修 士 論 文 の 和 文 要 旨

研究科・専攻	大学院　情報理工学研究科　情報・通信工学専攻　博士前期課程		
氏　　名	全　虎山	学籍番号	1531058
論 文 題 目	先読みありの１人ぷよぷよの必勝性		

要　旨

ゲーム・パズルには本質的に難しい問題が多く、計算量や必勝戦略を理論的に解析する研究が数多く行われている。テトリスの登場により、落ち物パズルゲームが世界各国で広く遊ばれるようになっている。落ち物パズルゲームをプレイする AI については実装や研究が行われているが、これらのゲームに関する理論的な研究は少ない。

落ち物パズルゲームとは、盤面の上から落ちてくるピースを操作して、積み上げていき、ピースをある条件に従って並べると消えるゲームである。

本研究では、落ち物ゲームのうち、世界的に広くプレイされているぷよぷよの必勝性に関する研究を行った。ぷよぷよでは、2個1組になって落下してくるぷよと呼ばれるピースを操作し、同じ色のぷよが4つ以上上下左右に隣接すると、それらが消滅する。ぷよぷよは本来対戦ゲームだが、本研究では1人ゲームとして扱う。どんなぷよが与えられても、盤面に積まれるぷよを有限の高さに留めた状態で永遠にプレイできる時、プレイヤーが必勝であると言う。ぷよぷよの必勝性については、色数や盤面の幅により難しさが変わることに注目して、必勝あるいは必敗となる条件について研究が行われている。実際のゲームでは、先読みと呼ばれて、後で落下してくる数個のピースを先に見ることができるが、先読みがない場合についてのみ研究が行われていた。

本研究では、先読みのある１人ぷよぷよにおいて、色数と盤面の幅を変化させた時の必勝性の研究を行った。まず、盤面の幅を固定した場合に対して、プレイヤーが必敗となるために十分な色数について研究を行い、盤面の幅w、先読みの数mに対して、$w=1$なら2色以上、$w=2$または3なら$w+2m+2$色以上、$w\geq 4$なら$w+2m+(2m+2)\lfloor (w-1)/3 \rfloor+2$色以上の場合、プレイヤーは必敗であることを示した。また、幅2で先読みが1個の場合には、上記の結果より少ない5色でプレイヤーが必敗となることを示した。最後に、幅２の場合、色数が増えると先読みの数にかかわらず必敗になるのではないかと予想し、関連するいくつかの性質を示した。

電気通信大学大学院

平成28年度　修士論文

先読みありの１人ぷよぷよの必勝性

学籍番号 1531058
全　虎山
情報・通信工学専攻　情報数理工学コース
指導教員:武永康彦准教授
副指導教員:垂井淳准教授

提出日：2017年3月13日

目 次

1　はじめに

ゲーム・パズルには本質的に難しい問題が多く、計算量や必勝戦略を理論的に解析する研究が数多く行われている [1, 2]。

テトリスの登場により、様々な落ち物パズルゲームが世界各国で広く遊ばれるようになっている。落ち物ゲームとは、盤面の上から落ちてくるブロックを操作して、積み上げていき、ブロックをある条件に従って並べると消えるゲームである。ブロックがどんどん盤面に積もっていき、規定の高さまで積み上がるとゲームオーバーになる。落ち物パズルゲームをプレイする AI については実装や研究が行われている [3, 4]。しかし、これらのゲームに関する理論的な研究は少ない。落ち物ゲームについては、テトリス、ぷよぷよについてその NP 完全性や必勝性についての研究が行われている [5, 6, 7]。本研究では、落ち物ゲームのうち、世界的に広くプレイされているぷよぷよの必勝性に関する研究を行う。

ぷよぷよとは、ブロックを組み合わせ消していく落ち物パズルゲームである。ゲームの基本単位であるブロックをぷよと呼ぶ。ぷよには色が付いている。組ぷよと呼ばれる 2 つ一組みのぷよが盤面に次々に落下してくる。プレイヤーは組ぷよを操作して、適当な場所に落としていく。同じ色のぷよが 4 つ以上上下左右に隣接すると、それらは消滅する。消滅したぷよの上に乗っているぷよは落下する。その時に、新たに同じ色のぷよが 4 つ以上つながった場合、それらのぷよも消滅する。この現象を連鎖と呼ぶ。プレイヤーは落下中の組ぷよだけでなく、その後に落下するいくつかの組ぷよを見ることができる。これを先読みと呼ぶ。ぷよぷよは本来対戦ゲームだが、本研究では 1 人ゲームとして扱う。できるだけ長い間ゲームオーバーにならずに、プレイ続けることがプレイヤーの目的となる。どんな組ぷよであっても、盤面に積まれるぷよを有限の高さに留めた状態で永遠にプレイできる戦略がある時、プレイヤーが必勝であると言い、その戦略を必勝戦略と呼ぶ。逆に、プレイヤーが最善を尽くしても、ぷよが無限に積み上げるような組ぷよが存在する場合、プレイヤーは必敗であると言う。

[7] ではぷよぷよの必勝性について、先読みなしの場合、盤面の幅とぷよの色数に注目して研究を行っている。具体的には、盤面の幅を固定した時プレイヤーが必敗になる色数の条件および色数を固定した時プレイヤーが必勝となる条件を明らかにした。ぷよの色数が k の時の必勝性については、幅が $\frac{k(k-1)+2}{2}$ 以上であればプレイヤーが必勝であることが示されている。また、盤面の幅を固定した場合、幅が 1 、2 、3 のときそれぞれ、2 、4 、6 色、幅が w $(w \geq 4)$ の時 $3w-4$ 以上あれば、プレイヤーが必敗であることが示されている。

本研究は本物のゲームに近づくために、先読みありの場合の必勝性について研究を行う。実際のゲームでは先読みがあることによって、プレイヤーに有利になる。先読みがどの程度影響を及ぼすのか理論的に明らかにすることを目指す。

本研究では、先読みのある 1 人ぷよぷよにおいて、色数と盤面の幅を変化させた時の必勝性を検討する。まず、盤面の幅を固定した場合に対して、プレイヤーが必敗となるために十分な色数を明らかにする。これは先読みのない場合の従来結果の改善にもなっている。次に、幅 2 で先読みが 1 個の場合には、上記の結果より少ない色数でプレイヤーが必敗となることを示す。また、幅 2 の場合、色数が増えると

先読みの数にかかわらず必敗になるのではないかと予想し、関連するいくつかの性質を示す。

本論文の構成は次の通りである。２章で本研究で扱われるぷよぷよのルールを説明し、用語の定義を行う。３章ではプレイヤーが必敗であるには、何色のぷよが十分かを考察する。４章で幅が２の時に、３章の結果を改善する。５章で先読みが無限の場合、いくつかの性質を示す。６章でまとめと今後の課題について述べる。

2　ぷよぷよのルール

本章では、ぷよぷよのルール及び用語について説明する。

ゲームの盤面は正方格子で構成される。格子の１マスにつき１個のぷよと呼ばれるピースを置くことができる。本論文では、ぷよの色を大文字のアルファベットで表す。盤面の上からぷよが2つ1組になった組ぷよが落下してくる。プレイヤーは組ぷよに対して横移動、回転の操作を行うことができる。落下してきたぷよは盤面の底部や他のぷよがある上のマスに到達すると、その位置にぷよが固定される。横向きに組ぷよを落下させた場合、片方のぷよの下に１マス分でも空白がある場合、２つのぷよは切り離されて強制的にそのぷよだけ落下する。切り離されたぷよは左右に移動することができない。

上下左右に同じ色のぷよが４つ以上つながった時点で、それらのぷよが消滅する。消滅したぷよの上に乗っているぷよは落下する。その時に、新たに同じ色のぷよが４つ以上つながった場合、それらのぷよも消滅する。この現象を連鎖と呼ぶ。プレイヤーはぷよを消して積みあがらないようにするが、上手く消すことができず、ぷよがどんどん盤面に積もっていき、規定の高さまで積み上がるとゲームオーバーになる。

プレイヤーは落下中の組ぷよだけでなく、その後に落下する m 個の組ぷよを見ることができる。これを先読みと呼ぶ。落下中の組ぷよを配置した直後で、m 個目の先読みの組ぷよが与えられる。通常のゲームでは $m = 2$ となっている。図 2.1 に先読みが２個の場合のゲームの進行例を示す。図で上に示した組ぷよが先に落下し、その次に下の組ぷよが落下する。図 2.1(b) で A が消えた後に C が消える連鎖が起こっている。

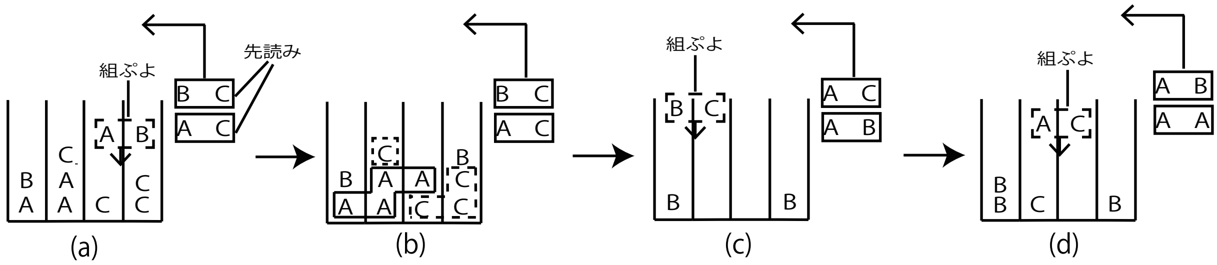


図 2.1: ぷよぷよの進行例

以下に、本論文で用いる用語を定義する。縦横につながった同色のぷよの集まり

をブロックと呼ぶ。縦横につながった同色のぷよの数が n の時、n 連結と呼ばれる。ブロックの中のぷよの数をブロックのサイズとする。落下中の組ぷよまたは先読みの組ぷよに 1 色でも同色のぷよがあれば、プレイヤーの操作によって消すことができる複数のぷよの集まりを、リーチと呼ぶ。図 2.2 にブロックとリーチの例を示す。

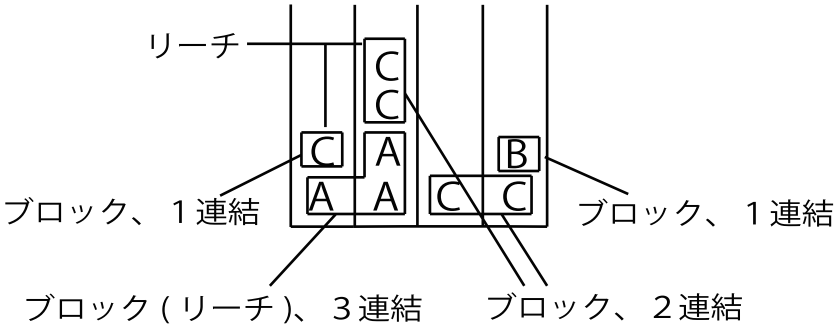


図 2.2: ブロックとリーチ

ぷよぷよは本来対戦ゲームだが、本研究では 1 人ゲームとして扱う。盤面に落ちてくる組ぷよの列を入力列と呼ぶ。入力列はアドバーサリと呼ばれる存在によって決定される。プレイヤーは可能な限り長い間プレイし続けることを目的とする。どんな入力列であっても、盤面に積まれるぷよを有限の高さに留めた状態で永遠にプレイできる戦略がある時、プレイヤーが必勝であるといい、その戦略を必勝戦略と呼ぶ。逆に、プレイヤーが最善を尽くしても、ぷよが無限に積み上げるような入力列が存在する場合、プレイヤーは必敗であるという。

3　必敗の条件

本章では、先読みのある 1 人ぷよぷよに対して、与えられた盤面の幅に対し、プレイヤーが必敗である入力列が存在するために必要なぷよの色数を考察する。まず、先読みがない場合に対する従来結果 [7] の手法を先読みがある場合に拡張できることを示す。さらに、別の手法を用いることにより、それより良い結果を得られることを示す。この手法を用いることにより、先読みがない場合についても従来の結果も改善している。

まず、[7] の結果を先読みがある場合へ拡張することにより、次の結果が得られる。

性質 3.1 盤面の幅 w、先読みの数 m に対して、出現するぷよの色数 k が下記の数以上である時、プレイヤーが必敗である。

$$k = \begin{cases} 2 & (w = 1) \\ w + 2m + 2 & (w = 2, 3) \\ w + 2(w-2)(m+1) & (w \geq 4) \end{cases}$$

証明　幅が1の場合は異なる2色のぷよからなる組ぷよを落とし続けると、明らかにどのように落下させても1回も消えずに積み上がる。

幅が2または3の場合、縦にぷよが繋がらない限り、ぷよが4つ以上繋がることはないので、ぷよが消えることはない。全ての列の一番上にあるぷよの色以外の2色の組ぷよを落とし続けると、ぷよは1回も消えずに積み上がる。盤面全体で、各列の一番上のぷよの色は最大w色である。縦に同じ色のぷよが連結しないようにするためには、これらの中に列の一番上と同じ色のぷよがあってはいけない。また、落下中および先読みの組ぷよに同じ色のぷよが2個以上あってはいけない。先読みの数がmなので、アドバーサリーは$w+2m+2$色あれば、常にこのような組ぷよを決定できる。これにより、一度もぷよが消えることはない。

幅が4以上の場合、ぷよの色数が$w+2(w-2)(m+1)$あれば、プレイヤーが必敗であることを示す。アドバーサリーは縦連結と横4連結が作れないようにm個目の先読みの組ぷよの配色を決定する。縦連結を作れないようにするための戦略は幅が2または3の場合と同じである。落下中と先読みのm個の組ぷよの中の$2m+2$個のぷよは全て異なる色になるようにする。横4連結を作れないようにするために、列の一番上と同じ色に加えて、リーチになっている色も使われないようにする。盤面に存在するリーチの数を考える。[7]では、幅w、先読みなしの場合に対して、盤面に存在するリーチの最大数は$2(w-3)$であることが示されている。ここで$w-3$は、その列に組ぷよを落下させることにより、リーチとなっているブロックを消すことのできる列の最大数である。この各列に対し消せるリーチとなっている色数は、組ぷよが2個のぷよからなるため、高々2個である。従って、盤面に存在するリーチの最大数は$2(w-3)$となる。先読みありの場合、落下中と先読みに含まれる$2m+2$個のぷよにより、1つの列で消すことのできるリーチの数は高々$2m+2$個である。従って、盤面に存在するリーチの最大数は$(2m+2)(w-3)$である。先読みの組ぷよが落下してくる時には、その組ぷよを決定した時になかったリーチが存在することがある。ただ、そのリーチの色は組ぷよを選んだ時に、落下中または先読みにある色なので、同じ色を組ぷよに含まないため消すことはできない。縦に連結しないための色と横4連結を作れないための色に同じ色がなく、かつどちらも最大となるような状態が存在する。先読みが1の場合、盤面に存在するリーチの数が最大となる形を図3.1に示す。□は縦連結しない、かつ横4連結しない任意の色のぷよを表す。以上から、アドバーサリーは$w+(2m+2)+(2m+2)(w-3)=w+2(w-2)(m+1)$色あれば、常にこのような組ぷよを決定できる。プレイヤーは一度もぷよを消すことができないので、必敗である。　□

次に、別の手法を用いて、この結果を改善する。アドバーサリーの戦略を改善することで必要なぷよの色数を減らすことができる。

性質 3.2　盤面の幅w、先読みの数mに対して、出現するぷよの色数kが下記の数以上である時、プレイヤーが必敗である。

$$k=\begin{cases} 2 & (w=1) \\ w+2m+2 & (w=2,3) \\ w+2m+(2m+2)\lfloor\frac{w-1}{3}\rfloor+2 & (w\geq 4) \end{cases}$$

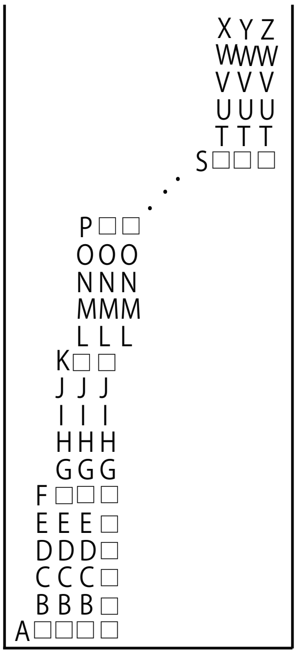


図 3.1: 盤面に存在できるリーチの最大数

証明　幅が 3 以下の場合は性質 3.1 と同じである。

幅が 4 以上の場合、縦連結と横 4 連結が作れないように m 個目の先読みの組ぷよの配色を決定する。縦連結を作れないようにするためには、性質 3.1 の場合と同じ戦略を用いる。横方向の連結については、以下のような方針で 4 連結ができるのを防ぐ。

盤面の一番左の列から、3 列ごとに分けて、区間と呼ぶ。w が 3 の倍数でない場合、盤面の右にできる 3 列未満の部分も区間として考える。区間と区間の境を境界と呼ぶ。図 3.2 に区間と境界を示す。横方向は境界の左右が必ず異なる色になるようにする。以上の方針を用いると、盤面に横 4 連結を作ることができない。なぜならば、区間の幅が最大 3 なので、区間の境界の両側に横連結が存在しないと、横に最大 3 連結しか作れない。

方針を実現するには、落下中および先読みに含まれるぷよは全て異なる色であり、かつあるぷよが境界の隣にあり、その境界の反対側に落下中または先読みのぷよを落とせるとき、落下中または先読みの組ぷよはそのぷよと同色のぷよを含まないようにすれば良い。

ある境界に対して、落下中および先読みに含まれるぷよは全て異なる色であるため、境界の両側にこれらの中にあるぷよが置かれても同色になることはない。また、あるぷよが境界の隣にあり、その境界の反対側に落下中または先読みのぷよを落とせるとき、落下中または先読みの組ぷよはそのぷよと同色のぷよを含まない。落下中、先読みにあるぷよの数は $2m+2$ 個ため、境界の両側に横連結は絶対に作れない。

盤面の幅 w に対して、境界の数は $\lfloor \frac{w-1}{3} \rfloor$ 個である。ある境界に対して、境界の両側の中で段差があるぷよがそれぞれ異なる色の時、色数が最大となる。落下中、先

読みにあるぷよの数は $2m+2$ 個なので、段差が $2m+2$ までのぷよと同色にならない。以上より、境界の両側に横連結が可能なぷよは最大 $(2m+2)\lfloor\frac{w-1}{3}\rfloor$ 色である。

アドバーサリーは以上の色には含まれない色からなる組ぷよを次にプレイヤーに与える。常にこの条件で組ぷよを与えることができれば、プレイヤーは一度もぷよを消すことができない。必要な色数は最大 $w+2m+(2m+2)\lfloor\frac{w-1}{3}\rfloor+2$ であり、これだけの色数があれば、アドバーサリーは常にこの戦略を実行ことができる。以上から、幅 4 以上の盤面に対して、$w+2m+(2m+2)\lfloor\frac{w-1}{3}\rfloor+2$ 色以上あれば、プレイヤーが必敗である。 □

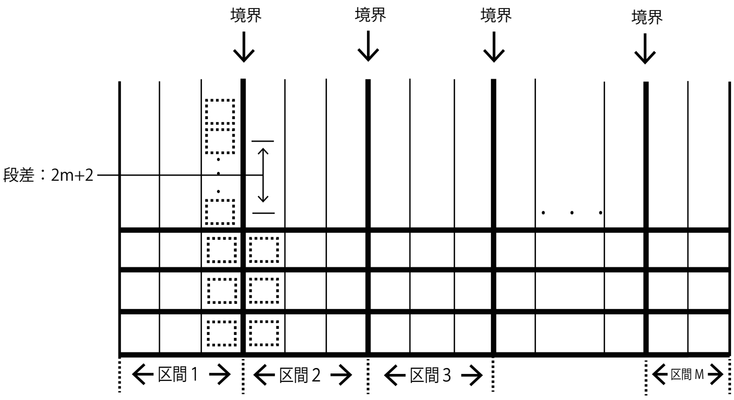


図 3.2: 区間と境界

先読みなしの場合、性質 3.1 の結果では、プレイヤーが必敗となるのに十分な色数は $w\geq 4$ のとき、$k=w+2(w-2)$ であるのに比べ、性質 3.2 を用いると、$w+2\lfloor\frac{w-1}{3}\rfloor+2$ である。$w=5$ の時、従来手法の色数は 11、改善手法の色数は 9 である。$w=6$ の時、従来手法の色数は 14、改善手法の色数は 10 である。$w=7$ の時、従来手法の色数は 17、改善手法の色数は 12 である。w が大きくなると、改善手法の色数は従来手法の約 9 分の 5 である。

4　幅 2 の場合

前章の結果より、幅 2、先読み 1 個の場合に対しては、色数が 6 あればプレイヤーが必敗であることが示された。この章では、アドバーサリーの戦略を改善することで必要なぷよの色数を減らせることを示す。

アドバーサリは以下のルールに従って組ぷよを与える。列の一番上のぷよと落下している組ぷよに表われる色を状態色、その数を状態色数と呼ぶ。

1. 状態色数が 3 以下の場合：それ以外の任意の 2 色からなる組ぷよを与える。
2. 状態色数が 4 の場合：状態色でない色と落下中の組ぷよの色のうちどちらかからなる組ぷよを先読みに与えて、先読みを配置した時点でぷよを消せない場

合：状態色でない色と落下中の組ぷよに含まれる色のうち配置してもぷよを消せない任意の１色からなる組ぷよを先読みに与える。

3. １)、２）を満たさない場合：図 4.1 に従って組ぷよを与える。

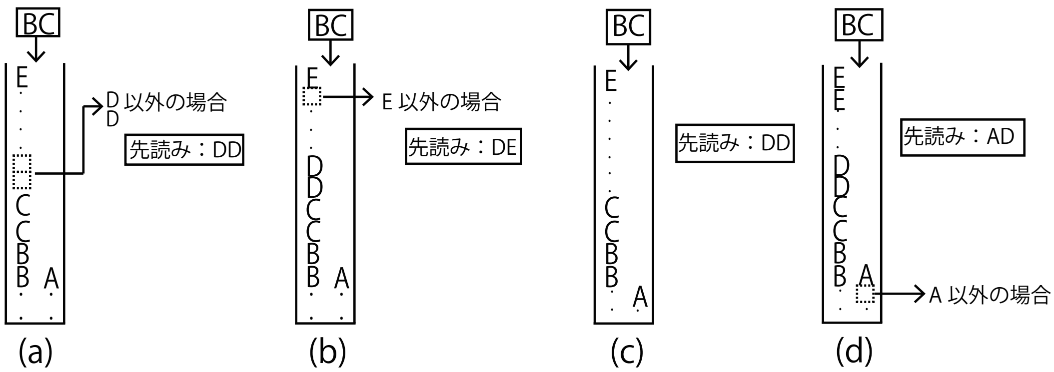


図 4.1: ルール 3

補題 4.1 組ぷよは、先のルールに従って与えられるものとする。盤面に縦３連結がなく、状態色数が４の場合、ルール２が適用できない盤面のうち実際に現れるものはルール３に示したケースのみである。

証明　状態色数が４であるため、一般性を失わずに、高い列の一番上のぷよを E、低い列の一番上のぷよを A、落下中の組ぷよを BC とする。盤面に縦３連結がなく、状態色数が４でルール２が適用できない状態を図 4.2 に示す。まず、他にこの条件を満たす状態がないことを以下に示す。落下中の組ぷよが BC なので、B、C どちらも現在の先読みにある組ぷよで消せるためには、盤面に両方の縦２連結が必要である。なぜならば、落下してくるぷよを隣接して置くことができる位置に B と C のどちらかの横連結があると、低い列の一番上のぷよは A にならない。従って、両方の縦２連結が必要である。以下では、C の縦２連結が B の縦２連結より上にあるものとする。この時、C の縦２連結のうち上のぷよと低い列の一番上のぷよの間の段差は３または４である。なぜならば、段差が２以下の場合、高い列の B の縦２連結の横に低い列のぷよがあるため、この連結のサイズを増やすことはできない。段差が５以上の場合、落下中の組ぷよを低い列に落としても、段差が３になるので、高い列の C の縦２連結を消すためには、次に落下する組ぷよが CC でないと、C のブロックを消すことができない。従って、どちらの場合もルール２が適用される。よって、低い列の一番上のぷよは高い列の B の縦２連結のうち一番下のぷよの横、またはその１個下にある。

次に、図 4.2 に示した状態のうち、図 4.1 にあげたもの以外は、このルールでは現れないことを示す。図 4.2 にあてはまる状態で図 4.1 に含まれないのは、図 4.3(a) だけである。図 4.3(a) に対して、どんな先読みを与えても、必ず縦３連結を作るかまたはぷよを消すことができる。図 4.3(a) の直前の盤面状態を考える。アドバーサリ

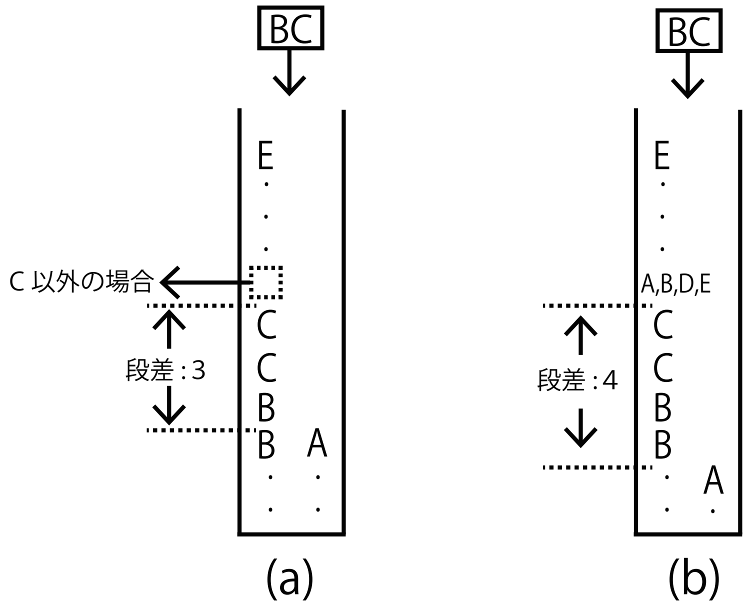


図 4.2: ルール 2 が適用できない盤面

がルールに従っていれば図 4.3(a) の状態にならないことを示す。これにより、その盤面状態は図 4.3(a) になる直前の盤面状態ではありえないことがわかる。従って、図 4.3(a) の盤面状態から前の盤面状態にさかのぼっていくことにより、プレイヤーが図 4.3(a) の状態を作れないことを明らかにすることができる。以下では、これについて説明する。

組ぷよの落とし方は左の列に 2 個のぷよを落とす場合、右の列に 2 個のぷよを落とす場合、両列に 1 個ずつを落とす場合である。図 4.3(a) からさかのぼっていく。一つ前の局面でルールに従って決まる先読みを考える。これが BC でなければ、次の時点で BC が落下中にならないので、図 4.3(a) にならない。先読みが BC なら、さらに前に戻る必要がある。図 4.3 に (a) の全ての直前の盤面状態を示す。点線内が直前に盤面に配置された組ぷよを置く前の全ての可能な盤面状態である。盤面状態 (c) では、ルールに従うと、AE が落下中であることがないので、盤面状態 (c) は存在しない。なぜならば、列の一番上が A と E であるため、(c) の直前の盤面状態を考えると、落下中のぷよが必ず A か E を含む。(c) の落下中の AE は直前の盤面状態の先読みとして、 1 つ前の組ぷよが AE でない場合、盤面に列の一番上に A または E があるので、列の一番上の色は先読みの組ぷよに用いられることはないため、AE が与えられることはない。 1 つ前が AE の場合、前の組ぷよと同じ色 2 色の組ぷよが与えられることはない。

(b) と (d) のうち先読みが BC になる場合について、その前の局面を考える。

図 4.3(b) では、高い列の上のぷよの色で場合分けしたものに対して、どのような先読みが与えられるかを示している。高い列の一番上が A の場合、先読みの組ぷよとして、CD が与えられる。高い列の一番上が B の場合、先読みの組ぷよとして、CD が与えられる。高い列の一番上が C の場合、先読みの組ぷよとして、BD が与え

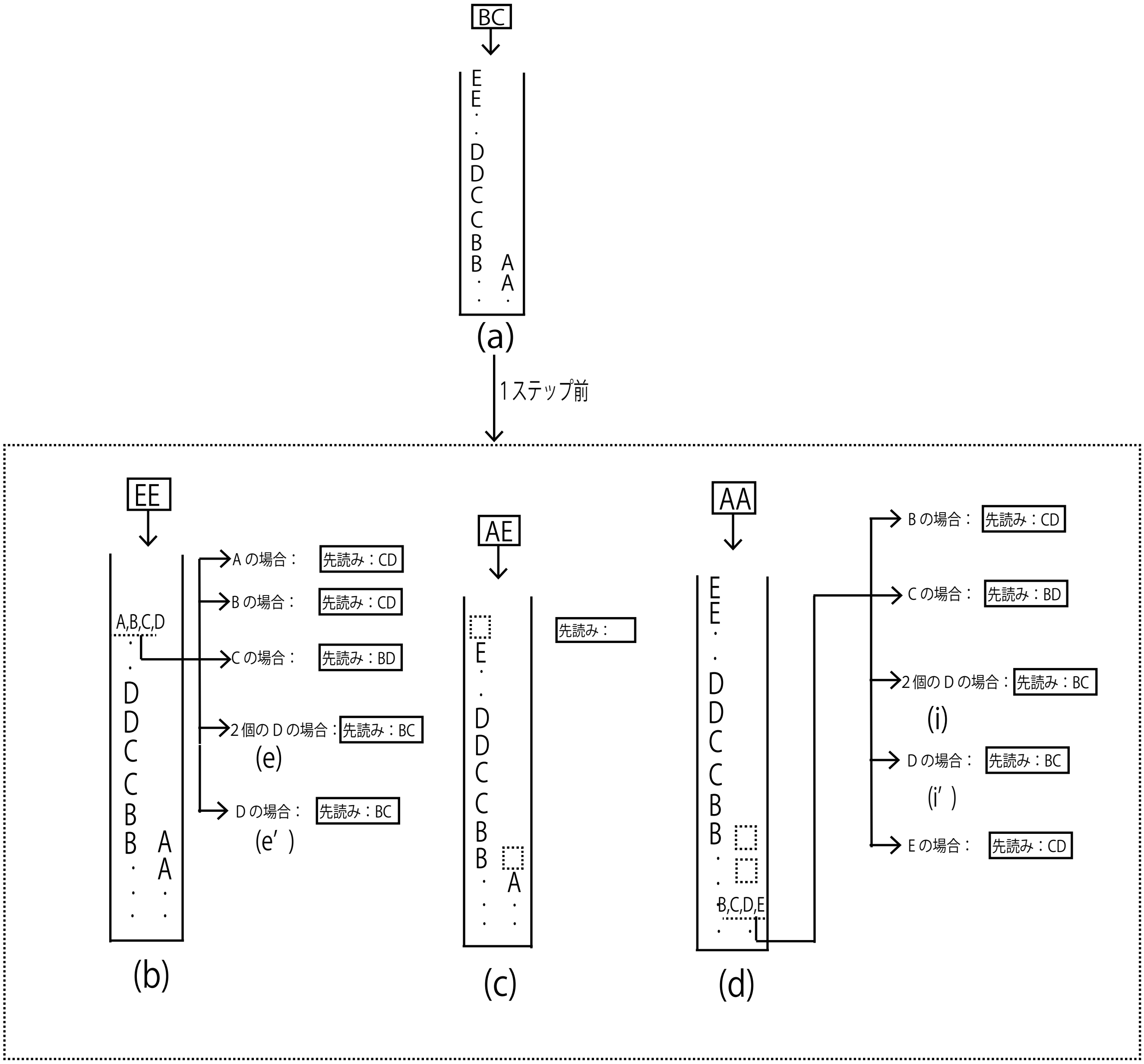

BC
E
E
D
D
C
C
B
B A
A
(a)
1ステップ前
EE
A,B,C,D
D
D
C
C
B
B A
A
(b)
A の場合：
先読み：CD
B の場合：
先読み：CD
C の場合：
先読み：BD
2 個の D の場合：
先読み：BC
(e)
D の場合：
先読み：BC
(e’)
AE
E
D
D
C
C
B
B A
(c)
先読み：
AA
E
E
D
D
C
C
B
B
B,C,D,E
(d)
B の場合：
先読み：CD
C の場合：
先読み：BD
2 個の D の場合：
先読み：BC
(i)
D の場合：
先読み：BC
(i’)
E の場合：
先読み：CD

図 4.3: (a) の直前の状態

られる。これらの場合は先読みがBCでないので、図4.3(a)の状態にはならない。

しかし、高い列の一番上がDの場合、ルールに従うと先読みにBCを与える。従って、高い列の一番上がDの場合、もっと前の盤面に戻る必要がある。高い列の一番上がDの場合、2個のDの場合に分けて考える。高い列の一番上が2個のDの場合の盤面状態を(e)とする。高い列の一番上が1個のDの場合の盤面状態を(e')とする。図4.4に(e)の直前の盤面状態を示す。図4.4の点線内にある全ての盤面状態(f)、(g)、(h)のうち、(g)になることはない。理由は(c)の場合と同じである。(f)、(h)に対して、先読みがEEにならないので、図4.4(e)の状態にならないことがわかる。同様に、図4.5に(e’)の直前の盤面状態を示す。この図より、図4.5(e’)の状態にならないことがわかる。

図4.3の(d)についても同様に、その下に高い列の上のぷよの色で場合分けしたものに対して、どのような先読みが与えられるかを示している。低い列の一番上がB場合、先読みの組ぷよとして、CDが与えられる。低い列の一番上がCでの場合、先読みの組ぷよとして、BDが与えられる。低い列の一番上がEの場合、先読みの組ぷよとして、CDが与えられる。これらの場合は先読みがBCでないので、図4.3(a)の形にはならない。

しかし、低い列の一番上がD、2個のDの場合、ルールに従うと先読みにBCが与えられる。従って、低い列の一番上がD、2個のDの場合、もっと前の盤面に戻る必要がある。低い列の一番上のDのすぐ下のぷよがDの場合とDでない場合に分けて考える。低い列の一番上が2個のDの場合の盤面状態を(i)とする。高い列の一番上が1個のDの場合の盤面状態を(i’)とする。図4.6に(i)の直前の盤面状態を示す。図4.6の点線内にある全ての盤面状態(j)、(k)、(l)のうち、(k)になることはない。理由は(c)の場合と同じである。(j)、(l)に対して、先読みがAAにならないので、図4.6(i)の状態にならないことがわかる。同様に、図4.7に(i’)の直前の盤面状態を示す。図4.7(i’)の状態にならないことがわかる。

以上より、ルールに従うと、図4.3(a)にならない先読みが常に与えられることが分かる。 □

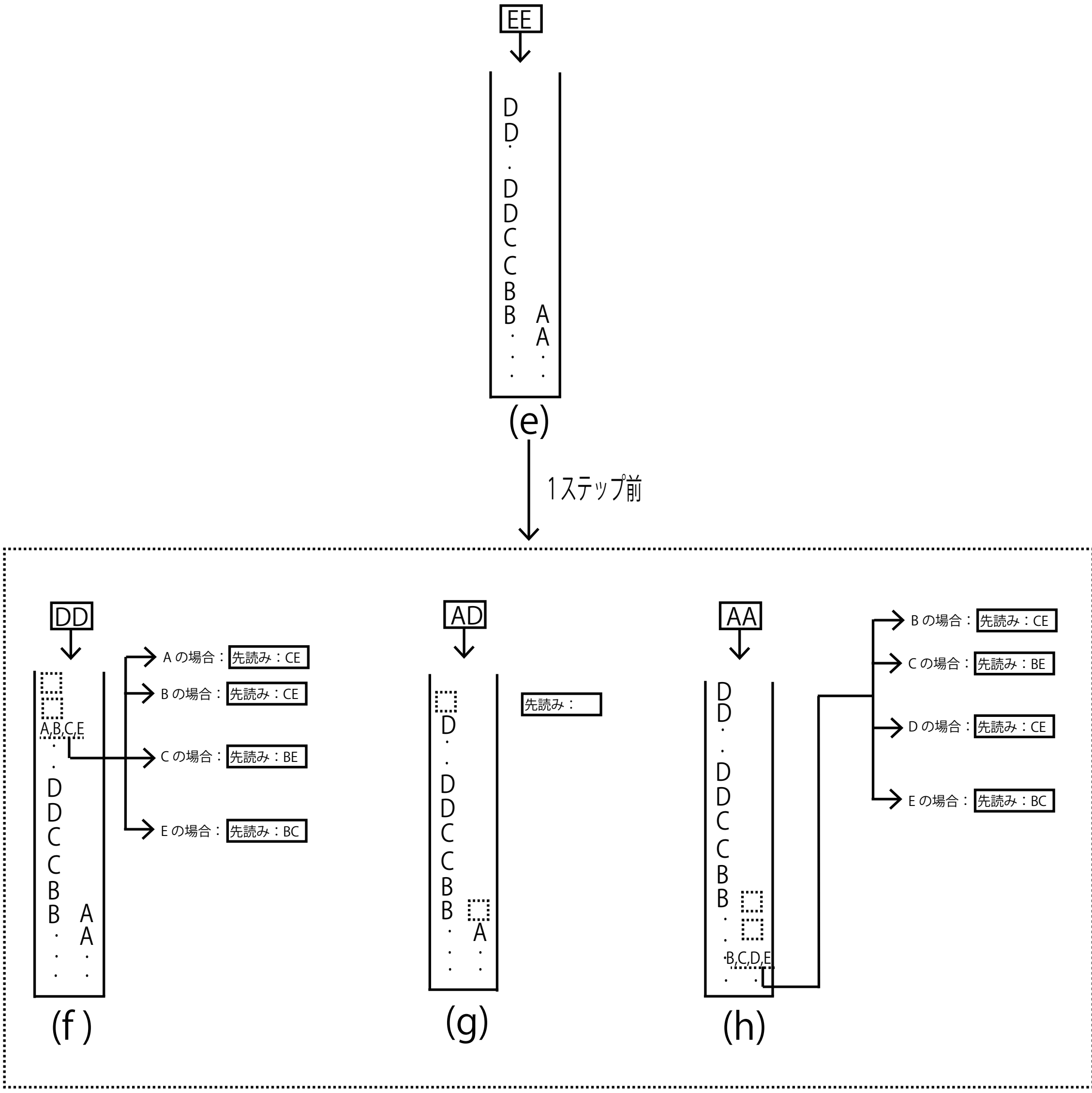

EE
D
D
D
D
C
C
B
B
A
A
(e)
1ステップ前
DD
A の場合：先読み：CE
B の場合：先読み：CE
A,B,C,E
C の場合：先読み：BE
E の場合：先読み：BC
D
D
C
C
B
B
A
A
(f)
AD
先読み：
D
D
D
C
C
B
B
A
(g)
AA
B の場合：先読み：CE
C の場合：先読み：BE
D の場合：先読み：CE
E の場合：先読み：BC
D
D
D
D
C
C
B
B
B,C,D,E
(h)

図 4.4: (e) の直前の状態

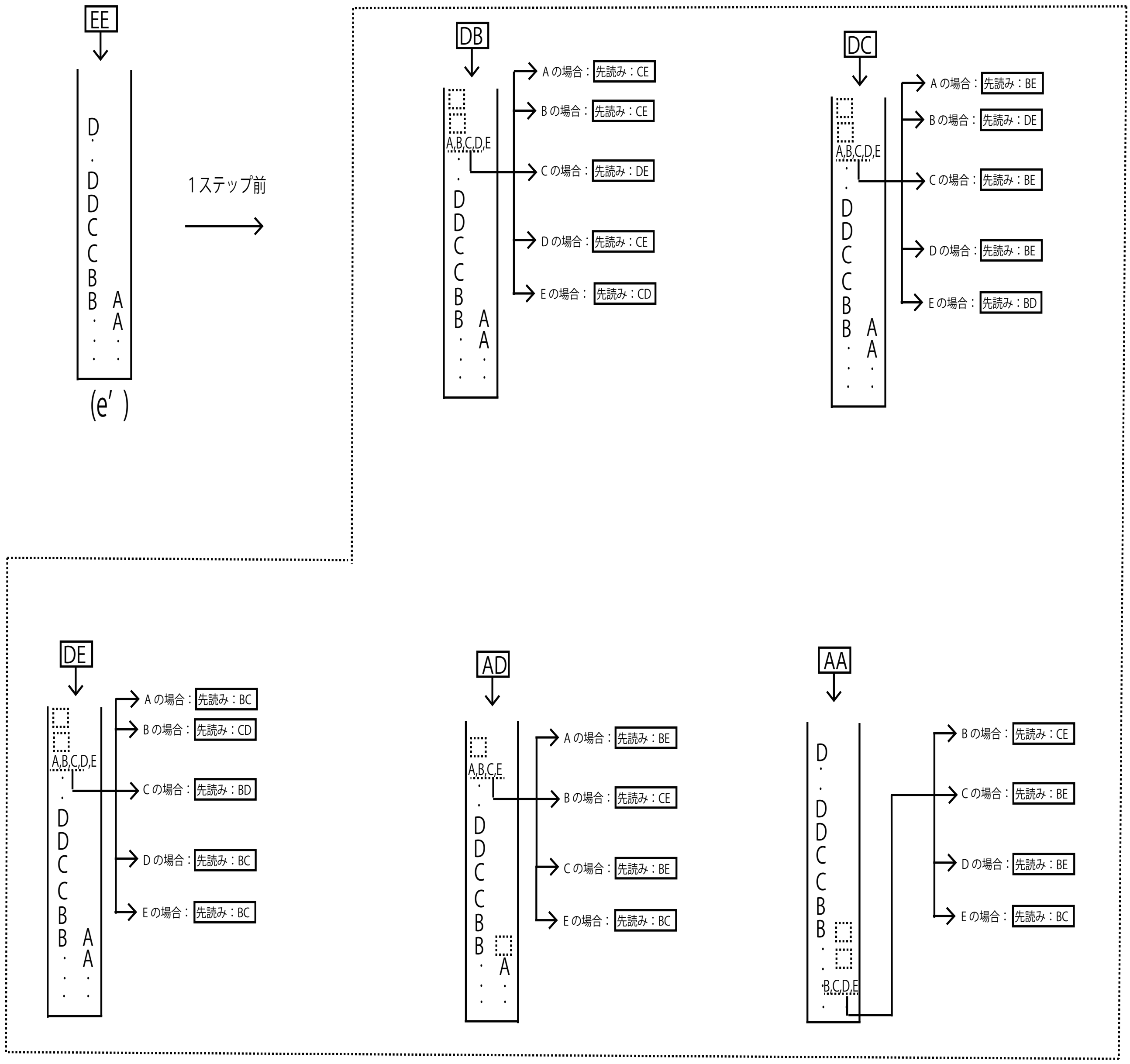

EE
(e′)
1ステップ前
DB
A の場合：先読み：CE
B の場合：先読み：CE
C の場合：先読み：DE
D の場合：先読み：CE
E の場合：先読み：CD
DC
A の場合：先読み：BE
B の場合：先読み：DE
C の場合：先読み：BE
D の場合：先読み：BE
E の場合：先読み：BD
DE
A の場合：先読み：BC
B の場合：先読み：CD
C の場合：先読み：BD
D の場合：先読み：BC
E の場合：先読み：BC
AD
A の場合：先読み：BE
B の場合：先読み：CE
C の場合：先読み：BE
E の場合：先読み：BC
AA
B の場合：先読み：CE
C の場合：先読み：BE
D の場合：先読み：BE
E の場合：先読み：BC

図 4.5: (e') の直前の状態

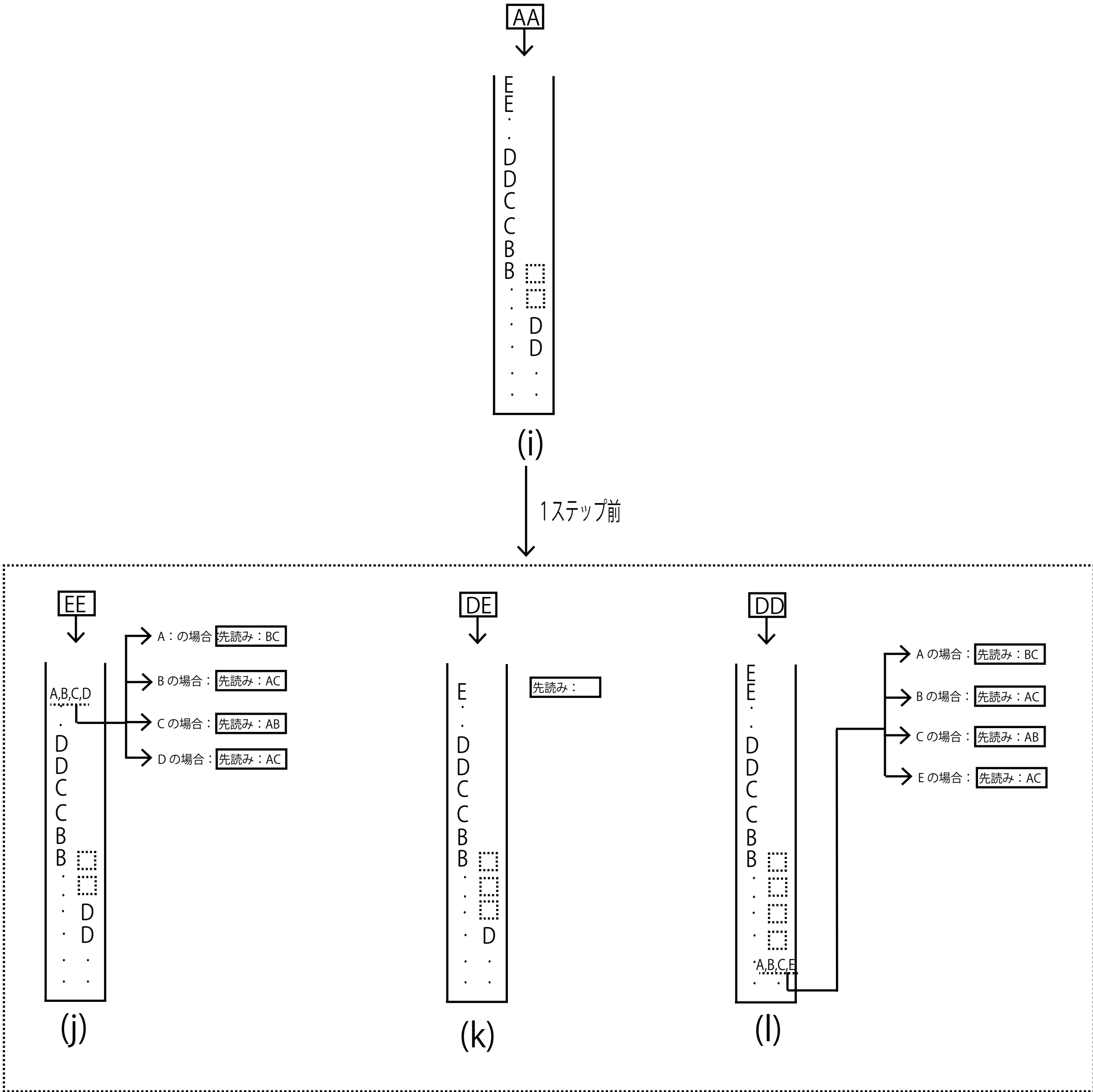
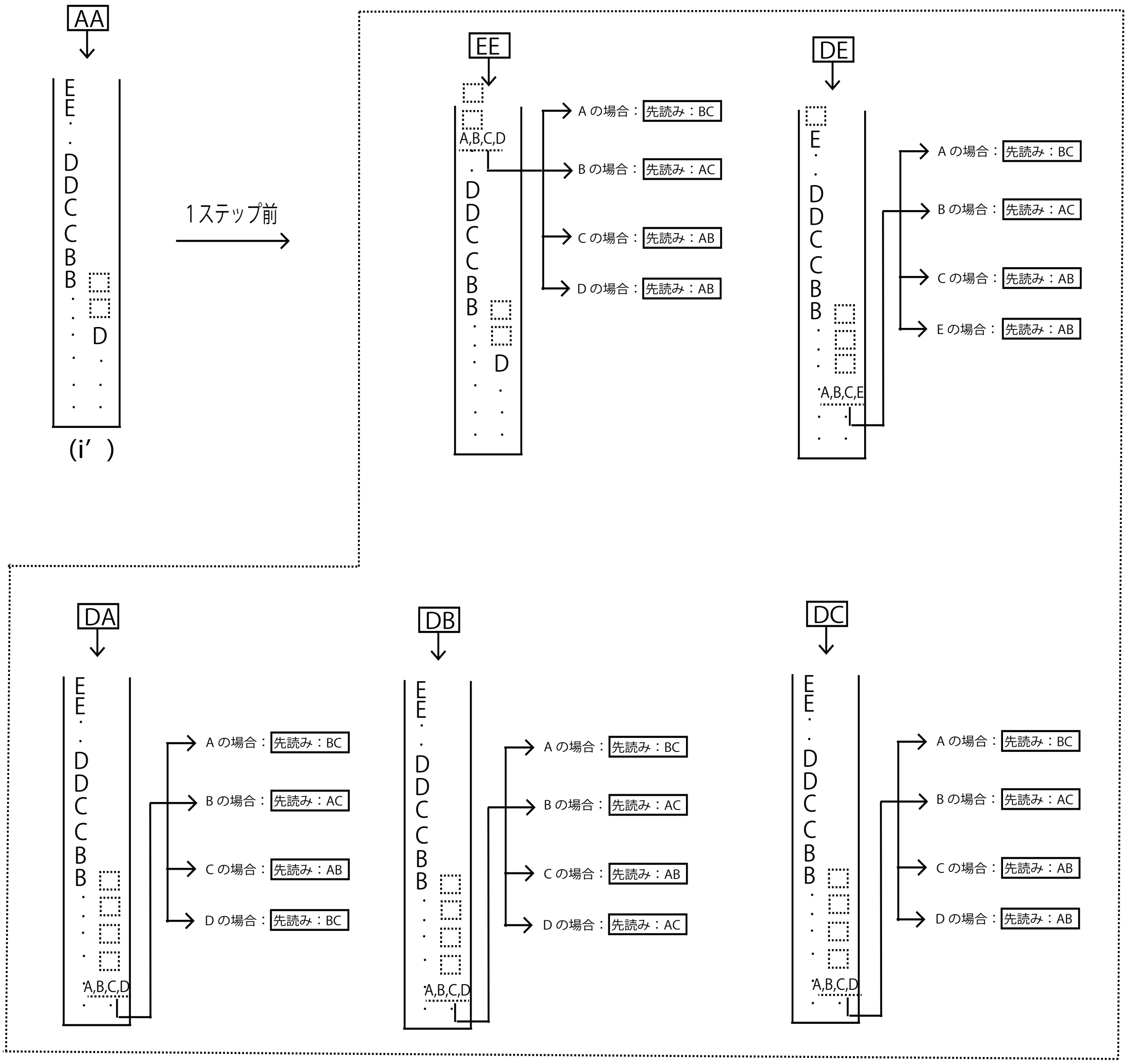

AA
E
E
D
D
C
C
B
B
D
D
(i)
1ステップ前
EE
A,B,C,D
A：の場合 先読み：BC
B の場合：先読み：AC
C の場合：先読み：AB
D の場合：先読み：AC
(j)
DE
先読み：
(k)
DD
A,B,C,E
A の場合：先読み：BC
B の場合：先読み：AC
C の場合：先読み：AB
E の場合：先読み：AC
(l)

図 4.6: (i) の直前の状態



AA
(i’)
1ステップ前
EE
A,B,C,D
A の場合：先読み：BC
B の場合：先読み：AC
C の場合：先読み：AB
D の場合：先読み：AB
DE
A,B,C,E
A の場合：先読み：BC
B の場合：先読み：AC
C の場合：先読み：AB
E の場合：先読み：AB
DA
A,B,C,D
A の場合：先読み：BC
B の場合：先読み：AC
C の場合：先読み：AB
D の場合：先読み：BC
DB
A,B,C,D
A の場合：先読み：BC
B の場合：先読み：AC
C の場合：先読み：AB
D の場合：先読み：AC
DC
A,B,C,D
A の場合：先読み：BC
B の場合：先読み：AC
C の場合：先読み：AB
D の場合：先読み：AB

図 4.7: (i’) の直前の状態

補題 4.2 幅２、色数５のぷよぷよでは、先のルールに従って組ぷよを落下させると、プレイヤーは盤面に縦３連結を作ることができない。

証明　任意の時点において、盤面に縦３連がなく、落下中の組ぷよでも縦３連を作れないことを帰納法を用いて示す。

初期盤面では縦３連結がない、かつ、落下中の組ぷよで縦３連結はできない。ある時点 t で盤面に縦３連結がなく、落下中の組ぷよをどのように盤面に配置してもその時点で縦３連結を作れないと仮定する。次の時点 $t+1$ において、落下中の組ぷよをどのように落としても縦３連結が作れないことを、時点 t での先読みがルールのいずれによって決まったかにより場合分けして示す。

先読みを決めるルール１）を満たす時：次の時点 $t+1$ で、前の時点 t の先読みが落下中である。この組ぷよは時点 t での列の一番上の色とも落下中の組ぷよとも同じ色を含まないため、時点 $t+1$ での列の一番上のぷよと同じ色は含まない。従って、時点 $t+1$ で落下中の組ぷよをどのように落としても縦３連結を作れない。

先読みを決めるルール２）を満たす時：時点 t で落下中の色が時点 $t+1$ で列の一番上になる列においては、この色が縦１連結なので、２色からなる次の組ぷよを落としても縦３連結にはならない。時点 t で列の一番上の色が時点 $t+1$ で列の一番上になる列においては、この色が縦２連結以下であり、次に同じ色は落ちてこないので、縦３連結にできない。

時点 t では縦３連結が存在しないため、補題 4.1 よりこれら以外の状態はルール３に示されたものしか存在しない。

先読みを決めるルール３）を満たす時：縦３連結を作れないことは図 4.1 から容易に確かめられる。

以上より、ルールに従うと、盤面に縦３連結を作ることができない。 □

定理 4.3 幅２、色数５先読み１のぷよぷよでは、プレイヤーは必敗である。

証明　補題 4.2 より、ルールに従って組ぷよを与えると、盤面に作られる縦連結のサイズは高々２である。ある盤面に対して、先読みを与えるルールを満たす場合、先読みには２つの列の縦２連結でぷよが消える色を含まないため、ぷよを消すことができない。 □

5　先読みの限界

色数が増えるほどアドバーサリーが有利になる。先読みが増えるほどプレイヤーが有利になる。しかし、色数が多くなるといくら先読みがあっても必敗になるのではないかと考えられる。幅１の場合は、2 色あれば 2 色からなる組ぷよを落とし続けること、プレイヤーはそれをわかっていても明らかに１回もぷよを消すことが出来ない。この場合これから現れる組ぷよが全てわかっているので、任意の m に対して先読み m 個でプレーヤーが必敗になると言える。

本章では、幅２の場合について、いくら先読みがあっても必敗になる色数があるのではないかと予想し、その証明に向けていくつかの性質を明らかにする。

盤面の幅が２の場合、プレイヤーが必勝となるためには、連鎖が必要である [8]。色数が多くなると、連鎖が起きる形を作るためには、上下に同じ色が連結していないぷよが生じ、このようなぷよがゲームを進めるほど蓄積していくことにより、必敗になることが示せるのではないかと考えている。大きな連鎖が発生するには、縦２連結が多く必要である。また、連鎖を生じるには、消えたブロックの上下の同色のぷよが連結して次に消えるブロックになる必要があるため、色の対称な並びが必要と考えられる。

この時、ぷよを消すためには、消える直前の盤面に縦 2 連結は必ず必要である。なぜならば、同色のぷよからなる組ぷよを与えないとしているので、ぷよが消える直前の盤面には 3 個以上のぷよからなるブロックが盤面に存在しないといけないからである。ここで、３連結も縦 2 連結の一種として考える。単ぷよとは、縦に連結しないぷよである。連鎖が起きる時、最初に消えるブロックを発火点と呼ぶ。

予想 5.1 盤面の幅 2、色数 $2k$ の時、n 連鎖が起きれば、連鎖に関わったぷよからなる連鎖後に残る縦 2 連結の最大数は $\lceil \frac{3}{4}n \rceil + 1$ である。

新しい縦 2 連結は、前の連鎖で消したぷよのすぐ上のぷよとすぐ下のぷよからなる。ある列で縦 2 連結を作るためには、この同色のぷよの間のぷよと横に隣接するぷよを含むブロックを消すしかない。この縦 2 連結が消えずに連鎖が続くためには、反対側の列で消えたブロックの上下の同色のぷよが連結して消える必要がある。よって、あるブロックが消えた時に両方の列で各自の縦 2 連結を生成し、どちらも消えないとすると、連鎖が止まる。

図 5.1 に残る縦 2 連結の数が $\lceil \frac{3}{4}n \rceil + 1$ である形を示す。以下では右の列に連鎖のきっかけとなる組ぷよを落としたものとする。左の列で連鎖を進め、右の列に縦２連結が残るとする。左の列では、連鎖ごとに縦 2 連結が 1 個生じ、すぐに消える。右の列では、連鎖ごとに縦 2 連結が最大 1 個生じる。しかし、連鎖ごとに両列で消えるぷよの数は異なるため、列の段差を考えて、４回続けて縦 2 連結を残すことはできない。なぜならば、４回続けて縦 2 連結を残すためには、連鎖ごとに右の列で縦２連結が 1 個生じる。一般性を失わずに、図 5.2(a) のように、右の列の A、C、E、G を消すことで縦 2 連結を作る。G の左のマスから C の左のマスまでを点線で囲っている。連鎖ごとに右の列で縦 2 連結を作るためには、点線で囲ったマスには C、E、G 以外の色があってはいけない。右の列の C、E、G の数が多くなると、点線で囲ったマスの数も増えるので、3 色のぷよで囲ったマスを埋めるのは難しくなる。C、E、G の数が 1 個ずつになっている場合に、点線で囲ったマスの数が最小の 7 個となるが、3 色のぷよで埋めると、少なくともある 1 色のぷよが縦 3 連結である。よって、図 5.2(b) のように、４連鎖目で、右の列で次に消える色 G が 2 個の H の間に入るようにするには、G の 4 連結が必要となるため、図 5.2(b) のような形は存在しないので、４連鎖目で縦 2 連結を作れない。図 5.1(e) の色 I のブロックは図 5.1(a) の色 A のブロックと同じ形である。この形では、３回続けて右の列に縦 2 連結を残した次の連鎖では縦 2 連結を右の列に残すことはできない。最後に、連鎖が止まる時、左の列で縦 2 連が最大 1 個生じる。他の形でこれ以上増やせないことの厳密な証明はできていないが、上記の考察から、おそらくこれが最大と思われる。

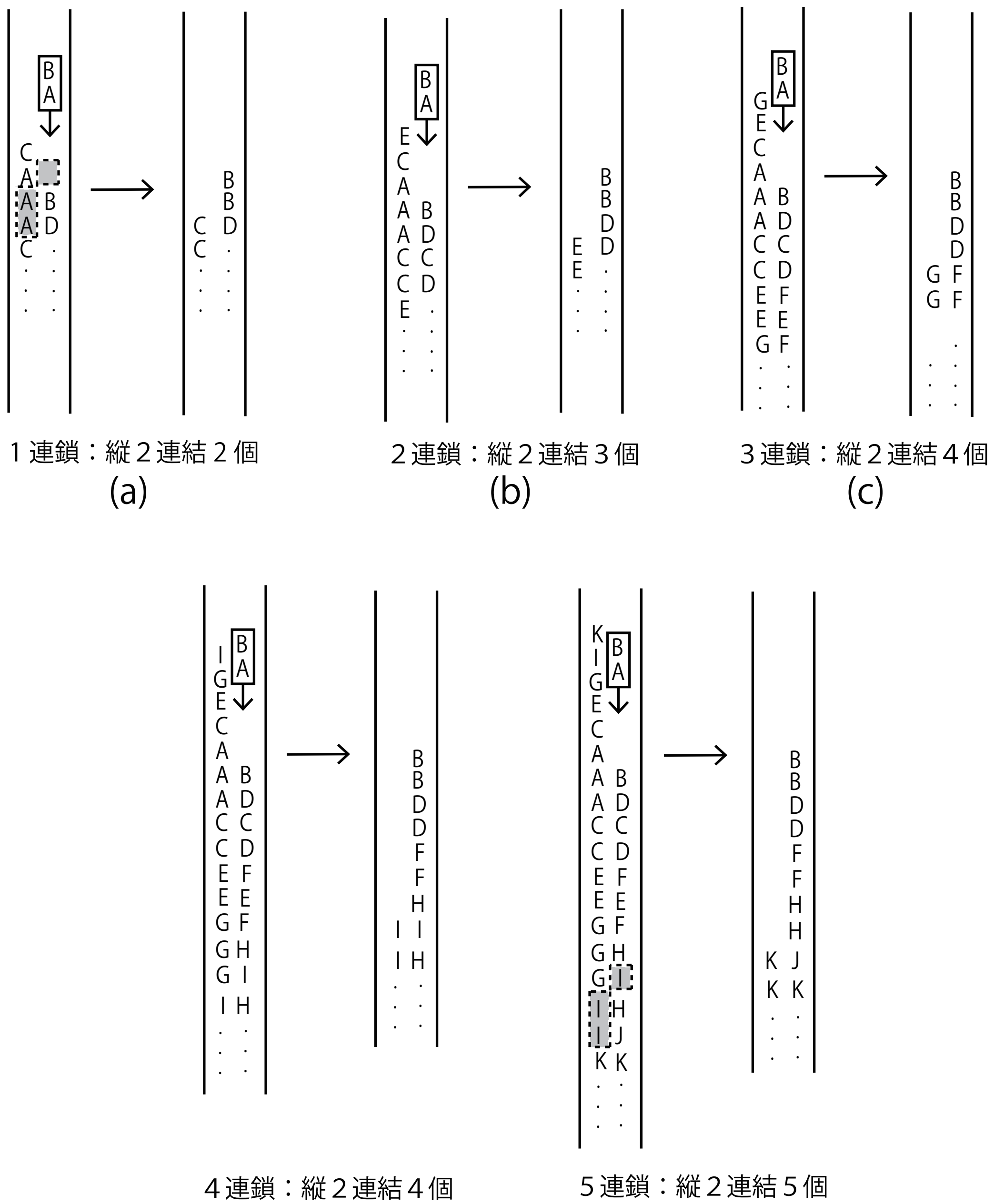


図 5.1: 縦2連結の最大数

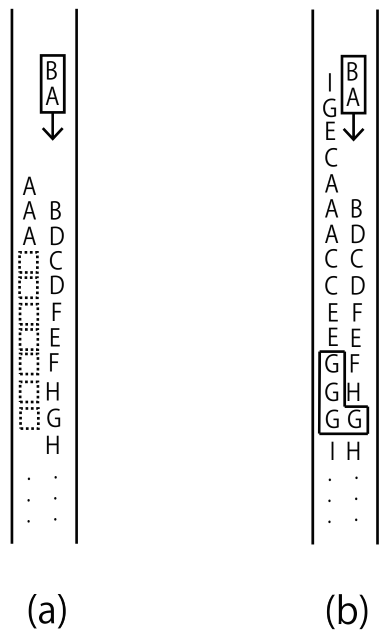


図 5.2: 連鎖の進行例

連鎖を開始する直前に存在し、n 連鎖によって消える縦 2 連結の数が最小と思われる形を図 5.3 に示す。図 5.3 とは、図 5.1(d) の下にぷよを置いて、新しく作られた縦 2 連結を IHFDB の順に消す形である。図 5.1 では消える縦 2 連結は n 個である。図 5.1 の形で n 連鎖が起きれば、連鎖後に残る縦 2 連結の数は約 $\frac{3}{4}n$ である。また、この $\frac{3}{4}n$ 個の縦 2 連結を用いて、$\frac{3}{4}n$ 連鎖ができる。よって、n 個の縦 2 連結があれば、$\frac{7}{4}n$ 連鎖ができる。s 連鎖なら、消える数は約 $\frac{4}{7}s$ となる。ただし、この場合連鎖後に新しい縦 2 連鎖は残らない。消えるブロック数に対する縦 2 連結の減少率が最小になるのは、図 5.1 の場合ではないかと思われる。

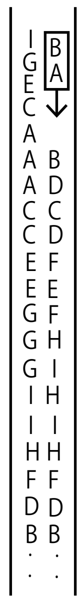
予想が正しければ、プレイヤーが長い連鎖を作る場合、連鎖で作れる縦 2 連結の数は消える縦 2 連結の数より少なくなる。よって、連鎖で盤面に存在する縦 2 連結の数を維持することができない。ぷよが消えるたびに必ず大きな連鎖が起こるとすれば、縦 2 連結の数は一定以上の比率で減少する。このため、プレイの過程で現れる縦 2 連結の延べ数が限られる。また、1 回ブロックが消えるたびに消滅あるいは同色で連結する単ぷよの数は定数個で抑えられる。必ず大きな連鎖が起こる場合については、以上のことから、プレイヤーが必敗であることが示せると考えられる。

ここまでは縦 2 連結だけを考えてきたが、連鎖に必要な対称な列を作る際に生成される単ぷよについて検討する。

色の集合を $\{1, 2, \cdots, k\}$ とする。k が偶数の時、与える組ぷよが $(1, 2), (3, 4), \cdots, (k-1, k), (1, 2), \cdots$ という順番を繰り返すものとする。この入力列に対してプレイヤーが必敗であれば、プレイヤーは任意の m に対して、先読み m で必敗であると言える。

以下、本章では色数が偶数の場合を考え、全てこの順序で組ぷよが落ちてくるものとする。例えば 6 色の場合、AB,CD,EF,AB,$\cdots$ の順に組ぷよが落下してくる。

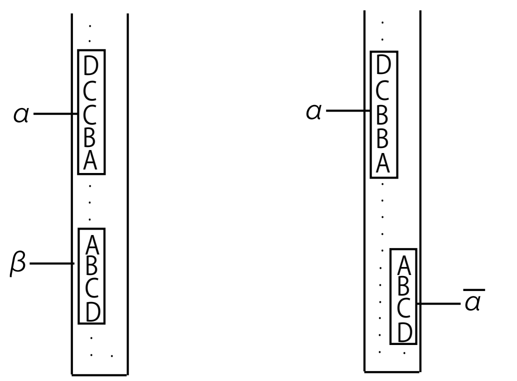
同じ列に存在する列 α と β が、色の並びが逆の時、α と β を対称集まりと呼ぶ。



9 連鎖で縦 2 連結が 5 個

図 5.3: 縦 2 連結の最小数

異なる列に存在する列 α と $\overline{\alpha}$ が、色の並びが逆の時、α と $\overline{\alpha}$ を準対称集まりと呼ぶ。対称集まりと準対称集まりについて、同色のぷよの個数は問わない。対称集まりと準対称集まりの例を図 5.4 に示す。



対称集まり α、β　　準対称集まり α、$\overline{\alpha}$

図 5.4: 対称集まりと準対称集まり

性質 5.2 盤面の幅 2、色数 $2k(k \geq 4)$ の時、異なる組ぷよに属するぷよが連続している箇所が l 個の 3 色以上の対称集まりに対して、途中でぷよを消さずに発火点の両端にこの対称集まりを作る時に必ず $(2k-8)l$ 個以上の単ぷよを反対側の列に生成する。

証明　ある対称集まりの列 α と列 β に対して、列 α で色 i の上に色 j があれば、列 β では色 j の上に色 i がある部分が存在する。色 i と色 j が異なる組ぷよに属し、その組ぷよの間に他の組ぷよが出現する場合、その組ぷよは反対側の列に落とすしかない。色 i から色 j の間、色 j から色 i の間の少なくとも一方には必ず他の組ぷよが現われる。組ぷよは k 種類があるため、その組ぷよの数が合計 $k-2$ である。色 i と色 j の間の反対側の列に落とすぷよのうち、一番上と下のものは縦 2 連結になる可能性があるため、最大 4 個のぷよが単ぷよにならない。このような i、j の箇所が l 個あれば、合計 $(2(k-2)-4)l$ 個以上の単ぷよを反対側の列に生成する。 □

$k=4$ の時、対称集まり α と β を作る例を図 5.5 に示す。B と C は異なる組ぷよに属する。β を生成する時に C の後に組ぷよ EF と GH が続くので、これらの組ぷよは右の列に落とさなければいけない。β の AB の次の組ぷよは CD であるが、CD を全て左の列に落下させることができないので、低い列の GH の上に必ず C か D が存在する。なぜならば、発火点では同色なぷよが必要であり、CD を全て左の列に落とすと、発火点にならないからである。この例では EGH で少なくとも 3 個の単ぷよができている。

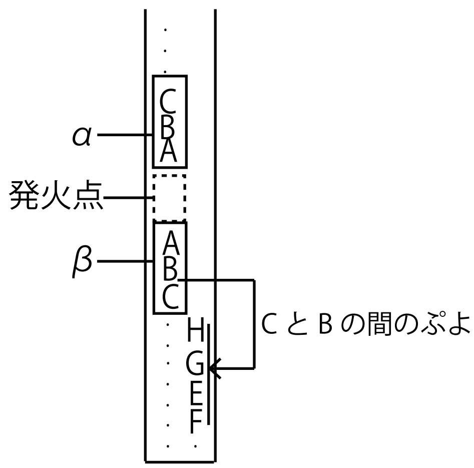


図 5.5: 対称集まりを作る例

性質 5.3 盤面の幅 2、色数 6 の時、余計なぷよが生じずに準対称集まりを作ることができる。

証明　準対称集まりを作る例を図 5.6 に示す。図 5.6 の左図に示したように組ぷよをそれぞれの列に落下させる。列によって組ぷよを上下逆に落とせば、右図の準対称集まりが得られる。 □

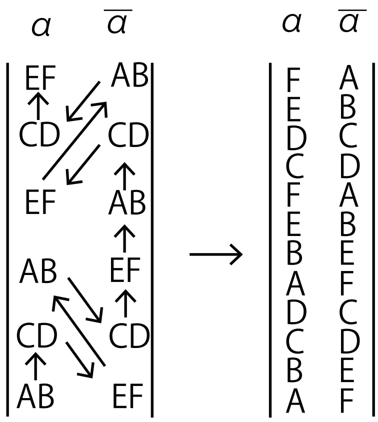


図 5.6: 準対称集まりを作る例

本章の性質より、色数が多くなるといくら先読みがあってもプレーヤにとって盤面のぷよの高さを抑えるのが難しくなると考えられる。一方、色数が少ない場合では、与えられる組ぷよがここで仮定した順番に繰り返しで落ちてきたら、プレイヤーが必勝であるケースが存在する。例えば、色数 3 の場合では、AB、AC、BC の順番の繰り返しが落ちてきたら、プレイヤーが必勝である。組ぷよの配置方法は図 5.7(a) に示す。ぷよの隣にある数字はそのぷよの出現順序である。6 個の組ぷよが落下した時点で盤面にぷよが存在しないようにできるため、これを繰り返すことにより組ぷよが積み上がらないことが分かる。色数 4 の場合では、AB、CD の順番の繰り返しが落ちてきたら、プレイヤーが必勝である。組ぷよの配置方法は図 5.7(b) に示す。9 個の組ぷよが落下した時点で盤面に AB しか存在しないようにできるため、次の組ぷよが CD なので、これを繰り返すことにより組ぷよが積み上がらないことが分かる。しかし、色数が 5 以上ではこのように単純な配置方法では無理だと考えられる。

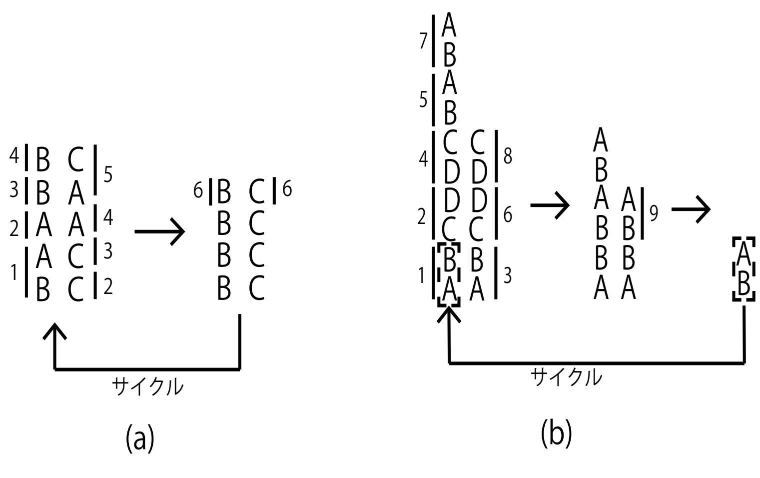


図 5.7: 色数 3，4 の進行例

6　おわりに

本論文では、1 人ゲームとしてのぷよぷよの必勝性について研究を行った。まず、盤面の幅と先読みの数を固定した場合に対して、プレイヤーが必敗となるために十分な色数を明らかにした。盤面の幅 w、先読みの数 m に対して、$w \geq 4$ の時、$w + 2m + (2m+2)\left\lfloor \frac{w-1}{3} \right\rfloor + 2$ 色以上の場合、プレイヤーは必敗であることを示した。また、幅 2 で先読みが 1 個の場合には、上記の結果より少ない 5 色でプレイヤーが必敗となることを示した。最後に、色数が増えると先読みの数にかかわらず必敗になるのではないかと予想し、幅 2 の場合について、関連するいくつかの性質を示した。

今後の課題として、任意の数の先読みに対して必敗になる色数を示すことが重要な課題である。また、その予想を一般の幅に拡張することができないかを検討する。また、先読みにより必勝になる条件を研究することも重要と考えられる。

参考文献

[1] R.A.Hearn and E.D.Demaine,“ Games, Puzzles, and Computation ”, A K Peters/CRC Press, 2009.

[2] Elwyn R. Berlekamp,John H. Conway, Richard K. Guy,“Winning Ways for Your Mathematical Plays: Volume 1 2nd Edition ”,A K Peters/CRC Press,2001

[3] Ikeda, K., Tomizawa, D., Viennot, S., and Tanaka, Y. (2012), Playing PuyoPuyo: Two search algorithms for constructing chain and tactical heuristics, Proc. 2012 IEEE Conf. on Computational Intelligence and Games, pp.71-78.

[4] GitHub - puyoai/puyoai: AI for puyo. https://github.com/puyoai/puyoai

[5] J.Brzustowski,“Can you win at TETRIS?”, Master's thesis, University of British Columbia, 1992.

[6] 松金輝久, 武永康彦,“ 組合せ最適化問題としてのぷよぷよの連鎖数判定問題 ”, 電子情報通信学会論文誌. D, 情報・システム J89-D(3), 405-413, 2006.

[7] Y.Takenaga and Y.Shimada, “ Strategies for Single-Player PuyoPuyo ”, ICGA Journal (to appear).

[8] 全虎山,“ 幅 2 色数 3 のぷよぷよの必勝性に関する研究 ”, 電気通信大学卒業論文,2015.