

外部結合のある光共振器およびレーザーの理論

氏原 紀公雄

Theory of optical cavity and laser with output coupling

Kikuo Ujihara

Abstract

A quantum-mechanical analysis of an optical cavity having output coupling is presented with applications to the laser theory. The rigorous treatment of the output coupling allows unified analysis of the optical field inside and outside of the cavity. This treatment had lead to a new expression for the laser line-width that contained the influences of non-uniform oscillating field distribution of the real cavity mode as well as the deviation from the cavity field mode due to non-uniform gain saturation.

1 はじめに

レーザーは1960年に初めて作られ、それから既に半世紀が過ぎようとしている。初めの数年で様々な発光源のレーザーが作られ、同時にレーザー理論とレーザー光の量子論も短期間に完成された。レーザーは理論面では「over killed」と言われたほど徹底的に議論し尽くされた。筆者は70年代前半に講義のために主として霜田先生の教科書¹⁾を頼りに勉強を始めた。その過程で、どの書物を見ても、自由空間での光学過程とレーザー共振器内の光学過程との異同が判然としなかった。具体的には、自由空間では発光原子は無数の連続的に分布した光学モードと相互作用するのに対し、レーザーの中では単一のモードと相互作用するとされていたが、両条件化でレーザーの原理たる誘導放出の係数は同じであることは自明であるかのように記述されていた。果たしてそうか？結果的には多くの場合これは正しく、物分りの良い人なら素通りするところだが、著者は光が一部透過する共振器のモデルで一から計算してみようと思った。それから約10年弱かけて自分なりのレーザーの理論を組み立てた。さらに90年代頃マイクロキャビティの研究が盛んになったとき、同様の共振器モデルを適用して解析を試みた。後者では光放出過程も外部結合の顕著な影響を受ける。本稿では、後者は割愛し、著者の光共振器とレーザーに関する研究を紹介する。

1-1 レーザーの原理

周知のようにレーザーの基本原理は光の誘導放出による光波の増幅である。ちなみに基礎光学過程としては、発光体（以下原子）による光子の自然放出、誘導放出、吸収の三つの過程がある。そのうち誘導放出においては、原子に印加される光波と同調して光子が放出されるので、印加光波が増幅される。詳しくは、進行方向、周波数、偏波の同じ、つまり同じモードの光子が放出される。吸収過程では光波の減衰が起こる。原子群と光波を適当な光共振器に閉じ込めると、増幅マイナス吸収の正味の増幅が共振器の損失を上回るとき光波の発振が起こる。多くのレーザーでは対向する一対の反射鏡で共振器を構成し、反射鏡間を往復伝搬する低損失の光波モードのみが発振する。レーザー光出力は通常一方の反射鏡に有限の透過率を与えて（外部結合）取り出す。

自然放出過程では印加光波とは無関係に、通常は（自由空間とみなせる場合は）等方的に光子が放出されるので、光子は発振モードに殆ど入らず、原子の励起に費やしたエネルギーが無駄になる。たまたま発振モードに自然放出光子が入ると、この光子の波としての位相がランダムなので、発振光波の雑音（量子雑音）となる。ただし、本稿では共振器の自然放出率への直接の影響は無視する。また、有限の温度下では共振器内外に熱雑音光があり、これも出力光の雑音源となる。

レーザーの解析法には、レーザー光波を扱うものと光

Received on August 29, 2006

Professor Emeritus, Formerly Professor in the Department of Electronic Engineering
電気通信大学名誉教授（元電子工学科教授）

子集団を扱うものがある。前者はHaken²⁾一派により展開され、後者はScully³⁾により研究された(他に連続量としての強度の確率分布の時変化を計算する方法もある^{1,2)})。著者は霜田先生¹⁾とHaken²⁾の教科書を頼りに前者の勉強をしたので、これまでも述べてきた光波の増幅、発振、雑音の混入、という立場でレーザーを考えてきた。本稿でもこの立場で議論する。ちなみに光子集団を考える場合は、励起原子群が共振器モードの光子群と相互作用するとき、コヒーレント光特有の光子のポアソン分布がどのようにして現れるか、を確率の問題として考える。これらは波と粒子を扱うという意味で、量子論で言う“相補的”扱いである。

さて、レーザー理論の二流派はこのように見かけは異なるが、共振器モードおよび共振器モードの光と原子の相互作用に関しては簡略のため共通の仮定をする。それは、第一に光は単一モードに属するとすること、第二に原子と光の相互作用の係数、つまり誘導放出、自然放出、吸収の係数は全原子につき同じである、とすること、第三に共振器モードの損失は仮想的な(現象論的な)単一の減衰定数*で表すこと、である。これらにより、光電界または光子数の空間変化は切り落とされ、時間変化だけを調べることになる。その際、見た限りすべての教科書で、必要な光学過程の係数として自由空間で計算したものを引用している。

前述のように、著者はこれに対し、両端を反射鏡で制限された空間での過程にも自由空間での値が適用できるのか、という疑問を抱いた。この疑問を膨らませると、上の三つの仮定に対して、第一に損失のあるモードはある連続のモードの重ね合わせと考えるべきではないか、したがって、光の強さは場所によって違うのではないか、そうであれば第二に光学過程による各原子の寄与は原子位置によって違うのではないか、第三に共振器損失が透過損失であれば、これは正確に透過として扱えば良いのではないか、という考えに行き着く。そこで、光が一部透過する共振器のモデルで一から計算してみた。

先回りして結論の要点を言えば、第一に共振器モードが減衰モードであるために、第二には共振器内部の光の強さ(本稿では電界)が一様でないために、発振線幅の公式^{1,2)}に対して無視できない補正が導かれた。

1-2 外部結合の取り扱い

外部結合を取り扱うには、光波に対する共振器の境界条件を計算に入れればよいが、エッジのあるミラーなどを扱うのは困難である。そこで最も簡単な(実際のレーザーにも近い)次元の問題を考察した。均質な厚さ d の誘電体の単一層を仮定し、層は左端 $z=-d$ で完全導体

に接し、右端 $z=0$ で真空中に接するものとし、光波は $-d < z < 0$ の空間にあるものとする。共振器は $-d < z < 0$ にあり、 $z=0$ が出力結合端となる。簡単のため光波の偏波方向は単一(x 方向)とする。このとき考慮すべき境界条件は左端 $z=-d$ で電界 $E_x=0$ 、および出力端 $z=0$ において電界 E_x と磁界 H_y が連続、の3条件となる。

この共振器モデルは図1のように表せる。斜線部が屈折率 n の非分散性誘電体層で、外部は真空である。出力端の振幅反射率 r は内から外へ向かう光波に対して $r=(n-1)/(n+1)$ である。

なお、以下で導かれる諸結果を、通常理論と比較する目安として、図2のような両端が完全導体の完全なキャビティに均一に分布した損失(破線)を与えて、光波の全損失が図1の結合損失と同じになるものと考え、このキャビティに図1のキャビティに(後で)与えるのと同じ原子群を与えたときのレーザー理論を通常理論と呼ぶことにする。

2 一次元光共振器の解析

2-1 古典論

上記共振モードを“外部で右進行波のみ持つ波”と定義すると、複素共振角周波数(周波数と減衰係数)が

$$\begin{cases} \Omega_c = \omega_c - i\gamma_c, \\ \omega_c = (c/2d)(2l+1)\pi, & l=0,1,2,3,\dots, \\ \gamma_c = (c/2d)\ln(1/r), \end{cases} \quad (1)$$

と求まる。ただし $c=c_0/n$ は誘電体内の光速であり、 c_0 は真空中の光速である。これに対応する電界のひとつの時空間分布(共振器モード)は、共振器内では左右に進む複素伝搬定数 $k_c = \Omega_c/c$ の減衰波、外では遠方に進む減衰進行波となる。

$$E_x(z,t) \propto \exp(-i\Omega_c t)u(z), \quad (2)$$

$$u(z) = \begin{cases} \sin\{\Omega_c(z+d)/c\}, & -d < z < 0 \\ \sin(\Omega_c d/c)\exp(i\Omega_c z/c_0), & 0 < z \end{cases} \quad (3)$$

空間部分 $u(z)$ は共振器内では左端で小さく出力端で大きく、反射率 r が小さいと著しく不均一な分布になる。

電界を古典的な量と見なすレーザーの半古典論の範囲では、この共振器モデルを用いてもよいが、本稿では量子論に進むため次項のモデルを用いる。

2-2 量子論⁴⁾

光波を量子論的に扱うには、その不確定性を失わない形で扱わなければならない。不確定性が担保されるためには、関与する電磁波のモードは減衰モードであっては

*実際には単一の減衰定数を与えるような損失モデルから出発する。2-2節参照。

ならない。それは、減衰を許すと、不確定関係も $E_x H_y - H_y E_x \propto e^{-2\gamma t} \rightarrow 0$ のように減衰して無くなってしまふからである。通常の単一モード理論では、図2のような完全な共振器を仮定し、減衰は共振器モード光子の熱浴への移譲過程として記述される。^{2,3)}ここで熱浴は無数の粒子群でモデル化され、非可逆的にエネルギーを吸収してくれる“もの”である。この場合共振器モードも熱浴のどの粒子も単独では減衰のないシステムであるとして、不確定性を担保する。数学的には熱浴の効果はモードの減衰係数と電界へのランダムなランジュバン力として表され、両者の関係は高温では電気回路のナイキストの定理に対応する。

さて、外部結合を正確に扱うと減衰が現れてしまうので、図1のモデルは量子論には不相当である。そこで、電磁波や電子波を量子化するとき用いられる手法のひとつである“box quantization”を援用することにした。これは粒子を(波を)有限大の箱に閉じ込めて、箱の境界条件を満たす離散的なモードの重ね合わせとして表し、各モードを個別に量子化した上で(不確定関係を与えた上で)箱の大きさを無限大に持っていくことで、自由空間の連続的な波へ移行する、という手法である。一次元で、共振器がある大きい箱の一部にあるとするために、図3のように $z=L$ に仮想的な完全導体壁をおいた。この反射端からは、スイッチ投入後レーザー発振が定常に達しても信号が戻ってこない、というくらいに L を大きく取れば、 $-d < z < 0$ の共振器内で起こる過程は仮想導体壁の影響を受けず、なおかつ $-d < z < L$ にあるどの電磁波モードも減衰が無く量子化可能であろう、と考えた訳である。

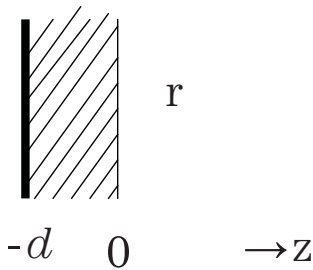


図1 一次元共振器モデル

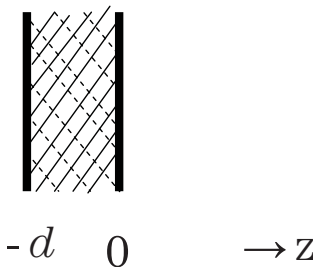


図2 通常の一次元共振器モデル

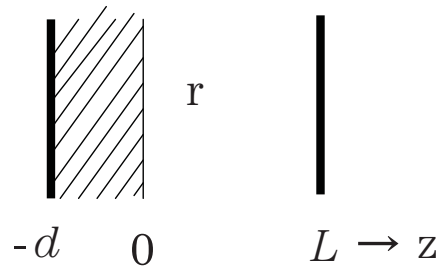


図3 拡張一次元共振器モデル

2-1 正規直交系

そこで、図3の全空間、つまり $-d < z < L$ にある電磁波モードを求めた。 $z = -d, L$ で $E_x = 0$ 、 $z = 0$ で E_x と H_y が連続、という4条件から、電界、磁界の空間的正弦、余弦各成分の係数の比を定めるといふ、sine、cosine だけの問題であった。得られた結果は、ベクトルポテンシャルがモード j の和で次式となる。

$$A(z,t) = \sum_j Q_j(t) U_j(z), \tag{4}$$

$$U_j(z) = \frac{(2/\epsilon_0 n^2 L)^{1/2}}{\sqrt{1 - (1 - n^{-2}) \sin k_j d}} \times \begin{cases} \sin k_j(z+d), & (-d < z < 0) \\ n \cos k_j d \sin k_j^0 z + \sin k_j d \cos k_j^0 z, & (0 < z < L). \end{cases} \tag{5}$$

ここに $\int_{-d}^L \epsilon_0 n^2(z) U_i(z) U_j(z) dz = \delta_{ij}$ および $\sum_j \epsilon_0 n^2(z') U_j(z') U_j(z) = \delta(z' - z)$ であって、モード関数群 $U_j(z)$ は重み付きの完全直交関数系である。ただし、 $x-y$ 方向の単位面積について考えている。 ϵ_0 は真空の誘電率、 $k_j = \omega_j / c$ 、 $k_j^0 = \omega_j / c_0$ と ω_j は j 番目のモードの共振器内外の伝搬定数と角周波数である。どのモードの関数も共振器内外に亘って分布していることに注目されたい。平方根の因子は共振器の構造を反映し、その自乗は下記のように二様に展開される。

$$\frac{1}{1 - (1 - n^{-2}) \sin k_j d} = 2n \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{i \geq 1} (-r)^i \cos 2ik_j d \right\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{c_0 \gamma_c / d}{(\omega_j - \omega_{cl})^2 + \gamma_c^2} \tag{6}$$

第一の展開は後に共振器両端面での多重反射効果を示すことになり、第二のものは、モード関数の振幅は古典的に求めた等間隔の共振器共振周波数にピークをもち、各ピークの半値半幅は減衰定数 γ_c であることを示している。 $l < 0$ の項は $j > 0$ に限れば実際には効かない。

2-2 量子化

完全直交系が求まったので、電磁界の量子化(量子論

への移行)はモードごとに行えばよく、以下教科書通りに量子化できる。^{2,5)} j モードの電界の振幅とその時間変化率を Q_j 、 P_j とすると、直交性により全エネルギーは $H_f = (1/2) \sum_j (P_j^2 + \omega_j^2 Q_j^2)$ となって質量1、位置 Q_j 、運動量 P_j の独立な調和振動子の集団のエネルギーと同形になる。そこで、 $\hat{Q}_i \hat{P}_j - \hat{P}_j \hat{Q}_i = i\hbar \delta_{ij}$ および $\hat{Q}_i \hat{Q}_j - \hat{Q}_j \hat{Q}_i = \hat{P}_i \hat{P}_j - \hat{P}_j \hat{P}_i = 0$ の交換関係(不確定性)を与えて量子化し、さらに、モードごとに $\hat{Q}_j = (\hbar/2\omega_j)^{1/2}(\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger)$ 、 $\hat{P}_j = -(\hbar\omega_j)^{1/2}(\hat{a}_j - \hat{a}_j^\dagger)$ により生成、消滅演算子 \hat{a}_j^\dagger 、 \hat{a}_j を導入すると、電磁界のハミルトニアンは次式となる。

$$\hat{H}_f = \sum_j \hbar\omega_j (\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + 1/2). \quad (7)$$

3 一次元レーザーの理論-基本方程式

レーザーのモデルとして、前節で述べた光共振器に、それぞれの励起源をもち共振器内に様な密度で分布した、二準位原子の集団を導入して、レーザー動作を解析する。原子群の m 番目の原子の上下 ($i=2,1$) の準位の生成・消滅演算子をそれぞれ \hat{b}_{mi}^\dagger 、 \hat{b}_{mi} とすれば(第二量子化)⁵⁾、原子群のハミルトニアンは下準位を基準として

$$\hat{H}_a = \sum_m \hbar\omega_m \hat{b}_{m2}^\dagger \hat{b}_{m2}, \quad (8)$$

と書ける。 ω_m は m 番目の原子の遷移角周波数である。原子群と光波の相互作用ハミルトニアンは

$$\hat{H}_i = \sum_{j,m} \hbar(\kappa_{jm} \hat{a}_j^\dagger \hat{b}_{m1}^\dagger \hat{b}_{m2} + \kappa_{jm}^* \hat{a}_j \hat{b}_{m2}^\dagger \hat{b}_{m1}), \quad (9)$$

$$\kappa_{jm} = i\omega_m (1/2\hbar\omega_j)^{1/2} U_j(z_m) p_m, \quad (10)$$

と書ける。 p_m は m 番目の原子の双極子行列要素の x 成分である。相互作用の第一項は m 番目の原子が上準位から下準位へ下がって j モードの光子が一個生じる過程、第二項は逆に原子が下準位から上準位へ上がって光子が一個吸収される過程に対応する。原子波動関数の広がり は波長に比して小さく(電気双極子近似) また、原子が下がって光子が吸収される過程と原子が上がって光子が生じる過程は無視できる(回転波近似)と仮定した。

以上のハミルトニアンの和 $\hat{H}_t = \hat{H}_f + \hat{H}_a + \hat{H}_i$ をハイゼンベルクの運動方程式に用いて、電界の生成演算子、原子の電気双極子演算子、原子反転分布演算子の閉じた連立方程式が求まる。

ここで双極子演算子 ($\hat{b}_{m1}^\dagger \hat{b}_{m2}$) については、現象論的に減衰係数 γ_m とこれに対応するランダムな力(ランジ

ュバン力) $\hat{\Gamma}_m(t)$ を導入する。これは、原子が励起源や電磁界の連続スペクトル*という熱浴と接しているため、共振器モード光子の場合と同様、双極子の減衰係数(位相緩和定数)が現れるためである。しかし、光波モード同様、双極子振動の振幅が単純に減衰すると、原子に関する不確定性も減衰し、量子論でなくなってしまうので、ランダムな力(ランジュバン力)を導入して不確定性を担保する。この電子の場合の γ_m と $\hat{\Gamma}_m(t)$ の関係は Haken²⁾、Lax⁶⁾ によって与えられた。

以上の考慮により、次の基本方程式を得る。

$$(d/dt)\hat{a}_j(t) = -i\omega_j \hat{a}_j(t) - i \sum_m \kappa_{jm} (\hat{b}_{m1}^\dagger \hat{b}_{m2})(t), \quad (11)$$

$$(d/dt)(\hat{b}_{m1}^\dagger \hat{b}_{m2})(t) = -i\omega_m (\hat{b}_{m1}^\dagger \hat{b}_{m2})(t) - \gamma_m (\hat{b}_{m1}^\dagger \hat{b}_{m2})(t) + i \sum_j \kappa_{jm}^* \hat{a}_j(t) \hat{\sigma}_m(t) + \hat{\Gamma}_m(t) e^{-i\omega_m t} \quad (12)$$

$$(d/dt)\hat{\sigma}_m(t) = -\Gamma_{mph} \{\hat{\sigma}_m(t) - \sigma_m^0\} + 2i \sum_j \{\kappa_{jm} \hat{a}_j^\dagger(t) (\hat{b}_{m1}^\dagger \hat{b}_{m2})(t) - \kappa_{jm}^* \hat{a}_j(t) (\hat{b}_{m2}^\dagger \hat{b}_{m1})(t)\}. \quad (13)**$$

ここで $\hat{\sigma}_m$ は原子反転分布演算子、 Γ_{mph} はポンピング過程の緩和係数であり、 σ_m^0 は光波のないときの原子反転分布の期待値で、ポンピングの大きさを表す。これらの式は、大まかに言えば、光波は電気双極子により駆動され、電気双極子は光波と原子反転分布によって形成され、原子反転分布はポンピング過程と光波の放出、吸収によって増減する、ということを表している。

通常のレーザー理論と異なる点は、(1)光波モードに関する現象論的な減衰項と付随するランダム力が現れない、代わりに(2)光波モードに関する和が現れる、という二点である。

以後の解析では、トータルの電界の正周波数部分演算子

$$\hat{E}^+(z,t) = i \sum_j (\hbar\omega_j/2)^{1/2} \hat{a}_j(t) U_j(z), \quad (14)$$

の運動を考える。時刻 $t=0$ に光と原子群の相互作用が始まるとして、 \hat{a}_j の式(11)と ($\hat{b}_{m1}^\dagger \hat{b}_{m2}$) の式(12)を使って後者を消去し、電界 $\hat{E}^+(z,t)$ の式に直すと、電界振幅の変動は光周波数に比べて緩やかであるという近似の下で、次式となる。

$$\begin{aligned} \hat{E}^+(z,t) &= \sum_m \frac{1}{2\hbar\omega} \frac{p_m^2 \omega_m^2}{2\hbar\omega} \int_0^t \sum_j U_j(z) U_j(z_m) e^{i\omega_j(t-t')} \\ &\times \int_0^{t'} e^{(\gamma_m + i\omega_m)(t''-t')} \hat{E}^+(z_m, t'') \sigma_m(t'') dt'' dt' \\ &+ \hat{F}_t^+(z,t) + \hat{F}_q^+(z,t), \end{aligned} \quad (15)***$$

$$\hat{F}_t^+(z,t) = i \sum_j (\hbar\omega_j/2)^{1/2} U_j(z) \hat{a}_j(0) e^{-i\omega_j t}, \quad (16)$$

* : 電磁界の連続モードにより起こる自然放出による双極子の減衰。本稿では共振器は長いとして、通常の三次元自由空間の自然放出率を想定している。

** : 本稿では簡単のため、良く安定した定常発振の位相雑音のみを考えることとし、AM雑音を無視するので、利得(原子反転分布)の揺らぎをもたらす(緩和係数 Γ_{mph} に応じた)ランダム力の項^{2,6)}を無視した。

$$\hat{F}_q(z,t) = \sum_m \frac{i p_m \omega_m}{2} \int_0^t \sum_j U_j(z) U_j(z_m) e^{i\omega_j(t-t')} \times \int_0^{t'} e^{i(\gamma_m + i\omega_m)(t'-t'')} \hat{\Gamma}_m(t'') dt' dt'' \quad (17)$$

ただし、 ω_j は今後求める未定の発振周波数であり、式(12)の $\sum_j \kappa_{jm}^* \hat{a}_j$ を $(p_m^* \omega_m / \hbar \omega) \hat{E}^+$ と近似したため現れた。 $\hat{F}_l(z,t)$ は初期電界から来る持続的な熱雑音であり、 $\hat{F}_q(z,t)$ は原子双極子振動の減衰に伴う量子雑音である。式(15)の意味は、 $\hat{E} \hat{\sigma}_m$ で表される電界の増幅（誘導放出）作用が位置 z_m の原子で時刻 t' まで継続し、その結果放出された波が時刻 t に位置 z に達する、ということ、またそれがすべての原子について起こる、ということである。ちなみに式(16)の $\sum_j U_j(z) U_j(z_m) e^{i\omega_j(t-t')}$ をモード関数の規格定数の展開（第一の多重反射を表すもの）を用いたうえで ω_j に関する積分に移行すると、時刻 t' に m 番目の原子位置 z_m を出発して時刻 t に位置 z に達するあらゆる可能な遅延時間を含む δ 関数群となる。⁷⁾ 例えば $\delta(t-t'-\tau_{1n}), \tau_{1n} = (2nd+z-z_m)/c \quad n=0,1,2,\dots$ は、 $z_m < z$ であって、 z_m から z へ直接遅延時間 τ_{10} で伝播する効果、さらに共振器内を n 回周回してから遅延時間 τ_{1n} で z_m から z へ伝播する効果を表す。逆に言えば、 z_m から発して時刻 t に観測点 z に達するには、 $t' = t - (2nd+z-z_m)/c$ に出発すればよく、原子は多重反射のために $\hat{E}^+(z,t)$ に繰り返し寄与するということである。ほかに $\tau_{2n} = (2nd-z+z_m)/c$ 、 $\tau_{3n} = (2nd+2d+z+z_m)/c$ 、 $\tau_{4n} = (2nd-2d-z-z_m)/c$ の遅延時間を含む δ 関数群が現れる。これらの寄与の様子を $z_m < z$ と $z_m > z$ の場合について図4に示す。

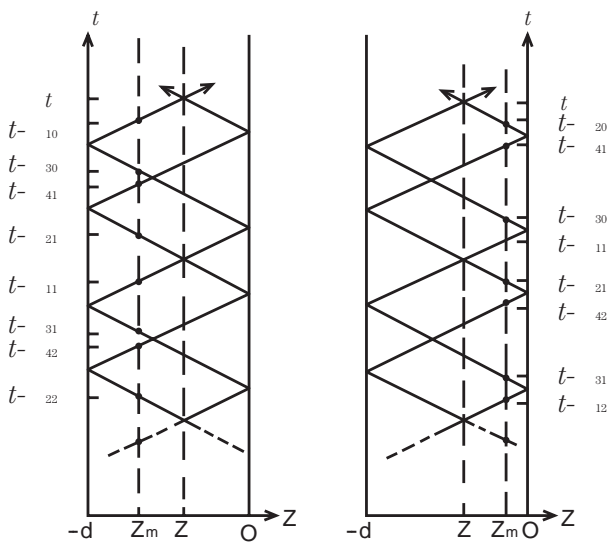


図4 増幅への多重反射の効果

次に、 $\hat{\Gamma}_m(t)$ の式(17)を見ると、係数は別として式(15)で $\hat{E}(z_m,t) \hat{\sigma}_m(t)$ を $\hat{\Gamma}_m(t)$ で置き換えた形になっており、原子に加えらるランダム力に起因する光波の伝搬の仕方は、当然のことながら、誘導放出光の場合と全く同様であることが分かる。

4 半古典論

式(15)を満たす完全な量子論の解を求める準備として、光波と原子双極子を古典量として扱う半古典論の結果を導いておく。後でこれに $\hat{a}_j(0)$ と $\hat{\Gamma}_m(t)$ から来る熱および量子雑音の効果をつけ加えて量子論に移行する、という手順である。半古典論の主な結果は、一般には発振周波数と発振に必要な利得の閾値および出力であるが、本稿ではこれに電界と原子反転分布の空間分布が加わる。電子回路の解析と同様に、線形利得を仮定すると発振周波数と利得の閾値のみが求まり、利得飽和を考慮すると加えて発振振幅も求まる。解析においては形式的に量子論の式(15)を使い、雑音となる項を無視すれば半古典論になる。（演算子記号「 $\hat{}$ 」は無効となる。）以下では簡単のため原子群は均一な広がりを持ち、ポンプ強度も同様であるものとし、 $\omega_m = \omega_a$ 、 $p_m = p$ 、 $\gamma_m = \gamma$ 、 $\sigma_m^0 = \sigma_0$ 、 $\Gamma_{mph} = \Gamma_{ph}$ とする。

4-1 線形利得⁷⁾

利得は、原子ごとに上下準位にある確率の差（原子反転分布）を取って、その集積したものと考える。線形利得理論ではこれを定数とする。本節ではさらに、原子の位置 z_m によらない定数とし $\hat{\sigma}_m \rightarrow \sigma_m$ とする。共振器内部では左右に伝播する波があると考えて、電界を

$$E^+(z,t) = e^{-i\omega t} [e^+(z,t) \exp\{ik(z+d)\} + e^-(z,t) \exp\{-ik(z+d)\}], \quad k = \omega/c, \quad (18)$$

と分ける。 ω は中心（発振）周波数、 $e^\pm(z,t)$ は時間的、空間的に緩やかに変化する関数である。本稿では波長に比して長い通常のレーザーを考えるので、これら左右の進行波は明確な意味を持つ。これを方程式(15)（雑音を除いたもの）に代入して $\exp\{ik(z+d)\}$ と $\exp\{-ik(z+d)\}$ の成分に分離し、単位長あたりの原子数を N （一定）として m の和を z_m の積分に直した後 z で微分すると、 $e^\pm(z,t)$ の連立微分方程式を得る（その際 $\exp\{\pm 2ik(z+d)\}$ の項は無視した）。容易に想像されるように、電界の解は共振器内の電界が両端の境界条件を満たす、という形で求まる（外部の電界は出力端での境界条件に整合する形で求まる）。単一の共振器モードでの動作を仮定してラプラ

*** : 原子双極子の初期値 $(\hat{b}_{m1}, \hat{b}_{m2})(0)$ に依存する雑音もあるが、これは $1/\gamma_m$ 程度の時間で減衰することが示せるので、（擬）定常状態の解析では無視できる。

ス変換により解くと、長い計算の後、主要な解は電界の初期分布 $e^+(z,0)\delta(t)$ から決まるある定数 C と、古典論で導いたモード関数の空間部分および時間的振動の積となる。

$$E^+(z,t) = C \sin\{\Omega_c(z+d)/c\} \exp\{(s_0 - i\omega)t\}. \quad (19)$$

s_0 は $e^+(z,t)$ のラプラス変換の最も重要なポールであり、利得がなければ γ_c 、発振の閾条件下では0に等しい。 $s_0=0$ とおくと、発振周波数と発振閾条件が次のように求まり、通常理論と同じである。

$$\omega = \frac{\gamma\omega_c + \gamma_c\omega_a}{\gamma + \gamma_c}, \quad (20)$$

$$\frac{GNc/\gamma}{1+\delta^2} = \gamma_c, \quad G = \frac{\omega_a^2 |p|^2 \sigma_0}{2nc_0 \epsilon_0 \hbar \omega}, \quad \delta = \frac{\omega_a - \omega_c}{\gamma + \gamma_c}. \quad (21)$$

式(21)第一式左辺が単位時間当たりの振幅利得である。この式で与えられる反転分布 σ_0 を閾反転分布 σ_{th} と書き、特に同調時 ($\omega_c = \omega_a, \delta = 0$) のものを σ_{th}^0 と書く。

4-2 非線形利得⁸⁾

利得飽和を考慮して定常状態の解を求めると、電界振幅の z 依存性が緩やかで、原子分極がその位置の電界のみで決まるという仮定⁹⁾の下で、線形利得の場合と同じ発振周波数、発振閾値を得る。これらは通常理論と同じである。出力パワー P は飽和電界 E_s を尺度として次式で与えられ、通常理論と同じになる。

$$P = c_0 \epsilon_0 (1+r)^2 |e^+(-0)|^2, \quad (22)$$

$$|e^+(-0)|^2 = \frac{|E_s|^2}{1-r^2} \left\{ \frac{2GNd}{\gamma} \cdot \frac{1}{1+\delta^2} - \ln(1/r) \right\}, \quad (23)$$

$$|E_s|^2 = \frac{\Gamma_{ph} \hbar^2 \omega^2 \gamma^2}{4\gamma\omega_a^2 |p|^2} (1+\delta^2). \quad (24)$$

ただし、電界分布はキャビティの固有モード関数 $\sin\{\Omega_c(z+d)/c\}$ からずれ、また、電界に依存する飽和反転分布も空間的に不均一になる。しかし、発振時の空間平均反転分布は、閾反転分布に等しい。なお、既述のように、 $x-y$ 方向の単位断面積で考えている。

5 量子論

再び原子群の均一な広がりを仮定し、前節の計算を活用して雑音源となるランダム力のあるときの解を求める。

求めた電界の相関関数からウイナー・キンチンの定理によりスペクトルを求めるので、ランダム力の相関関数が必要となる。電界の初期値に由来するランダム力は電磁界モードごと独立であるとする。また、量子雑音は原

子ごとに独立であり、時間相関はデルタ関数的であると仮定する。ランダム力に関するアンサンブル平均をカギ括弧で表すと、

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_i^\dagger(0)\hat{a}_j(0) \rangle &= \delta_{ij} n_j(T), \\ \langle \hat{a}_i(0)\hat{a}_j^\dagger(0) \rangle &= \delta_{ij} \{n_j(T)+1\}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Gamma}_n^\dagger(t')\hat{\Gamma}_m(t) \rangle &= \delta_{nm} G_{nm} \delta(t'-t), \\ \langle \hat{\Gamma}_n(t')\hat{\Gamma}_m^\dagger(t) \rangle &= \delta_{nm} G'_{nm} \delta(t'-t), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} G_{nm} &= \gamma_m (1 + \langle \sigma_m \rangle) + (\Gamma_{mph}/2)(\sigma_0 - \langle \sigma_m \rangle), \\ G'_{nm} &= \gamma_m (1 - \langle \sigma_m \rangle) - (\Gamma_{mph}/2)(\sigma_0 - \langle \sigma_m \rangle), \end{aligned} \quad (27)$$

である。^{2,6)} $n_j(T)$ は周辺温度 T におけるモード j の熱光子数の期待値でプランクの式で与えられる。

5-1 線形利得¹⁰⁾

反転分布が一定 $\langle \sigma_m \rangle \rightarrow \sigma_0$ とし、熱雑音と量子雑音のランダム力で駆動される電界をラプラス変換で求める。誘起される空間関数 $\sin\{\Omega_c(z+d)/c\}$ および主要な変換係数 s_0 は線形利得の半古典論と同じになり、発振周波数、閾利得も同じになる。半古典論では初期電界を仮定して、時間領域で指数的に減衰する解を得たが、量子論では持続するランダム力が絶えず電界を駆動し続けるので、閾以下でも持続する出力が生じる。時刻 τ に駆動されて生じた電界は $\sin\{\Omega_c(z+d)/c\} \exp\{(s_0 - i\omega)(t-\tau)\}$ の形で減衰し、全電界は についての積分で、さらにモード j および原子 m についての、時刻 での雑音源位相を付した、和となる。

電界の量子力学的コヒーレンス関数¹¹⁾

$\langle \hat{E}^{++}(z',t')\hat{E}^+(z,t) \rangle$ に上のアンサンブル平均を課して、例えば共振器外部では

$$\begin{aligned} \langle \langle \hat{E}^{++}(z',t')\hat{E}^+(z,t) \rangle \rangle &= \frac{R(1+r)^2}{4r} \\ &\begin{cases} \exp[(s_0 - i\omega)((t-\frac{z}{c}) - (t'-\frac{z'}{c}))], & (t-\frac{z}{c}) > (t'-\frac{z'}{c}) \\ \exp[(s_0 + i\omega)((t-\frac{z}{c}) - (t'-\frac{z'}{c}))], & (t-\frac{z}{c}) < (t'-\frac{z'}{c}), \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

を得る。ここに定数 R は、雑音と共振器および反転分布の諸パラメータで与えられる。半値半幅 $\Delta\omega$ は減衰係数 s_0 の実部の絶対値で与えられ、

$$\Delta\omega = \frac{\hbar\omega}{P} \frac{2C_1\gamma^2\gamma_c^2(1+\delta^2)}{(\gamma+\gamma_c)^2 + \delta^2(\gamma-\gamma_c)^2} \left[\frac{\sigma_0^2}{\sigma_{th}\sigma_{th}^0} n_i(T) + \frac{N_2}{N\sigma_{th}} \right], \quad (29)$$

となる。 P は R に比例する出力パワーであり、 $n_i(T)$ は中心周波数近傍のモード当たりの熱光子数である。通常線形利得理論に対して $C_1 = (\beta_c/\gamma_c)^2$ の補正因子が付

く。ただし、 $\beta_c = (c/2d)(1-r^2)/2r$ 、 $\gamma_c = (c/2d)\ln(1/r)$ である。この因子は反射率 r だけで決まり、本稿の外部結合を考慮した理論と通常理論における同条件下での出力の比に等しい。通常理論は平坦な電界分布の仮定のため、内部蓄積エネルギーを過小評価している。

なお、光周波数では熱雑音は量子雑音に比し無視できる（マイクロ波周波数では逆である）。

5-2 非線形利得¹²⁾

反転分布の利得飽和を許し、 $\langle \sigma_m \rangle$ は原子位置毎に異なるとして、定常状態でランダム力で駆動される電界をラプラス変換で求める。発振周波数、発振閾反転分布、空間平均の反転分布、発振出力は非線形半古典論と同じになる。ランダム力に比例する共振器外部の電界の揺らぎ成分 $(\partial/\partial t)e^+(z,t)$ を求め、さらに振幅は安定しており位相拡散のみが起こると仮定して、

$e^+(z,t) = e_0 \exp[i\phi(z,t)]$ とおいて実の位相の式 $(\partial/\partial t)\phi(z,t)$ に変換する。すると、外部でコヒーレンス関数のアンサンブル平均は

$$\begin{aligned} \langle \langle \hat{e}^+(z+\Delta z, t+\Delta t) \hat{e}^+(z, t) \rangle \rangle &\equiv e_0^2 [1 + i \langle \langle \Delta\phi \rangle \rangle - \frac{1}{2} \langle \langle (\Delta\phi)^2 \rangle \rangle] \\ &= e_0^2 [1 - \frac{1}{2} \langle \langle (\Delta\phi)^2 \rangle \rangle], \end{aligned} \quad (30)$$

$$\Delta\phi = \phi(z+\Delta z, t+\Delta t) - \phi(z, t), \quad (31)$$

となるので、発振線の半値半幅 $\Delta\omega$ は $\frac{1}{2} \langle \langle (\Delta\phi)^2 \rangle \rangle / \Delta t$ で与えられ、長い計算の結果次の値となる（ただし、 $\Delta t \gg \gamma^{-1}, 2d/c$ とした）。

$$\Delta\omega = \frac{\hbar\omega}{P} \frac{C_1 \gamma^2 \gamma_c^2 (1+\delta^2)}{(\gamma+\gamma_c)^2 + \delta^2 (\gamma-\gamma_c)^2} \left[n_i(T) + \frac{1}{2} + \frac{N_1+N_2}{2N\sigma_{th}} C_2 \right], \quad (32)$$

$$C_1 = \frac{\beta_c^2}{\gamma_c^2} = \frac{[(c/2d)(1-r^2)/2r]^2}{[(c/2d)\ln(1/r)]^2} = \left(\frac{(1-r^2)/2r}{\ln(1/r)} \right)^2, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} C_2 = 1 + \frac{\Delta}{1+\Delta} g(r), \quad g(r) = \frac{1}{2} (\gamma_c/\beta_c)^2 \\ + (1/4r) (\gamma_c/\beta_c) (1+r^2) - 1. \end{aligned} \quad (34)$$

ここで、 C_1 、 C_2 は本研究で導かれた補正因子であり、 $C_1 = C_2 = 1$ とおけば通常理論の線幅の式になる。 C_1 は線形利得の場合と同じ補正で、反射鏡の振幅反射率 r のみで定まり、 C_2 は反射鏡の反射率と比過剰反転分布 $\Delta = (\sigma_0 - \sigma_{th})/\sigma_{th}$ で定まる。 N_1 、 N_2 は単位長あたりの下、上準位の原子数のアンサンブル平均、 N は同全原子数である。 C_1 は共振器モード関数の効果であり、 C_2 は利得飽和によりこれが歪むために生じる。

線幅は、補正因子 C_2 を除けば線形利得の場合のほぼ 1/2 になる。これは利得飽和による振幅安定の効果である。

熱雑音 n_i と真空の揺らぎ 1/2 が無視できる場合、すなわち $\sigma_{th} \ll (N_1 + N_2)/N \equiv 1$ の場合の、全補正因子 $C_{corr} = C_1 C_2 = (\beta_c/\gamma_c)^2 \{1 + \{\Delta/(1+\Delta)\}g(r)\}$ のグラフを図5に示す。最下線は $\Delta=0$ の場合で、 $C_1 = (\beta_c/\gamma_c)^2$ の効果を示す。中間および最上の線はそれぞれ $\Delta=1$ および $\Delta=10$ の場合を示す。主要な因子は C_1 であることが分かる。 n_i 等を考慮しても C_1 が主要な因子であることが示される。振幅反射率 r が小さいとき補正は大きい。逆に $r \rightarrow 1$ では $C_{corr} \rightarrow 1$ となる。

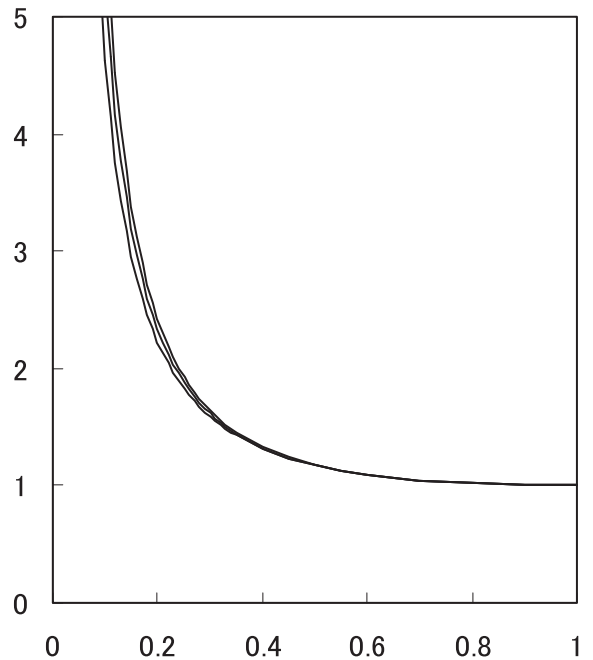


図5 線幅補正因子 C_{corr} 対振幅反射率 r

6 おわりに

W.A.Hamelら¹³⁾は、二つの全透過損失の等しい半導体レーザーにおいて、両端面のパワー反射率が10%-90%の場合に、30%-30%のものより線幅が60%ほど大きいことを実験的に確かめた。これは、通常理論では同じ線幅になるべきところ、本稿のモデルに近く電界分布の不均一性がより大きい前者で線幅が大きいことを示し、本稿の補正の正しさを支持している。

本稿で述べたレーザー線幅増大の物理機構については、特に C_1 に関しては、共振器モードに直交性が無いため、非発振共振器モードへの自然放出が発振共振器モードへも影響するため、との解釈が後に文献13などに表明された。

本研究から得られる教訓があるとすれば、それは、物理モデルを精密化したことにより、得られるべき物理量

を単に数値的に改善しただけではなく、単純化されたモデルでは隠されていたある物理が垣間見えた、ということであろうと思われる。ただし、膨大な計算という代償を払った。この垣間見えた物理をよく吟味して、最初から計算モデルに取り入れれば、もっと容易に同じ結論に達し得るのかもしれない。

参考文献

- 1) 霜田光一、矢島達夫編著、量子エレクトロニクス(上)、裳華房 第5版(1980)。
- 2) H.Haken, *Handbuch der Physik*, edited by L.Genzel (Springer, Berlin, 1970), Vol.XXV/2c.
- 3) M.O.Scully and W.E.Lamb, Jr., Quantum theory of an optical maser. I.General theory. Phys. Rev., **166** (1968) 246.
- 4) K.Ujihara, Quantum theory of a one-dimensional optical cavity with output coupling. Field quantization, Phys. Rev. A, **12** (1975) 148.
- 5) R. Loudon 著, 小島忠宣、小島和子訳、光の量子論(内田老鶴圃、1981)。
- 6) M.Lax, Quantum Noise. IV. Quantum Theory of Noise Sources, Phys. Rev., **145** (1966) 110.
- 7) K.Ujihara, Theory of a one-dimensional laser with output coupling-Linear theory, Jpn. J. Appl. Phys., **15** (1975) 1529.
- 8) K.Ujihara, Theory of a one-dimensional laser with output coupling-Nonlinear theory, J. Phys. Soc. Jpn., **40** (1976) 1406.
- 9) L.D.Landau and E.M.Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, (Pergamon Press, London, 1963). Chap.9.
- 10) K.Ujihara, Quantum theory of a one-dimensional laser with output coupling. Linear theory, Phys. Rev. A, **16** (1977) 652.
- 11) R.J.Glauber, The Quantum theory of optical coherence, Phys. Rev., **130** (1963) 2529.
- 12) K.Ujihara, Quantum theory of a one-dimensional laser with output coupling. II. Phase noise above threshold, Phys. Rev. A, **29** (1984) 3253.
- 13) W.A.Hamel, J.P.Woerdman, Observation of enhanced fundamental linewidth of a laser due to nonorthogonality of its longitudinal eigenmodes, Phys. Rev. Lett., **64**, (1990) 1506.