電気通信大学大学院 情報理工学研究科
情報・通信工学専攻 情報数理工学コース
平成 28 年度修士論文

ソーティングネットワークの 最小サイズに対する下界

平成 29 年 3 月 14 日

電気通信大学情報理工学研究科
情報・通信工学専攻情報数理工学コース

学籍番号 1531088

古川智裕

指導教員 (主): 垂井淳
指導教員: 武永康彦

目 次

図 目 次

表 目 次

1 はじめに

1.1 研究背景

比較ネットワークは数列ソートに用いられる演算処理モデルの 1 つであり、単純なモデルだが複雑な理論を持ち、計算効率の基準となるサイズ、及び深さの解析は近年活発となっている。2014 年には 9 入力及び 10 入力ソーティングネットワークにおける最小サイズが決定された。[2]

また、2016 年には修士論文により 11 入力ソーティングネットワークの下界が更新されたが、場合分けが膨大となり議論が複雑なものとなってしまった。[1]

本研究の目的は課題であった 11 入力ソーティングネットワークの下界の解析及び更新の議論の単純化、及び単純化した手法を用いた別の入力値のソーティングネットワークの下界の分析、更新とする。

1.2 本論文の構成

まず、第 2 章ではソーティングネットワークについての簡単な説明および先行研究を示している。第 3 章では平成 27 年度からの課題である $\hat{S}(11) \geq 34$ の証明の単純化に取り組んでいる。第 4 章および第 5 章では単純化した証明手法を用いて 13 入力および 15 入力ソーティングネットワークの最小サイズの下界についてそれぞれ更新している。第 6 章では 16 入力ソーティングネットワーク最小サイズの下界を更新している。第 7 章では研究の中で予想を立てたが重要な結果は得られなかったいくつかの事柄を紹介する。最後に第 8 章では今後の研究への展望を述べ、結びとする。

1.3 結果のリスト

1. 【結果 1】
   平成 27 年度の修士論文の課題であった 11 入力ネットワークの最小サイズの下界が 34 であるという証明を単純化した。
   【結論 1】
   平成 27 年度の修士論文 [1] は場合分けのパターンが多すぎるため、文章や図表の量が膨大になってしまった。本論文では最小値の通る経路 min 木において t 値という値を設定することで単純化を行っている。

2. 【結果 2】
   結果 1 で行った単純化した証明の手法を用い、13 入力ソーティングネットワークの最小サイズの下界が 43 であることを証明した。
   【結論 2】
   先行研究の各入力のソーティングネットワークの最小サイズの下界より 13 入力でも 11 入力と同じ手法で最小サイズの下界の更新が行えると考えた。本論文で

は実際に下界を更新している。

3. 【結果 3】
結果 1 で行った単純化した証明の手法を用い、15 入力ソーティングネットワークの最小サイズの下界が 52 であることを証明した。
【結論 3】
結果 2 と同様に先行研究より 15 入力でも同じ証明手法を用いて下界の更新ができると考えた。本論文では実際に下界を更新している。

4. 【予想 4】
$\hat{S}(16) \geq 57$
【結果 4】
16 入力ソーティングネットワークの最小サイズの下界が 57 であることを証明した。
【結論 4】
16 入力の場合、min1、min2 という値の他に 3 番目に小さい値 min3 を設定し、その経路を解析すれば下界の更新が行えるのではないかと考えた。本論文では実際に下界を更新している。

2 ソーティングネットワーク

2.1 比較ネットワーク

比較ネットワークは、入出力を行う複数のワイヤと、2 つのワイヤ間の数値を比較し入れ替える比較器の 2 律から構成される演算モデルである。特徴として、比較演算をいつ、どのような順番で行うか明確に定めていること、比較演算を並列的に実行するため計算時間を抑えることができるという 2 つがあげられる。

比較ネットワークの評価基準として、使用される比較器の数である**サイズ**、各ワイヤの入力から出力までの経路上にある比較器の最大数である**深さ**の 2 つがある。

2.2 比較器

比較器は 2 入力 x, y と 2 出力 x', y' を持ち、図 1 のように表す。2 つの値が入力されると、小さいほうの値を上に、大きいほうの値を下に出力する。

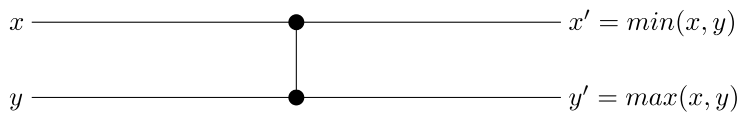

図 1: 比較器

2.2.1 ソーティングネットワークとは

ソーティングネットワークはあらゆる入力列に対し、出力値が必ず単調増加列となる比較ネットワークのことである。図 2 に 11 入力ソーティングネットワークの一例を示す [3]。11 入力ソーティングネットワークは 11 個の値からなる任意の数列を必ずソートされた状態で出力する。

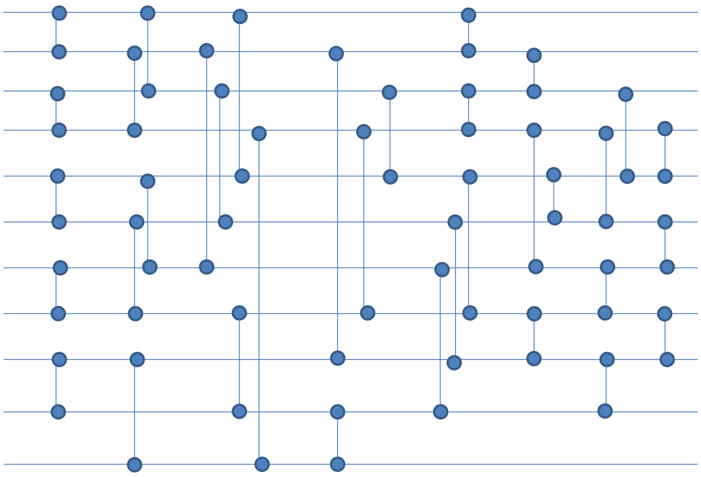

図 2: 11 入力ソーティングネットワーク

2.2.2 先行研究

最小サイズに関する先行研究に関して、上界と下界を表 1 にまとめた。

$\hat{S}(11)$ は 11 入力ソーティングネットワークを構成するのに必要な最小比較器数のことである。現在では $33 \geq \hat{S}(11) \geq 35$ を満たすと知られている [2]。

表 1: 最小サイズの先行研究

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
上界	16	19	25	29	35	39	45	51	56	60	71	78	86	92	$\cdots$
下界	16	19	25	29	33	37	41	45	49	53	58	63	68	73	$\cdots$

上界は実際に発見された各入力のソーティングネットワークの最小比較器数より求められ、下界は 10 入力の下界および D.Voorhis が証明した定理より求められている [3][2]。

$$\hat{S}(n+1) \geq \hat{S}(n) + \lceil \log n \rceil$$

3　$\hat{S}(11) \geq 34$ の証明の単純化

平成 27 年度の修士論文 [1] では場合分けが膨大になったことにより、議論が長く複雑なものとなってしまった。

そこでこの章では課題であった $\hat{S}(11) \geq 34$ の証明の単純化について考察していく。

3.1　方針

補題 3.1 n 入力ソーティングネットワークに最小値 min*1* を与え、その経路を刈り取ると $n-1$ 入力ソーティングネットワークとなる。また *2* 番目に小さい値 min*2* を同時に与え、*2* つの経路を同時に刈り取ると、$n-2$ 入力ソーティングネットワークとなる。

ここで、ある 11 入力ソーティングネットワークに min1、および min2 を与えると、合計で 9 個の比較器を通過する場合が存在するとわかった。表 1 より $\hat{S}(9) = 25$、$\hat{S}(10) = 29$、そして $\hat{S}(11) \geq 33$ と知られていることに着目し、全ての 11 入力ソーティングネットワークが

(1) **「min1 を与えた時、5 個以上の比較器を通過する場合がある」**

(2) **「min1 と min2 を与えた時、合計 9 個以上の比較器を通過する場合がある」**

以上 2 つの条件のいずれかを満たすならば $\hat{S}(11) \geq 34$ が証明できるのではないかと考えた (本項以降、条件 (1)、条件 (2) と呼ぶ)。

3.2 min 木

定義 3.1 図 *3* に図 *2* のソーティングネットワークの各ワイヤに最小値 min*1* を入力したときに通る経路を赤線で表示した。このように最小値 min*1* を入力したときに通りうる比較器を内部ノード、各ワイヤを葉として木構造で表したものを min 木と呼ぶことにする。本研究では左側の木の葉の数を n、右側の葉の数を m として *[n:m]* 木と表すこととする。また、左右対称の場合は性質が変わらないので同一のものとして扱う。

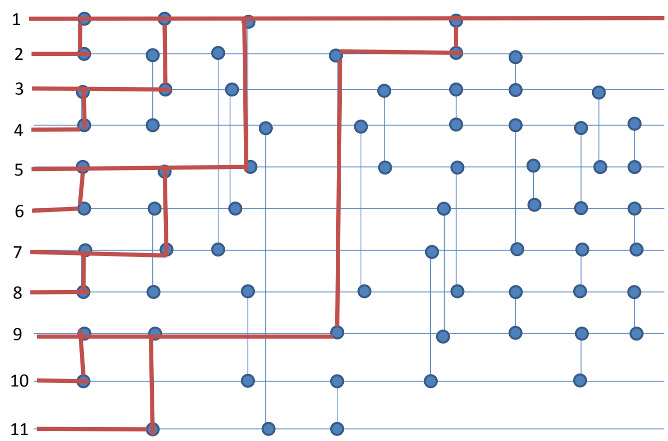

図 3: min 木の求め方

ここで、n もしくは m が 9 以上の場合、min 木の高さは 5 となるので、min1 を与えた時、5 個以上の比較器を通る経路は必ず存在する。したがって本研究で考察を行う木は [3:8] 木、[4:7] 木、[5:6] 木に限定する。[3:8] 木は 1 種類、[4:7] 木は 2 種類、[5:6] 木は 4 種類存在し、全部で 7 種類である。

3.3 割り込みについて

定義 3.2 min **木のある比較器で負けたものが別の比較器によって** min **木を流れる数値と比較され、再び** min **木に戻ることがある。これを割り込みと呼ぶ。**

min 木の内部ノードは比較器であるので子を二つ持つが、負けたものが割り込むノードは子のノードの勝者と割り込む敗者がぶつかるため、子を一つだけ持つノードとして表す。

注意 3.1 割り込みを考慮するに当たって *2* 点に注意する。まず、子孫ノードへの割り込みは存在しない。比較ネットワークは閉路を持ってはいけないが、子孫ノードに割り込みがある場合、閉路が現れる。次に木の高さが *5* 以上になる割り込みは考慮しない。何故ならこのような割り込みがあるならば、そのネットワークは $\hat{S}(11) \geq 34$ の条件 *(1)* を満たしているからである。

3.4 t 値と高さ列

定義 3.3 min***1*** **と** min***2*** **が比較される各内部ノードについて、「そのノードを通る** min***1*** **が** min **木で通過する比較器」と「**min***2*** **が** min***1*** **とぶつかるまでに通ってきた比較器の個数」の合計は** min***1*** **と** min***2*** **をどの葉に与えるかによって変わる。その最大値を** t **値と定義する。**

全ての t 値を並べたものを高さ列と呼ぶことにする。高さ列は {} で閉じて、要素は大きい順に表すこととする (例:{7,6,6,...})。

min 木の任意の葉に min1 と min2 をそれぞれ与える場合、それぞれの内部ノードにおいて min1 と min2 がぶつかる可能性がある。min1 は必ず全てのノードで比較に勝つが、min2 は min1 とぶつかるノードで比較に負けるので、全ての内部ノードについて min1 と min2 が通過する比較器の合計は考慮しなくてはならない。min 木において min1 と min2 が通過する比較器の合計とどのノードで min1 と min2 がぶつかるかはそれぞれをどの葉に与えるかによって異なる。

3.1 節で述べた $\hat{S}(11) \geq 34$ の条件 (2) を満たさないと仮定すると、min 木において例えば t 値が 7 のノードで負けたものは高々1 つの比較器、t 値が 6 のノードで負けたものは高々2 つの比較器しか通過できない。したがって min 木の t 値が n のノードの個数を d_n として式 (1) を満たすなら $\hat{S}(11) \geq 34$ である。

$$128d_8 + 64d_7 + 32d_6 + 16d_5 + 8d_4 + 4d_3 + 2d_2 + d_1 > 128 \tag{1}$$

min2 が min1 に負けた後、2 番目に小さい値と決定され、上から 2 番目のワイヤに出力されるまでの経路を min 木のように木構造で表すと考える。その時それぞれの葉は t 値を情報として持っており、もし条件 (2) を満たさないなら $8 - t$ 以下の高さでなければならない。木の内部ノードは比較器を表しているので子の数は高々2 である。つまり仮定を満たす場合 t 値が n のノードは $2^{(8-n)}$ 個以下でなくてはならない。

したがって式 (1) を満たすなら、$\hat{S}(11) \geq 34$ である。

3.5 割り込みによる t 値への影響

定理 3.1 min*2* は min*1* にしか負けないので、割り込み先のノード、つまり子を一つだけ持つノードで min*1* と min*2* がぶつかることはない。したがってそのようなノードは t 値を持たない。割り込み元のノードで負けたものは必ず割り込み先のノードへ流れるため、割り込み元のノードの t 値は高さ列から除き、min*1* と割り込んだ min 2 がぶつかるノードで min*2* が通ってきた比較器と min*1* が与えられた葉の深さを合計し、そのノードで割り込まずにぶつかる場合と比べ大きいほうを t 値とする。

min 木について、割り込みのない場合と割り込みがある場合を比べると、各ノードの t 値が異なる場合があり、その為、式 (1) の左辺の値も異なる場合がある。割り込みのない場合の min 木を図 4、割り込みがある場合の min 木を図 5 に図示する。それぞれの高さ列に注目すると、図 4 は $\{6,6,5,5,4,4,4,4,3,3\}$ で式 (1) の左辺の値が 136、図 5 は $\{6,6,5,5,4,4,4,4,3\}$ で式 (1) の左辺の値が 132 となり、後者の数値が小さいことがわかる。

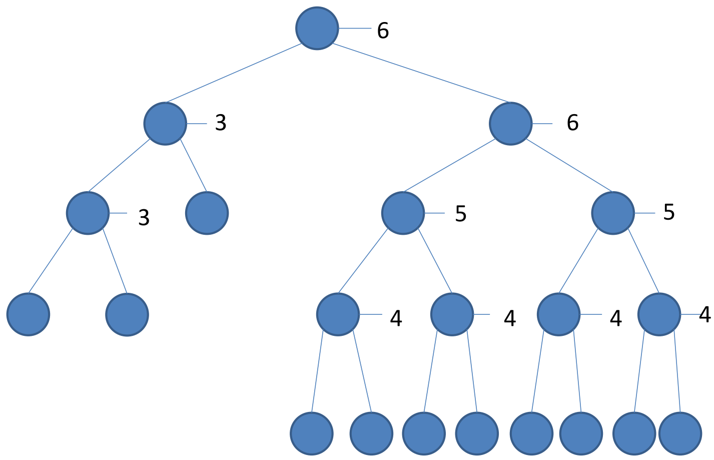

図 4: 割り込みのない [3:8] 木

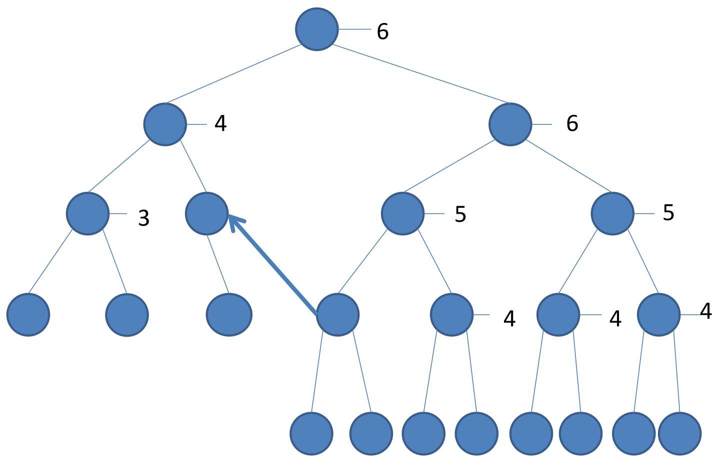

図 5: 割り込みのある [3:8] 木

3.6　割り込む側

定理 3.2 min 木は二分木であるので、左側の部分木、右側の部分木というように分けると min*2* が min*1* に負けるノードと割り込むノードが同じ側にある場合と違う側にある場合が存在する。

同じ側に割り込む場合、根ノードにたどり着く前のあるノードで負けた min2 と min1 が再びぶつかる。
違う側に割り込む場合、根ノードで必ず負けた min2 と min1 がぶつかる。
すなわち、同じ側に割り込んだ後再び割り込むことは可能だが、違う側に割り込んだ場合再び割り込むことはできない。

3.7　負けた者同士の比較

定理 3.3 *2* つ以上のあるノードで負けた者同士で比較が行われた後、その勝者が割り込む場合が存在する。

例えば t 値が 5 のノードから割り込んでいる場合と t 値が 4 のノードで負けたもの同士 2 つでの比較の後割り込んでいる場合は式 (1) の左辺の値は全く同じである。3.6 節より、違う側で負けたもの同士での比較の後に割り込む場合は片方からのみ割り込む場合と比べ、t 値は異なる。

3.8　全てのノードが違う側に割り込む場合

min 木の根ノードの比較で最小値と 2 番目に小さい値が決定する、すなわち根ノード以外の全てのノードが min 木に割り込む場合を考える。

結論として、以上のような状態は起こり得ない。まず [3:8] 木は右側の木に割り込みが起こった場合、木の高さは必ず 5 以上となる。[4:7] 木 (2) と [5:6] 木の全てに関しては割り込み可能なノードはすべて根ノードの子の子孫となるので、根ノードの子が両方とも割り込む場合ネットワーク中に閉路ができることとなる。[4:7] 木 (1) に関しては閉路を作らず、木の高さが 5 以上にならずに全てのノードが反対の側へ割り込むには図 6 の赤色のノードにそれぞれ割り込むしかない。この場合根ノードの t 値は 9 以上になるので $\hat{S}(11) \geq 34$ の条件を満たす。

以上より、根ノードで負けたものは 1 回以上比較器を通過することとなる。したがって 11 入力ソーティングネットワークの高さ 4 の min 木において t 値が 8 以上のノードが現れた場合、min1 と min2 が合計 9 個以上の比較器を通過する経路が存在することになりサイズ 34 以上の条件を満たす。ソーティングネットワークは閉路を持たないので

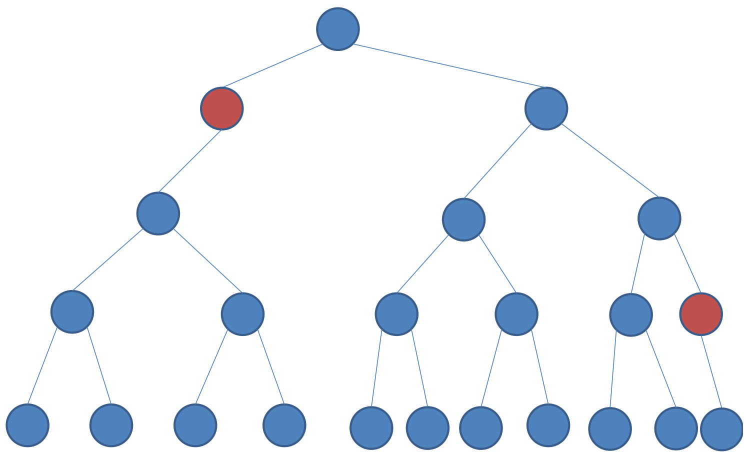

図 6: [4:7] 木 (1) 閉路無しでの割り込み可能箇所

全てのノードが違う側に割り込むことはできない。したがって根ノードで負けた min2 は最低でも一つ以上の比較器は通過する。すなわち t 値が 8 以上のノードがあればその時点で $\hat{S}(11) \geq 34$ の条件を満たす。

3.9　それぞれの木

今までの節の情報を基に 11 入力ソーティングネットワークの各 min 木に対して考察を進める。木の高さが 5 以上にならないような割り込みが可能な場所それぞれに対して、式 (1) の左辺の値が最も小さくなるような割り込みを考える。

割り込みが無い場合について、[3:8] 木は図 7、[4:7] 木 (1) は図 8、[4:7] 木 (2) は図 9、[5:6] 木 (1) は図 10、[5:6] 木 (2) は図 11、[5:6] 木 (3) は図 12、[5:6] 木 (4) は図 13 にそれぞれ図示する。

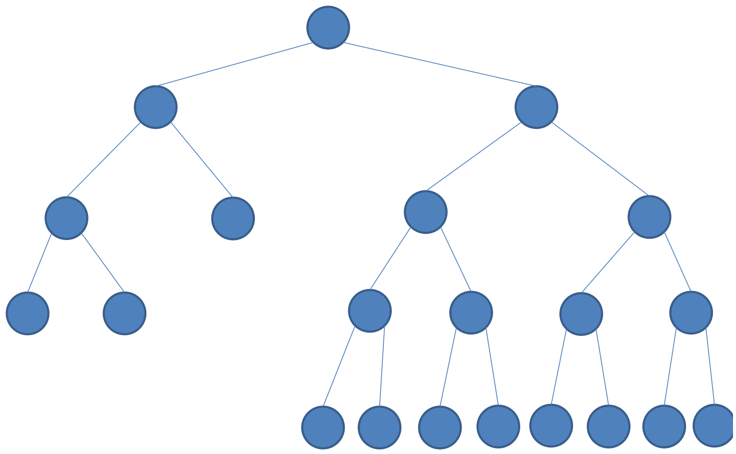

図 7: [3:8] 木

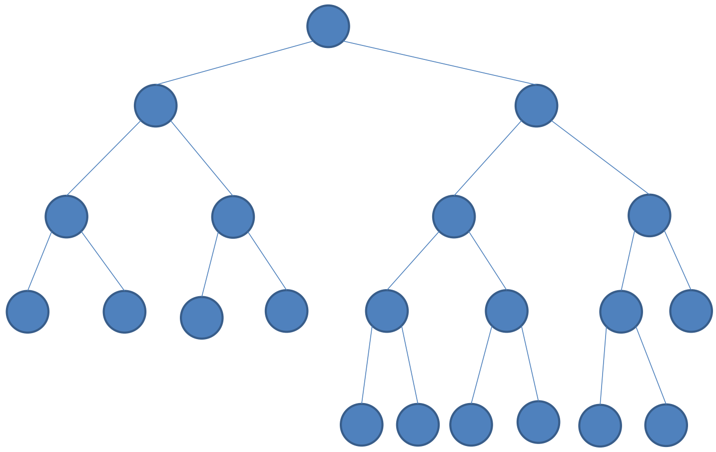

図 8: [4:7] 木 (1)

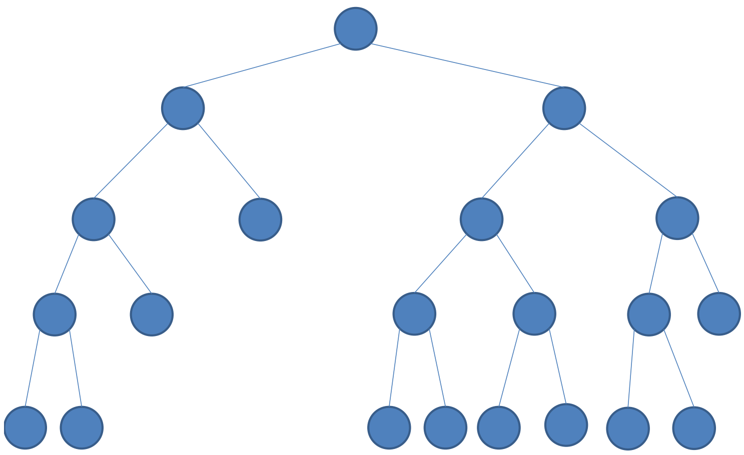

図 9: [4:7] 木 (2)

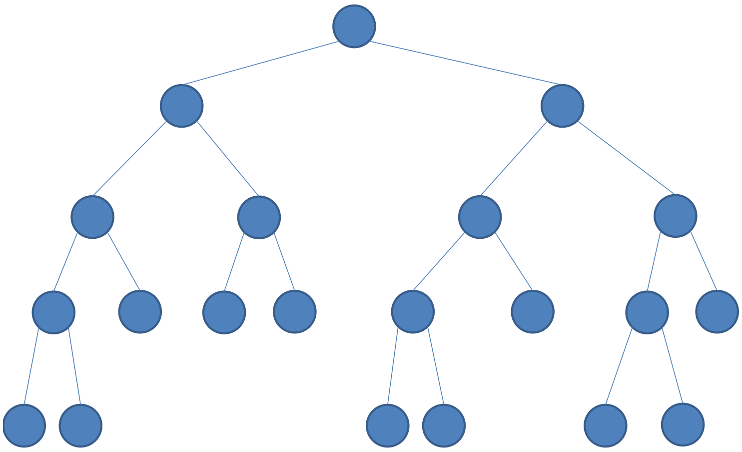

図 10: [5:6] 木 (1)

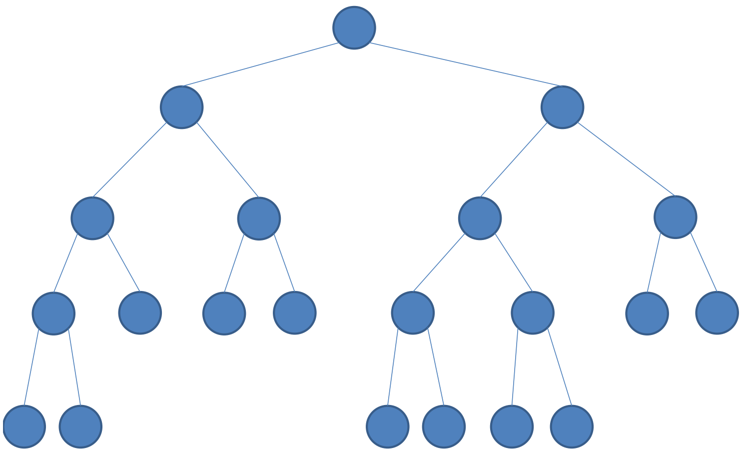

図 11: [5:6] 木 (2)

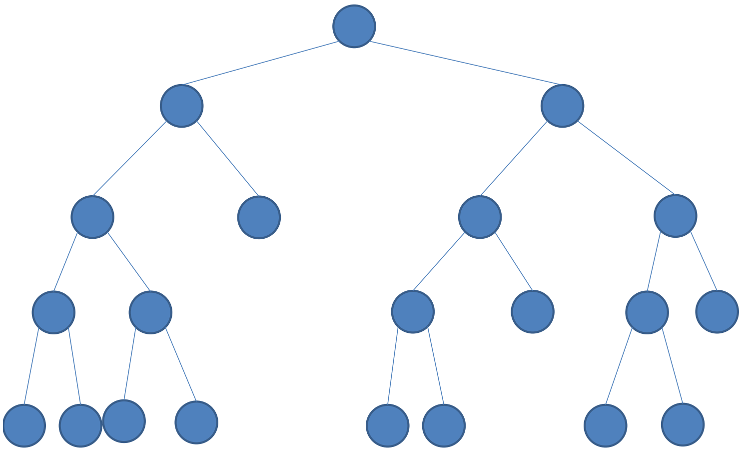

図 12: [5:6] 木 (3)

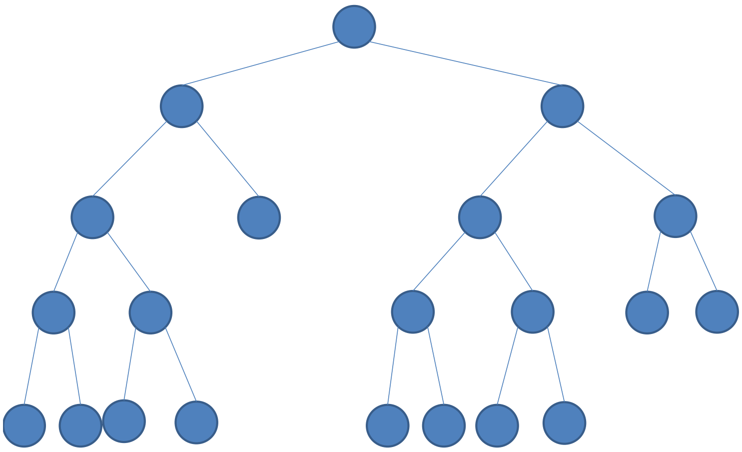

図 13: [5:6] 木 (4)

3.10 [3:8] 木

[3:8] 木は、割り込み方が大きく二つに分類できる。

まず、図 14 に一つ目のパターンの [3:8] 木の割り込み可能なノード (今後割ノードと呼ぶ) と割り込みが無い場合の t 値を図示する。

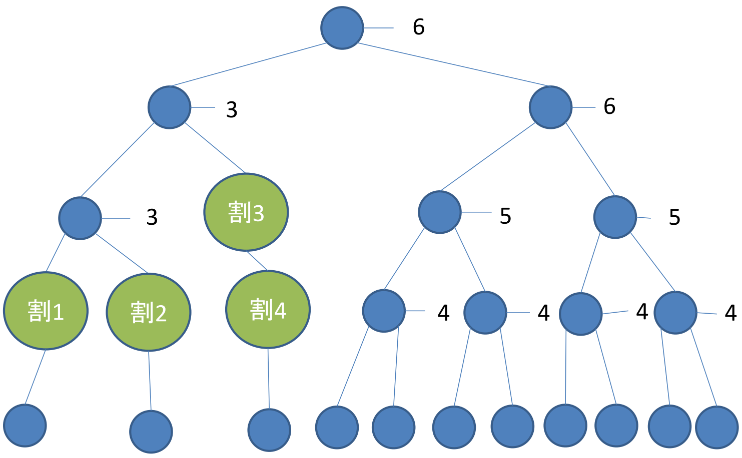

図 14: [3:8] 木 (割り込み可能場所を表示)

これ以外の割り込みが行われると木の高さが 5 以上になり、$\hat{S}(11) \geq 34$ の条件を満たす。高さ列は {6,6,5,5,4,4,4,4,3,3} となり、式 (1) の左辺の値は 136 となる。したがって割り込みが無い場合、この木を持つ 11 入力ソーティングネットワークはサイズ 34 以上である。

次にそれぞれの割ノードについて解析を行っていく。

(i) 割ノード 1,2

t 値が 8 のノードが現れてはいけないので t 値が 4 以下のノードからしか割り込めない。割ノード 1,2 のどちらかに割り込みがある場合その親の t 値が 4、さらにその親の t 値が 4、根ノードの t 値が 7 となる。どちらにも割り込みがある場合さらに割ノード 1,2 の親の t 値が 5 となる。したがってそれぞれ t 値が 4 のノードからの割り込みを仮定すると、高さ列はどちらかに割り込んでいる場合とどちらにも割り込んでいる場合それぞれ {7,6,5,5,4,4,4,4,4}、{7,6,5,5,5,4,4,4} となり、どちらも式 (1) の左辺の値は 168 となり、サイズ 34 以上の条件を満たす。

(ii) 割ノード 3

t 値が 8 のノードが現れてはいけないので t 値が 5 以下のノードからしか割り込めない。違う側からの割り込みがある場合割ノード 3 の親の t 値が 4 となり、さらに t 値が 5 のノードからの割り込みがある場合根ノードの t 値が 7 となる。同じ側からの割り込

みがある場合親の t 値が割り込んだノードの t 値 $+1$ となる。同じ側からの割り込みがある場合式 (1) の左辺の値が増えることは自明である為、サイズ 34 以上の条件を満たす。違う側の t 値が 4 のノードから割り込んでいる場合、高さ列は $\{6,6,5,5,4,4,4,4,3\}$ で式 (1) の左辺の値は 132 となりサイズ 34 以上の条件を満たす。

(iii) 割ノード 4

割ノード 4 は割ノード 3 に割り込みがある場合のみ存在し、根ノードの t 値が 8 になってはいけないので t 値が 4 のノードからしか割り込めない。割り込みがある場合、割ノード 3 の親の t 値が 5 となり、根ノードの t 値が 7 となる。t 値が 4 のノードから割り込みがある場合、先述した割ノード 3 への割り込みも起きているとすると高さ列は $\{7,6,5,5,5,4,4,3\}$ となる。式 (1) の左辺の値は 164 で、サイズ 34 以上の条件を満たす。

次に二つ目のパターンについて考察する。図 15 に二つ目のパターンの [3:8] 木の割り込み可能なノードと割り込みが無い時の t 値を図示する。

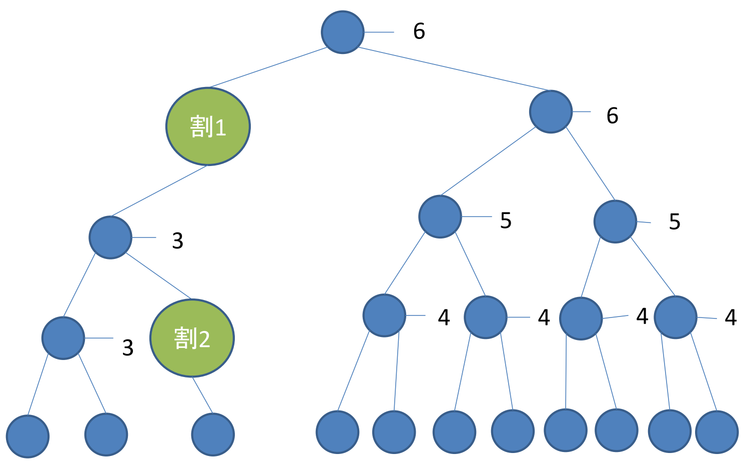

図 15: [3:8] 木への割り込みの別パターン

割ノード 1 に割り込みがある場合、割り込むノードの t 値に関わらず根ノードは t 値は 7 に、左側の木の t 値が 3 のノードは t 値が 4 となる。したがって右側の木の t 値が 6 のノードからの割り込みがある場合、高さ列は $\{7,5,5,4,4,4,4,4,4\}$ となり、式 (1) の左辺の値は 144 となる。したがってサイズ 34 以上の条件を満たす

また、割ノード 2 は割ノード 1 に割り込みがない場合、一つ目のパターンの割ノード 3 と同一なので、割ノード 1 に割り込んでいる場合について考察する。根ノードの t 値が 8 になってはいけないので t 値が 4 のノードからしか割り込めず、割り込みがある場合高さ列は $\{7,5,5,5,4,4,4,4\}$ となり、式 (1) の左辺の値は 144 となる。したがってサイズ 34 以上の条件を満たす。

以上より、[3:8] 木は、割り込みの有無に関わらずサイズ 34 以上となる条件を必ず満たすので、[3:8] 木を持つ 11 入力ソーティングネットワークは $\hat{S}(11) \geq 34$ である。

3.11 [4:7] 木 (1)

[4:7] 木 (1) は、割り込み方が大きく二つに分類できる。

まず、図 16 に一つ目のパターンの [4:7] 木 (1) の割り込み可能なノードと割り込みが無い時の t 値を図示する。

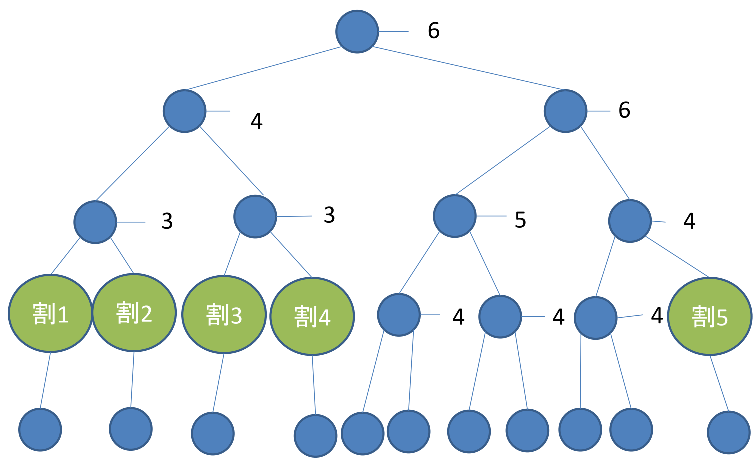

図 16: [4:7] 木 (1)(割り込み可能場所を表示)

これ以外の割り込みが行われると木の高さが 5 以上になり、$\hat{S}(11) \geq 34$ の条件を満たす。高さ列は {6,6,5,4,4,4,4,4,3,3} となり、式 (1) の左辺の値は 128 となる。したがって割り込みが無い場合、この木を持つ 11 入力ソーティングネットワークはサイズ 34 以上とは限らない。

ここで割ノード 1,2,3,4 は根ノードの t 値が 8 になってはいけないので t 値が 4 のノードからしか割り込めない。どれか 1 つ以上の割ノードに割り込みがある場合、高さ列は 5 つの種類を取る (この時割ノード 5 には割り込みがないものとする)。また、これらは全て t 値が 4 のノードから割り込んでいるとする。

(i) 全て割り込みがある場合

{7,6,6,5,5,5,5}　式 (1) の左辺の値：176

(ii) どれか 3 つに割り込みがある場合

{7,6,6,5,5,4,4}　式 (1) の左辺の値：176

(iii) 1 か 2、3 か 4 からそれぞれ 1 つずつ割り込みがある場合

{7,6,6,5,4,4,4}　式 (1) の左辺の値：176

(iv) 1 と 2、または 3 と 4 に割り込みがある場合

{7,6,5,5,5,4,4,3}　式 (1) の左辺の値：164

(v) どれか 1 つに割り込みがある場合

{7,6,5,5,4,4,4,4,3}　式 (1) の左辺の値：164

したがって全ての場合でサイズ 34 以上の条件を満たす。

また、割ノード 5 には t 値が 4 以下のノードが割り込むと割ノード 5 の親の t 値が 5 に、同じ側の t 値が 5 のノードから割り込むとさらにその親ノードが t 値が 7 となる。よって t 値が 4 のノードから割り込む場合、高さ列は {6,6,5,5,4,4,4,3,3} で式 (1) の左辺の値は 128 となる。よって割り込みが無い場合と変わらない。

次に二つ目のパターンについて考察する。図 17 に二つ目のパターンの [4:7] 木 (1) の割り込み可能なノードと割り込みが無い時の t 値を図示する。

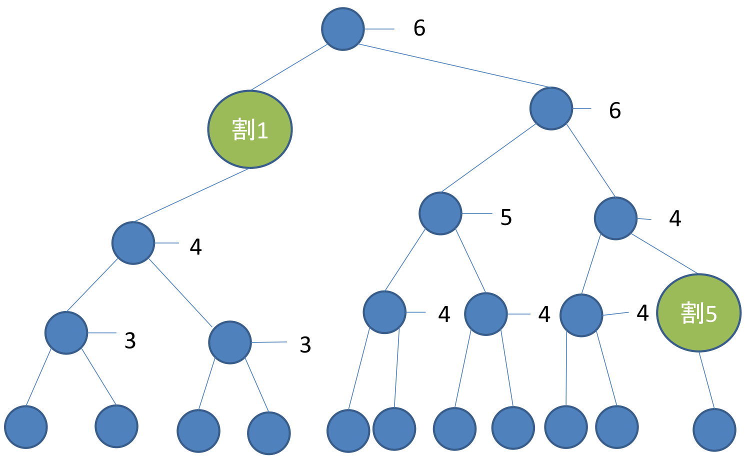

図 17: [4:7] 木 (1) への割り込みの別パターン

割ノード 1 は割り込むノードの t 値に関わらず、根ノード及び左側の木の全てのノードの t 値が 1 増えるので、右側の木の t 値が 6 のノードから割り込むと、高さ列は {7,5,5,4,4,4,4,4,4} となり、式 (1) の左辺の値は 144 となる。したがってサイズ 34 以上の条件を満たす

また、割ノード 5 への割り込みは一つ目のパターンと共通である。

以上より [4:7] 木 (1) は、割り込みが無い場合及び割ノード 5 に t 値が 4 のノードから割り込む場合、式 (1) の左辺の値は 128 なのでこれだけでは [4:7] 木 (1) を持つ 11 入力ソーティングネットワークは $\hat{S}(11) \geq 34$ であると言えない。割り込みが無い場合の [4:7] 木 (1) がサイズ 34 以上となる証明は文献 [1] の第 6 章にて詳しく述べられている。本論文ではその証明についての手法について簡単に説明する。

11 入力ソーティングネットワークにおいて、最大値 max1 を入力したときに通りうる比較器を内部ノード、各ワイヤを葉として木構造で表した max 木と呼ぶことにする。2 番目に大きい max2 も同時に与えるとき、min1、min2 と同様に以下の 2 つの条件どちらかを満たせば、その 11 入力ソーティングネットワークはサイズ 34 以上である。

(1) 「max**1 を与えた時、5 個以上の比較器を通過する場合がある**」

(2) 「max**1 と** max**2 を与えた時、合計 9 個以上の比較器を通過する場合がある**」

式 (1) の左辺が 128 以下となるような min 木は [4:7] 木 (1) のみなので、max 木も同様に [4:7] 木 (1) の形を取るものとする。しかし min 木と max 木が両方 [4:7] 木 (1) の形を取ると必ずどちらかに割り込みが発生してしまう。$\hat{S}(11) \geq 34$ の条件 (2) を満たさないように 2 番目に小さい値を決定すると、2 番目に大きい値を決定する際に条件 (2) を必ず満たすことになり、[4:7] 木 (1) を持つ 11 入力ソーティングネットワークはサイズ 34 以上であることを証明している [1]。

3.12　[4:7] 木 (2)

図 18 に [4:7] 木 (2) の割り込み可能なノードと割り込みが無い時の t 値を図示する。

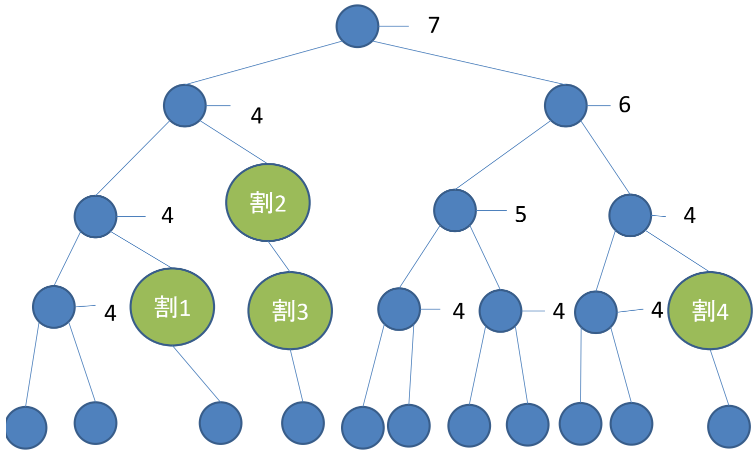

図 18: [4:7] 木 (2)(割り込み可能場所を表示)

これ以外の割り込みが行われると木の高さが 5 以上になり、$\hat{S}(11) \geq 34$ の条件を満たす。高さ列は {7,6,5,4,4,4,4,4,4,4} となり、式 (1) の左辺の値は 168 となる。したがって割り込みが無い場合、この木を持つ 11 入力ソーティングネットワークはサイズ 34 以上である。

次にそれぞれの割ノードについて解析を行っていく。

(i) 割ノード 1,4

割ノード 4 に同じ側の t 値が 5 のノードから割り込むと、高さ列が {7,7,5,4,4,4,4,4,4} となり式 (1) の左辺の値は 192 となりサイズ 34 以上の条件を満たす。したがって割ノード 1,4 は根ノードの t 値が 8 になってはいけないので t 値が 4 のノードからしか割り込めない。割り込む場合、割ノード 1 または 4 の親の t 値が 5 となるので高さ列は {7,6,5,5,4,4,4,4,4} となり式 (1) の左辺の値は 168 でサイズ 34 以上の条件を満たす。

(ii) 割ノード 2

割ノード 2 は割り込むと親の t 値が 5 となる。したがって違う側の t 値が 5 のノードから割り込む場合、高さ列は {7,6,5,4,4,4,4,4,4} となり式 (1) の左辺の値は 160 となる。したがってサイズ 34 以上の条件を満たす。

(iii) 割ノード 3

割ノード 3 は割ノード 2 に割り込みがある場合のみ存在し、t 値が 4 のノードからしか割り込めない。割り込みがある場合、割ノード 2 の親の t 値が 6 となる。この時先述

の割ノード 2 への割り込みも存在すると考えると高さ列は {7,6,6,4,4,4,4,4} となる。式 (1) の左辺の値は 168 で、サイズ 34 以上の条件を満たす。

以上より、[4:7] 木 (2) は、割り込みの有無に関わらずサイズ 34 以上となる条件を必ず満たすので、[4:7] 木 (2) を持つ 11 入力ソーティングネットワークは $\hat{S}(11) \geq 34$ である。

3.13 [5:6] 木 (1)

[5:6] 木 (1) は、割り込み方が大きく二つに分類できる。

まず、図 19 に一つ目のパターンの [5:6] 木 (1) の割り込み可能なノードと割り込みが無い時の t 値を図示する。

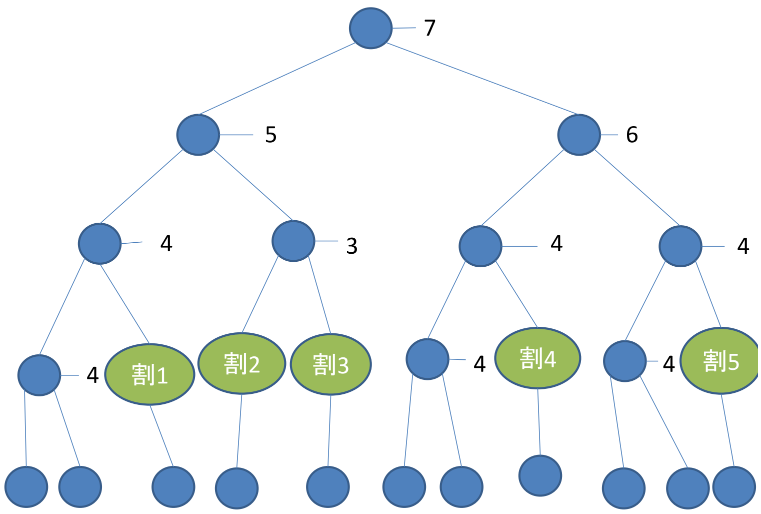

図 19: [5:6] 木 (1)(割り込み可能場所を表示)

これ以外の割り込みが行われると木の高さが 5 以上になり、$\hat{S}(11) \geq 34$ の条件を満たす。高さ列は {7,6,5,4,4,4,4,4,4,3} となり、式 (1) の左辺の値は 164 となる。したがって割り込みが無い場合、この木を持つ 11 入力ソーティングネットワークはサイズ 34 以上である。

次にそれぞれの割ノードについて解析を行っていく。ここで t 値が 8 になってはいけないのでそれぞれの割ノードには t 値が 4 以下のノードからしか割り込めない。

(i) 割ノード 1

割ノード 1 に割り込みがある場合、割ノード 1 の親の t 値が 5 になる。割り込むノードの t 値は関係ないので t 値が 4 のノードから割り込む場合、その時高さ列は {7,6,5,5,4,4,4,4,3} となり式 (1) の左辺の値は 164 でサイズ 34 以上の条件を満たす。

(ii) 割ノード 2,3

割ノード 2,3 に割り込みがある場合、片方のみの割り込みで割ノード 2,3 の親の t 値が 4、その親が t 値が 6 となる。両方割り込むとさらに割ノード 2,3 の親の t 値が 5 となる。それぞれ t 値が 4 のノードから割り込む場合、この時高さ列は片方のみで $\{7,6,6,4,4,4,4,4,4\}$、両方で $\{7,6,6,5,4,4,4,4\}$ となり、式 (1) の左辺の値は 176 となりサイズ 34 以上の条件を満たす。割ノード 1 に同じ側の t 値が 4 のノードからの割り込みがある場合、その親が割ノード 2 または 3 に割り込む場合高さ列は $\{7,7,6,4,4,4,4,4\}$ となり式 (1) の左辺の値は 200 となりサイズ 34 以上の条件を満たす。

(iii) 割ノード 4,5

割ノード 4,5 に割り込みがある場合は割ノード 1 とほぼ同様の結果となるが、割ノード 4,5 のどちらかに同じ側の t 値が 4 のノードから割り込み、その親からもう一方の割ノードに割り込む、という場合がある (この時ネットワークに閉路ができないように割り込みが行われる)。その場合、高さ列は $\{7,7,5,5,4,4,4,3\}$ で式 (1) の左辺の値は 188 でサイズ 34 以上の条件を満たす。

次に二つ目のパターンについて考察する。図 20 に二つ目のパターンの [5:6] 木 (2) の割り込み可能なノードと割り込みが無い時の t 値を図示する。

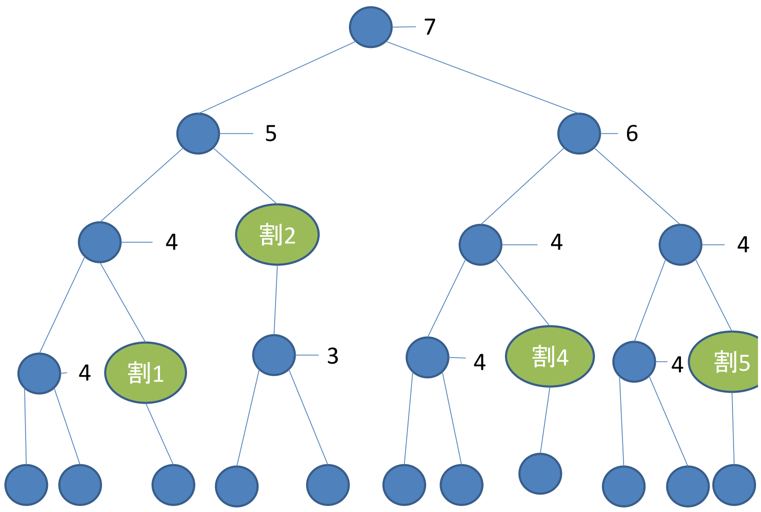

図 20: [5:6] 木 (1) への割り込みの別パターン

この時割ノード 1,4,5 は一つ目のパターンと同一である。t 値が 8 になってはいけないので割ノード 2 には t 値が 5 以下のノードからしか割り込めない。したがって割ノード 1,4,5 いずれかに割り込みがある時の t 値が 5 の親から割り込む場合、高さ列は $\{7,6,6,4,4,4,4,4\}$ となり、式 (1) の左辺の値は 168 となりサイズ 34 以上の条件を満たす。

以上より、[5:6] 木 (1) は、割り込みの有無に関わらずサイズ 34 以上となる条件を必ず満たすので、[5:6] 木 (1) を持つ 11 入力ソーティングネットワークは $\hat{S}(11) \geq 34$ で

ある。

3.14　[5:6] 木 (2)

[5:6] 木 (2) は、割り込み方が大きく 2 つに分類できる。

まず、図 21 に一つ目のパターンの [5:6] 木 (2) の割り込み可能なノードと割り込みが無い時の t 値を図示する。

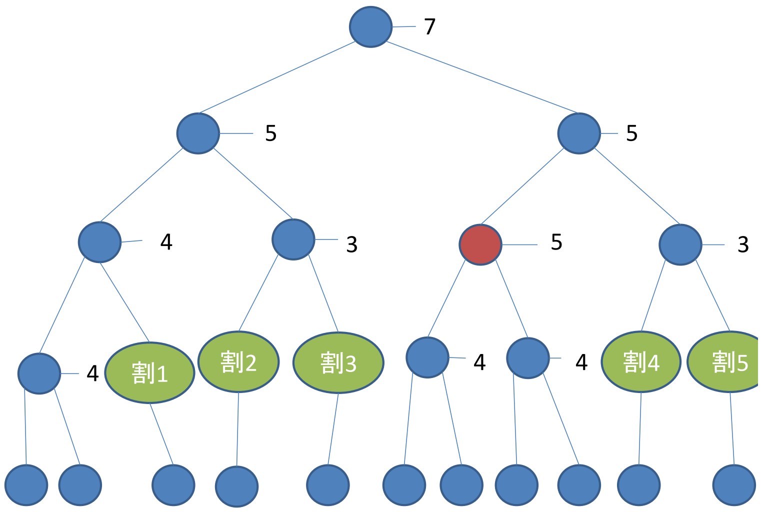

図 21: [5:6] 木 (2)(割り込み可能場所を表示)

これ以外の場所に割り込むと木の高さが 5 以上になり、$\hat{S}(11) \geq 34$ の条件を満たす。高さ列は {7,5,5,5,4,4,4,4,3,3} となり、式 (1) の左辺の値は 152 となる。したがって割り込みが無い場合、この木を持つ 11 入力ソーティングネットワークはサイズ 34 以上である。

ここで図 21 の赤色で示した t 値が 5 のノードは割ノード 4,5 にしか割り込めず、その場合高さ列は {7,7,5,4,4,4,4,4,4,3} となり式 (1) の左辺の値は 188 となりサイズ 34 以上の条件を満たす。その他の場合 $t = 8$ 以上になってはいけないのでそれぞれの割ノードには t 値が 4 以下のノードからしか割り込めない。

次にそれぞれの割ノードについて解析を行っていく。

(i) 割ノード 1

割ノード 1 に割り込みがある場合、t 値が 4 以下のノードから割り込むならば、割ノード 1 の親の t 値が 5 になる。したがって t 値が 4 のノードから割り込む場合、高さ列は {7,5,5,5,5,4,4,3,3} となり、式 (1) の左辺の値は 152 で割り込みが無い場合と変わらないためサイズ 34 以上の条件を満たす。

(ii) 割ノード 2,3

割ノード 2,3 に割り込みがある場合、t 値が 4 以下のノードから割り込むならば、片方のみの割り込みで割ノード 2,3 の親の t 値が 4、その親の t 値が 6 となる。両方割り込むと、さらに割ノード 2,3 の親の t 値が 5 となる。したがってそれぞれ t 値が 4 のノードから割り込む場合、高さ列はそれぞれの場合で $\{7,6,5,5,4,4,4,4,3\}$ 及び $\{7,6,5,5,5,4,4,3\}$ となり、式 (1) の左辺の値はどちらも 168 となりサイズ 34 以上の条件を満たす。割ノード 1 に割り込んだ時、その親が割ノード 2,3 に割り込むと、高さ列は $\{7,7,5,5,4,4,4,3\}$ となり式 (1) の左辺の値は 188 となり、サイズ 34 以上の条件を満たす。

(iii) 割ノード 4,5

割ノード 4,5 に割り込みがある場合、t 値が 4 以下のノードから割り込むならば、片方のみの割り込みで割ノード 4,5 の親の t 値が 4、その親の t 値が 6 となる。両方割り込むと、さらに割ノード 4,5 の親の t 値が 5 となる。したがってそれぞれ t 値が 4 のノードから割り込む場合、高さ列はそれぞれの場合で $\{7,6,5,5,4,4,4,4,3\}$ 及び $\{7,6,5,5,5,4,4,3\}$ となり、式 (1) の左辺の値はどちらも 168 となり、サイズ 34 以上の条件を満たす。

次に二つ目のパターンについて考察する。図 22 に二つ目のパターンの [5:6] 木 (2) の割り込み可能なノードと割り込みが無い時の t 値を図示する。

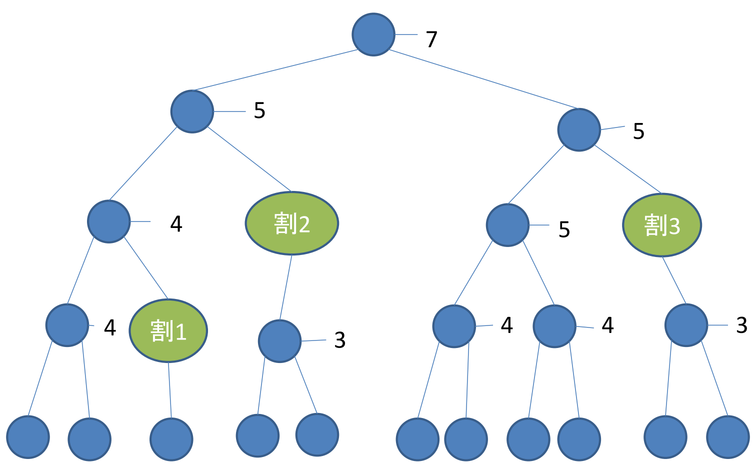

図 22: [5:6] 木 (2) への割り込みの別パターン

ここで割ノード 1 は一つ目のパターンと共通であるので、割ノード 2,3 について解析を行っていく。t 値は 8 以上になってはいけないので割ノード 2,3 には t 値が 5 以下の

ノードからしか割り込めない。

(i) 割ノード 2

割ノード 2 に割り込みがある場合、必ず割ノード 2 の親の t 値は 6、子の t 値は 4 となる。t 値が 5 のノードから割り込む場合、深さ列は {7,6,5,4,4,4,4,4,3} となり式 (1) の左辺の値は 156 となり、サイズ 34 以上の条件を満たす。

(ii) 割ノード 3

割ノード 3 に割り込みがある場合、必ず割ノード 3 の親の t 値は 6、子の t 値は 4 となる。t 値が 5 のノードから割り込む場合、深さ列は {7,6,5,4,4,4,4,4,3} となり式 (1) の左辺の値は 156 となり、サイズ 34 以上の条件を満たす。

以上より、[5:6] 木 (2) は、割り込みの有無に関わらずサイズ 34 以上となる条件を必ず満たすので、[5:6] 木 (2) を持つ 11 入力ソーティングネットワークは $\hat{S}(11) \geq 34$ である。

3.15 [5:6] 木 (3)

図 23 に [5:6] 木 (3) の割り込み可能なノードと割り込みが無い時の t 値を図示する。

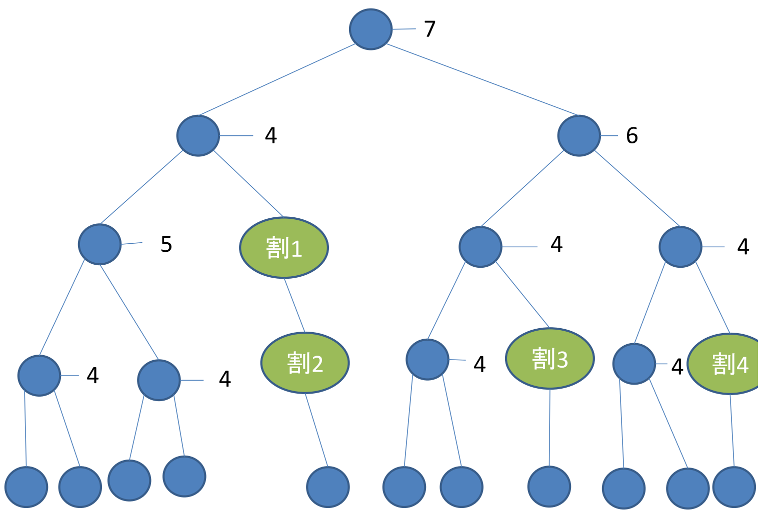

図 23: [5:6] 木 (3)(割り込み可能場所を表示)

これ以外の割り込みが行われると木の高さが 5 以上になり、$\hat{S}(11) \geq 34$ の条件を満たす。高さ列は {7,6,5,4,4,4,4,4,4,4} となり、式 (1) の左辺の値は 168 となる。したがって割り込みが無い場合、この木を持つ 11 入力ソーティングネットワークはサイズ 34 以上である。

次にそれぞれの割ノードについて解析を行っていく。

(i) 割ノード 3,4

割ノード 1,2 の解析の為、先に割ノード 3,4 の解析を行う。割ノード 3,4 は t 値が 8 になってはいけないので t 値が 4 以下のノードからしか割り込めない。割り込む場合、割ノード 3 または 4 の親の t 値が 5 になるので高さ列は {7,6,5,5,4,4,4,4,4} となり式 (1) の左辺の値は 168 でサイズ 34 以上の条件を満たす。また、割ノード 3,4 のどちらかに同じ側の t 値が 4 のノードが割り込み、その親ノードからもう一方の割ノードに割り込む、という場合がある (この時ネットワークに閉路ができないように割り込みが行われる)。その場合、高さ列は {7,7,5,5,4,4,4,4} で式 (1) の左辺の値は 192 でサイズ 34 以上の条件を満たす。

(ii) 割ノード 1

割ノード 1 は同じ側の t 値が 5 のノードから割り込みがある場合親の t 値が 6、t 値が 4 のノードから割り込むか、違う側のノードから割り込むと親の t 値が 5 となる。したがって割ノード 3,4 に同じ側から割り込んだ場合の t 値が 5 の親から割り込む場合、高さ列は {7,6,5,5,4,4,4,4} となり式 (1) の左辺の値は 160 となる。したがってサイズ 34 以上の条件を満たす。

(iii) 割ノード 2

割ノード 2 は割ノード 1 に割り込みがある場合のみ存在し、t 値が 4 以下のノードからしか割り込めない。割り込んだ場合、割ノード 1 の親の t 値が 6 となる。この時上記の割ノード 1 への割り込みも起こっているとすると、高さ列は {7,6,6,5,4,4,4} となる。式 (1) の左辺の値は 168 となり、したがってサイズ 34 以上の条件を満たす。

以上より、[5:6] 木 (3) は、割り込みの有無に関わらずサイズ 34 以上となる条件を必ず満たすので、[5:6] 木 (3) を持つ 11 入力ソーティングネットワークは $\hat{S}(11) \geq 34$ である。

3.16 [5:6] 木 (4)

[5:6] 木 (4) は、割り込み方が大きく二つに分類できる。

図 24 に一つ目のパターンの [5:6] 木 (4) の割り込み可能なノードと割り込みが無い時の t 値を図示する。

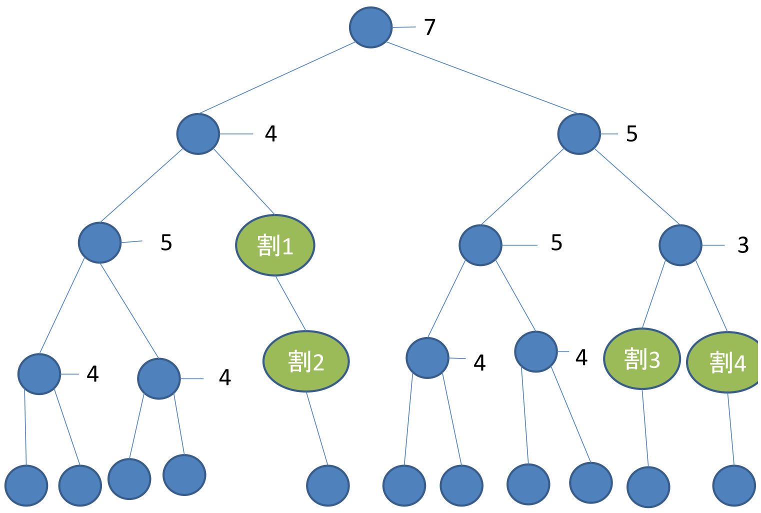

図 24: [5:6] 木 (4)(割り込み可能場所を表示)

これ以外の割り込みが行われると木の高さが 5 以上になり、$\hat{S}(11) \geq 34$ の条件を満たす。高さ列は {7,5,5,5,4,4,4,4,4,4,3} となり、式 (1) の左辺の値は 156 となる。したがって割り込みが無い場合、この木を持つ 11 入力ソーティングネットワークはサイズ 34 以上である。

次にそれぞれの割ノードについて解析を行っていく。

(i) 割ノード 3,4

割ノード 1,2 の解析の為、先に割ノード 3,4 の解析を行う。ここで割ノード 3,4 は t 値が 8 になってはいけないので同じ側の t 値が 5 以下のノード、もしくは違う側の t 値が 4 のノードからしか割り込めない。同じ側の t 値が 5 のノードから割り込む場合、割ノード 3 または 4 の親の t 値が 4 となり、さらにその親の t 値が 7 となる。高さ列は {7,7,5,4,4,4,4,4,4} となり、式 (1) の左辺の値は 192 でサイズ 34 以上の条件を満たす。t 値が 4 のノードから割り込む場合、割ノード 3 または 4 の親の t 値が 4 となり、さらにその親の t 値が 6 となる。高さ列は {7,6,5,5,4,4,4,4,4} となり、式 (1) の左辺の値は 168 となりサイズ 34 以上の条件を満たす。割ノード 3,4 に t 値が 4 のノードから同時に割り込む場合、割ノード 3,4 の親の t 値が 5 となるので、高さ列は {7,6,5,5,5,4,4,4} となり、式 (1) の左辺の値は 168 でサイズ 34 以上の条件を満たす。

(ii) 割ノード 1

割ノード 1 は同じ側の t 値が 5 のノードから割り込むと親の t 値が 6、t 値が 4 のノードから割り込むか、違う側のノードから割り込むと親の t 値が 5 となる。したがって違う側の t 値が 5 のノードから割り込む場合、高さ列は {7,5,5,5,4,4,4,4,3} となり式 (1) の左辺の値は 148 となる。したがってサイズ 34 以上の条件を満たす。

(iii) 割ノード 2

割ノード 2 は割ノード 1 に割り込みがある場合にのみ存在し、t 値が 4 以下のノードからしか割り込めない。割り込んだ場合、割ノード 1 の t 値が 6 となる。この時先述の割ノード 1 への割り込み例も起きているとすると高さ列は {7,6,5,5,4,4,4,3} となる。式 (1) の左辺の値は 156 で、サイズ 34 以上の条件を満たす。

次に二つ目のパターンについて考察する。図 25 に二つ目のパターンの [5:6] 木 (4) の割り込み可能なノードと割り込みが無い時の t 値を図示する。

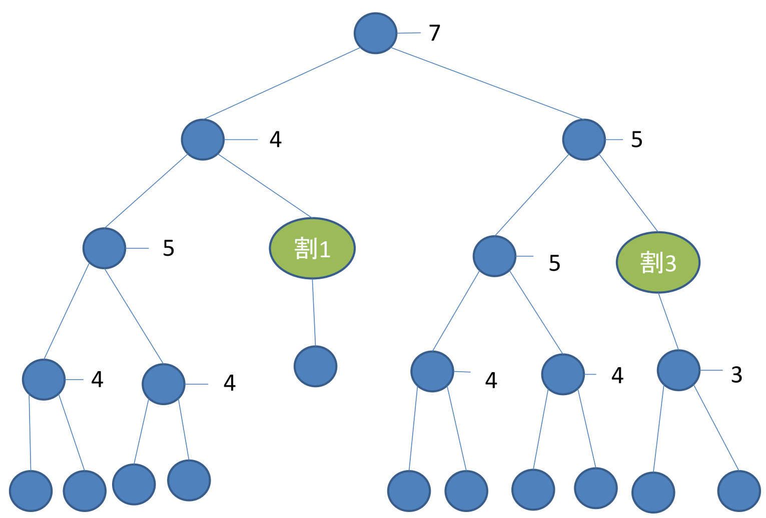

図 25: [5:6] 木 (4) への割り込みの別パターン

ここで割ノード 1,2 は一つ目のパターンと同様なので省略する。t 値が 8 になってはいけないので割ノード 3 には t 値が 5 以下のノードからしか割り込めない。したがって違う側の t 値が 5 のノードから割り込む場合、高さ列は {7,6,5,4,4,4,4,4} となり、式 (1) の左辺の値は 152 となりサイズ 34 以上の条件を満たす。

以上より、[5:6] 木 (4) は、割り込みの有無に関わらずサイズ 34 以上となる条件を必ず満たすので、[5:6] 木 (4) を持つ 11 入力ソーティングネットワークは $\hat{S}(11) \geq 34$ である。

これにより全ての 11 入力ソーティングネットワークは $\hat{S}(11) \geq 34$ の条件を満たすことが示された。

4 $\hat{S}(13) \geq 43$ の証明

この章では $\hat{S}(13) \geq 43$ の証明を行う。

4.1 $\hat{S}(13)$

$\hat{S}(13)$ は 13 入力ソーティングネットワークを構成するのに必要な最小比較器数のことである。現在では $45 \geq \hat{S}(13) \geq 41$ を満たすと知られている [2]。しかし、$\hat{S}(11) \geq 34$ が証明されたことにより、$\hat{S}(n+1) \geq \hat{S}(n) + \lceil \log n \rceil$ を適用すると $45 \geq \hat{S}(13) \geq 42$ となる。

ここで $\hat{S}(13) \geq 42$、$\hat{S}(12) \geq 38$、$\hat{S}(11) \geq 34$ であることに着目し、$\hat{S}(11) \geq 34$ の証明同様全ての 13 入力ソーティングネットワークが

(1) 「min**1** を与えた時、**5** 個以上の比較器を通過する場合がある」

(2) 「min**1** と min**2** を与えた時、合計 **9** 個以上の比較器を通過する場合がある」

以上 2 つの条件のいずれかを満たすならば $\hat{S}(13) \geq 43$ が証明できるのではないかと考えた (本項以降、条件 (1)、条件 (2) と呼ぶ)。

4.2 min 木

min 木の高さが 5 以上の場合 min1 を与えると 5 個以上の比較器を通過する経路は必ず存在する。したがって本研究で考察を行う木は [5:8] 木、[6:7] 木に限定する。[5:8] 木、[6:7] 木はともに 2 種類存在する。図 26 に [5:8] 木 (1)、図 27 に [5:8] 木 (2)、図 28 に [6:7] 木 (1)、図 29 に [6:7] 木 (2) をそれぞれ図示する。次の項より各 min 木についてそれぞれ解析を行っていく。

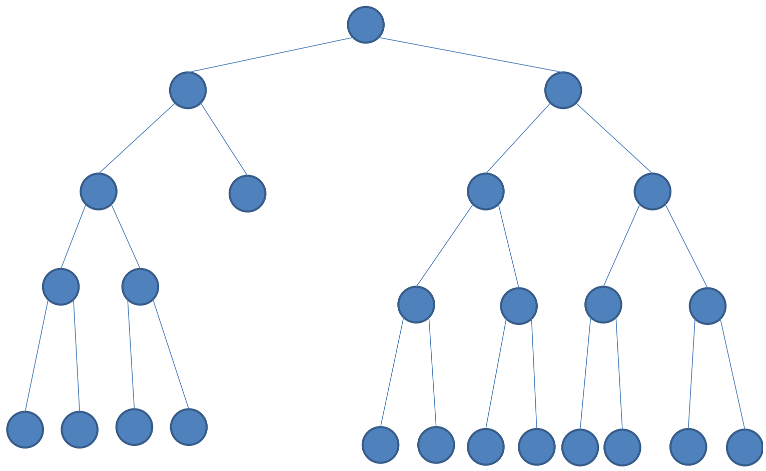

図 26: [5:8] 木 (1)

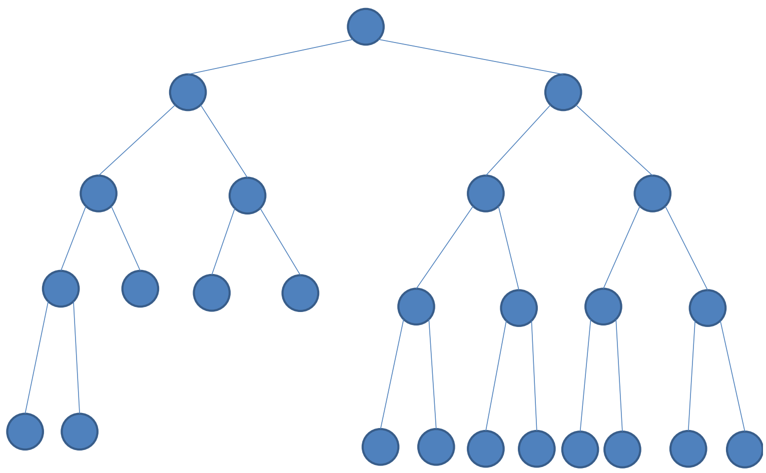

図 27: [5:8] 木 (2)

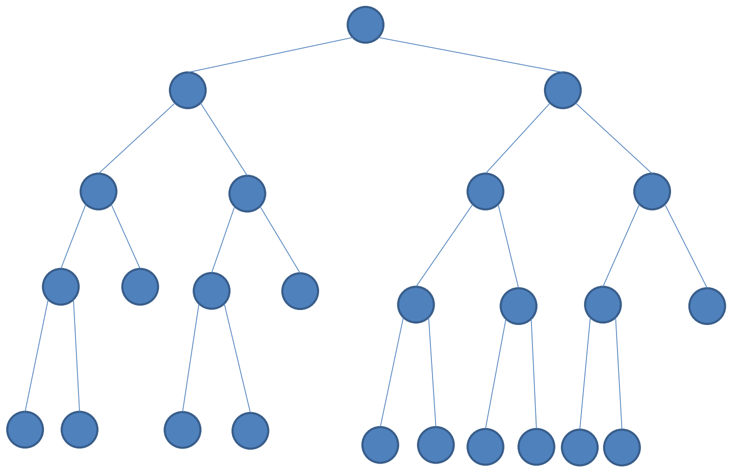

図 28: [6:7] 木 (1)

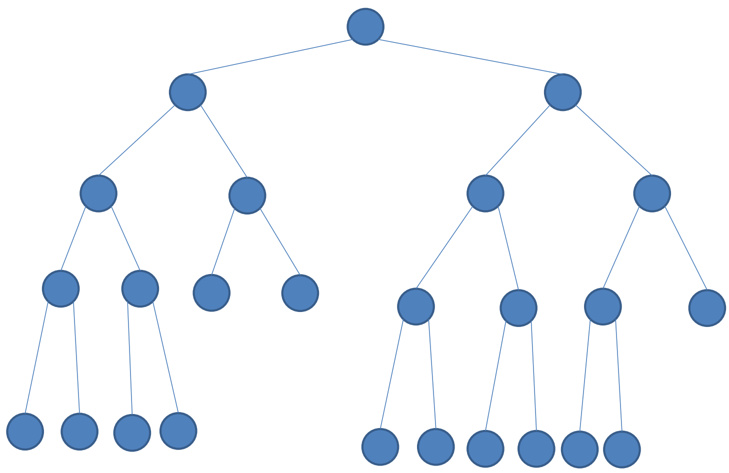

図 29: [6:7] 木 (2)

4.3 [5:8] 木 (1)

図 30 に [5:8] 木 (1) の割り込み可能なノードと割り込みが無い時の t 値を図示する。

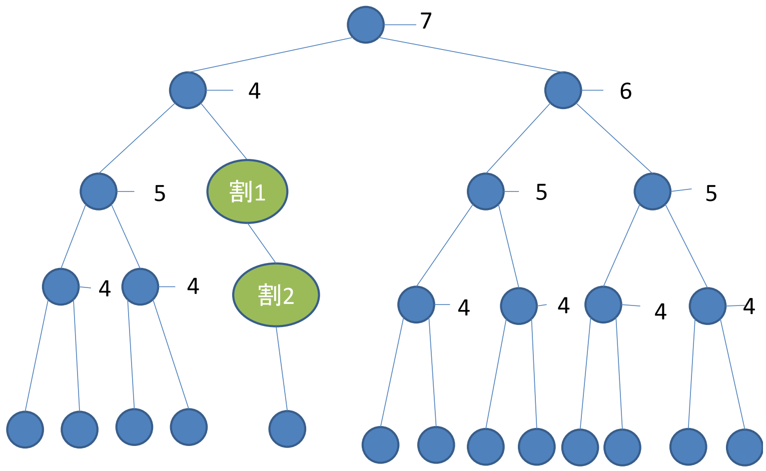

図 30: [5:8] 木 (1)(割り込み可能場所を表示)

これ以外の割り込みが行われると木の高さが 5 以上になり、$\hat{S}(13) \geq 43$ の条件を満たす。高さ列は {7,6,5,5,5,4,4,4,4,4,4,4} となり、式 (1) の左辺の値は 200 となる。したがって割り込みが無い場合、この木を持つ 13 入力ソーティングネットワークはサイズ 43 以上である。

次にそれぞれの割ノードについて解析を行っていく。

(i) 割ノード 1

割ノード 1 に同じ側から割り込む場合、割ノード 1 の親の t 値が割り込んだノードの t 値より 1 大きい値となる。違う側から割り込む場合は t 値が 8 になってはいけないので、t 値が 5 以下のノードからしか割り込めず、割り込みがある場合割ノード 1 の親の t 値が 5 となる。したがって違う側の t 値が 5 のノードから割り込みがある場合、高さ列は {7,6,5,5,5,4,4,4,4,4,4} となり式 (1) の左辺の値は 192 となりサイズ 43 以上の条件を満たす。

(ii) 割ノード 2

割ノード 2 は割ノード 1 に割り込みがある場合のみ存在し、t 値が 4 以下のノードからしか割り込めない。割り込んだ場合、割ノード 1 の親の t 値が 6 となる。この時上記の割ノード 1 への割り込みも起こっているとすると、高さ列は {7,6,6,5,5,4,4,4,4,4} となる。式 (1) の左辺の値は 200 となり、したがってサイズ 43 以上の条件を満たす。

以上より、[5:8] 木 (1) は、割り込みの有無に関わらずサイズ 43 以上となる条件を必ず満たすので、[5:8] 木 (1) を持つ 13 入力ソーティングネットワークは $\hat{S}(13) \geq 43$ である。

4.4 [5:8] 木 (2)

[5:8] 木 (2) は、割り込み方が大きく二つに分類できる。

図 31 に一つ目のパターンの [5:8] 木 (2) の割り込み可能なノードと割り込みが無い時の t 値を図示する。

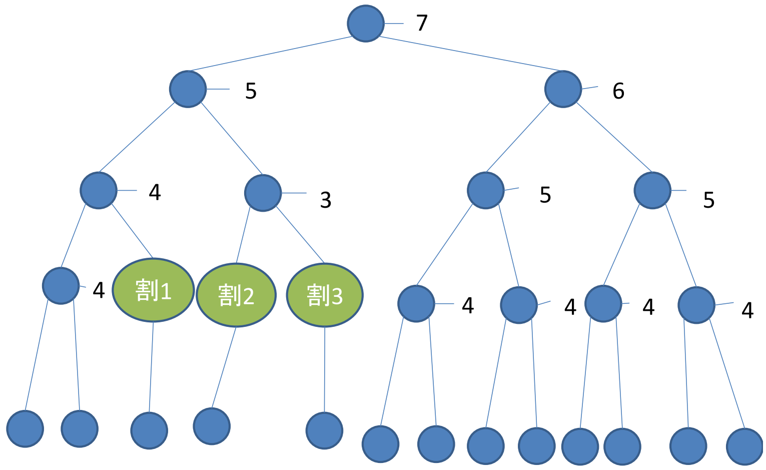

図 31: [5:8] 木 (2)(割り込み可能場所を表示)

これ以外の割り込みが行われると木の高さが 5 以上になり、$\hat{S}(13) \geq 43$ の条件を満たす。高さ列は {7,6,5,5,5,4,4,4,4,4,4,3} となり、式 (1) の左辺の値は 196 となる。したがって割り込みが無い場合、この木を持つ 13 入力ソーティングネットワークはサイズ 43 以上である。

次にそれぞれの割ノードについて解析を行っていく。

(i) 割ノード 1

割ノード 1 に同じ側から割り込みがある場合、割ノード 1 の親の t 値は 5 になり、さらにその親の t 値が割り込んだノードの t 値より 2 大きい値となる。違う側からの割り込みがある場合、t 値は 8 になってはいけないので t 値が 4 以下のノードからしか割り込めず、割り込みがある場合割ノード 1 の親の t 値が 5 となる。違う側の t 値が 4 のノードから割り込む場合、高さ列は {7,6,5,5,5,5,4,4,4,4,3} となり、式 (1) の左辺の値は 196 でサイズ 43 以上の条件を満たす。

(ii) 割ノード 2,3

割ノード 2,3 に同じ側からの割り込みがある場合、割ノード 2,3 の親の t 値は片方のみで 4、両方に割り込みがあると 5 となり、さらにその親の t 値が割り込んだノードの t 値の最大値より 2 大きい値となる。違う側から割り込みがある場合、t 値は 8 になってはいけないので t 値が 4 以下ののノードからしか割り込めず、割り込みがある場合、割ノード 2,3 の親は片方のみの割り込みで t 値が 4、両方の割り込みで 5 となり、さら

にその親の t 値はどちらかに割り込みがある場合 6 となる。したがって違う側からの t 値が 4 のノードから割り込みがある場合、片方のみ、両方それぞれの場合で高さ列は $\{7,6,6,5,5,4,4,4,4,4,4\}$、$\{7,6,6,5,5,5,4,4,4,4\}$ でどちらも式 (1) の左辺の値は 208 となり、サイズ 43 以上の条件を満たす。

次に二つ目のパターンについて考察する。図 32 に二つ目のパターンの [5:8] 木 (2) の割り込み可能なノードと割り込みが無い時の t 値を図示する。

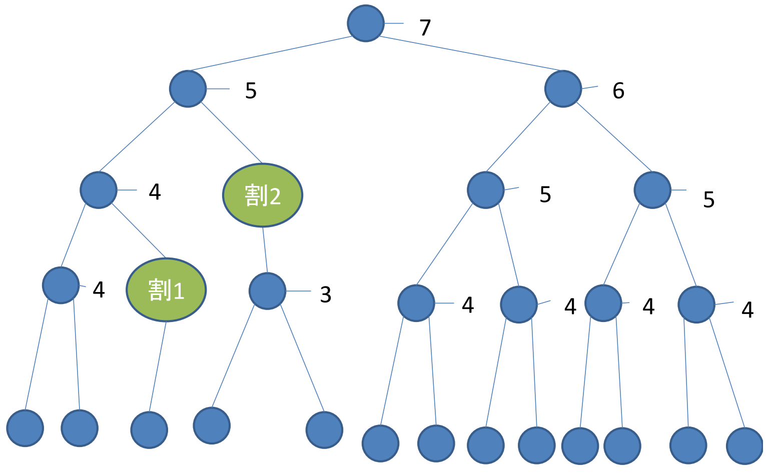

図 32: [5:8] 木 (2) への割り込みの別パターン

ここで割ノード 1 は一つ目のパターンと同様なので省略する。割ノード 2 に割り込みがある場合、どちらの側から割り込みがあっても割ノード 2 の親の t 値が 6、子の t 値が 4 となる。しかし違う側からの割り込みでは t 値が 8 になってはいけないので割ノード 2 には t 値が 5 以下のノードからしか割り込めない。したがって違う側の t 値が 5 のノードから割り込む場合、高さ列は $\{7,6,6,5,4,4,4,4,4,4,4\}$ となり、式 (1) の左辺の値は 200 となりサイズ 43 以上の条件を満たす。

以上より、[5:8] 木 (2) は、割り込みの有無に関わらずサイズ 43 以上となる条件を必ず満たすので、[5:8] 木 (2) を持つ 13 入力ソーティングネットワークは $\hat{S}(13) \geq 43$ である。

4.5　[6:7] 木 (1)

図 33 に [6:7] 木 (1) の割り込み可能なノードと割り込みが無い時の t 値を図示する。

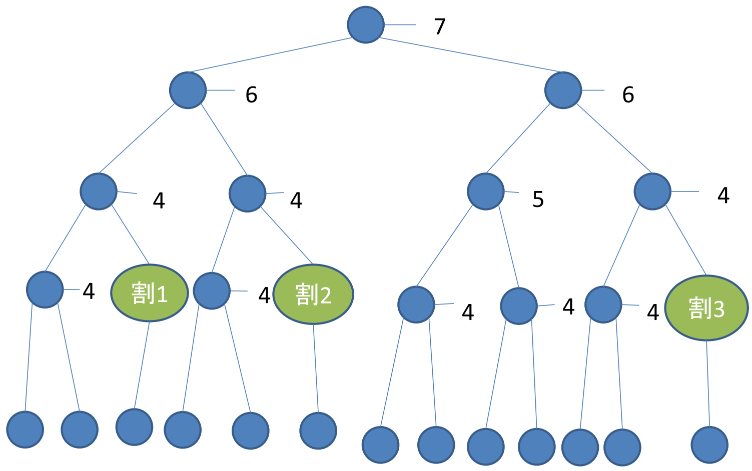

図 33: [6:7] 木 (1)(割り込み可能場所を表示)

これ以外の割り込みが行われると木の高さが 5 以上になり、$\hat{S}(13) \geq 43$ の条件を満たす。高さ列は {7,6,6,5,4,4,4,4,4,4,4,4} となり、式 (1) の左辺の値は 208 となる。したがって割り込みが無い場合、この木を持つ 13 入力ソーティングネットワークはサイズ 43 以上である。

次にそれぞれの割ノードについて解析を行っていく。

(i) 割ノード 1,2,3

割ノード 1,2,3 に同じ側から割り込みがある場合、そのノードの親の t 値が 5、さらにその親の t 値が割り込んだノードの t 値より 2 大きい値となる。違う側からの割り込みの場合、t 値が 8 になってはいけないので t 値が 4 以下のノードからしか割り込めず、割り込んだ場合、割ノード 1,2,3 の親の t 値が 5 となる。したがって割ノード 1,2,3 全てに t 値が 4 のノードから割り込みがある場合、高さ列は {7,6,6,5,5,5,5,4,4} となり、式 (1) の左辺の値は 208 となり、サイズ 43 以上の条件を満たす。

以上より、[6:7] 木 (1) は、割り込みの有無に関わらずサイズ 43 以上となる条件を必ず満たすので、[6:7] 木 (1) を持つ 13 入力ソーティングネットワークは $\hat{S}(13) \geq 43$ である。

4.6　[6:7] 木 (2)

[6:7] 木 (2) は、割り込み方が大きく二つに分類できる。

図 34 に一つ目のパターンの [6:7] 木 (2) の割り込み可能なノードと割り込みが無い時の t 値を図示する。

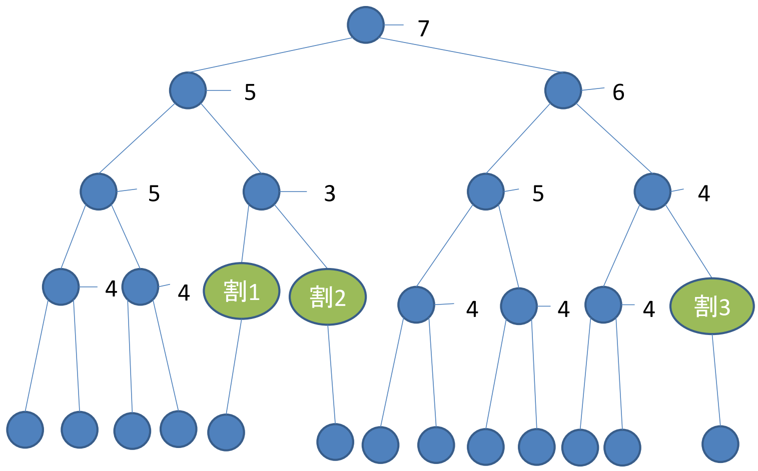

図 34: [6:7] 木 (2)(割り込み可能場所を表示)

これ以外の割り込みが行われると木の高さが 5 以上になり、$\hat{S}(13) \geq 43$ の条件を満たす。高さ列は {7,6,5,5,5,4,4,4,4,4,4,3} となり、式 (1) の左辺の値は 196 となる。したがって割り込みが無い場合、この木を持つ 13 入力ソーティングネットワークはサイズ 43 以上である。

次にそれぞれの割ノードについて解析を行っていく。

(ii) 割ノード 1,2

割ノード 1,2 に同じ側からの割り込みがある場合、割ノード 1,2 の親の t 値は片方のみで 4、両方に割り込みがあると 5 となり、さらにその親の t 値が割り込んだノードの t 値の最大値より 2 大きい値となる。違う側から割り込みがある場合、t 値は 8 になってはいけないので t 値が 4 以下ののノードからしか割り込めず、割り込みがある場合、割ノード 2,3 の親は片方のみの割り込みで t 値が 4、両方の割り込みで 5 となり、さらにその親の t 値はどちらかに割り込みがある場合 6 となる。したがって違う側からの t 値が 4 のノードから割り込みがある場合、片方のみ、両方それぞれの場合で高さ列は {7,6,6,5,5,4,4,4,4,4,4}、{7,6,6,5,5,5,4,4,4,4} でどちらも式 (1) の左辺の値は 208 となり、サイズ 43 以上の条件を満たす。

(i) 割ノード 3

割ノード 3 に同じ側から割り込みがある場合、割ノード 1 の親の t 値は 5 になり、さらにその親の t 値が割り込んだノードの t 値より 2 大きい値となる。違う側からの割り込みがある場合、t 値は 8 になってはいけないので t 値が 4 以下のノードからしか割り込めず、割り込みがある場合割ノード 1 の親の t 値が 5 となる。違う側の t 値が 4 のノードから割り込む場合、高さ列は {7,6,5,5,5,5,4,4,4,4,3} となり、式 (1) の左辺の値は

196 でサイズ 43 以上の条件を満たす。

次に二つ目のパターンについて考察する。図 35 に二つ目のパターンの [6:7] 木 (2) の割り込み可能なノードと割り込みが無い時の t 値を図示する。

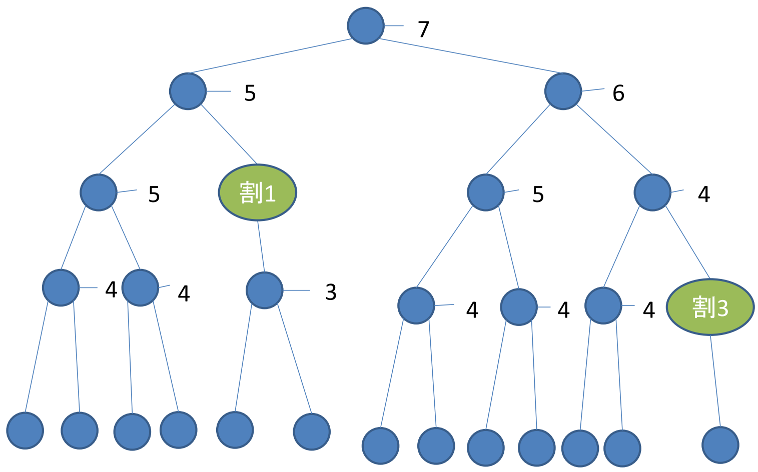

図 35: [6:7] 木 (2) への割り込みの別パターン

ここで割ノード 3 は一つ目のパターンと同様なので省略する。割ノード 1 に割り込みがある場合、どちらの側から割り込みがあっても割ノード 1 の親の t 値が 6、子の t 値が 4 となる。しかし違う側からの割り込みでは t 値が 8 になってはいけないので割ノード 2 には t 値が 5 以下のノードからしか割り込めない。したがって違う側の t 値が 5 のノードから割り込む場合、高さ列は $\{7,6,6,5,4,4,4,4,4,4,4\}$ となり、式 (1) の左辺の値は 200 となりサイズ 43 以上の条件を満たす。

以上より、[6:7] 木 (2) は、割り込みの有無に関わらずサイズ 43 以上となる条件を必ず満たすので、[6:7] 木 (2) を持つ 13 入力ソーティングネットワークは $\hat{S}(13) \geq 43$ である。

これにより全ての 13 入力ソーティングネットワークは $\hat{S}(13) \geq 43$ の条件を満たすことが示された。

5 $\hat{S}(15) \geq 52$ の証明

この章では $\hat{S}(15) \geq 52$ の証明を行う。

5.1 $\hat{S}(15)$

$\hat{S}(15)$ は 15 入力ソーティングネットワークを構成するのに必要な最小比較器数のことである。現在では $56 \geq \hat{S}(13) \geq 50$ を満たすと知られている [2]。しかし、$\hat{S}(13) \geq 43$ が証明されたことにより、$\hat{S}(n+1) \geq \hat{S}(n) + \lceil \log n \rceil$ を適用すると $56 \geq \hat{S} \geq 51$ となる。

ここで $\hat{S}(15) \geq 51$、$\hat{S}(14) \geq 47$、$\hat{S}(13) \geq 43$ であることに着目し、$\hat{S}(11) \geq 34$ の証明同様全ての 15 入力ソーティングネットワークが

(1) 「min**1** を与えた時、**5** 個以上の比較器を通過する場合がある」

(2) 「min**1** と min**2** を与えた時、合計 **9** 個以上の比較器を通過する場合がある」

以上 2 つの条件のいずれかを満たすならば $\hat{S}(15) \geq 52$ が証明できるのではないかと考えた。

5.2 min 木

min 木の高さが 5 以上の場合 min1 を与えると 5 個以上の比較器を通過する経路は必ず存在する。したがって本研究で考察を行う木は [7:8] 木に限定する。[7:8] 木は 1 種類のみ存在する。図 36 に [7:8] 木を図示する。次の項より [7:8] 木について解析を行っていく。

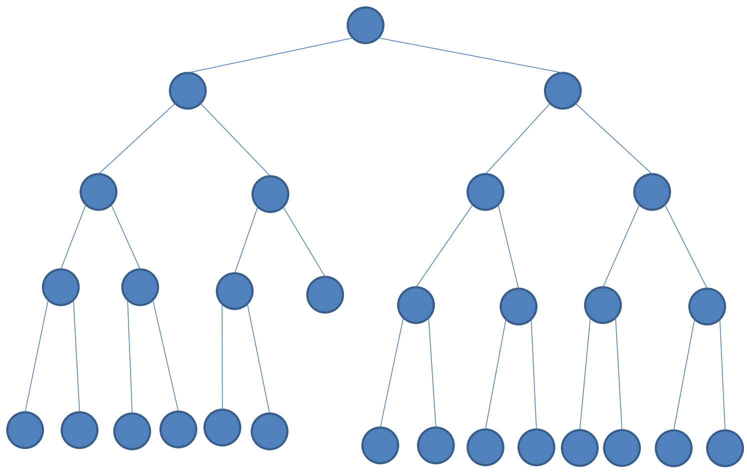

図 36: [7:8] 木

5.3 [7:8] 木

図 37 に [7:8] 木の割り込み可能なノードと割り込みが無い時の t 値を図示する。これ

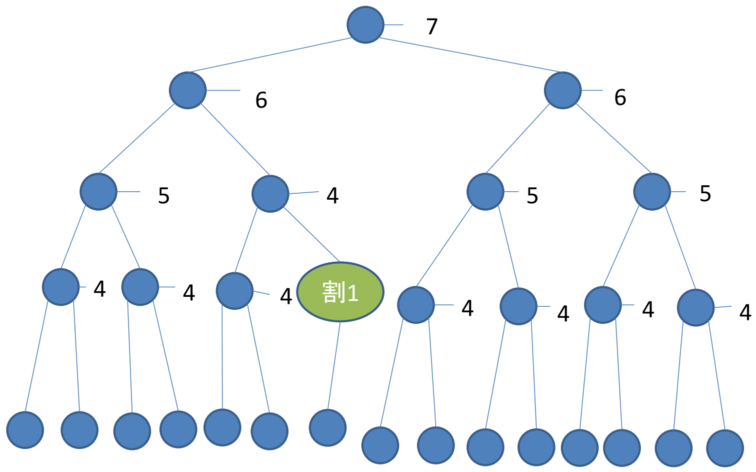

図 37: [7:8] 木 (割り込み可能場所を表示)

以外の割り込みが行われると木の高さが 5 以上になり、$\hat{S}(15) \geq 52$ の条件を満たす。高さ列は {7,6,6,5,5,5,4,4,4,4,4,4,4,4} となり、式 (1) の左辺の値は 240 となる。したがって割り込みが無い場合、この木を持つ 15 入力ソーティングネットワークはサイズ 52 以上である。

次にそれぞれの割ノードについて解析を行っていく。

(i) 割ノード 1

割ノード 1 に同じ側から割り込みがある場合、割ノード 1 の親の t 値が 5、さらにその親の t 値が割り込んだノードの t 値より 2 大きい値となる。違う側からの割り込みの場合、t 値が 8 になってはいけないので t 値が 4 以下のノードからしか割り込めず、割り込んだ場合、割ノード 1,2,3 の親の t 値が 5 となる。したがって割ノード 1 に t 値が 4 のノードから割り込みがある場合、高さ列は {7,6,6,5,5,5,5,4,4,4,4,4,4} となり、式 (1) の左辺の値は 240 となり、サイズ 52 以上の条件を満たす。

以上より、[7:8] 木は、割り込みの有無に関わらずサイズ 52 以上となる条件を必ず満たすので、[7:8] 木を持つ 15 入力ソーティングネットワークは $\hat{S}(15) \geq 52$ である。

これにより全ての 15 入力ソーティングネットワークは $\hat{S}(15) \geq 52$ の条件を満たすことが示された。

6 $\hat{S}(16) \geq 57$

前章までの結果を用い、$\hat{S}(16) \geq 57$ を証明する。

6.1 先行研究及び方針

表 2 に現在知られている 7〜20 入力ソーティングネットワークの上界と下界、および前章までに新しく示された下界を示す。[2]

表 2: 新しい最小サイズの上界と下界

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
上界	16	19	25	29	35	39	45	51	56	60	71	78	86	92	$\cdots$
旧下界	16	19	25	29	33	37	41	45	49	53	58	63	68	73	$\cdots$
新下界	16	19	25	29	34	38	43	47	52	56	61	66	71	76	$\cdots$

【予想】

ここで 3 番目に小さい値 min3 が通る経路にまで着目し、さらに $\hat{S}(16) \geq 56$、$\hat{S}(15) \geq 52$、$\hat{S}(14) \geq 47$ そして $\hat{S}(13) \geq 43$ と知られていることから、全ての 16 入力ソーティングネットワークが

(1) **「min1 を与えた時、5 個以上の比較器を通過する場合がある」**

(2) **「min1 と min2 を与えた時、合計 10 個以上の比較器を通過する場合がある」**

(3) **「min1 と min2 と min3 を与えた時、合計 14 個以上の比較器を通過する場合がある」**

以上 3 つの条件のどれかを満たすならば $\hat{S}(16) \geq 57$ が証明できるのではないかと考えた (本項以降、条件 (1)、条件 (2)、条件 (3) と呼ぶ)。

6.2 min 木

定義 6.1 ***16* 入力ネットワークを構成する比較器の中で min*1* が通りうる比較器を内部ノード、各ワイヤを葉として木構造で表したものを min 木と呼ぶ。**

本研究では左側の木の葉の数を n、右側の葉の数を m として [n:m] 木と表すこととする。また、左右対称の場合は性質が変わらないので同一のものとして扱う。n もしくは m が 9 以上の場合、min 木の高さは 5 以上となるので、min1 を与えた時、5 個以上の比較器を通る経路は必ず存在する。すなわち条件 (1) を満たすのでしたがって本研究で考察を行う木はただ一つの [8:8] 木に限定される。図 38 に [8:8] 木を示す。

さらに [8:8] 木の各ノードに t 値を記載したものを図 39 に示す。

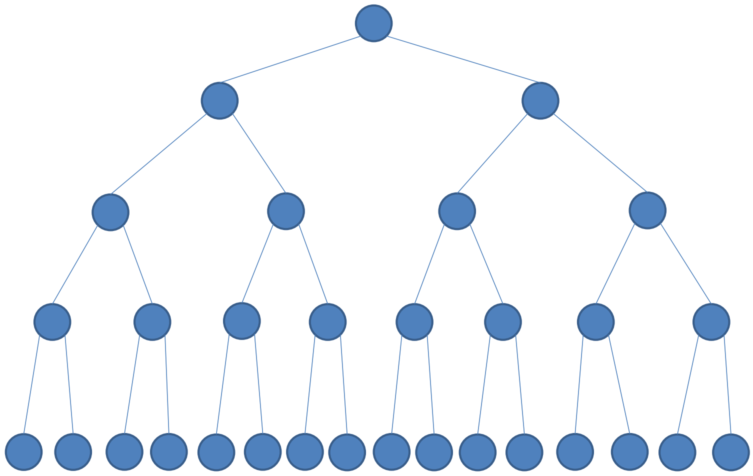

図 38: [8:8] 木

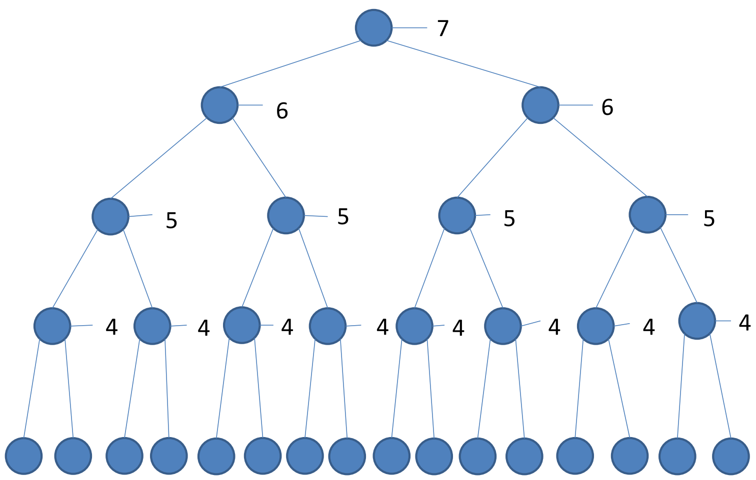

図 39: [8:8] 木 (t 値)

ここでもし [8:8] 木に割り込みが存在する場合、必ず木の高さが 5 以上となる。したがって割り込みが存在する場合、その 16 入力ソーティングネットワークは $\hat{S}(16) \geq 57$ の条件 (1) を満たすので本研究では [8:8] 木への割り込みを考慮しない。

6.3　2 番目に小さい値の決定

min 木で敗れ、min 木への割り込みも無いものは t 値を情報として持ち、それぞれが比較を行うことで 2 番目に小さい値が決定される。ここでどんな場合においても通過する比較器が 10 となるならば $\hat{S}(16) \geq 57$ となるが、それを満たさない場合が存在する。その一例を二分木として表したものを図 40 に示す (葉は min 木で敗れ、min 木の割り込みもなかったもので、それぞれの葉が持つ t 値は葉の下に記載)。

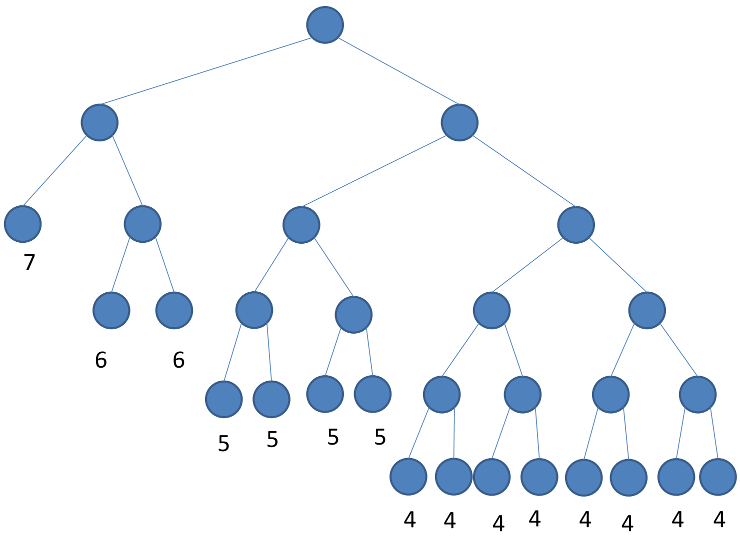

図 40: 2 番目に小さい値を決める一例

図 40 のような比較では、葉の持つ t 値と葉の高さの合計が min1、min2 がソーティングネットワーク中で通過する比較器の合計である。この場合全ての葉において 9 個の比較器しか通過しないので、このままでは $\hat{S}(16) \geq 57$ を証明できない。しかし図 40 のように全ての場合において 9 個の比較器しか通過しない場合、葉の高さが変わったり、割り込みが存在すると必ず 10 個の比較器を通過する場合が現れる。

6.4　3 番目に小さい値の決定

図 40 のような図は min 木で比較に敗れた min2 がその後通過する経路を木で表したものである。ここで 3 番目に小さい値 min3 も min1、min2 と同時に min 木に入力すると、min3 は min1 か min2 と必ずぶつかるため比較に敗れ、min2 もまた min1 に敗れるため、min2 と min3 は 2 番目に小さい値を決定する中で必ずぶつかり、min3 はその後 3 番目に小さいと決定されるまでにいくつか比較器を通過する。ここで図 39 の [8:8] 木に着目すると、min3 が min1、min2 とぶつかり敗れるノードは min1 に min2 に敗れるノードの子孫または先祖しかありえない。

図 40 のように min1 と min2 を入力すると 10 個未満の比較器しか通過しない場合、min 木の根ノードで敗れたものは 2 番目に小さい値と決定される比較の中で必ず 2 つの比較器を通過する。min 木の根ノードから見ると、min 木の全てのノードは子孫である為、2 番目に小さい値と決定されるまでの二つの比較で敗れたものはどちらも 3 番目に小さいものの候補である。条件 (1)、条件 (2) を満たさない場合、min 木の任意の入力に min1、min2、min3 を流し、2 番目に小さい値が決定されるまでにそれぞれが通る比較器数の最大は min1 が最小値と決定するまでに通過する比較器は 4 つ、min2 が 2 番目に小さい値と決定するまでに通過する比較器が 5 つ、min3 が 2 番目に小さい値を決定する最後の比較で min2 に敗れるまでに通過する比較器が 4 つなので 13 個である。3 番目に小さい値の候補は 2 つ以上残るので最低でも $13 + 1 = 14$ 個の比較器を通過する。これにより条件 (3) を必ず満たすので $\hat{S}(16) \geq 57$ が証明された。

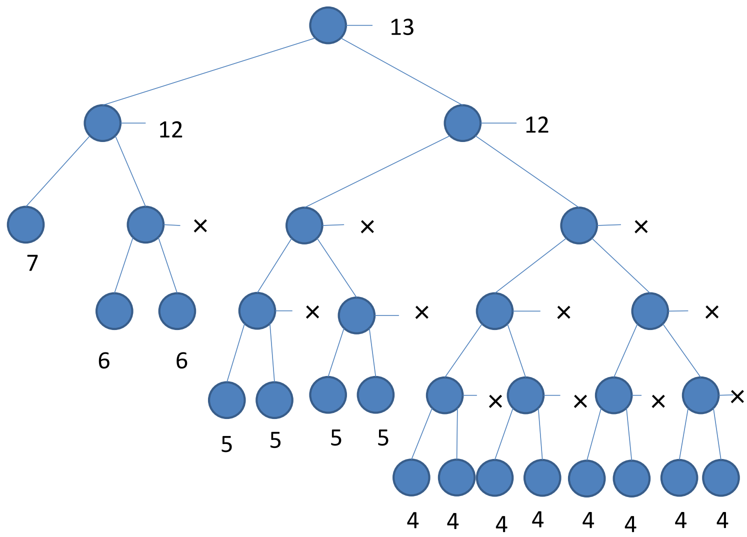

図 41: 3 番目に小さい値の候補

7　その他の研究

- min1 の経路の最大長さが 5 以下
- min1 の経路+min2 の経路の最大長さが 10 以下

以上の条件を満たす 2-selection network が存在する最大の入力数 n を考える。

【予想】

$n = 20$ **と予想**

式 (1) を拡張すると以下のような式 (2) を定められる。

$$512d_{10} + 256d_9 + 128d_8 + 64d_7 + 32d_6 + 16d_5 + 8d_4 + 4d_3 + 2d_2 + d_1 > 512 \qquad (2)$$

以下の図 42 の高さ列は 8,7,7,6,6,6,5,5,5,5,5,5,5,4,4,4,4,4,4 となり式 (2) の左辺の値は 512 となる。仮に入力を一つ目の条件を破らないように一つ増やすと、高さ 5 の葉が 2 つ増えることになる。その葉から根までのノードの t 値は 1 ずつ増えるため、式 (2) の左辺の値は必ず 512 を超えることになるので $n = 20$ が二つの条件を満たす最大の n だと予想する。

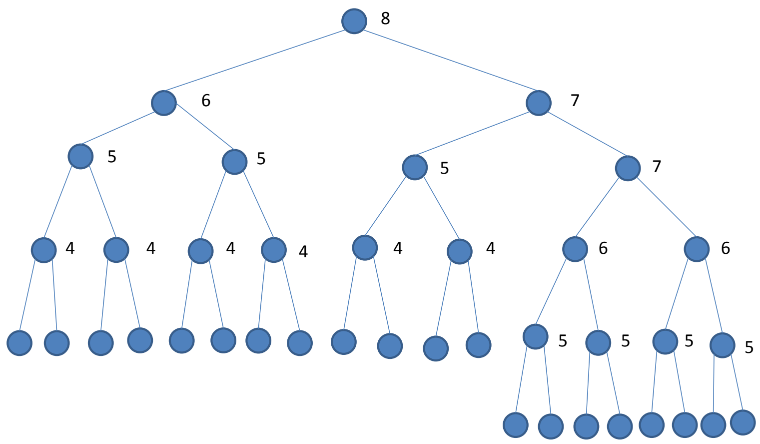

図 42: 20 入力ソーティングネットワークの min 木

このような予想の解析は本論文のような各 min 木に対する解析をする際に参考とすることができる。しかし図 42 や図 8 のように式 (1) や式 (2) を満たさない min 木を理論的に導き出すのは難しいと考えられ、n 入力ソーティングネットワークの下界の一般化を導き出すのは本論文で用いた手法では難しいと考えられる。

8 今後の展望

本研究はある入力数のソーティングネットワークから一つ、もしくは複数の経路を抜き取ることでそれ以下の入力数のソーティングネットワークとなることを利用して結果を得たものである。しかしこの手法のみでは 11 入力ソーティングネットワークの [4:7] 木 (1)、第 7 章の 20 入力ソーティングネットワークなど入力数によっては無理が出ることがわかった。しかし 11 入力と 20 入力のそれぞれの木に関しては何かの法則に則って作成できたものではなく、何か共通した性質を持っているものではないと考えられる。n 入力のソーティングネットワークの最小サイズの下界に対して一般的に何かが言えるとするならば何かしら別の解析手法が必要になってくると考える。n 入力に対する下界の研究は本研究室の平成 28 年度卒業論文 [4] においても研究されている。

謝辞

本論文を執筆するに当たり、アドバイス及び丁寧な指導をしてくださった垂井淳先生に深く感謝いたします。また、本研究テーマについて共に議論し、内容を深めることに協力していただいた望月翔太さん、岡安想さんに感謝いたします。

参考文献

[1] 望月 翔太, "11 入力ソーティングネットワークの最小サイズの解析", 電気通信大学大学院 平成 27 年度修士論文

[2] Michael Codish, Luis Cruz-Filipe, Michael Frank and Peter Schneider-Kamp: Twenty-Five Comparators is Optimal When Sorting Nine Inputs (and Twenty-Nine for Ten), In *Proceedings of ICTAI 2014*, http://arxiv.org/abs/1405.5754 2014.

[3] Donald E. Knuth, The Art of Computer Programing Volume 3 Sorting and Searching Second Edition 日本語版, pp.209-236, 2006

[4] 岡安 想, "ソーティングネットワークの最小サイズに対する新しい下界", 電気通信大学 平成 28 年度卒業論文