磁波放射に伴い点電荷自身の持つ力学的エネルギーは減少する。この現象は放射の反作用といい、これは電荷の運動に対して、減衰力として運動方程式に反映されるはずである。この章では、まず古典論での電磁波の放射と減衰力を考え、そのときの運動方程式についてまとめる。次に放射減衰を相対論に拡張し、運動方程式を導出する。

5.1 電磁場の波動方程式

5.1.1 マクスウェル方程式

マクスウェル方程式は

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (5.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{i}_e(\mathbf{x}, t) \quad (5.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e(\mathbf{x}, t) \quad (5.4)$$

で与えられる。ここで、 $\rho_e(\mathbf{x}, t)$ 、 $\mathbf{i}_e(\mathbf{x}, t)$ は電荷分布と電流分布であり、これらはあらかじめ与えられたものである。

5.1.2 電磁ポテンシャルと電磁場

電磁ポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ と $\phi(\mathbf{x}, t)$ を用いると電磁場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \phi(\mathbf{x}, t) \quad (5.5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (5.6)$$

と書ける。このときベクトル解析の公式より

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (5.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \phi \quad (5.8)$$

である。また、このとき電磁ポテンシャルはローレンツゲージ

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (5.9)$$

を満たしている。このときマクスウェルの方程式を利用して計算すると電磁ポテンシャルは

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = -\mu_0 \mathbf{i}_e(\mathbf{x}, t) \quad (5.10)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_e(\mathbf{x}, t) \quad (5.11)$$

を満たしていることがわかる。今回は狭い領域の中の電荷および電流分布によって無限に広い真空空間内に生じる電磁場を決めたい。したがって、(5.10) と (5.11) の波動方程式の特解を求めたら良い。

5.1.3 遅延ポテンシャル

波動方程式の解を求めるために電磁ポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ などの物理量の時間についてフーリエ変換を $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \omega)$ と書けば

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (5.12)$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \quad (5.13)$$

などの関係を満たしている。これを (5.10) と (5.11) に代入すると

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \omega) = -\mu_0 \mathbf{i}_e(\mathbf{x}, \omega) \quad (5.14)$$

$$\nabla^2 \hat{\phi}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\phi}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{\rho_e(\mathbf{x}, \omega)}{\epsilon_0} \quad (5.15)$$

が得られる。このとき、次の方程式を満たすグリーン関数 $G(\mathbf{x})$ を考えると良い。

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)^2 G(\mathbf{x}) = -\delta^3(\mathbf{x}) \quad (5.16)$$

また、ここで $\delta^3(\mathbf{x})$ は δ 関数で

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx} dk, \quad \delta^3(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k}, \quad f(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x}') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'$$

などの関係がある。これを用いて (5.14) と (5.15) の解は

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \omega) = \mu_0 \int_V d^3\mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{i}_e(\mathbf{x}', \omega) \quad (5.17)$$

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho_e(\mathbf{x}', \omega) \quad (5.18)$$

ここで (5.16) の解で遠方で消えるものは

$$G_{\text{ret}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{+i\frac{\omega}{c}|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|}, \quad G_{\text{adv}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \quad (5.19)$$

である [13]。添字の ret は遅延ポテンシャル、adv は先進ポテンシャルを表している。これらを (5.19) と (5.17) を (5.12) に代入し、 $i_e(\mathbf{x}', \omega)$ に (5.13) を用いると

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_V d^3\mathbf{x}' G_{\text{ret,adv}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i_e(\mathbf{x}', t') e^{i\omega t'} dt' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t - t' \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} i_e(\mathbf{x}', t') \end{aligned} \quad (5.20)$$

となる。ここで2行目の複号の上のものをとった電磁ポテンシャルを遅延ポテンシャル、下のものをとったとき先進ポテンシャルという [13]。また、静電ポテンシャルも同様に求められる。

5.2 点電荷による電磁波の放射

5.2.1 点電荷による電磁場

点電荷があらかじめ与えられた軌道 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ をえがいて運動しているとする。このとき、点電荷の電荷量を e とすると、電荷密度と電流密度はそれぞれ

$$\begin{aligned} \rho_e(\mathbf{x}, t) &= e\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)) \\ \mathbf{i}_e(\mathbf{x}, t) &= e\dot{\mathbf{r}}(t)\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)) \end{aligned} \quad (5.21)$$

で与えられる。(5.20) に代入すると

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t - t' \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')) \quad (5.22)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t - t' \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \dot{\mathbf{r}}(t') \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')) \quad (5.23)$$

となる。ここで遅延ポテンシャルを利用してを計算すると

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)|\eta(t'_0)} \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)| - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{r}}(t'_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0))} \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{r}}(t'_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)| - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{r}}(t'_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0))} \quad (5.25)$$

と求まる。また、 $\eta(t'_0)$ と t'_0 は

$$\eta(t'_0) \equiv \frac{df(t'_0)}{dt'_0} = 1 - \frac{1}{c}\mathbf{n}(t'_0) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t'_0), \quad t = f(t'_0) = t'_0 + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)|}{c}, \quad \mathbf{n}(t'_0) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)|}$$

であり、 t'_0 は

$$t = t'_0 + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)|}{c} \quad (5.26)$$

の解として与えられる発信時刻である。(5.24) と (5.25) が運動する点電荷によって生じる電磁ポテンシャルである。このポテンシャルをリエナール・ヴィーヘルト・ポテンシャルという [13]。このポテンシャルから電磁場を導いても良いが計算が煩雑になるので、(5.22),(5.23) から導く。簡単化のためにまず

$$\mathbf{n}(t') = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|}, \quad \mathbf{R}(t') = \mathbf{x} - \mathbf{r}(t'), \quad R(t') = |\mathbf{R}(t')| \quad (5.27)$$

とおく。 $\mathbf{r}(t')$ は任意の時刻 t' における点電荷の位置を示し、 $\mathbf{n}(t')$ はその場所から観測点 \mathbf{x} へ向く単位ベクトルである。電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ は

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \phi(\mathbf{x}, t) \quad (5.28)$$

であるので、代入し計算すると

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}(t'_0)}{R^2(t'_0)\eta(t'_0)} + \frac{1}{c} \frac{1}{\eta(t'_0)} \frac{\partial}{\partial t'_0} \left(\frac{\mathbf{n}(t'_0) - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{r}}(t'_0)}{\eta(t'_0)R(t'_0)} \right) \right] \quad (5.29)$$

となるのがわかる。また磁場は

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{\mu_0 e}{4\pi} \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}(t'_0) \times \mathbf{n}(t'_0)}{R^2(t'_0)\eta(t'_0)} + \frac{1}{c\eta(t'_0)} \frac{\partial}{\partial t'_0} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}(t'_0) \times \mathbf{n}(t'_0)}{R(t'_0)\eta(t'_0)} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.30)$$

となる。次に右辺にある時間微分を実行し、 $\boldsymbol{\beta}(t'_0) = \dot{\mathbf{r}}(t'_0)/c$ とおくと電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\mathbf{n}(t'_0) - \boldsymbol{\beta}(t'_0))(1 - \boldsymbol{\beta}^2(t'_0))}{\eta^3(t'_0)R^2(t'_0)} + \frac{\mathbf{n}(t'_0) \times \{(\mathbf{n}(t'_0) - \boldsymbol{\beta}(t'_0)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'_0)\}}{c\eta^3(t'_0)R(t'_0)} \right] \quad (5.31)$$

となり磁場は

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c} \mathbf{n}(t'_0) \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{(\boldsymbol{\beta}(t'_0) \times \mathbf{n}(t'_0))(1 - \boldsymbol{\beta}^2(t'_0))}{\eta^3(t'_0)R^2(t'_0)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\boldsymbol{\beta}(t'_0) \times \mathbf{n}(t'_0))(\mathbf{n}(t'_0) \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'_0)) + \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'_0) \times \mathbf{n}(t'_0)(1 - \mathbf{n}(t'_0) \cdot \boldsymbol{\beta}(t'_0))}{c\eta^3(t'_0)R(t'_0)} \right] \end{aligned} \quad (5.32)$$

で与えられる [13]。(5.31) と (5.32) が点電荷の運動によって真空中に生じる電磁場である。それぞれの右辺の第1項をみると、これらは粒子の速度 $\dot{\mathbf{r}}(t'_0)$ のみを含んでいて、加速度 $\ddot{\mathbf{r}}(t'_0)$ は含んでいない。また、これらの項は遠方で $R^{-2}(t'_0)$ の程度で小さくなるのでエネルギーの放射には関係のない項である。また右辺の第2項は点電荷の加速度 $\ddot{\mathbf{r}}(t'_0)$ を含み、遠方で $R^{-1}(t'_0)$ の程度で小さくなるので、これらの項が電磁場の放射に関係している。

5.2.2 加速された点電荷による電磁波

(5.31) と (5.32) であたえられた点電荷による電磁波は2個の項からなっており、第1項は点電荷が等速運動しているときとおなじもので $R^{-2}(t'_0)$ に比例する。第2項は点電荷が加速度を持っていることによって生じる項で $R^{-1}(t'_0)$ に比例する。したがって、電磁波の放射を考えるとときには、これらの第2項だけが問題になる。このように点電荷が加速されるときによって、電磁波を放射する現象を制動放射という。

このとき電場は (5.31) より、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{n}(t'_0) - \boldsymbol{\beta}(t'_0))(\mathbf{n}(t'_0) \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'_0)) - \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'_0)(1 - \mathbf{n}(t'_0) \cdot \boldsymbol{\beta}(t'_0))}{c\eta^3(t'_0)R(t'_0)} \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n}(t'_0) \times \{(\mathbf{n}(t'_0) - \boldsymbol{\beta}(t'_0)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'_0)\}}{c\eta^3(t'_0)R(t'_0)} \end{aligned} \quad (5.33)$$

であたえられ、磁場は (5.32) より、

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \mathbf{n}(t'_0) \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (5.34)$$

であたえられる。

ここでポインティングベクトルを

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\mu_0} \quad (5.35)$$

で定義すると、これは単位時間当たり単位面積を通る電磁波のエネルギー流束である。従って、加速度運動をしている粒子を取り囲む無限に大きな球を考えて、その球面を通過する全エネルギーを計算してやれば、粒子の発する電磁波の全エネルギーの放射率を計算できる。

定義に従ってポインティングベクトルを計算すると

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\mu_0} \\ &= \frac{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \{\mathbf{n}(t'_0) \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)\}}{c\mu_0} \\ &= \frac{|\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2 \mathbf{n}(t'_0) - (\mathbf{n}(t'_0) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{c\mu_0} \\ &= \frac{|\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2 \mathbf{n}(t'_0)}{c\mu_0} \end{aligned} \quad (5.36)$$

となる。ここで $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0$ を使った。点電荷が単位時間加速されたときに放射し、観測点 \mathbf{x} で受け取る電磁波のエネルギー量は

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt'_0} &= (\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(t'_0)) \frac{dt}{dt'_0} \\ &= (\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(t'_0)) \eta(t'_0) \end{aligned} \quad (5.37)$$

また、点電荷が単位時間に放射する全エネルギー dW/dt'_0 は (5.37) を半径 $R(t'_0)$ の球面上で積分して

$$\frac{dW}{dt'_0} = \int (\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(t'_0)) \eta(t'_0) R^2(t'_0) d\Omega \quad (5.38)$$

ここで $d\Omega$ は x 点の面積要素を点電荷から見た立体角である。(5.38) に (5.36), (5.33) を代入し、 t'_0 を t と書き換えると

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\mu_0 c^3} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int d\Omega \frac{[\mathbf{n}(t) \times \{(\mathbf{n}(t) - \boldsymbol{\beta}(t)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t)\}]^2}{(1 - \mathbf{n}(t) \cdot \boldsymbol{\beta}(t))^5} \quad (5.39)$$

がえられる。

ここでは非相対論的な場合 $\beta \ll 1$ 、つまり点電荷の速さ v が光速 c に比べて小さいときは $\mathbf{n}(t)$ と $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t)$ の間の角度を θ とすると

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \int d\Omega \left(\mathbf{n}(t) \times (\mathbf{n}(t) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t)) \right)^2 \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \int d\Omega \sin^2 \theta (\dot{\boldsymbol{\beta}}(t))^2 \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} [\dot{\mathbf{v}}(t)]^2 \int d\Omega \sin^2 \theta \\ &= \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} [\dot{\mathbf{v}}(t)]^2 \end{aligned} \quad (5.40)$$

となる。これはラーマーの公式といい、放射の角分布は $\sin^2 \theta$ に比例する。

5.3 電磁波の放射と反作用

5.3.1 減衰力と自己加速

点電荷が加速されているとき、それは電磁波を放射し、それにともなって点電荷自身のもつ力学的エネルギーは減少する。この作用を電磁波の反作用という。この反作用は点電荷に作用する自己力にもとづくものであり、これは電荷の運動に対する減衰力として、その運動方程式に反映してくるはずである。ここではこの減衰力をエネルギー保存則から導く。点電荷の速度が光速に比べて小さいときには、点電荷の単位加速時間あたりの放射エネルギーは (5.40) より、

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{v}}^2(t) \quad (5.41)$$

であたえられる。仮に点電荷が周期運動していて、ある二つの時刻 t_1 と t_2 において

$$\mathbf{v}(t_1) = \mathbf{v}(t_2) = 0 \quad (5.42)$$

であるとする。この時間 $t_1 \rightarrow t_2$ において、減衰力 \mathbf{K} が点電荷になす仕事は同じ時間に放射されたエネルギー、あるいは点電荷のエネルギーの減少量に等しくなければならない。すなわち

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{K}(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}}^2(t) dt \quad (5.43)$$

である。ここで部分積分すると

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}}(t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \cdot \mathbf{v}(t) \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2\mathbf{v}(t)}{dt^2} \cdot \mathbf{v}(t) dt \\ &= \left. \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \cdot \mathbf{v}(t) \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2\mathbf{v}(t)}{dt^2} \cdot \mathbf{v}(t) dt \end{aligned} \quad (5.44)$$

ここで (5.42) の条件を利用すると、右辺の第 1 項は消えて、第 2 項を (5.43) の左辺と比較すると

$$\mathbf{K}(t) = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}}(t) \quad (5.45)$$

とおけば良いことがわかる。

1 個の点電荷が外力 \mathbf{F} によって加速され、電磁波を放射しながら運動しているとき、その点電荷の運動方程式は

$$m \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^3\mathbf{r}(t)}{dt^3} \quad (5.46)$$

で与えられる。遅い電子に対しては右辺の減衰力は小さい物であるが、それが時間に関して 3 階の微分である。したがって、普通の運動方程式から予想される解以外の解を含んでいる可能性がある。

外場が存在せずに、減衰力のみが働いている電荷の運動方程式は

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}} \quad (5.47)$$

という形になる。この方程式は $v = \text{定数}$ という解のほかに、加速度 $\dot{\mathbf{v}}$ が $\exp(6m\pi\epsilon_0 c^3 t/e^2)$ に比例する、つまり時間とともに無限に増大するような解をもつ。これは電荷が無限に自己加速され続けることを意味する。1900 年初頭にこの問題が提示されてから 100 年以上経つが、完全な解決は提案されていない。しかし、部分的にはいくつかの手法でこれを抑制することはでき、摂動計算が用いられることが多い [11]。具体的な摂動計算については、5.4 節での相対論的な放射減衰の場合に紹介する。

5.3.2 放射の反作用

点電荷が電磁波を放射するとき、その反作用として点電荷に減衰力が働くという問題を一般的に扱うためには点電荷と電磁場との共存する体系を記述する基本方程式系に戻ら

なければならない。電磁場を ρ_e, i_0 によって発生する電磁場と、それ以外の電荷と電流によって発生する電磁場とにわけて考える。そのとき運動方程式も

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_0 \quad (5.48)$$

と書くことができる。ここで \mathbf{F}_1 は他の粒子により発生した電磁場のいま考えている電子に働く力を表し、 \mathbf{F}_0 は考えている電子がつくった電磁場が自分自身に作用する力、すなわち自己力を表している。

電子の内部構造を考慮した自己力の作用における電子の運動方程式は

$$m \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{F}_1 - \frac{4}{3c^2} W \dot{\mathbf{v}}_0(t) + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}}_0 + \dots \quad (5.49)$$

となる [13]。ここで W は電子の自己エネルギーである。右辺の第 2 項を左辺に移すと

$$(m + m_e) \dot{\mathbf{v}}_0(t) = \mathbf{F}_1 + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}}_0(t) + \dots \quad (5.50)$$

とかかれる。ここで

$$m_e = \frac{4}{3c^2} W = \frac{4}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0 c^2} \quad (5.51)$$

は電子がそのまわりに静電場をつくることに基づく電磁的質量であると解釈される。しかし係数の $4/3$ の存在は特殊相対論の要求とは矛盾する。今回は電子の半径を a_0 としたので Lorentz 変換に対して共变的ではない。ここまでは相対論的な共变的な方程式に拡張することはできない。そこで $a_0 \rightarrow 0$ とすると、電子の構造に関係した項は無くなり、点電荷の運動方程式は

$$(m + m_e) \dot{\mathbf{v}}_0(t) = \mathbf{F}_1 + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}}_0(t) \quad (5.52)$$

と書くことができる。この方程式は相対論的に共变的な形に拡張することができる。しかし、(5.51) からわかるように、このとき自己力に基づく電子の電磁的質量 m_e は無限大になってしまう。すなわち、相対論では自己エネルギーの発散をまぬがれない。しかし、自己エネルギーを有限にしようとすると、これは相対論と矛盾してしまい問題である。近年では、量子電磁力学からの補正を踏まえた放射の反作用に対する解法が提案されているが、古典論と比べると自己加速は抑制できているが、根本的な解決には至っていない。

5.4 相対論的な場合の放射減衰

光速と比較されるような速度を持つ運動にも当てはめられるような放射減衰の表式を考える。この力は、4 元ベクトル g^i であって、4 次元形式にで書かれた運動方程式に含めなければならないものである。このときの運動方程式は

$$m \frac{du^i}{d\tau} = e F^{ik} u_k + g^i \quad (5.53)$$

である。ここで、 F^{ik} は電磁テンソルである。電磁テンソルは具体的に書き下すと

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

これから放射減衰の運動方程式 (5.53) の g^i を定めていく。 g^i を定めるために $v \ll c$ のときは空間成分が 3 次元的な表式の減衰力 (5.45) に移行しなくてはならないことを考える。よって、ベクトル

$$g^i = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^2 u^i}{d\tau^2} \quad (5.54)$$

がこの性質を備えているはずである。しかしこれでは、任意の 4 元力に対して成り立つ $g^i u_i = 0$ という条件を満たさないのので、補助的な項 κu^i をつけることとする。したがって減衰力は

$$g^i = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{d^2 u^i}{d\tau^2} + \kappa u^i \right) \quad (5.55)$$

と書ける。 κ については、補助条件 $g^i u_i = 0$ を満たすように選べば良い。(5.55) の両辺に u_i をかけると

$$g^i u_i = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{d^2 u^i}{d\tau^2} + \kappa u^i \right) u_i = 0 \quad (5.56)$$

$$\frac{d^2 u^i}{d\tau^2} u_i + \kappa u^i u_i = 0$$

$$\kappa = -\frac{1}{c^2} \frac{d^2 u^i}{d\tau^2} u_i \quad (5.57)$$

よって、4 次元形式の減衰力 g^i は

$$g^i = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{d^2 u^i}{d\tau^2} - \frac{1}{c^2} u^i u^k \frac{d^2 u_k}{d\tau^2} \right) \quad (5.58)$$

となる。この 4 次元形式の減衰力でも 5.3.1 節で問題点として挙げられていた自己加速が起きてしまう。これを回避する方法として、摂動近似を行う方法がある。これは Landau - Lifshitz (LL) によって提案された方法であり、具体的には減衰力がローレンツ力よりも小さいと仮定して、運動方程式そのものを減衰力に代入していくものである。減衰力が無いと仮定すると運動方程式は

$$m \frac{du^i}{d\tau} = e F^{ik} u_k \quad (5.59)$$

と書ける。これを利用して $d^2 u^i / d\tau^2$ を粒子に働く外部のテンソルで直接表すことを行う。

$$\frac{du^i}{d\tau} = \frac{e}{m} F^{ik} u_k, \quad \frac{d^2 u^i}{d\tau^2} = \frac{e}{m} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l} u_k u^l + \frac{e^2}{m^2} F^{ik} F_{kl} u^l \quad (5.60)$$

これを減衰力 (5.58) に代入し、添字 i, k について反対称なテンソル $\partial F^{ik}/\partial x^l$ と対称テンソル $u_i u_k$ との積は恒等的にゼロであるので

$$g^i = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{e}{m} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l} u_k u^l - \frac{e^2}{m^2} F^{il} F_{kl} u^k + \frac{e^2}{m^2 c^2} F_{kl} F^{km} u_m u^i u^l \right) \quad (5.61)$$

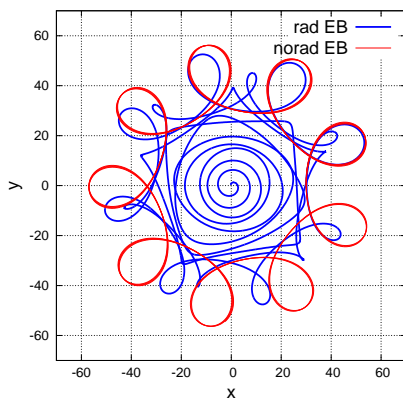
となる。これは、自己加速による暴走解を持たないため、PICシミュレーションで処理する際に利用されている [11]。今回のシミュレーションではこの LL 方程式を利用して、計算を進めていく。

5.5 制動放射を含む運動方程式による数値実験

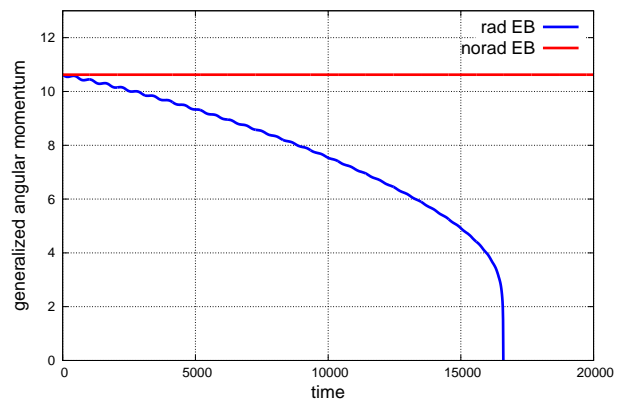
この節では、5.4 で求められた相対論的な放射減衰を含む運動方程式 (5.53) の減衰力を (5.61) とした LL 方程式による粒子運動と制動放射を含まない粒子運動との比較を行う。初期条件は

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (30, 0), \quad (\hat{v}_x, \hat{v}_y) = (0, 0.2) \quad (5.62)$$

としてシミュレーションを進めた。また、磁場の方向は z 方向に一様であり、電荷の符号はプラスである。結果は図 13 である。(a) は放射減衰を含む粒子軌道であり、(b) は角運動量の時間変化である。どちらも青線が制動放射を含む場合であり、赤線が制動放射を含まない結果である。(a) での制動放射のない場合は小さいサイクロトロン運動をしながら原点を中心に回転しているが、放射減衰している場合では始めは放射のない場合と近い運動をしている。しかし、徐々にエネルギーを失い最終的に中心に落ちていくことが確認できる。(b) では放射のない場合は角運動量は保存しているが、放射がある場合では徐々に角運動量を失っていくことが見て取れる。



(a) 放射減衰を含む粒子運動の比較



(b) 放射減衰のある場合の角運動量の比較

図 13: 放射減衰を含む粒子の運動 (a) と角運動量 (b)。(a),(b) 共に青線が制動放射を含む場合、赤線が制動放射を含まない結果となっている。(a) では放射のない場合は中心の周りを周期的に回転しているが、制動放射がある場合では始めは放射のない場合に近い運動をしているが、徐々に中心に落ちていくことが確認できる。(b) では放射のない場合は角運動量は保存しており、放射がある場合では徐々に角運動量を失っていることが見て取れる。

6 降着円盤

この章では、降着円盤の概要についてまとめ、Shakura と Sunyaev によって提唱された降着円盤のモデルについて説明し、Bulbus と Hawley によって発見された磁気回転不安定について簡単に述べる [2, 5, 6]。また、3.2 節で求められた粒子の中心への落ちる条件を利用し、粒子速度の初期条件に気体分子が従うマクスウェル分布を与えることで、どの程度の粒子が中心天体に降着するかを表す降着率を求める。

6.1 降着円盤と標準モデル

白色矮性、中性子星、ブラックホールのように縮退圧が自身の重力と釣り合った状態にあるコンパクト星と呼ばれる高密度天体の周りに降着円盤と呼ばれる粒子密度が周囲より高い円盤状の領域が形成される。ガス物質がコンパクト星に落下するとき、ガスが持っている角運動量のために自由落下ができず、ガス物質の回転運動の遠心力とコンパクト星による重力とのつりあいによって、回転ガスが形成される。降着円盤の場合の回転ガスは差動回転であり、回転の中心に近づくほど角速度が大きくなる運動である。

このときガス物質の遠心力と、コンパクト星の重力がつりあっているので

$$rm\omega^2 = \frac{GMm}{r^2} \quad (6.1)$$

が成り立つ。このとき r は中心天体からの距離、 ω は回転角速度、 G は万有引力定数、 M は中心物体の質量、 m はガス物質の質量である。これを解くと

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}, \quad v_\theta = r\omega = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (6.2)$$

となり、 ω はケプラー回転角速度、 v_θ が回転速度である。

降着円盤のガス物質は角運動量を持っているため、そのままでは降着することはできない。回転している降着円盤では、ガス同士が接しているために隣接するガス層の間で回転角速度が異なっているため摩擦が働く。すなわち、回転角速度が速い内側の層は、少し回転角速度の遅い外側の層と相互作用することによって角運動量を失う。よって、回転の勢いを少し失い、更に内側の軌道に移り、角運動量を得た外側のガス層は、それを更に外側に伝えていく。こうしてガスは降着円盤の中を回転しながら、次第に中心天体に落下していき、ガスの角運動量は降着円盤の内部で外側に輸送されていく。そのままだと降着円盤の内部のガスは全て中心天体に落ち込んでしまうが、常に外部からガスが補給され続けることで、降着円盤が定常的な状態を維持できる。また、中心天体にガスが落下する際に開放される重力エネルギーで光り輝いている。

この降着円盤のモデルは Shakura と Sunyaev が理論的なモデルを構築した。このモデルでは連星系を考慮しており、星から流れ出る物質の一部がブラックホールの重力場の影響圏に落ちて付着し、最終的に重力半径 $R_g = 2GM/c^2$ 内に落ちなければならない。このモデルではニュートン力学のみ利用してモデル化している。しかし、実際には領域 $R < 3R_g$ においてのみ、一般相対論の影響を考慮する必要がある。また、領域 $R < 3R_g$ では安定した軌道は不可能であることが示されている [9]。よって、 $R < 3R_g$ の範囲では物質は外

部からの影響に関係なく落下していくので考える必要はなく、半径 $R = 3R_g$ が内部の境界として存在している。

水などの流体の粘性の度合いを表す係数 α は以前から知られている [10]。しかし、降着円盤のガスは非常に希薄であり、通常の粘性が働くのはごくわずかである。その代わりに、激しい乱流運動に伴う粘性や磁場の存在による粘性などが降着円盤内部で、粘性の役割を果たしていると考えられている。しかし、その物理的な過程はまだ十分に解明されていないため、Shakura と Sunyaev はガスで働く粘性をパラメータ α を用いて表した。この粘性により、角運動量が輸送されることとなる。このとき、降着円盤では周辺からガス物質が円盤の内部に徐々に落下し、中心天体に降り積もっていく。このガスの落下の割合が質量降着率 \dot{M} である。

Shakura らのモデルでは角運動量輸送のメカニズムの効率 α は

$$\alpha = \frac{v_t}{v_s} + \frac{H^2}{4\pi\rho v_s^2} \quad (6.3)$$

$$\frac{\rho v_s^2}{2} = \frac{3}{2}\rho \frac{kT}{m_p} + \epsilon_r \quad (6.4)$$

で特徴付けられるとしている。ここで、(6.4) は物体の熱エネルギー密度で、 ϵ_r は放射のエネルギー密度、 v_s は音速、 v_t は乱流の速度である。

また、接線応力は

$$w_{r\phi} = -\alpha\rho v_s^2 \quad (6.5)$$

と表わされ、磁場と乱流に関する角運動量輸送の重要なメカニズムは α によって決まる。ディスクの厚みの半分を z_0 として、ディスクの密度 u_0 と隣接する層の応力を $W_{r\phi}$ とすると、(6.5) を使うと

$$u_0 = 2 \int_0^{z_0} \rho dz \quad (6.6)$$

$$W_{r\phi} = 2 \int_0^{z_0} w_{r\phi} dz = -\alpha u_0 v_s^2 \quad (6.7)$$

となる。降着円盤の断面の面積は $2\pi R \times 2z_0$ で、断面積の単位面積あたりに落下するガスの量は ρv_r であるから質量降着率は $\dot{M} = 2\pi u_0 v_r R$ と求まる。

角運動量輸送の方程式

$$\frac{u_0 d\omega R^2}{dt} = -u_0 v_r \frac{d\omega R^2}{dR} = \frac{1}{R} \frac{d}{dR} W_{r\phi} R^2 \quad (6.8)$$

を積分し、質量降着率を使うと

$$\dot{M}\omega R^2 = -2\pi W_{r\phi} R^2 + C \quad (6.9)$$

となる。実際には、角運動量全体が外側に輸送され、最初の角運動量のほんの一部 $\sqrt{\frac{3R_g}{R_1}}$ が、物質とともにブラックホールに落ちる (R_1 はディスクの外側の半径)。回転しないブ

ラックホールの場合は、(6.7) を

$$\dot{M}\omega \left[1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^{1/2} \right] = 2\pi\alpha u_0 v_s^2 \quad (6.10)$$

となる。粘性の値は $0 < \alpha < 1$ と推定している。

6.2 磁気回転不安定性 (MRI)

中心天体のまわりを回転している回転重力系のもとでは、周辺の物質が円盤状になって回転する降着円盤が形成されることが多い。物質が中心天体に落下することによって重量エネルギーを解放していることが知られている。物質を落下させるためには、角運動量を外側へ輸送することが必要であるが、Balbus と Hawley はこれを実現するプラズマ不安定性を発見した [2]。この重力回転系での磁場を介した不安定性は磁気回転不安定性 (MRI) と呼ばれている。

このメカニズムについて簡単に説明する。直感的に理解するために図 14 のようなモデルが使用される [39, 40]。前提として、円盤は中心に近づくほど角速度が大きくなる差動回転をしていて、降着円盤を貫くように弱い磁場が存在しているとす。降着円盤の流体要素である二つの質点が質量のないバネで繋がれている状態を考える (実際には、磁気張力という力が働いている)。

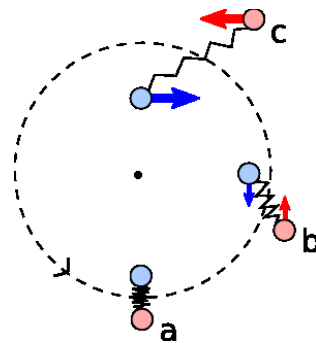


図 14: 磁気回転不安定性の直感的理解 (<http://ay201b.wordpress.com/2011/04/11/the-magnetorotational-instability/>)

- a. 始めに二つの質点は隣り合う場所に存在し、軌道だけが内側と外側で分かれている。
- b. しばらくすると、二つの粒子は差動回転をしているため、内側の軌道と外側の軌道を回る質点との間に回転差が生じてくる。
- c. すると、繋がれているバネのために内側の軌道を回る質点には移動している方向とは逆の方向にバネの張力が働き、外側の軌道を回る質点は移動方向側にバネの張力によって引っ張られる。そうすると、内側の軌道を回っていた質点は角運動量を失い、さらに内側の軌道へと移動し、外側の軌道を回っていた質点は角運動量を得て、さらに内側の軌道へ移動していく

この不安定性により、角運動量が外側に輸送されて降着円盤中心に物体が落ちていく。

6.3 降着率について

3.2 節でポテンシャル $V(r) = -k/r$ を考えると

$$R = \frac{k^2}{c^2 \ell^2} - 1 > 0 \quad (6.11)$$

のときに粒子が中心に落ちることが確認できた。ここでは、粒子速度の初期条件にマクスウェル分布を与えることで、どの程度の粒子が中心天体に降着するかを表す降着率を求めたい。始めに古典的なマクスウェル分布を説明し、今回利用する相対論的マクスウェル分布を導出を行う。相対論的なマクスウェル分布を用いてポテンシャル $V(r) = -k/r$ の場合と制動放射の効果を含めた場合の降着率を求める。

6.3.1 マクスウェル分布

マクスウェル分布とは熱力学的平衡状態において、気体分子の速度が従う分布関数である。荷電粒子の速度ベクトルの成分を v_x, v_y, v_z とすると、次の式にしたがって分布する [38]。

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right) \quad (6.12)$$

ここで m は粒子の質量、 k はボルツマン定数、 T は温度である。また、これを積分したものは粒子の存在確率の和で 1 に正規化されている。よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = 1 \quad (6.13)$$

と書ける。また、速さ $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ の分布は (6.12) で速度ベクトル \boldsymbol{v} を球座標で表して、全立体角に関して積分すると得られ、

$$\tilde{f}(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT} \right) \quad (6.14)$$

となる。しかし、積分区間が $(0, \infty)$ であるので光速を超えていることが問題点としてある。これより、2次元のマクスウェル分布は (6.12) を v_z について $(-\infty, \infty)$ で積分することにより

$$f(v_x, v_y) = \frac{m}{2\pi kT} \exp\left(\frac{-m(v_x^2 + v_y^2)}{2kT} \right) \quad (6.15)$$

6.3.2 相対論的マクスウェル分布

6.3.1 節で導かれたマクスウェル分布を相対論に拡張する [32]。エネルギー E と運動量 p の間には (2.33) より

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2 \quad (6.16)$$

という関係があった。相対論的運動エネルギーは (2.31) より粒子が運動することによって静止エネルギーに付加されるエネルギーであるので $E - mc^2$ である。これらよりある粒子が (p_x, p_y, p_z) と $(p_x + dp_x, p_y + dp_y, p_z + dp_z)$ の間にある確率 $G(p)$ は

$$\begin{aligned} G(p) &= A \exp\left(-\frac{E - mc^2}{kT}\right) dp_x dp_y dp_z \\ &= A \exp\left(\frac{mc^2}{kT}\right) \exp\left(-\frac{c}{kT} \sqrt{m^2 c^2 + p^2}\right) dp_x dp_y dp_z \end{aligned} \quad (6.17)$$

となる。ここで A は規格化定数であり、 $p = \gamma m v$ より $p_{x,y,z}$ について $-\infty$ から $+\infty$ まで積分を取ると、全確率が 1 になる必要があることを考慮して計算を進めていく。 p の立体角について積分を実行すると、

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} A \exp\left(\frac{mc^2}{kT}\right) \exp\left(-\frac{c}{kT} \sqrt{m^2 c^2 + p^2}\right) dp_x dp_y dp_z \\ &= 4\pi A \exp\left(\frac{mc^2}{kT}\right) \int_0^{\infty} p^2 \exp\left(-\frac{c}{kT} \sqrt{m^2 c^2 + p^2}\right) dp \end{aligned} \quad (6.18)$$

と書ける。ここで $p = mc \sinh \theta$, $z = mc^2/kT$ とおくと $dp = mc \cosh \theta d\theta$ であるので、規格化条件は

$$4\pi A e^z m^3 c^3 \int_0^{\infty} e^{-z \cosh \theta} \cosh \theta \sinh^2 \theta d\theta = 1 \quad (6.19)$$

と書き換えられる。また、

$$\cosh \theta \sinh^2 \theta = \frac{\cosh 3\theta - \cosh \theta}{4} \quad (6.20)$$

であり、第二種変形ベッセル関数 K_ν の積分表示 [41]

$$K_\nu(z) = \int_0^{\infty} e^{-z \cosh \theta} \cosh \nu \theta d\theta \quad (6.21)$$

と K_ν の漸化式

$$K_{\nu+1}(z) - K_{\nu-1}(z) = \frac{2\nu}{z} K_\nu(z) \quad (6.22)$$

を用いると、規格化定数 A は

$$A = \frac{z}{4\pi e^z m^3 c^3 K_2(z)} \quad (6.23)$$

と決まる。以上より

$$G(p) = \frac{z}{4\pi m^3 c^3 K_2(z)} \exp\left(-\frac{c}{kT} \sqrt{m^2 c^2 + p^2}\right) dp_x dp_y dp_z \quad (6.24)$$

となり、運動量の立体角で積分すると

$$\tilde{G}(p) = \frac{z}{m^3 c^3 K_2(z)} p^2 \exp\left(-\frac{c}{kT} \sqrt{m^2 c^2 + p^2}\right) dp \quad (6.25)$$

となる。ここで

$$p = \gamma mv = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad dp = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} dv \quad (6.26)$$

であるので、積分変数を p から v に変えて、粒子の速さの確率密度は

$$g(v) = \frac{z}{K_2(z)} \frac{v^2}{c^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{5}{2}} \exp\left(-\frac{z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \quad (6.27)$$

となる。ここで $v = c\hat{v}$ と置き換えると $dv = c d\hat{v}$ となる。 z はそもそも無次元であるから (6.27) は無次元変数を用いて

$$\hat{g}(\hat{v}) = \frac{z}{K_2(z)} \hat{v}^2 (1 - \hat{v}^2)^{-\frac{5}{2}} \exp\left(-\frac{z}{\sqrt{1 - \hat{v}^2}}\right) \quad (6.28)$$

と書き換えられる。このとき $\hat{g}(\hat{v})$ は \hat{v} で積分されるので、積分範囲は 0 から 1 になる。

6.3.3 相対論的マクスウェル分布と非相対論マクスウェル分布の比較

6.3.2 節で求めた相対論的マクスウェル分布と非相対論マクスウェル分布の比較を行う。図 15 がそれぞれのマクスウェル分布を表しており、赤線が相対論的マクスウェル分布であり、青線が非相対論的マクスウェル分布である。また、 $T = 5.0 \times 10^{10}, 5.0 \times 10^{11}, 5.0 \times 10^{12} \text{K}$ のマクスウェル分布をプロットしている。 $T = 5.0 \times 10^{10} \text{K}$ ではあまり相対論効果は無く、どちらもほぼ同じような形をしている。 $T = 5.0 \times 10^{11} \text{K}$ になると相対論効果が現れ、光速の 30 ~ 40% あたりでズレが起きていることがわかる。 $T = 5.0 \times 10^{12} \text{K}$ では古典的なマクスウェル分布では光速を超えてまで粒子が分布しているが、相対論的マクスウェル分布では光速までに全ての粒子が収まるようになっている。

6.3.4 降着率

ここでは、ポテンシャル $V(r) = -k/r$ の場合の降着率と制動放射を取り入れた場合の降着率の概算を求める。本来、特殊相対論では重力の効果を取り扱うことは出来ないため、これまでは電荷によるポテンシャルとしてきたが、ここではおおよその見積もりを得るため、ポテンシャルを万有引力ポテンシャルだと仮定する。

ポテンシャル $V(r) = -k/r$ のみの場合 ポテンシャル $-k/r$ を万有引力ポテンシャルだと仮定したので

$$V(r) = -\frac{k}{r} \sim -\frac{GMm}{r} \quad (6.29)$$

と書けるため、 $k = GMm$ とする。ただし、 G は万有引力定数、 M は中心天体の質量、 m は粒子の質量である。このときの、シュバルツシルト半径は

$$R_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (6.30)$$

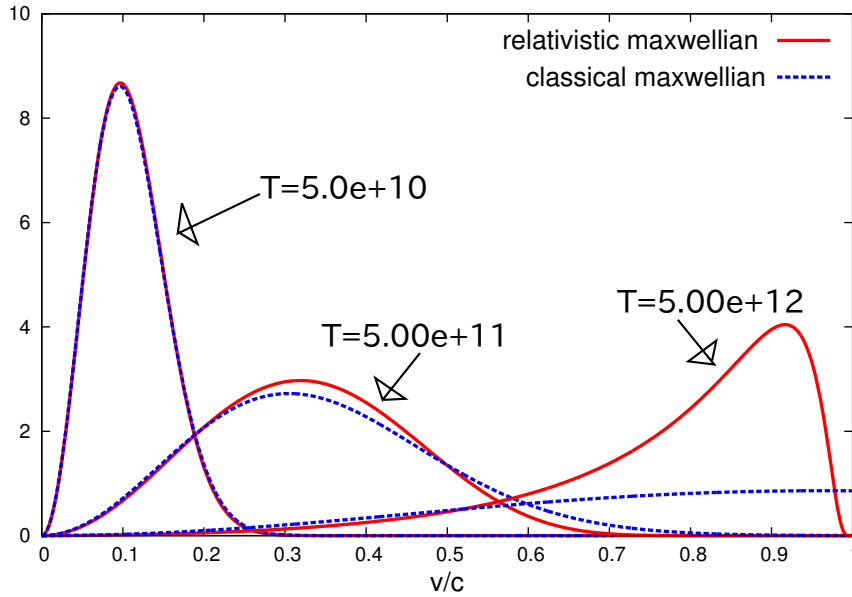


図 15: 相対論的マクスウェル分布と非相対論マクスウェル分布の比較。 5.0×10^{10} , 5.0×10^{11} , 5.0×10^{12} K のときのマクスウェル分布である。

であり、光でも脱出できない天体ブラックホールの半径である。[42]。粒子が中心に落ちる条件は

$$\ell < \frac{k}{c} \quad (6.31)$$

であり、 $k = GMm$ と $\ell = \gamma m r v_\theta$ を代入すると

$$\gamma m r v_\theta < \frac{GMm}{c} \quad (6.32)$$

となる。今回対象とする降着円盤のモデルははくちょう座 X-1(以下, Cyg X-1) とする。Cyg X-1 は連星系を形成しており、恒星の一方の質量が巨大なためもう一方の恒星のガス成分を吸い込み、自身の周りを高速で回転し降着円盤となっており、コンパクト星の質量は $14 - 16 M_\odot$ である [35,36]。ここで M_\odot は太陽質量である。Cyg X-1 の降着円盤はプラズマを形成する高温内側領域とシュバルツシルト半径の約 500 倍に及ぶ低温のイオン化されていない外側領域に分けられる [37]。よって、今回 $r = 200 R_g$ として (6.32) に代入し、 $v_\theta = v_y$ とすると

$$\begin{aligned} 200 \frac{2GM}{c^2} \gamma m v_y &< \frac{GMm}{c} \\ \frac{v_y/c}{\sqrt{1 - \frac{v_y^2}{c^2}}} &< \frac{1}{400} \end{aligned} \quad (6.33)$$

という条件が得られる。これを解くと

$$\frac{v_y}{c} \lesssim 0.0025 \quad (6.34)$$

となり、光速の 0.25 % よりも遅い粒子が中心物体に落ちる。

また、このときの降着円盤の温度を $T = 5.0 \times 10^{10} \text{K}$ とすると、6.3.2 節のマクスウェル分布より約 $1.23 \times 10^{-3} \%$ の粒子が中心に落ちることが確認できた。先行研究では、一般化角運動量が 0 の場合にのみ粒子が落下することが確認されていたが、本研究で古典論での粒子軌道を特殊相対論に拡張することにより中心物体に捉えられる粒子が存在し、降着率にわずかではあるが影響していることが新たに示せた。

制動放射を考慮した場合 ここでは、制動放射を取り入れた場合の粒子運動での降着率を求める。ポテンシャル $V(r) = -k/r$ の場合は落ちる粒子の速度は解析的に求められたが、制動放射を含む運動を解析的に解くのは難しいため、シミュレーションにて計算を行う。条件はポテンシャルのみの場合と同様に

$$V(r) = -\frac{k}{r} \sim -\frac{GMm}{r} \quad (6.35)$$

とし、 $k = GMm$ とした。また、シミュレーションの初期条件は $x = 200R_g$ としたいので、規格化条件より

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{mc^2}{GMm} \times 200R_g \\ &= \frac{mc^2}{GMm} \times 200 \frac{2GM}{c^2} = 400 \end{aligned} \quad (6.36)$$

と求まる。また、初期速度 $\hat{v}_{y,\text{init}} = 0.2$ としてシミュレーションを行うと、図 16 のようになる。これは降着円盤の半径 $r = 500R_g$ ($\hat{r} = 1000$) を超えるような軌道となっているため、これらの軌道は降着しないと考えることとする。よって、初期条件の速度 $\hat{v}_{y,\text{init}}$ を変化させていくと、光速の約 6 % から粒子は降着円盤の半径を超えた位置まで運動する。よって、光速の約 6 % 以上では粒子は降着しないとみなすことができる。中心力だけの場合と同様に、降着円盤の温度を $T = 5.0 \times 10^{10} \text{K}$ とすると、相対論的マクスウェル分布より約 14.4 % の粒子が中心に降着すると概算できる。よって、制動放射を取り入れた場合の粒子の降着については、無視できない割合を占めていることが確認できた。

次に降着するまでにどの程度の時間が必要とするかを見積もり、時間がかかりすぎるものは降着するとは言えないので、これらの粒子は除きたい。規格化条件 (4.24) より時間は

$$\begin{aligned} t &= \frac{GMm\hat{t}}{mc^3} \\ &= \frac{GM}{c^3}\hat{t} \end{aligned} \quad (6.37)$$

である。今回対象としているはくちょう座 X-1 の質量は太陽質量の約 15 倍程度で、 $M = 15 \times 1.99 \times 10^{30} \text{kg}$ である。これを (6.37) に代入すると、

$$\begin{aligned} t &= \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 15 \times 1.99 \times 10^{30}}{(2.99 \times 10^8)^3} \hat{t} \\ &= 7.4 \times 10^{-4} \hat{t} \end{aligned} \quad (6.38)$$

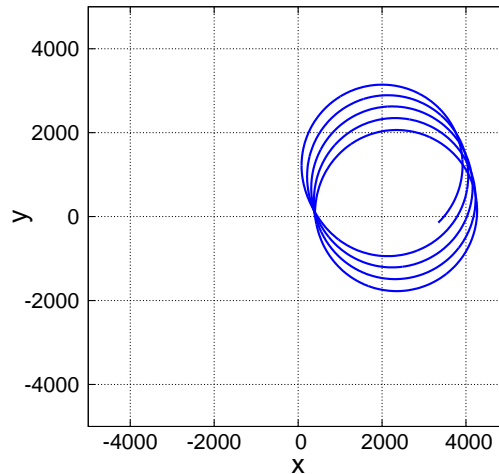


図 16: 初期速度 $\hat{v}_x = 0.0, \hat{v}_y = 0.2$ としたときの軌道。これは降着円盤の半径 $\hat{r} = 1000$ を超えるような軌道になっており、これらの軌道は降着しないと考える。

となる。これより、実時間で $t = 1$ 秒進めるためにはシミュレーションで $\hat{t} = 1.35 \times 10^3$ 進めなくてはならない。また、はくちょう座 X-1 の年齢は 100 万年とされているため [43]、実時間で 100 万年進めるためには $\hat{t} = 4.25 \times 10^{16}$ 計算する必要がある。しかし、シミュレーションで $\hat{t} = 4.25 \times 10^7$ 進めるには計算機 (Intel Core i7-4790 CPU @ 3.60GHz) で約 11 分程度かかるため、実際に $\hat{t} = 4.25 \times 10^{16}$ を計算するのは現実的ではないことがわかる。したがって、粒子をシミュレーションで長時間追うことは難しいので、 $\hat{t} = 4.25 \times 10^7$ までのシミュレーションを行うこととする。

初期速度 $\hat{v}_{x,init}, \hat{v}_{y,init}$ を変化させて粒子の降着する速度の範囲を調べたい。 $\hat{v}_{y,init} = 0.06$ 程度で粒子は降着円盤の大きさを超えてしまうので、 $\hat{v}_{x,init}$ は $0.1 \leq \hat{v}_{x,init} \leq 0.1$ 、 $\hat{v}_{y,init}$ は $0 \leq \hat{v}_{y,init} \leq 0.1$ とする。結果としては図 19 である。横軸が $\hat{v}_{x,init}$ 、縦軸が $\hat{v}_{y,init}$ であり、 $\hat{v}_{x,init}, \hat{v}_{y,init}$ とともに幅が 0.02 ずつとなっている。 $\hat{v}_{x,init} = 0.04, \hat{v}_{y,init} = 0.04$ とした場合のシミュレーション結果は図 17 のようになっており、粒子は徐々に中心に落ちていくように見えるが、 $\hat{t} = 4.25 \times 10^7$ までしかシミュレーションを行っていないので、最後まで粒子軌道を追えていない。このような軌道になる初期速度は図 19 で と表している。また、

の粒子は 18(b) であり、始めは降着円盤の外に向かって進んでいるが、すぐに重力により中心に捉えられ中心に落ちる場合、× は粒子が降着円盤の半径 ($r=500R_g$) を超えてしまう場合を表している。× の粒子は図 18(a) であり、降着円盤の半径よりも大きなところを周っており、落ちるとしても時間がかかってしまうと考えられる。

また、今回のシミュレーションでの粒子の速度は光速に比べてあまり大きくないため、古典的なマクスウェル分布を用いて降着率を求める。 、 、 × となる粒子の割合を 2 次元マクスウェル分布 (6.15) を用いて計算すると、 は約 14.3%、 は約 11.1%、という結果になった。残りの粒子は降着円盤の超えてしまうので主星の影響を受けると考えられるため、このモデルで判別することはできない。よって、 の粒子もシミュレーション時間が足りていないことを考慮すると、約 20% 以上の粒子が降着するのではないかと推測できる。

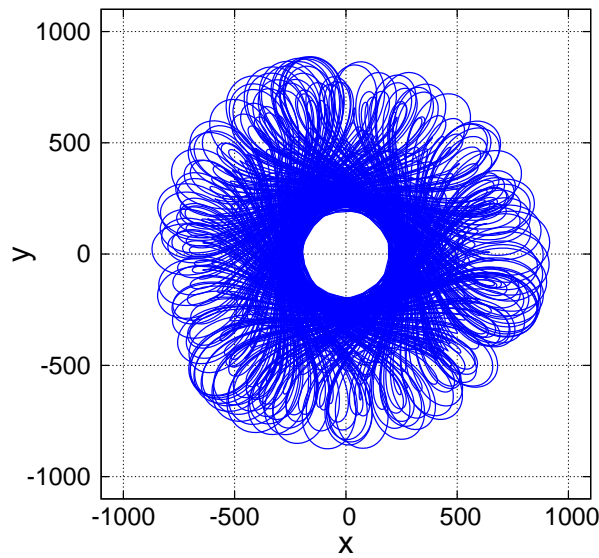
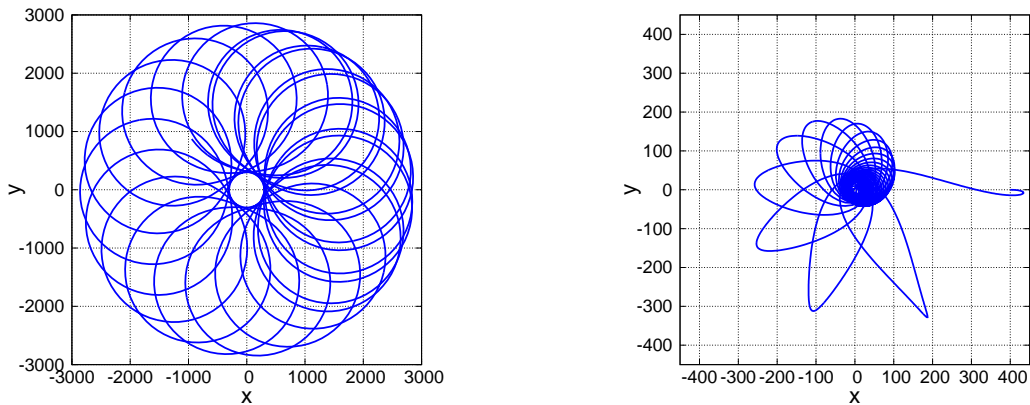


図 17: 初期速度 $\hat{v}_{x,\text{init}} = 0.4, \hat{v}_{y,\text{init}} = 0.4$ としたときの軌道。シミュレーションでは $\hat{t} = 4.25 \times 10^7$ までしか行っていないので、粒子は中心に落ちることは確認できていない。しかし、粒子は時間とともに中心に近づいていくことが確認できる。



(a) 初期速度 $\hat{v}_{x,\text{init}} = 0.1, \hat{v}_{y,\text{init}} = 0.1$ のときの軌道 (b) 初期速度 $\hat{v}_{x,\text{init}} = 0.02, \hat{v}_{y,\text{init}} = 0.0$ のときの軌道

図 18: (a) では初期速度を $\hat{v}_{x,\text{init}} = 0.1, \hat{v}_{y,\text{init}} = 0.1$ としたときの軌道であり、降着円盤の半径 $r = 1000$ を超えている軌道になっている。(b) は初期速度 $\hat{v}_{x,\text{init}} = 0.02, \hat{v}_{y,\text{init}} = 0.0$ としたときの軌道であり、これは中心に落ちていることが見て取れる。始めは降着円盤の外に向かって進んでいるが、すぐに重力により中心に捉えられていることがわかる。

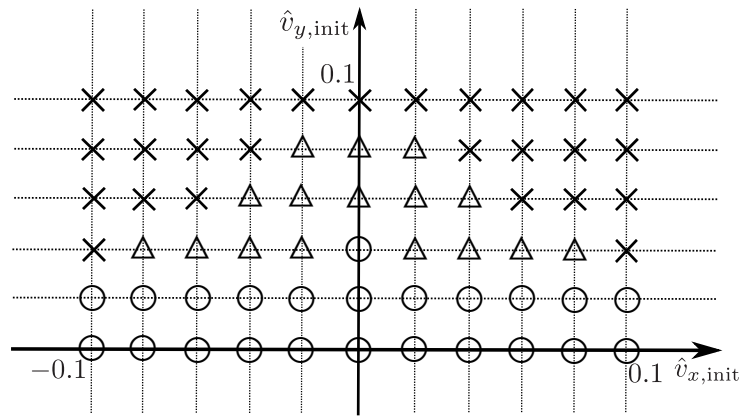


図 19: 座標 $(x, y) = (200R_g, 0)$ から様々な初期速度でシミュレーションを行った様子。×の粒子は降着円盤の半径を超えてしまう粒子である。○の粒子は $\hat{t} \leq 4.25 \times 10^7$ までは落ちずに降着円盤に留まっているものである。

7 おわりに

本研究では、降着円盤内での粒子軌道の解析および制動放射を伴う粒子運動の降着率への影響について検討解析を行った。先行研究では、ニュートン力学で重力場・電磁場での粒子軌道の解析が行われており、一般化角運動量がゼロの場合のみ中心に落下していくことが確認されている [4]。それ以外の粒子は中心に落ちずに中心物体の周りを周回するような軌道や双曲線軌道のように発散するような軌道になり、ほとんどの粒子が中心物体に捉えられることはないことが示されている。

本研究では、保存的中心力を考え、特殊相対論に基づいた粒子軌道を理論・数値シミュレーションにより解析を行った。特に中心力が重力やクーロン力などの逆二乗則の場合のポテンシャル $V(r) = -k/r$ での相対論的粒子軌道についての解析を行った。ポテンシャル $V(r) = -k/r$ での軌道の方程式は解析的に導くことができ、角運動量 ℓ が k/c よりも小さいときと大きいときで場合分けできる。 $\ell > k/c$ ときは一般化円錐曲線と呼ばれる曲線の方程式になり、古典論で導かれる楕円や双曲線などの他に原点を周回して発散するような軌道も含まれている。 $\ell < k/c$ では粒子は中心物体に捉えられ、有限の角運動量をもつ粒子でも中心に落下していくことを示した。古典論では一般化角運動量がゼロという等式で表わされる場合のみ中心に落下していくことが示されていたが、特殊相対論に拡張することにより不等式で表わされるようになり、降着円盤における降着率に影響を与えていることが確認できた。また、古典論では全エネルギーが運動エネルギーとポテンシャルの和で表わされることから、径方向の運動範囲を解析するのに用いられる実効ポテンシャルを規定することができる。特殊相対論の場合には古典論の議論を不等式に関するものと解釈することで同様の議論を行え、特殊相対論における実効ポテンシャルを新しく定義することができた。

このモデルを利用して、粒子速度の初期条件に相対論的なマクスウェル分布を与えることで降着円盤内での粒子が中心に落ちる割合の計算を行った。今回モデルとした降着円盤は白鳥座 X-1 であり、そのときの粒子の降着率は約 $1.23 \times 10^{-3} \%$ と求められた。よって、古典論では落ちることのなかった粒子でも、特殊相対論に拡張することにより中心に捉えられることがあることを新たに示せた。また、荷電粒子が加速度運動した際に電磁波を放射する現象を取り入れることで、放射減衰がないときに原点の周りを周期的に回っているような粒子もエネルギーを失い中心に落ちていくことがシミュレーションによって確認できた。光速の約 6% を越えると粒子は降着円盤の半径を超えた位置まで運動を行うため、これらの粒子は降着しないとみなすことができる。よって、マクスウェル分布を与えることで約 14.4% の粒子が中心に降着すると概算できた。しかし、シミュレーションで降着円盤の年齢である約 100 万年を計算することはできないので、降着に時間がかかりすぎるものを打ち切ることができない。また、座標 $(x, y) = (200R_g, 0)$ から様々な初期速度で $\hat{t} = 4.25 \times 10^7$ までシミュレーションを行った。2 次元のマクスウェル分布を用いて降着率を計算すると、中心に捉えられる粒子が約 14.3%、降着円盤内に留まる粒子が約 11.1% となった。残りの粒子は降着円盤の半径を超える軌道となっているので、主星の影響を受けてしまうため、このモデルでは判別することはできない。降着円盤に留まっている粒子もシミュレーション時間が足りていないことを考慮すると、約 20% 以上の粒子が降着すると考えられる。

今後の課題としては、今回は特殊相対論のもとでの粒子運動しか解析を行っていないので、一般相対論での議論をする必要があると考えている。また、一般相対論でシュバルツシルト計量における実効ポテンシャルは知られているので、今回導出した特殊相対論での実効ポテンシャルとの比較を行うのも興味深い。

A 非相対論における平面極座標での運動

A.1 保存量と実効ポテンシャル

保存的中心力の下での質量 m の質点の運動を考える。保存力はポテンシャル V で表され、そのポテンシャルは中心からの半径 r のみの関数 $V(r)$ となる。

平面極座標 (r, θ) でのラグランジアン L は運動エネルギー T を用いると

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \quad (\text{A.1})$$

となる。ここでドットは時間微分である。ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (\text{A.3})$$

である。(A.1) 式を (A.2) 式に代入すると

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

より

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad (\text{A.4})$$

よって角運動量 $mr^2\dot{\theta}$ は保存されることが確認できる。その積分は

$$mr^2\dot{\theta} = l \quad (\text{A.5})$$

と書くことができる。ここで、 l は一定の角運動量の大きさである。また、(A.3) 式より

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \frac{dV(r)}{dr} = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$(m\ddot{r}) - mr\dot{\theta}^2 = -\frac{dV(r)}{dr} \quad (\text{A.7})$$

(A.5) より

$$m\ddot{r} - mr \left(\frac{l}{mr^2} \right)^2 = -\frac{dV(r)}{dr} \quad (\text{A.8})$$

よって整理すると

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= \frac{l^2}{mr^3} - \frac{dV(r)}{dr} \\ m\ddot{r} &= -\frac{d}{dr} \left(\frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

ここで両辺に \dot{r} をかけると左辺は

$$mr\ddot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mr\dot{r}^2 \right) \quad (\text{A.10})$$

また、右辺は $\frac{d}{dt}g(r(t)) = \frac{dg}{dr} \frac{dr}{dt}$ であるので

$$-\frac{d}{dr} \left(\frac{l^2}{2mr^2} + V \right) \times \frac{dr}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{l^2}{2mr^2} + V \right) \quad (\text{A.11})$$

よって、以上より

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mr\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V \right) = 0 \quad (\text{A.12})$$

これより全エネルギー

$$E_c = \frac{1}{2}mr\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V \quad (\text{A.13})$$

は一定であり、保存されることが確認できた。

ここで

$$V'_c = \frac{l^2}{2mr^2} + V \quad (\text{A.14})$$

とおくと、動径方向の運動は実効ポテンシャル V'_c 中の 1 次元運動であるかのように解釈できる。

B 減衰力を含む相対論的な運動方程式

5.4 節で求めた相対論的な場合の放射減衰のある運動方程式は Landau と Lifshitz によって提案された方程式である。ここでは、Dirac らが提案した減衰力を含む相対論的運動方程式である LAD 方程式を導出しておく。また、LAD 方程式が電磁波の放射するエネルギーと等しくなることが示す。

B.1 電磁波のエネルギー

(5.39) では、非相対論的な場合 $\beta \ll 1$ を仮定していたので、 β が小さくないときのエネルギーを考える。(5.39) は

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\mu_0 c^3} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int d\Omega \frac{[\mathbf{n}(t) \times \{(\mathbf{n}(t) - \boldsymbol{\beta}(t)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t)\}]^2}{(1 - \mathbf{n}(t) \cdot \boldsymbol{\beta}(t))^5} \quad (\text{B.1})$$

であった。ここで積分の中の分子を計算する。ベクトル公式

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

を使って展開すると

$$[\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}]^2 = (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 + 2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - (1 - \boldsymbol{\beta}^2)(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2$$

となるので

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 c} \int \left\{ \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{2\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^4} + \frac{(1 - \boldsymbol{\beta}^2)(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \right\} d\Omega \quad (\text{B.2})$$

となる。 $\boldsymbol{\beta}$ と $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ のなす角を θ として全立体角で積分すると

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{\boldsymbol{\beta}^2(1 - \boldsymbol{\beta}^2 \sin^2 \theta)}{(1 - \boldsymbol{\beta}^2)^3} \quad (\text{B.3})$$

が得られる。これをベクトルで表すと

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1 - \boldsymbol{\beta}^2)^3} \quad (\text{B.4})$$

となる。また、ここで4元速度は $dx/d\tau = \mathbf{v}/\sqrt{1 - \boldsymbol{\beta}^2}$ であったので4元加速度は固有時で微分すると

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = \frac{\dot{\mathbf{v}}}{1 - \boldsymbol{\beta}^2} + \frac{\mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c^2(1 - \boldsymbol{\beta}^2)^2} \quad (\text{B.5})$$

となる。これより4元加速度の大きさは

$$\ddot{z}^2 = \frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{(1 - \boldsymbol{\beta}^2)^2} + \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2(1 - \boldsymbol{\beta}^2)^3} \quad (\text{B.6})$$

となる。これを用いると、先ほどのエネルギー (B.4) は

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1 - \boldsymbol{\beta}^2)^3} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \ddot{z} \quad (\text{B.7})$$

と表せる。

B.2 LAD 方程式

電磁波の放射による減衰力の作用のもとにある粒子の運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2} \quad (\text{B.8})$$

である。

ディラックは (B.8) を相対論的に拡張して、ローレンツ変換に対して共变的な方程式を求めた。(B.8) の減衰力の相対論的な一般化としては

$$f^i = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^2 u^i}{d\tau^2} \quad (\text{B.9})$$

という形が考えられる。このままでは5.4節と同様に任意の4元力に対して成り立つ $f^i u_i = 0$ という条件を満たさないので、同じように補助的な項をつける。

$$f^i = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{d^2 u^i}{d\tau^2} + \kappa u^i \right) \quad (\text{B.10})$$

とにおいて、 $f^i u_i = 0$ をみたすように上の a を決める。

$$\left(\frac{d^2 u^i}{d\tau^2} + \kappa u^i \right) u_i = 0 \quad (\text{B.11})$$

ここで $u^i u_i = c^2$ に注意して $\frac{du^i}{d\tau} u_i = 0$ であることを利用すると

$$\begin{aligned} \kappa &= -\frac{1}{c^2} \frac{d^2 u^i}{d\tau^2} u_i \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{du^i}{d\tau} u_i \right) + \frac{1}{c^2} \frac{du^i}{d\tau} \cdot \frac{du_i}{d\tau} \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{du^i}{d\tau} \cdot \frac{du_i}{d\tau} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

と決まる。したがって、減衰力は

$$f^i = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left[\frac{d^2 u^i}{d\tau^2} + \frac{1}{c^2} \frac{du^k}{d\tau} \cdot \frac{du_k}{d\tau} \cdot u^i \right] \quad (\text{B.13})$$

で与えられる。この方程式においても不合理な解が存在する。そのような解がでないようにするために、付加条件として

$$\frac{du_i}{d\tau} \Big|_{|\tau| \rightarrow 0} \rightarrow 0 \quad (\text{B.14})$$

と要求する。

C 降着円盤モデルの粘性パラメータ α

ここでは Shakura と Sunyaev が提案した降着円盤モデルにおける粘性パラメータ α について、いくつかの論文で求められて α の値を紹介する。

Fromang と Papaloizou での論文 [8] では、正味の磁気フラックスがなしで周期境界条件の場合にシミュレーションの解像度を高めると、角運動量輸送効率が小さくなる問題が取り上げられている。いくつかの解像度でシミュレーションが行われているが、いずれも場合も α の値は 10^{-3} のオーダーになっている。

Bulbus と Hawley の論文 [2, 6] では、垂直磁場の場合では $\alpha \sim 0.2$ となり、これは初期磁場の強さに依存していることが示されている。トロイダル磁場の場合では、 $\alpha \sim 0.02$ となっている。数値シミュレーションで観測された成長率は垂直磁場よりも小さいがそこまで変わらない。途中でモードが変わり、もう一度乱流が発生し角運動量が外側に輸送されることが書かれている。しかし、結果として生じる乱流磁気エネルギー密度は、垂直磁場

のシミュレーションの結果よりも桁違いに小さい。ランダム磁場の場合、磁気エネルギーは時間とともにかなり変化するが、トロイダル磁場が支配的である。そのエネルギーはポロイダル磁場の約 10 倍くらいである。乱流はかなり異方的であり、マクスウェルとレイノルズ応力を通して、角運動量を外側に輸送する。このときの α は 0.01 くらいである。

Lin と Papaloizou の論文 [7] では、観測により α の値を求めている。SS Cyg (矮新星白鳥座 SS 星) などのシステムで観測された時間スケールは $\alpha \sim 0.1$ を意味している。FU Ori (オリオン座 FU 星) で観測されたものは、 $\alpha \sim 10^{-3}$ となっている。降着円盤を持続するためには $\alpha \sim 0.2$ が必要となっている。

α の値は観測から直接的に求められるものもあり、輝度温度分布をフィッティングすることによって得られる。Mineshige と Wood は静止中の Z cha(カメレオン座 Z) について、 $\alpha_1 \sim 0.02(r/10^{10}\text{cm})^{0.4}$ と推定した。しかし、それらのモデルはディスクの光学的に厚い領域と薄い領域の連続体のスペクトルエネルギー分布を再現する上で問題がある。この α を見積もる代わりに方法は、静止中のバルマー放射線の等価幅やプロファイルの詳細なモデリングから得られた値を利用することである。ディスクが光学的に薄く観測されたディスクフラックスが局所粘性散逸から生成されるという仮定に基づいて Cheng と Lin は $\alpha \sim 0.5$ と求めた。

また、ここで観測している星についてまとめておく。SS Cyg(矮新星白鳥座 SS 星) は連星系である。一つは赤い矮星で太陽よりも冷たく、もうひとつは白い矮星である。この星は非常に近い距離にあり、6 時間半ほどの周期で回っている。第一星は $0.6M_{\odot}$ で、第二星は $0.4M_{\odot}$ である。太陽距離は約 372 光年くらいであるとされている (wikipedia)。Z Cha(カメレオン座 Z) は太陽から約 316 光年離れた矮星変星系で 2 つの星が 1.78 時間を周期に回っている。

参考文献

- [1] P. Goldreich and D. Lydenn-Bell, *SPIRAL ARMS AS SHEARED GRAVITATIONAL INSTABILITIES*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **130**, 125 (1965).
- [2] A. Balbus and F.Hawley, *A POEWRFUL LOCAL SHEAR INSTABILITY IN WEAKLY MAGNETIED DISKS*, Astrophys. J. **376**, 214 (1991).
- [3] P. Sharma *et al.*, *SHEARING BOX SIMULATIONS OF THE MRI IN A COLLISION-LESS PLASMA*, Astrophys. J. **637**, 952 (2006).
- [4] P. M. Bellan, *CONSIDERATION OF THE RELATIONSHIP BETWEEN KEPLER AND CYCLOTRON DYNAMICS LEADING TO PREDICTION OF A NONMAGNETOHDRODYNAMIC GRAVITY-DRIVEN HAMILTONIAN DYNAMO*, Phys. Plasmas **14**, 122901 (2007)
- [5] N. I. Shakura and R. A. Sunyaev, *BLACK HOLES IN BINARY SYSTEMS. OBSERVATIONAL APPEARANCE*, Astronomy and Astrophysics, 24, 337-355 (1973).
- [6] F. Hawley, F. Gammie and A. Balbus, *LOCAL THREE-DIMENSIONAL MAGNETOHDRODYNAMIC SIMULATIONS OF ACCRETION DISKS*, Astrophys. J, **440**, 742 (1995).
- [7] C. Lin and J. Papaloizou, *THEORY OF ACCRETION DISKS II: APPLICATION TO OBSERVED SYSTEMS*, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 34(1), 703-747 (1996).
- [8] S. Fromang and J. Papaloizou, *MHD SIMULATIONS OF THE MAGNETOROTATIONAL INSTABILITY IN A SHEARING BOX WITH ZERO NET FLUX-I. THE ISSUE OF CONVERGENCE* Astronomy and Astrophysics, 476(3), 1113-1122 (2007).
- [9] S. A. Kaplan, *ON CIRCULAR ORBITS IN EINSTEINIAN GRAVITATION THEORY*, Sov. Phys. JETP, 19, 951 (1949).
- [10] G. I. Taylor, *FLUID FRICTION BETWEEN ROTATING CYLINDERS*, Physical and Engineering Sciences Vol. 157, No. 892, pp. 546-564 (1936).
- [11] 瀬戸慧大, "古典物理から量子場の世界へ: 放射の反作用" (プラズマ・核融合学会誌, 2016)
- [12] 砂川重信, "相対性理論の考え方" (岩波書店, 1993).
- [13] 砂川重信, "理論電磁気学" (紀伊國屋書店, 1999).
- [14] 江沢 洋, "相対性理論" (裳華房, 2008).
- [15] 佐藤勝彦, "相対性理論 岩波基礎物理シリーズ9" (岩波書店, 1998).

- [16] L. D. Landau and E.M. Lifshitz, “ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 場の古典論”(東京図書, 2014).
- [17] L. D. Landau and E.M. Lifshitz, “ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 力学”(東京図書, 2012).
- [18] 戸田盛和, “物理学 30 講シリーズ 7 相対性理論 30 講”(朝倉書店, 2013).
- [19] H. Goldstein, 矢野忠 訳 “古典力学 (上)”(吉岡書店, 2013).
- [20] 長谷川晃 “工科系の電磁気学”(岩波書店, 1995).
- [21] 森口繁一 他 “微分積分・平面曲線 岩波 数学公式 1” (岩波書店, 2000) p.106.
- [22] 太田浩一 “マクスウェル理論の基礎” (東京大学出版,2009).
- [23] J. D. ジャクソン “電磁気学 (上)” (吉岡書店,1994).
- [24] A.O.Barut “Electrodynamics and classical theory of fields and particles” (Dover books, 1980).
- [25] Shoji Kato, Jun Fukue and Shin Mineshige “Black-Hole Accretion Disks” (京都大学出版, 2008).
- [26] 柴田一成 他 “活動する宇宙 -天体活動現象の物理- ” (裳華房, 1999).
- [27] 福江純 “輝くブラックホール降着円盤” (プレアデス出版, 2007).
- [28] 観山正見, 野本憲一, 二間瀬敏史 “天体物理学の基礎 I” (日本評論社, 2009).
- [29] 観山正見, 野本憲一, 二間瀬敏史 “天体物理学の基礎 II” (日本評論社, 2010).
- [30] 梅村雅之, 福江純, 野村英子 “輻射輸送と輻射流体力学” (日本評論社, 2016).
- [31] 福江純 “降着円盤への招待” (ブルーバックス, 1988)
- [32] L. Liboff “Kinetic Theory: Classical, Quantum, and Relativistic Descriptions, Third Edition” (Springer,2003).
- [33] R. Narayan, I. Yi, and R. Mahadevan, *EXPLAINING THE SPECTRUM OF SAGITTARIUS A* WITH A MODEL OF AN ACCRETING BLACK HOLE*, Nature, 374(6523), 623 (1995).
- [34] F. Yuan, E. Quataert and R. Narayan, *NONTHERMAL ELECTRONS IN RADIATIVELY INEFFICIENT ACCRETION FLOW MODELS OF SAGITTARIUS A*, The Astrophysical Journal, 598(1), 301 (2003).

- [35] J. Ziolkowski, *EVOLUTIONARY CONSTRAINTS ON THE MASSES OF THE COMPONENTS OF HDE 226868/CYG X-1 BINARY SYSTEM*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 358(astro-ph/0501102), 851-859 (2005).
- [36] J. A. Orosz, J. E. McClintock, J. P. Aufdenberg, R. A. Remillard, M. J. Reid, R. Narayan and L. Gou, *THE MASS OF THE BLACK HOLE IN CYGNUS X-1*, The Astrophysical Journal, 742(2), 84 (2011).
- [37] A. J. Young, A. C. Fabian, R. R. Ross and Y. Tanaka, *A COMPLETE RELATIVISTIC IONIZED ACCRETION DISK IN CYGNUS X-1*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 325(3), 1045-1052 (2001).
- [38] F. F. Chen, 内田岱二郎 訳 “プラズマ物理入門” (丸善出版, 2010).
- [39] The Magnetorotational Instability, “<https://ay201b.wordpress.com/2011/04/11/the-magnetorotational-instability/>”
- [40] 橘昌宏, “磁気回転不安定性への運動論効果についての考察” (電気通信大学卒業論文, 2013).
- [41] 森口繁一 他 “特殊函数 岩波 数学公式 3” (岩波書店, 2000).
- [42] F. Taylor, A. Wheeler 牧野伸義 訳 “一般相対性理論入門 ブラックホール探査” (ピアソン・エデュケーション, 2004).
- [43] C. L. Fryer, S. E. Woosley, D. H. Hartmann, *FORMATION RATES OF BLACK HOLE ACCRETION DISK GAMMA-RAY BURSTS*, The Astrophysical Journal, 526(1), 152 (1999).