

# 建部賢弘『研幾算法』による弓形の弧長の導出式の復元について

佐藤 賢一

## An Introduction of Katahiro Takebe's Usage of Lagrange Interpolation for a Problem of Area of Segment in *Kenki Sanpo*

Kenichi SATO

### Abstract

This paper introduces one traditional Japanese mathematical book, *Kenki Sanpo* (1683) by Katahiro Takebe (1664 - 1739). In this book Takebe solved a problem of area of segment utilizing the approximate formula for the length of arc reduced by means of Lagrange interpolation. The author points out Takebe's solution was constructed on the base of simultaneous equations which the ancient Chinese mathematician developed on the 1st century A.D.

Key Words : Katahiro Takebe, *Kenki Sanpo*, Lagrange interpolation

### はじめに

本稿は、建部賢弘『研幾算法』（1683年）に用いられている弓形の弧長を導出する計算式について、数学史的な再解釈を行うことを主題とする。

建部賢弘（1664 - 1739）は著名な和算家・関孝和（? - 1708）の門弟であるが、彼らをはじめとする江戸時代の数学者たちにとって、円周率の算出やそれに関連する曲線図形の数学的探究は重要な課題であった。従来、建部が『研幾算法』で採用した弓形の弧長の近似式は不完全なもので、関孝和がその後に『括要算法』（1712年）においてより一層完成した近似式を提示したという評価が為されていた。

しかし、本稿では『研幾算法』による近似式の導出過程やアルゴリズムを復元することによって、それがラグランジュ補間（Lagrange Interpolation）に他ならないことを指摘し、従前の評価が必ずしも妥当ではなかったことを示す。また、建部以外の和算家も類題に対して同様の解法を構成していたことを紹介し、この解法が建部だけではなく当時の和算家に一般的であった可能性を指摘する。<sup>(1)</sup>

### 1 建部賢弘と『研幾算法』について

本章では、建部賢弘編『研幾算法』の概要について紹介をする。

編著者の建部賢弘は幕臣の和算家で、数学史上では関孝和の門人として知られる。幕臣となる前の建部は甲府徳川家に召し抱えられており、そこで同僚たる関孝和に入門している。

本稿で主題とする1683年刊行の『研幾算法』は、建部にとっては最初の刊行物となる。他に、関の『発微算法』を解説した『発微算法演段諺解』（1685年）、中国の算術書である『算学啓蒙』（1299年）の解説書である『算学啓蒙諺解大成』（1690年）を刊行し、写本としては『綴術算経』（1722年）等々を残している。

幕臣としての建部の後半生は、特に8代将軍徳川吉宗からの信任を厚くし、天文学・地理学に関する数々の諮問事業に応えている。<sup>(2)</sup>

『研幾算法』の刊行経緯と内容については、若干の歴史的背景の説明が必要となる。

17世紀の和算界においては、関孝和・建部賢弘以外にも多数の和算家が続々と算術書を刊行していた。その背景には、今日「遺題継承」と総称されている数学の難問を著者同士で解き合う流行のあったことが指摘される。この「遺題継承」とは、1641年に刊行された吉田光由

(1598 - 1672)『塵劫記』に端を発するもので、吉田が本文とは独立した難問(遺題)12問を掲載したことから、これに解答を与える和算書が現れた。<sup>(3)</sup> 以後、和算書に遺題を掲載することが習慣化し、続々と和算書が刊行された。吉田以後、関孝和が『発微算法』(1674年)を刊行するまでの約30年の間に、およそ20点もの和算書が相次いで刊行されている。<sup>(4)</sup> この遺題が遺題を生む状況を指して、「遺題継承」という名称を当てている。

遺題継承の流行は、和算家たちに難問を解くことに価値を見出す競争的雰囲気と、難問追究の機運を与えることとなった。中には「問題のための問題」に墮してしまいう傾向もあったが、17世紀の和算家たちが難問と見なして新しい解法の探索に邁進した分野もあった。現在で言うところの代数方程式に帰着する問題群と、「円理」と総称される円周率や弓形の弧長計算・面積計算に関する分野の問題群であった。

前者の問題群に対しては、京都・大阪で活動した和算家・沢口一之(生没年不詳)とその周辺の和算家数名が中国から伝来した天元術を再発見することで解答可能となった。<sup>(5)</sup> 天元術とは、古代中国の計算道具である算木(算籌)によって $n$ 次代数方程式に相当する開方式を構成する技法のことである。沢口は自著『古今算法記』(1671年)で天元術を用いて幾つかの遺題に答えている。さらに沢口自らも15問の遺題を設定しているが、これに答えを与えた和算書が、関孝和の『発微算法』であった。

後者の問題群(円理)についても、沢口は検討を試みているが明確な言及は避けている。<sup>(6)</sup> この問題群に統一的方法論を示し、実際に解答を構成したのが従来の評価では関孝和の『括要算法』ということになっているが、本稿では『研幾算法』や沢口と同世代の京阪の和算家に、関とは異なる前段階的方法論があったことを指摘する。

このように遺題継承に参加する和算書が続出する中、建部の師である関は『発微算法』を刊行したが、この書に対して佐治一平『算学入門』(1680年)という和算書が批判を公にした。ところがこの批判は全般的を外したもので、いわば誹謗中傷に等しいものであった。これに対して、関と建部は『算学入門』に直接反批判を向けるのではなく、『研幾算法』を刊行することでその批判の不当・不備を訴えた。すなわち、『算学入門』は本文で古郡彦左衛門『数学乗除往来』(1674年)という和算書の遺題49問に解答を与えているが、『研幾算法』はやはり同じく『数学乗除往来』への解答を主題としている。『算学入門』の解答はかなり誤答を含んでおり、『研幾算法』はそれらの正しい解答を与えているという趣旨を序文に明記している。<sup>(7)</sup>

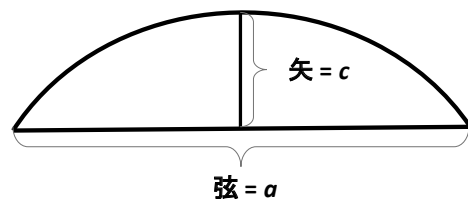
これが『研幾算法』が刊行された経緯である。佐治一平という批判者が現れなければ、建部の本書は世に出なかったということになる。本書は『数学乗除往来』の遺

題、全49問への解答のみで成り立っており、もしこれが刊行されなかったとしたら、1680年代という関と建部の活動時期では初期の頃に当たる数学研究の成果が一切明らかにされなかったことになる。その意味で『研幾算法』の存在は江戸時代日本の数学史上、重要な位置付けにあると言ってよい。<sup>(8)</sup>

この『研幾算法』第1問の内容が、本稿の主題となる弓形の面積を導出する問題、結果として弓形の弧長を導出する公式を使う問題となっている。次章以降、この問題と弧長を求める公式の紹介を行う。

## 2 『研幾算法』第1問の原文と翻訳

本章では『研幾算法』第1問の訳文を紹介し、その解法にどのような数式が用いられているのかを現代的な数式、記号法を用いて検討する。第1問の原文は注として示す。<sup>(9)</sup> ここで題材とされているのは[図1]のような弓形である。以下、弓形の矢の長さを $c$ 、弦の長さを $a$ 、弓形の面積を $S$ で表記する。



[図1] 弓形の図

### [訳文]

今、弓形がある。その矢の長さは $c$ 、弦の長さは $a$ である。面積 $S$ は幾らになるか。(円周率は $355/113$ を用いよ。)答は以下のようにして $S$ を得る。

解法。未知数を立てて面積 $S$ とする。 $S$ に $c$ を乗じて16倍した数を甲とおく。 $c$ を自乗して4倍し、 $a$ の自乗を加えた数を乙とおく。また、 $c$ を自乗し8倍した数を乙から減じて、その差に $a$ を乗じて甲を加える。これを自乗した数を丙とおく。 $c$ の8乗に乙を乗じて183275520倍した数と、乙の5乗を81倍した2つの数を加えて、丁とおく。 $c$ の10乗に5733613568倍した数と、 $c$ の6乗に乙の自乗を乗じて261217536倍した数と、 $c$ の4乗に乙の3乗を乗じて96337664倍した数と、 $c$ の自乗に乙の4乗を乗じて73573068倍した数の4つを加えて、そこから丁を減じた差を方程式の左辺とする。 $c$ の4乗[正しくは自乗]に乙を乗じ、また丙を乗じて73549440倍したものを方程式の右辺として左辺と相殺して $S$ に関する2次の方程式を得る。この方程式を解けば $S$ を得て、題意に合致する。

この解法の流れは、次のように表される。

$$\text{甲} = 16 c S$$

$$\text{乙} = 4 c^2 + a^2$$

$$\text{丙} = \{(乙 - 8 c^2) a + \text{甲}\}^2$$

$$\text{丁} = 183275520 c^8 \text{乙} + 81 \text{乙}^5$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 5733613568 c^{10} + 261217536 c^6 \text{乙}^2 \\ &+ 96337664 c^4 \text{乙}^3 + 73573068 c^2 \text{乙}^4 - \text{丁} \end{aligned}$$

$$\text{右辺} = 73549440 c^2 \text{乙} \text{丙}$$

これより  $S$  の2次方程式として

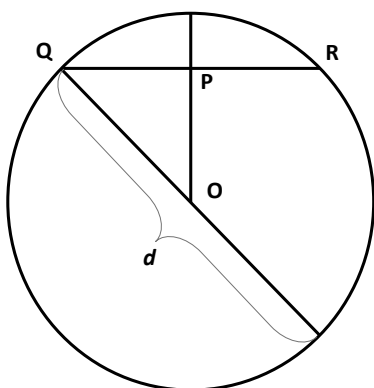
$$\begin{aligned} \text{右辺} - \text{左辺} &= -34180225024 c^{10} - 20658110208 c^8 a^2 \\ &- 9657023232 c^6 a^4 - 1567691552 c^4 a^6 \\ &- 22008 c^2 a^8 + 81 a^{10} \\ &- 2353582080 c^3 a (16 c^4 - a^4) S \\ &+ 18828656640 c^4 (4 c^2 + a^2) S^2 = 0 \quad \dots\dots(A) \end{aligned}$$

を得る。

この方程式 (A) を『研幾算法』の原文では全ての項を展開して書き下した方程式の形としては明示しておらず、 $S$  の2次方程式が得られることのみを述べる。さらにこの解答文では、なぜ  $S$  の方程式がこのように導かれたかという数学的な説明は為されていない。

この方程式を導く過程を再現するべく、弓形の面積を求めるために『研幾算法』の当時一般的に用いられていた諸公式を使って、遡及的な式変形を試みよう。

[図2]のように円の中心(O)、弦の中心(P)、弓形の端点(Q, R)を設定し、問題の弓形を一部として含む全円の直径を  $d$ 、弓形の弧長を  $l$  とすると、直角三角形OPQに三平方の定理を用いて  $4 c^2 + a^2 = 4 c d$  を得る。



[図2] 弧QRを元の弓形の弧として含む全円

また、弓形の面積  $S$  を扇形OQRから三角形OQRを減じて求め  $S = 1/4 l d - 1/2 (1/2 d - c) a$  となる。これらから甲と乙を経て  $\text{丙} = 16 c^2 d^2 l^2$  が得られる。

あらためてこの  $S$  と丙を一連の式に代入して方程式 (A) を書き直すと、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 5733613568 c^{10} - 733102080 c^9 d \\ &+ 4179480576 c^8 d^2 + 6165610496 c^7 d^3 \\ &+ 18834705408 c^6 d^4 - 82944 c^5 d^5 \end{aligned}$$

$$\text{右辺} = 4707164160 c^5 d^3 l^2$$

これより  $\text{左辺} = \text{右辺}$  として整理をすると、

$$\begin{aligned} &599232 c^5 - 715920 c^4 d + 4081524 c^3 d^2 \\ &+ 6021104 c^2 d^3 + 18393267 c d^4 - 81 d^5 \\ &= 4596840 d^3 l^2 \quad \dots\dots(B) \end{aligned}$$

が得られる。すなわち、 $S$  の方程式 (A) は  $l$  についての関係式 (B) を用いて導出されたことになる。

関係式 (B) から方程式 (A) を導く方法は、関孝和が『発微算法』で既に用いていた終結式がここでも用いられている。この点については、『発微算法』と『研幾算法』の間に解法の一貫性があったことが見てとれる。すなわち  $M + N l = 0, l^2 = f(c, d)$  の連立方程式 ( $M, N$  は  $l$  以外の文字を含む多項式) から  $l$  を消去するために用いる終結式として  $M^2 - N^2 f = 0$  を構成する。方程式 (A) はこの形の終結式から導かれる。

既に指摘したとおり、式 (B) は『研幾算法』には明示されていない。後世の和算家による『研幾算法』の解説書(著者不明)を参照すると、この式の利用を示唆する情報が記されている。簡単にその内容を紹介しておこう。

### 3 『研幾算法演段諺解』による補足

現代の我々は前述した式 (B) の存在を理解できるが、建部が実際にそれを用いていたかどうか、そして後世の和算家たちが『研幾算法』の式 (B) を理解できていたのかどうかについてを判断するには『研幾算法』とは別の情報源が求められる。ここで紹介するのは後世の解説書『研幾算法演段諺解』(著者、成立年不詳、写本)<sup>(10)</sup> である。この解説書によると、たしかに式 (B) が第1問の解答に使われていたことが明記されている。第1問について、次のような注釈が記されている。(訳文を示す。)

[訳文] (前述した記号  $l, c, d$  を用いる)  
第1問

### lの導出式

第1項 (lの定数項)  $+c^5$  の5599232倍

第2項 (lの定数項)  $-c^4d$  の715920倍

第3項 (lの定数項)  $+c^3d^2$  の4081524倍

第4項 (lの定数項)  $+c^2d^3$  の6021104倍

第5項 (lの定数項)  $+cd^4$  の18393267倍

第6項 (lの定数項)  $-d^5$  の81倍

第7項 ( $l^2$ 項の係数)  $-d^3$  の4596840倍

第1項と第3項と第4項と第5項を加え、そこから第2項と第6項を減じた式を[lに関する]定数項とし、第7項を $l^2$ に関する項とする。[ $ml^2 = n$ の形の方程式になるので]これを解くとlが得られる。『研幾算法』の本文の解答はこれに基づいている。

『研幾算法』本文の「右辺」では $c^4$ と記しているが $c^2$ が正しい。<sup>(11)</sup>

この記載が関係式(B)に相当していることは、挙げられている数係数の一致からも容易に確認できる。すなわち、後世の和算家たちの間でも『研幾算法』は $l^2$ の近似式である関係式(B)を既知として解答を構成していたことが理解されていたことになる。本稿でも、式(B)を建部が利用していたという前提に基づいて以下の議論を進める。

## 4 弧長の計算式の精度と導出法について

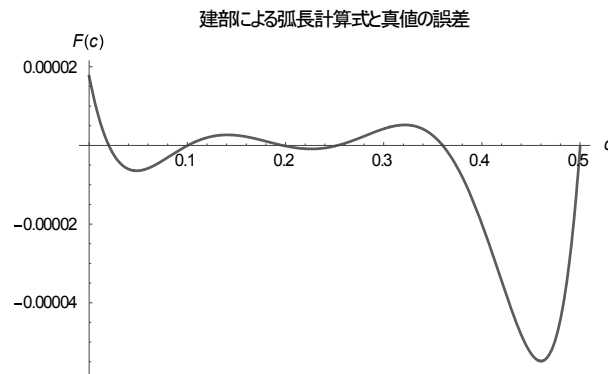
方程式(A)の構成が判明した後の課題は、関係式(B)の近似式としての精度の評価となる。以下、簡単のために $d = 1$ として $l^2 = f(c) = a_5c^5 + a_4c^4 + a_3c^3 + a_2c^2 + a_1c + a_0$ と表記する。

従来の評価では、この $f(c)$ には定数項 $a_0$ があるために $c = 0$ のときであっても $l = 0$ とならないことから不正確という言葉が成されていた。<sup>(12)</sup>しかし、この評価は近似式としての精度を正確に表現したものではない。この点を更に検討してみよう。

$f(c)$ の精度を評価するために、逆三角関数を用いて弧長の真値を与えると、 $l = \text{Arccos}(1 - 2c)$ となるので、 $f(c)$ の誤差 $F(c)$ は

$$F(c) = \{\text{Arccos}(1 - 2c)\}^2 - f(c)$$

として表現される。 $0 \leq c \leq 0.5$ の範囲で $F(c)$ のグラフを描くと[図3]のようになる。



[図3]  $F(c) = \{\text{Arccos}(1 - 2c)\}^2 - f(c)$

この[図3]を見ると、誤差 $F(c)$ は $10^{-5}$ のオーダーに押さえられており、近似式としては十分に実用的であったことが分かる。但し、この評価はあくまでも現代的な数学の知識と電子計算機の操作によって得られた知見で、17世紀の和算家たちがこの近似式の精度を何らかの形で知っていたわけではないことには注意が必要である。<sup>(13)</sup>

次に検討すべき点は、関係式(B)を建部はどのような過程を経て導いたかである。[図3]から判明することは、 $F(c) = 0$ となる正の実解が $c = 1/50, 1/10, 1/5, 1/4, 9/25, 1/2$ となることである。これらは、[図2]の直角三角形OPQの辺の比が整数値になるなどして、計算が容易にできる場合となっている。すなわち、

$$c = \frac{1}{50} \quad \text{PQ : OP : OQ} = 7 : 24 : 25$$

$$c = \frac{1}{10} \quad \text{PQ : OP : OQ} = 3 : 4 : 5$$

$$c = \frac{1}{5} \quad \text{PQ : OP : OQ} = 4 : 3 : 5$$

$$c = \frac{1}{4} \quad \text{PQ : OP : OQ} = \sqrt{3} : 1 : 2$$

$$c = \frac{9}{25} \quad \text{PQ : OP : OQ} = 24 : 7 : 25$$

$$c = \frac{1}{2} \quad (\text{半円の場合})$$

である。

このような精度評価が得られたことで、あらためて式 $f(c)$ の構成を確認してみよう。 $f(c)$ は $c$ の5次式となっているが、上の6つの $c$ の値の弧長を元にして作られていることが予想される。それぞれの $c$ の値を代入したときの $f(c)$ 、すなわち弓形の弧長の自乗は次のようになる。

$$f\left(\frac{1}{50}\right) = \frac{200860100457}{2493945312500}$$

$$f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{2974254163}{7182562500}$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{686235249}{798062500}$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{126025}{114921} = \frac{355^2}{9 \cdot 113^2}$$

$$f\left(\frac{9}{25}\right) = \frac{4130907926451}{2493945312500}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{126025}{51076} = \frac{355^2}{4 \cdot 113^2}$$

これらの数値を見ると、 $f(1/4)$ と $f(1/2)$ 以外は、手計算（そろばんによる計算）を前提とした和算家たちの状況を考えると驚異的な数値である。（ちなみに $f(1/10)$ の分子は10桁の数だが、これは素数である。）それぞれの値の導出法については今後の課題となるが、これらの値を建部は既知としていたとして、関係式 $f(c)$ がどのような方法で構成されたのかを検討しよう。

$f(c)$ の形式を見ると、 $(c_i, f(c_i))$ のデータ6個から5次の近似多項式を導いていることが分かる。このことから、次のようなラグランジュの補間公式を導くための連立方程式(C)を構成すると、関係式 $f(c)$ の係数 $\{a_0, \dots, a_5\}$ が解として得られることが確認される。

連立方程式 (C) とその解

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{50} & \left(\frac{1}{50}\right)^2 & \left(\frac{1}{50}\right)^3 & \left(\frac{1}{50}\right)^4 & \left(\frac{1}{50}\right)^5 \\ 1 & \frac{1}{10} & \left(\frac{1}{10}\right)^2 & \left(\frac{1}{10}\right)^3 & \left(\frac{1}{10}\right)^4 & \left(\frac{1}{10}\right)^5 \\ 1 & \frac{1}{5} & \left(\frac{1}{5}\right)^2 & \left(\frac{1}{5}\right)^3 & \left(\frac{1}{5}\right)^4 & \left(\frac{1}{5}\right)^5 \\ 1 & \frac{1}{4} & \left(\frac{1}{4}\right)^2 & \left(\frac{1}{4}\right)^3 & \left(\frac{1}{4}\right)^4 & \left(\frac{1}{4}\right)^5 \\ 1 & \frac{9}{25} & \left(\frac{9}{25}\right)^2 & \left(\frac{9}{25}\right)^3 & \left(\frac{9}{25}\right)^4 & \left(\frac{9}{25}\right)^5 \\ 1 & \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{2}\right)^3 & \left(\frac{1}{2}\right)^4 & \left(\frac{1}{2}\right)^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\left(\frac{1}{50}\right) \\ f\left(\frac{1}{10}\right) \\ f\left(\frac{1}{5}\right) \\ f\left(\frac{1}{4}\right) \\ f\left(\frac{9}{25}\right) \\ f\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$a_0 = -\frac{9}{510760}, \quad a_1 = \frac{6131089}{1532280}, \quad a_2 = \frac{752638}{574605},$$

$$a_3 = \frac{340127}{383070}, \quad a_4 = -\frac{5966}{38307}, \quad a_5 = \frac{699904}{574605}$$

すなわち、建部が用いた関係式 $f(c)$ はラグランジュの補間公式そのものであったことになる。（これら $a_i$ の分母をそれぞれ4596840倍すると、関係式(B)の左辺の係数となる。）

ここでは唐突に6元1次連立方程式(C)を構成し、拡大係数行列の行や列を加減する基本操作（いわゆる掃き出し法）を前提として $a_i$ を導いたが、建部や関が実際にこのような連立方程式の解法を知っていたかどうかは十

分に数学史上の問題となる。

結論を述べると、この技法は既に古代中国で確立しており『九章算術』（1世紀頃）では「方程」として上記の如き連立方程式を掃き出し法で解くことが実践されていた。これ以後の中国数学では「方程」あるいは「方程正負」としてこの技法が継承され、和算家も参照した朱世傑『算学啓蒙』（1299年）、程大位『算法統宗』（1592年）といった中国数学書にもそれら方程の例題、用例は数多

く収録されていた。

技法としての「方程正負之術」は、このように古くから知られていたものであったが、建部の『研幾算法』では、弧長を求める関係式を得るために方程正負之術が用いられていたことになる。この用途に特化した方程正負は果たして、建部（あるいはその師である関孝和）の独創であったのだろうか。これはラグランジュの補間公式に相当する近似式の初出を確定する上でも重要な問題となる。

次章では、ラグランジュの補間公式に相当する近似式を建部と同時代の和算家・田中由真（1651 - 1719）もまた弓形の問題に対して利用していたことを紹介する。さらに、田中と建部の解法の相違も明らかにする。

### 5 田中由真『算学紛解』の導出法との比較

関孝和と同時代人で、京都を中心として活動していた和算家に田中由真がいた。<sup>(14)</sup> 彼は沢口一之にも近い橋本吉隆に学んだと言われている。主著に『算学紛解』全8巻<sup>(15)</sup>がある。興味深いことに、この『算学紛解』の内容はかなりの部分が関孝和の数学的業績と類似している。記号法や用語法は両者の間で異なっているが、扱っているテーマや解法には共通したものが認められる。<sup>(16)</sup> さらに近年、田中由真による書き込みと署名が残る『発微算法』が確認された<sup>(17)</sup>ことから、田中が関の数学を認知していた可能性は十分に高い。しかし、現在のところ、両者の間に直接的な交流があったことを示す明確な史料は残されていない。

本稿で検討をする『算学紛解』の内容は、弓形の面積を求める問題に対する解法である。本書の巻7「円率俗解三」という項目にその解法が記されている。以下、該当箇所を現代的な数式を用いながら意識し、田中による解法を説明する。

田中の用語について付記すると、長さの単位「寸」「尺」の他に、面積の単位として「歩」が用いられている。これは1平方寸に相当する。解法で使用されている円周率の値は3.16である。なお、『算学紛解』の原文は注に掲載する。

『算学紛解』巻7「円率俗解三」より<sup>(18)</sup>

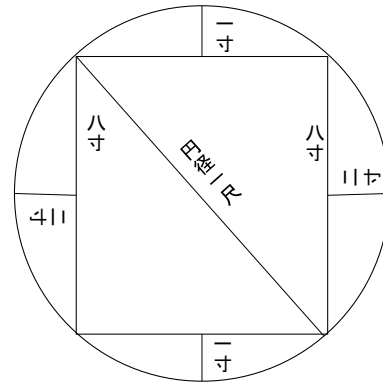
- [1] 今、弓形がある。矢 $[c_1]$ は1寸、弦 $[a_1]$ は6寸である。面積 $[S_1]$ を求めよ。 答  $S_1 = 4.22$ 歩
- 2  $c_2 = 2$ 寸、 $a_2 = 8$ 寸である。 $S_2$ を求めよ。 答  $S_2 = 11.28$ 歩
- 3  $c_3 = 3$ 寸6分、 $a_3 = 9$ [正しくは9.6]寸である。 $S_3$ を求めよ。 答  $S_3 = 25.6032$ 歩
- 4  $c_4 = 2$ 分、 $a_4 = 2$ 寸八分である。 $S_4$ を求めよ。 答  $S_4 = 0.4568$ 歩

5  $c_5 = 5$ 寸、 $a_5 = 1$ 尺である。 $S_5$ を求めよ。

答  $S_5 = 39.5$ 歩

解法。 $S_i = (a_i^2 + 25 c_i^2 + 25 a_i c_i) / 50$  とすると、それぞれが右の答に合致する。

第1と第2の弓形の図



$S_1 + S_2 = 31$ 歩を得る。円の中の長方形の面積48歩を加えると79歩となる。これが円の総面積 $[A = 79]$ となる。

第3と第4の弓形の図[図は省略]

$S_3 + S_4 = 52.12$ 歩を得る。円の中の長方形の面積26.88歩を加えると79歩となる。これも $A$ となる。

第5の弓形の図[図は省略]

第5の弓形は半円である。 $2 S_5 = 79$ 歩を得る。これも $A$ となる。

解法の説明

弓形の面積を求めるには、 $c$ と $a$ に方程正負の術を用いる。

$a_1^2 + a_2^2 = 100$ 、 $a_1 c_1 + a_2 c_2 = 22$ 、 $c_1^2 + c_2^2 = 5$ 、 $(A - 48) / 2 = 15.5$ 歩。これら4数を配列して連立方程式の第I式の数係数とする。

$a_3^2 + a_4^2 = 100$ 、 $a_3 c_3 + a_4 c_4 = 35.12$ 、 $c_3^2 + c_4^2 = 13$ 、 $(A - 26.88) / 2 = 26.06$ 歩。これら4数を配列して連立方程式の第II式の数係数とする。

$a_5^2 = 100$ 、 $a_5 c_5 = 50$ 、 $c_5^2 = 25$ 。  $A / 2 = 39.5$ 歩。これら4数を配列して連立方程式の第III式の数係数とする。

これらの配列に基づいて方程正負の術を行う。その係数配列は以下ようになる。

第1配列

|     | $a^2$ の和 | $a c$ の和 | $c^2$ の和 | $S$ の和 |
|-----|----------|----------|----------|--------|
| I   | 100      | 22       | 5        | 15.5   |
| II  | 100      | 35.12    | 13       | 26.06  |
| III | 100      | 50       | 25       | 39.5   |

このような配列として算木を置き、 $3 \times 3$ の連立方程式となる。これを通常の解法に従い、I行の $[a^2$ の和]係数[100]をII行の係数それぞれに乘じ、II行の $[a^2$ の

和の]係数[100]をI行の係数それぞれに乘じ、このようにして新しく得たI行とII行を加える[または減じる]。

これとは別に、I行の[ $a^2$ の和の]係数[100]をIII行の係数それぞれに乘じ、III行の[ $a^2$ の和の]係数[100]をI行の係数それぞれに乘じ、このようにして新しく得たI行とIII行を加える[または減じる]。

このようにして得た2式を $2 \times 2$ の連立方程式とする。その係数配列の図は次のようになる。(もっとも、この場合は $a^2$ の和の係数が共に100なので係数をそれぞれ乗じる必要はなく、直ちに(II行)-(I行)、(III行)-(I行)と減じればよい。)

第2配列

|    | $a^2$ の和 | $ac$ の和 | $c^2$ の和 | Sの和   |
|----|----------|---------|----------|-------|
| IV | [空白]     | 13.12   | 8        | 10.56 |
| V  | [空白]     | 28      | 20       | 24    |

IV行[の $ac$ の和の係数13.12]をV行の係数それぞれに乘じ、V行[の $ac$ の和の係数28]をIV行の係数それぞれに乘じ、新しく得たIV行とV行を加減すれば、[ $ac$ の和の係数は0となり] $c^2$ の和の係数として38.4歩、Sの和として19.2歩を得る。19.2÷38.4を計算すると、 $c^2$ の1箇につき、弓形の面積Sは0.5に相当する。これが即ち、「 $c^2$ の和」の数係数となる。

[中略:以下、同様にして「 $a^2$ の和」の数係数として0.02、「 $ac$ の和」の数係数として0.5を導く]

それぞれ求めた数係数から、解法で述べた式 $S_i$ を得る。弧長[l]を求めるには、

$$l = \{a(d - 2c) + 4S\} / d \text{ とする。}$$

右の説明は、自分が思い付いたことをわずかに記しただけのものである。この他にも $d$ 、 $c$ 、 $a$ として端数のない値を設定して方程式の式数を増やし、累乗を重ねて連立方程式を組めば、より詳細な解法が得られる。

今、 $c_6 = 0.36$ 、 $a_6 = 3.52$ 、 $c_7 = 3.24$ 、 $a_7 = 9.36$ [ $a_7$ は正しくは9.28か]の数を対にして、前の連立方程式に追加して組み込むと次のような数係数の配列になる。

連立方程式(D)

$$\begin{pmatrix} S_1 + S_2 \\ S_3 + S_4 \\ S_5 \\ S_6 + S_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^3 + c_2^3 & a_1 c_1^2 + a_2 c_2^2 & a_1^2 c_1 + a_2^2 c_2 & a_1^3 + a_2^3 \\ c_3^3 + c_4^3 & a_3 c_3^2 + a_4 c_4^2 & a_3^2 c_3 + a_4^2 c_4 & a_3^3 + a_4^3 \\ c_7^3 & a_7 c_7^2 & a_7^2 c_7 & a_7^3 \\ c_5^3 + c_6^3 & a_5 c_5^2 + a_6 c_6^2 & a_5^2 c_5 + a_6^2 c_6 & a_5^3 + a_6^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3 \\ p_2 \\ p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

この連立方程式(D)を解くことによって、数係数 $\{p_3, p_2, p_1, p_0\}$ が得られる。

一連の解法の説明に加えて、田中は $(a_i, c_i)$ のデータの組の個数を増やして $S_i$ の関係式の次数を高めれば(すなわち、 $p_i$ の個数を多くすると)近似式の精度が高まる

| $c^3$ の和  | $a c^2$ の和 | $a^2 c$ の和 | $a^3$ の和  | Sの和     |
|-----------|------------|------------|-----------|---------|
| 9         | 38         | 164        | 728       | 15.5    |
| 46.664    | 124.528    | 333.344    | 906.688   | 26.06   |
| 34.044992 | 98617984   | 287.820032 | 863640064 | 23.0264 |
| 125       | 2500       | 500        | 1000      | 392     |

この連立方程式を解き、4つの項の数係数を得て面積を求める式とすることができる。数式が繁雑になるため、これを省略する。関心のある人はやってみるとよい。その他にも、 $c_8 = 2.312$ 、 $a_8 = 8.432$ 、 $c_9 = 0.784$ 、 $a_9 = 5.376$ の組を追加し、4次の式を得て求める手段も可能である。

ここで参照した部分は和算家の叙述としては珍しく、アルゴリズムの説明や数式の意味、計算式の精度の予想などについて詳しく語っているので、このように長い文面の意識となってしまった。途中の計算値に若干の誤写、誤記の類が紛れ込んでいるが、田中由真による推論の理解に支障は無い。

田中は弓形の面積Sを求める問題に対して、建部の『研幾算法』と同様、Sの近似式の係数を導くために連立方程式を設定し、掃き出し法でそれを数値解として求めている。このことは明瞭であろう。解法の構成は両者でほぼ一致している。これもまたラグランジュの補間公式を求める操作に他ならない。この掃き出し法のことを、田中が明確に「方程正負之法」と言及していることも重要である。関・建部の同時代人がこの解法を特化した弓形の問題に適用していたことの証言となる。

この田中の解法を現代的な行列を用いて表現すると、次のようになる。(上記の $c_7$ 、 $a_7$ まで組み込んだ設定についてまとめる。)

$S_i = p_3 c_i^3 + p_2 a_i c_i^2 + p_1 a_i^2 c_i + p_0 a_i^3$ として、数係数 $\{p_3, p_2, p_1, p_0\}$ を決定するために次の連立方程式(D)を構成する。

ことも指摘している。但し、この指摘については建部の場合と同様、田中に近似式の精度を検証するための何らかの手段があったかどうかは疑問の余地がある。この指摘は、多分に予想・印象の域を出ない証言であったとみなすべきであろう。

## 6 『研幾算法』と『算学紛解』の解法の相違点と残された課題

『算学紛解』と『研幾算法』に同等の解法(ラグランジュの補間公式による近似)が用いられていたことは注目に値する。江戸と京都の間で、ほぼ同時代に同一問題群に対して同じ技法が使われていたことになる。先にも述べたとおり、田中と関・建部の間に直接の交流があったか否かは判然としない。両者が独立して同時発見に至ったのか、あるいは未知の共通の情報源があったのか、この解法が和算史に出現した経緯については更なる調査が必要である。

両書の解法の枠組みがほぼ同一であるという事実がある一方で、それらの相違点も存在する。次のようにまとめられる。

『算学紛解』では面積 $S$ を求める近似多項式をラグランジュの補間公式として直接的に構成していた。一方、『研幾算法』では $S$ ではなく、弓形の弧長の自乗 $l^2$ を求める近似多項式をラグランジュの補間公式として構成した後、これと終結式を用いて $S$ の2次方程式を構成した。そのために $l$ ではなく、 $l^2$ の近似式が必要となっている。前章で『算学紛解』の訳出した部分を注意深く見ると、弧長 $l$ に関しては $l = \{a(d-2c) + 4S\}/d$ によって求められることも言及されている。田中の想定する方法では、 $S$ を求めた後に $l$ が決定される。すなわち、 $S$ と $l$ の計算順序が『算学紛解』と『研幾算法』では逆になっている。

さて、ここまで『研幾算法』と『算学紛解』に記されたラグランジュの補間公式の導出に関する紹介と分析を行ったが、残された課題も幾つかある。

既に述べた事柄としては、和算家たちが如何にしてこの方程正負之術を援用した解法に辿り着いたのかという歴史的経緯の問題である。この点については、『研幾算法』も『算学紛解』も関連情報を記してはいないので、更なる史料や和算家の証言記録の探索が求められる。

『研幾算法』の解法に関して残された課題は、次のようなものである。第4章で弧長 $l^2$ の近似式として $f(c)$ 、さらに誤差評価の式として $F(c)$ を設定した。ここで $F(c) = 0$ となる $c$ の値を $f(c)$ に代入したときに得られる数値の内、 $f(1/50)$ 、 $f(1/10)$ 、 $f(1/5)$ 、 $f(9/25)$ は分母・分子の桁数が非常に大きい数値となっていた。これらはどのような計算によって求められたのか。この点は未解決の課題として残されている。

関孝和の他の著作、例えば『提要算法』第4巻(貞巻)には、弓形の弧長を求める方法が紹介されており、その図形的操作には環矩術の名称が与えられている。具体的には、与えられた弓形の弧を順に2等分、4等分、……、 $2^n$ 等分し、それぞれの分割された弧に弦を張って $2^n$ 本の弦の和を計算して数列を作り、 $n$ を大きくすることで弧

長を近似する操作が述べられている。<sup>(19)</sup>

$c = 1/10$ を例として、この環矩術によって得られた弧長の自乗の近似値 $l_n^2$ は、円周率 $\pi$ を $355/113$ に置き換えて補正したとき( $l_n^2$ に $k = (355/113/\pi)^2$ を乗じる)

$$k \cdot l_{11}^2 = 0.4140937337151272,$$

$$k \cdot l_{12}^2 = 0.4140937439357502,$$

$$f(1/10) = 0.414093739246961$$

となる。これより

$$k \cdot l_{11}^2 < f(1/10) < k \cdot l_{12}^2$$

であることは確認されるが、これらの値からどのような操作を経て $f(1/10) = 2974254163/7182562500$ という有理数が導かれたのか、今のところ説明が見出されない。他の $f(1/50)$ 、 $f(1/5)$ 、 $f(9/25)$ の場合についても同様である。この操作が明らかになれば、1683年時点での『研幾算法』による弓形の問題の解法の全容が判明するはずであるが、これは今後の課題とせざるを得ない。

### おわりに

最後に『研幾算法』の提示する弓形の面積の問題に対する解法の概要と、その数学史的意義をまとめておきたい。

#### [解法の概要]

- (1) 『研幾算法』では弓形の面積 $S$ を求めるために、 $S$ と弧長 $l$ の連立方程式から $l$ を消去する終結式を用いて $S$ のみの2次方程式を導いた。
- (2) 終結式を構成するために弧長 $l$ の自乗の近似式が必要となり、『研幾算法』ではラグランジュの補間公式に相当する近似式を導いていた。但し、参照されたデータ( $f(1/50)$ 、他)の導出法は未知のままである。
- (3) ラグランジュの補間公式を導く操作は『研幾算法』だけではなく、関・建部と同時代の田中由真の『算学紛解』にも言及されていた。そこでは明確に「方程正負之法」を用いる解法として、連立方程式の掃き出し法が説明されている。

#### [数学史的な意義]

- (4) 17世紀の複数の和算家が連立方程式の解法の応用としてラグランジュの補間公式に到達していた点は、これまでの研究では指摘されていなかったことである。「方程」あるいは「方程正負之法」の解法そのものは古代中国以来の伝統数学に基づいているものの、この時点の和算において新しい応用分野が見出されたと言えよう。
- (5) ラグランジュの補間公式に相当する近似式について、和算家の間ではその後、この方面で継続して研究が



成された形跡は見られない。関孝和の『括要算法』ではこの近似式は採用されず、更に精度の高い増約術による近似式が採用されている。この2つの近似式の推移の実態を明らかにすることも、今後の研究課題となるであろう。

注と文献

- (1) 本稿の内容は、筆者による前稿「建部賢弘著『研幾算法』の研究」、『科学史・科学哲学』No.13 (1996年)でも一部扱っているが、前稿では近似式導出の過程がラグランジュ補間と同等であることに思い至らず、本稿であらためて新しい知見と新史料を交えて議論をするものである。
- (2) 川村博忠『江戸幕府撰国絵図の研究』、古今書院、1984年、pp.320-349、渡辺敏夫『近世日本天文学史 上』、恒星社厚生閣、1984年、pp. 91-95を参照。
- (3) 初坂重春『円方四卷記』(1657)、山田政重『改算記』(1659年)、磯村吉徳『算法闕疑抄』(1661年)、などである。
- (4) 日本学士院編『明治前日本数学史』第1巻、岩波書店、1954年、pp. 54-80を参照。
- (5) 沢口一之の数学と、彼に関する最近の先行研究の情報については、拙稿「和算家沢口一之に関する逸話」、『科学史・科学哲学』、No. 15 (2000年)、「長崎歴史文化博物館収蔵沢口一之の発給『算術免許状』について」、『長崎歴史文化博物館研究紀要』Vol. 2 (2007年)を参照。
- (6) 「円理」なる語の初出も『古今算法記』であるが、沢口は序文で「円理は明め難し」として、円周率を用いる類の遺題については明確な解答を避けている。拙稿「和算家沢口一之に関する逸話」、pp. 2-3を参照。
- (7) 建部は『研幾算法』の序文で「近間刊する所の算法入門に発微算法を議して差誤有りと …… 彼の書に数学乗除往來四十九問の答術を視るに或は牽強して正を失し或は乖離して真を錯る。多くは以て無稽の術なり。故に今彼の問に於て通變精微の術を編訂して研幾算法と〔名付ける〕」と、辛辣に『算法入門』を批判している。拙稿「建部賢弘著『研幾算法』の研究」、p. 27を参照。
- (8) 『研幾算法』の刊本は現在、東京大学、九州大学などに所蔵されている。本稿では九州大学桑本文庫所蔵本を参照した。
- (9) 『研幾算法』第1問の原文は以下のようになる。( )内の文字は割註であることを示す。  
 今有弧形只云矢(若干)弦(若干)問積幾何(乃円率用周三百五十五尺徑一百一十三)○答曰得積  
 術曰立天元一為積以矢相乘得数以一十六乘之得数寄甲位○列矢自之得数四之加入弦中得数寄乙位○亦列矢自之得数八之以減乙位余以弦相乘加入甲位得数自之寄丙位○矢七乘巾乙位相乘(一億八千三百二十七万五千五百二十段)乙位四自乘(八十一段)右二位相併共得数寄丁位○矢九自乘(五十七億三千三百六十一万三千五百六十八段)矢五乘巾乙位巾相乘(二億六千一百二十一万七千五百三十六段)矢三乘冪乙位再乘巾相乘(九千六百三十三万七千六百六十四段)矢巾乙位三乘冪相乘(七千三百五十七万三千零六十八段)右四位相併共得内減丁位余寄左○列矢三自乘之以乙位相乘亦以丙位相乘得数以七千三百五十

四万九千四百四十乘之与寄左相消得開方式平方開之得積合問

(『研幾算法』第3丁表・裏)

- (10) 本稿では東北大学岡本文庫所蔵の2本(請求番号: 岡写52と岡写59)を参照した。
- (11) 該当部分の原文は以下のようになる。

|    |         |                  |
|----|---------|------------------|
| 「  | 第一問     |                  |
|    | 弧率      |                  |
| 一率 | 矢四乘巾 正実 | 五百五十九万九千二百三十二段   |
| 二率 | 矢三乘冪円徑  | 七十一万五千九百二十段      |
|    | 相乘負実    |                  |
| 三率 | 矢再乘巾円徑  | 四百〇八万一千五百二十四段    |
|    | 巾相乘正実   |                  |
| 四率 | 矢巾円徑再乘  | 六百〇二万一千一百〇四段     |
|    | 巾相乘正実   |                  |
| 五率 | 矢円徑三乘巾  | 一千八百三十九万三千二百六十七段 |
|    | 相乘正実    |                  |
| 六率 | 円徑四乘巾   | 八十一段             |
|    | 負実      |                  |
| 七率 | 円徑再乘巾   | 四百五十九万六千八百四十段    |
|    | 負廉      |                  |

右列併一率所得三率所得与四率及五率所得内併減二率得数与六率得数余為正実以七率得数為負廉平方開之得弧背本術從焉

本術相消圓中列矢三自乘之(三之字衍文也)(『研幾算法演段諺解』第1丁表・裏)

- (12) 「これは正しくない。 $S^2$  [弧長の自乗]は $c$ とともに0となるを要するからである。』『明治前日本数学史』第2巻、p. 280を参照。
- (13) なお、先に筆者が著した拙稿「建部賢弘著『研幾算法』の研究」では、式(B)の精度を評価する[図3]までを作成した。本文に掲げたグラフはその再掲となる。
- (14) 田中由真の伝記と事績については、『明治前日本数学史』第3巻、pp. 424-482を参照。
- (15) 『算学紛解』第8巻の年紀として1683年の記載があることから、この著作の成立年代はこの前後と考えられる。関孝和の活動時期もちょうどこの時期と重なっている。本稿では大阪府立図書館所蔵本を参照した。
- (16) 例えば、天元術を拡張して高次連立方程式にまで応用する技法、行列式の導出、方陣の構成、等である。前掲『明治前日本数学史』第3巻を参照。
- (17) 関西大学所蔵本の『発微算法』に、田中由真による書き込みと花押が残されている。拙著『近世日本数学史』、東京大学出版会、2005年、第3部を参照。
- (18) 本文の訳文に対する原文は以下のようになる。挿図は省略した。

|    |                  |  |
|----|------------------|--|
| 「一 | 今有平円欠只云矢一寸弦六寸問積  |  |
|    | 若干 答曰 四歩二分二厘     |  |
| 二  | 有同矢二寸弦八寸問積若干     |  |
|    | 答曰 一十一歩二分八厘      |  |
| 三  | 有同矢三寸六分弦九寸六分問積若干 |  |

答曰 二十五歩六〇三二  
 四 有同矢二分弦二寸八分間積若干  
 答曰 四分五厘六八  
 五 有同矢五寸弦一尺間積若干  
 答曰 三十九歩五分

術曰弦巾(一段)矢巾(二十五段)矢弦相乘(二十五段)右三位相併以五十除之得弧積各合右答

右徑矢弦金[ママ]数之図

第一第二円欠之図

右第一欠積与第二欠積相併倍之得三十一歩加入中ノ縦横積四十八歩共得七十九歩是合惣円積

第三第四円欠之図

右第三欠積与第四欠積相併倍之得五十二歩一分二厘加入中縦横積二十六歩八分八厘共得七十九歩是又惣円積也

第五円欠之図

第五即半円積也倍之得七十九歩是即惣円積也

右術之解儀

右求欠積術之手段者其所記以矢弦負数依方程正負之法求之其第一与第二弦巾和得一百〇矢弦相乘和得二十二〇矢巾和得五〇惣円積内減中積四十八歩余折半得一十五歩五分右以四数为第一式〇又第三与第四弦巾和一百〇矢弦相乘和得三十五歩一分二厘〇矢巾和得一十三〇惣円積内減中積二十六歩八分八厘余折半得二十六歩令六厘右以四数为第二式〇第五者弦巾得一百(是即円徑巾也)矢弦相乘得五十〇矢巾得二十五(即半円徑巾也)〇惣円積折半得三十九歩五分以右四数为第三式依之入方程正負術其図各如左

第一番式

|   | 弦巾和 | 矢弦相乘和 | 矢巾和 | 欠積和  |
|---|-----|-------|-----|------|
| 右 | 一〇〇 | 二二    | 五   | 一五五  |
| 中 | 一〇〇 | 三五一二  | 一三  | 二六〇六 |
| 左 | 一〇〇 | 五〇    | 二五  | 三九五  |

| 矢再巾和     | 矢巾弦相乘和   | 矢弦巾相乘和    | 弦再巾和      | 欠積和    |
|----------|----------|-----------|-----------|--------|
| 九        | 三八       | 一六四       | 七二八       | 一五五    |
| 四六六六四    | 一二四五二八   | 三三三三四四    | 九〇六六八八    | 二六〇六   |
| 三四〇四四九九二 | 九八六一七九八四 | 二八七八二〇〇三二 | 八六三六四〇〇六四 | 二三〇二六四 |
| 一二五      | 二五〇〇     | 五〇〇       | 一〇〇〇      | 三九二    |

右ノ図ヲ以テ常ノ如ク方程シテ四品トモニ各段数ヲ得テ又更ニ欠積ヲ求ル法術トスヘシ文繁多ナル故略之好人推テ知ルヘシ其外式ハ矢二寸三分一厘二毛弦八寸四分三厘二毛ト矢七分八厘四毛弦五寸三分七厘六毛トヲ一組ニシテ三乗巾ノ方程ニシ或ハ円徑ヲ用テ求ル手段

右ノ如ク算ヲ布キ三組三色式トナル是ヲ以テ常ノ如ク其右行ヲ以テ中行ニ悉ク乗シ中行ヲ以テ右行ニ悉ク乗シ其得ル所ノ右行ヲ以テ中行ニ同減異加シテ式ヲ止ム〇別ニ又右行ヲ以テ左行ニ悉ク乗シ左行ヲ以テ右行ニ悉ク乗シ其得ル所ノ右行ヲ以テ左行ニ同減異加シテ又式ヲ止テ其止ル両式ヲ以テ二組二色トス其図如左(尤右図者弦巾各同数故今之不及乗直ニ減シ)

第二番式

|   | 弦巾和 | 矢弦相乘和 | 矢巾和 | 欠積和  |
|---|-----|-------|-----|------|
| 右 |     | 一三一二  | 八   | 一〇五六 |
| 左 |     | 二八    | 二〇  | 二四   |

右ノ如ク式ヲ以テ其右行ヲ左行ニ悉ク乗シ左行ヲ以テ右行ニ悉ク乗シ其得ル所ノ右行ヲ以テ左行ニ同減異加スレハ矢巾ノ和三十八個四分欠積一十九歩二分ヲ得ル実トシテ矢巾和三十八個四分ヲ法トシテ実ニ除キ矢巾一個ニ就テ欠積八五分ニ当ル是即矢巾ノ段数ナリ

[中略]

右段々ノ術ニ依テ矢巾ノ段数五分弦巾ノ段数二厘矢弦相乗ノ段数五分ヲ得ル然ルヲ右ノ段数少数ナル故ニ各五十ヲ以テ乗スレハ(求五十者依段数同約術知之)矢巾ハ二十五段〇弦巾ハ一段〇矢巾相乗ハ二十五段ト成ヲ暫段ヲアケテ而后五十二除ク是右ニ記ス弧積ヲ求ル定法トス

弧ヲ求ルハ列円徑内減矢二段余以弦乗之加欠積四段以円徑除之各得弧

右ハ思ヒヨル所ヲ少許リ記ス耳ナリ右ノ外徑矢弦ノ員数ニ不尽ナキ数ヲ設テ組式ヲ増シ乗ヲ重テ方程ニナス時ハ微細ナル法術ヲ得ヘシ

今式ハ矢三分六厘弦三寸五分二厘ト矢三寸二分四厘弦九寸三分六厘トノ数ヲ以テ一組トシテ前ノ式ニ添テ再乗巾ニシテ方程ヲナス図左ニ記ス

モ亦可ナラン」

(19) それぞれの弦の長さは三平方の定理と平方根計算によって求められる。より正確には、『括要算法』ではある程度の  $n$  まで弧長を計算をした後に「増約術」と称する技法が施され、数列の収束を加速する操作が行われる。