

# $q$ シフト因子の対数に関するべき級数展開とその解析

中 井 日 佐 司

## Power Series Expansion and Analysis for Logarithm of $q$ -Shifted Factorial

Hisashi NAKAI

### Abstract

Series expansion  $\ln(1-a) - L_q(a)$  is given for the logarithm of the  $q$ -shifted factorial (or  $q$ -Pochhammer symbol) defined by infinite product  $(a; q)_\infty := (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\cdots$ , where  $L_q(a) := \sum_{m=1}^{\infty} (aq)^m / [m(1-q^m)]$  within  $0 \leq a < 1$  and  $0 \leq q < 1$ . The divergent factor  $1/(1-q)$  is separated from the expansion, and it is found out that the  $(a; q)_\infty$  as a function of  $a$  is damped by this factor as damping coefficient. Moreover, using this expansion, both of the upper and lower bounds of  $(a; q)_\infty$  are given in terms of dilogarithms. The difference between both of the bounds is estimated less than 0.02.

We construct a polynomial approximation on  $L_q$ , then estimate remainder term appearing in the approximation, and relate the remainder term to estimated relative error. This estimated error is compared to the error of numerical experiment in calculation on  $(a; q)_\infty$  using the polynomial approximation. Both of the errors are consistent each other within the significant digits of the experiment.

Keywords:  $q$ -shifted factorials,  $q$ -Pochhammer symbol, survival probability, remainder term.

## 1 はじめに

ある事象が期間  $i$  で生じる確率を  $p_i$  とする。このときに、 $N$  回の期間を経過して一度も事象が生じない残存確率  $P_N$  は、

$$P_N = \prod_{i=0}^{N-1} (1-p_i) \quad (1)$$

と表わせる。たとえば、ある機器の故障や特定の事故による死亡、資格審査の合格を事象として考えることができる。経過した期間  $N$  が増えるほど  $p_i$  が減少する事象を考えよう。このモデルとして  $0 \leq a < 1$  と、 $0 \leq q < 1$  によって、

$$p_i = aq^i \quad (2)$$

とする。ここで  $a$  は  $p_i$  のスケール因子であり、 $q$  は確率に対する期間毎の減衰率である。たとえば人と自動車との衝突による死亡が事象である場合、 $a$  は周囲の事故原因となる自動車の台数に比例する量であり、一方、期間を経るに従って向上していく事故回避能力による生起

確率の減衰率が  $q$  になる。そして、残存確率は事故に遭わずに生き残った人の割合になる。

以上の  $p_i$  で構成した  $P_N$  は、 $q$  シフト因子と呼ばれる

$$(a; q)_N := \prod_{i=0}^{N-1} (1-aq^i) \quad (3)$$

になる。

さらに期間が進み、極限  $N \rightarrow \infty$  で  $P := (a; q)_\infty$  が収束するとき、この無限乗積を最終残存確率と呼ぶことにする。この最終残存確率の性質は、無限乗積である  $q$  シフト因子  $(a; q)_\infty$  の性質を知ることによって理解できる。そこで、この因子の性質を概観しよう。

**収束性** 減衰率  $q \rightarrow 1$  の極限では、 $p_i = a$  で事象生起確率は定数になり、 $P = \prod_{i=0}^{\infty} (1-a) = 0$  で発散する\*1。一方、 $0 \leq a < 1$  かつ、 $0 \leq q < 1$  である定義域  $D$  の範囲では、正項級数  $\sum_{i=0}^{\infty} | -aq^i | = \sum_{i=0}^{\infty} aq^i$  が  $a/(1-q)$  に収束するので、 $(a; q)_\infty$  は  $(a; q)_\infty > 0$  に収束する [1, p.178]。つまり、無限期間が終了した後にも、 $0 \leq q < 1$  では零でない残存

Received on September 7, 2015.

国際交流センター

\*1 定義より、無限乗積が零になるときを発散とする。文献 [1] 参照。

確率を取り得る。

**$a$  と  $q$  への依存性** 定義 (3) から、 $(0, q)_\infty = 1$ 、 $(a, 0)_\infty = 1 - a$ 、 $(0, 0)_\infty = 1$  になる。 $a$  と  $q$  が増加すると式 (3) の各因子は減少するので、その無限乗積  $(a; q)_\infty$  も減少する。 $a \rightarrow 1$  と  $q \rightarrow 1$  の極限では、 $\lim_{a \rightarrow 1} (a; q)_\infty = 0$  および、 $\lim_{q \rightarrow 1} (a; q)_\infty = 0$  (ただし、 $a > 0$ ) となり、零に発散する。 $a \rightarrow 1$  に関する発散は、式 (3) における  $i = 0$  の因子  $(1 - a)$  から生じる。一方、 $q \rightarrow 1$  に関する発散は  $i \geq 1$  の因子が  $(1 - aq^i) \rightarrow (1 - a)$  になるために生じる。なぜなら、 $(1 - a) < 1$  なので、 $\prod_{i=0}^{\infty} (1 - a) = 0$  になるからである。

以上の事から、定義域  $D$  では、 $(a; q)_\infty > 0$  に成り得ること、 $a \rightarrow 1$  における発散が無乗積の第一因子にのみ起因し、無限乗積から容易に分離できる事と対症的に、 $q \rightarrow 1$  における発散は  $i \geq 1$  における積の全因子が掛け合されることによって生じている事が解った。このため、定義 (3) の表式からは簡単には  $q$  に関する発散を分離することができない。

本報文ではこのようなことを踏まえ、式 (2) の  $p_i = aq^i$  に関する最終残存確率の性質を知るために、定義域内  $D$  について  $(a; q)_\infty$  を満遍なく表現できて、極限  $\lim_{q \rightarrow 1} (a; q)_\infty = 0$  における発散が分離可能な表式を見いだす。次にこの表式を用いて、 $q$  に関する発散部分を分離し、 $(a; q)_\infty$  の上界・下界を求める。そして、 $a$  を独立変数とする  $(a; q)_\infty$  のグラフが、助変数  $q$  の発散部分によってうける影響を調べることにする。

議論では、数値計算のための近似として後述する式 (4) を利用し、その剰余項を評価する。次に、この剰余項と相対誤差を関連づけて、数値実験から得られた相対誤差と比較する。最後に、式 (4) を初等的な方法で求め、その方法を一般の  $p_i$  に対して適用し、剰余項の評価から収束速度を議論する。

## 2 ベキ級数展開の導出と発散の分離

### 2.1 ベキ級数展開の導出

$q$  シフト因子に関する表式として、 $q$  二項定理の結果から導出された関係式 [2, p.490]、

$$(a; q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\frac{n^2-n}{2}}}{(q; q)_n} a^n$$

がある。この関係式は、 $a$  に関するベキ級数として  $(a; q)_\infty$  を表した式である。部分和を  $(a; q)_\infty$  の近似とした際の剰余項が  $q^{\frac{n^2-n}{2}}$  に比例しており、非常に速い収束が期待できる一方で、 $a \rightarrow 1$  と  $q \rightarrow 1$  に関する発散  $(a; q)_\infty \rightarrow 0$  が見とおせない。

他の表式としてアベル・プラナの和公式 (Abel-Plana summation formula) [3, p.290] を用いた  $|a| \rightarrow \infty$  に

おける漸近展開の公式 [4] や、オイラー・マクローリンの和公式 (Euler-Maclaurin summation formula) を用いた  $q \rightarrow 1$  における  $q$  シフト因子の漸近展開に関する公式がある [5]。これらの公式では、本報文における  $a$  の定義域をはずれていた [4]、 $q \rightarrow 1$  の極限で成立する非常に狭い部分のみを論じている [5]。また、特殊関数や  $q$  シフト因子そのものを含んでいるために、その性質を調べるのは困難である。

そこで、文献 [4] を参考にして本報文の  $a$  に関する定義域  $D$  にアベル・プラナの和公式を適用したところ、

$$\ln(a; q)_\infty = \ln(1 - a) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{m(1 - q^m)} a^m \quad (4)$$

を得た (導出は付録 A 参照)。この式は、形式的なベキ級数  $Li_2(a; q) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n(1 - q^n)}$  として定義された、quantum dilogarithm 関数 [6, §2.5, pp.130-138] と関連づけることができる。 $Li_2(a; q)$  は、 $q$  シフト因子の対数との関係  $\ln(a; q)_\infty = -Li_2(a; q)$  を満している [6, Lemma 8-i, p.131]。 $q$  シフト因子が満す関係式  $(a; q)_\infty = (1 - a)(aq; q)_\infty$  の両辺で対数をとれば、 $\ln(a; q)_\infty = \ln(1 - a) - Li_2(aq; q)$  と書くことができる。この表式は、前述の式 (4) と同じである。

こうして得られた表式 (4) には、以下の特徴がある；

1.  $m$  に関する和を有限項  $M$  で打ち切った時、 $a$  の  $M$  次多項式になる。また、 $a^m$  の係数が  $c_m(q) = (1/m)q^m/(1 - q^m)$  と書け、 $q$  に関する有理式になっている。
2. 係数  $c_m$  は  $q = 0$  の時に零になり (したがって、 $(a; 0)_\infty = 1 - a$ )、 $q \rightarrow 1$  の時に  $\ln(a; q)_\infty \rightarrow -\infty$  (したがって、 $\lim_{q \rightarrow 1} (a; q)_\infty = 0$ ) になる。
3. 上記の表式では、 $a = 0$  の時に  $a^m = 0$  から零になり (したがって、 $(0; q)_\infty = 1$ )、 $a \rightarrow 1$  の時に  $\lim_{a \rightarrow 1} \ln(1 - a) = -\infty$  から  $\ln(a; q)_\infty \rightarrow -\infty$  (したがって、 $(a; q)_\infty \rightarrow 0$ ) になる。

特徴 1 は、 $a$  の多項式で表現された簡明な表式であることを示している。また、特徴 2、3 は、 $a, q$  それぞれの定義域の端点における  $\ln(a; q)_\infty$  の振舞いが見えることを表している。

さて、 $L_q(a) := \sum_{m=1}^{\infty} [(1/m)q^m/(1 - q^m)]a^m$  とすると、 $(a; q)_\infty$  は、

$$(a; q)_\infty = (1 - a) \exp[-L_q(a)] \quad (5)$$

と表わすことができる。この式では、 $a \rightarrow 1$  に関する発散部分が  $1 - a$  の因子として分離されている。

### 2.2 $q$ に関する発散の分離

付録 B.1 の式 (B.2) から  $L_q$  は、

$$\frac{Li_2(aq)}{1 - q} < L_q(a) < \frac{qLi_2(a)}{1 - q}$$

である。ここで、 $Li_2(x)$  は dilogarithm 関数、

$$\begin{aligned} Li_2(x) &:= -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j^2}, \\ Li_2(1) &= \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

である。

$q \rightarrow 1$  の時、最左辺と最右辺は因子  $1/(1-q)$  で発散する。一方、 $Li_2(aq) \rightarrow Li_2(a)$ 、 $qLi_2(a) \rightarrow Li_2(a)$  であり、分子に関しては  $L_q$  の範囲は狭くなる。このことから、 $L_q(a)$  の特異性は  $1/(1-q)$  に原因することが推測できる。

実際  $A_q(a) := (1-q)L_q(a)$  は、

$$\begin{aligned} A_q &= (1-q) \sum_{m=1}^M [(1/m)/(1-q^m)](aq)^m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(aq)^m}{m(1+q+q^2+\dots+q^{m-1})} \end{aligned} \quad (6)$$

となる。 $A_q$  は  $q = 1$  でも発散せず、

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} (1/m^2)a^m \\ &= Li_2(a) \end{aligned}$$

であり、上述した推測と一致する。

この  $A_q$  を使って、

$$L_q(a) = \frac{A_q(a)}{1-q} \quad (7)$$

とすることで、 $q$  に関する  $L_q$  の発散は、分母の  $1-q$  に分離できた。

### 3 $q$ シフト因子の $a$ および $q$ 依存性

式 (5)、(7) から、

$$(a; q)_{\infty} = (1-a) \exp\left[-\frac{A_q(a)}{1-q}\right] \quad (8)$$

とあらわすことができる。この形に書くと、無限乗積における  $a$  と  $q$  の発散は、それぞれ、 $1-a$  と  $1/(1-q)$  の因子に分離されている。したがって、 $A_q(a)$  を調べることで  $(a; q)_{\infty}$  の振舞いが解る。

付録 B の式 (B.2) から、 $A_q$  は、

$$Li_2(aq) \leq A_q(a) \leq qLi_2(a) \quad (9)$$

の範囲にある。なお、定義域  $D$  に  $a = 1$  と  $q = 1$  を付け加えて  $A_q(a)$  の定義域とした。このために、式 (B.2) における不等号  $<$  が等号つき不等号  $\leq$  に変更されている。

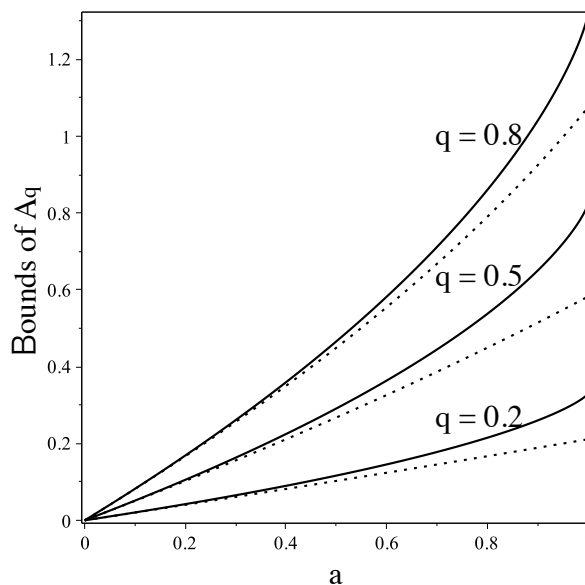


Fig.1 Upper ( $qLi_2(a)$ , solid line) and lower ( $Li_2(aq)$ , dotted line) bounds of  $A_q$  as a function of scale factor  $a$ . Each curve corresponds to a given value of an attenuation rate  $q = 0.2, 0.5, 0.8$ .

この不等式から、 $A_1(a) = Li_2(a)$ 、 $A_q(0) = A_0(a) = 0$ 、および、 $Li_2(q) \leq A_q(1) \leq \pi^2 q/6$  であることが解る。

$q = 0.2, 0.5, 0.8$  における上記の上下界についてプロットしたものが Fig.1 である。

点線が下界  $Li_2(aq)$ 、実線が上界  $qLi_2(a)$  に対応している。ベキ級数による定義より  $Li_2(a)$ 、および、 $Li_2(aq)$ 、 $A_q(a)$  は、 $a$  に関する単調増加関数である。また、 $a = 0$  近辺では上下界が一致している。これは、 $(Li_2(aq))_{a=0} = Li_2(0) = 0$ 、 $q(Li_2(a))_{a=0} = qLi_2(0) = 0$  で、上下界の  $a = 0$  における値が等しく、同時に、 $(\partial Li_2(aq)/\partial a)_{a=0} = q$ 、 $q(Li_2'(a))_{a=0} = q$  から導関数も等しいので、上下界のテーラー展開が  $a = 0$  で第一項まで一致するためである。更に  $q$  が 1 に近づくにしたがって、上界と下界が接近するため、両者の差は小さくなる。一方、 $a$  の増加とともに上下界の差は広がっていく。

$(a; q)_{\infty}$  の上界・下界を求めるため、式 (9) について指数をとると

$$e^{\frac{Li_2(aq)}{1-q}} \leq e^{\frac{A_q(a)}{1-q}} \leq e^{\frac{qLi_2(a)}{1-q}}$$

となる。逆数を取り、 $1-a$  を掛けると、

$$(1-a)e^{-\frac{qLi_2(a)}{1-q}} \leq (a; q)_{\infty} \leq (1-a)e^{-\frac{Li_2(aq)}{1-q}} \quad (10)$$

となり、シフト因子の上界・下界が得られた。式 (10) に関するプロットを Fig.2 に示す。

Fig.1 で見受けられた  $a$  の増加にともなって上下界の差が広がる状況は抑制され、 $a \rightarrow 1$  でともに零に近

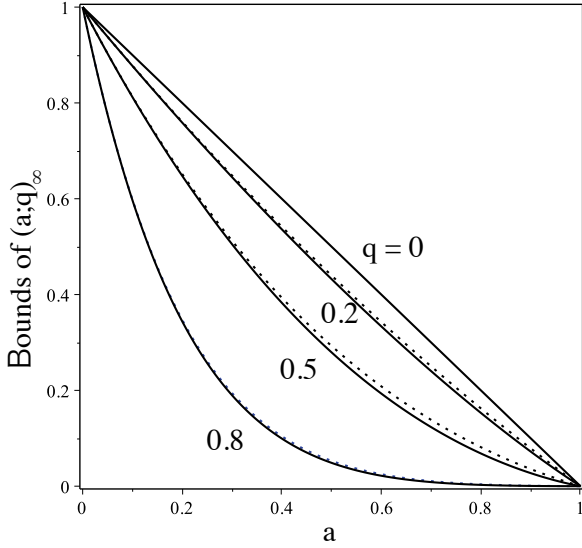


Fig.2 Upper  $((1-a)e^{-\frac{Li_2(aq)}{1-q}}$ , dotted line) and lower  $((1-a)e^{-\frac{qLi_2(a)}{1-q}}$ , solid line) bounds of  $(a; q)_\infty$  as a function of the  $a$ .

づいている。これは、 $A_q(a)$  の上下界が  $a$  に関する単調増加関数であり、且つ、指数部分の符号が負であるので、上下界の差が  $a$  の増加に伴う減衰によって圧縮されるためである。加えて、 $a \rightarrow 1$  に従って、式 (10) の因子  $1-a$  が零に近づくので、 $a = 1$  近辺で上下界の差は更に圧縮される。これらの圧縮のために、この図において  $(a; q)_\infty$  の上下界差は 0.02 未満になっている。また、 $q \rightarrow 1$  に従って  $a$  の増加に伴う減衰が急激になる。これは、式 (10) の上下界の指数部に現れる発散因子  $1/(1-q)$  が減衰定数として作用しているためである。

次に、 $q$  に関する依存性を考察する。式 (8)、(10) はそのまま利用できる。 $q$  シフト因子の  $q$  依存性プロットを Fig.3 に示す。実線が下界を、点線が上界をあらわしている。また、上から、 $a = 0.2, 0.5, 0.8$  になっている。ここでも上下界の圧縮が生じている。 $a \rightarrow 0$  で  $Li_2(aq) \rightarrow aq$  および  $qLi_2(a) \rightarrow aq$  なので、この極限で上界と下界は一致する。確かに  $a = 0.2$  では上下界の違いは殆どない。また、 $q = 0$  で  $Li_2(aq) = qLi_2(a) = 0$ 、 $q = 1$  で  $Li_2(aq) = qLi_2(a) = Li_2(a)$  なので、この 2 点で上界・下界が一致している。 $q$  依存性でも、Fig.3 における上下界の差は最大 0.02 を越えなかった。

$(a; q)_\infty$  の  $a, q$  依存性に対する上界と下界の差の最大を数値的に求めたところ、 $a = 0.67, q = 0.45$  で 0.016 になり、0.02 未満であった。

この差 0.02 を許容し、Fig.2 と Fig.3 を用いて  $q$  シフト因子、即ち、最終残存確率の性質を調べよう。スケール因子  $a$  の増加に対して、最終残存確率は  $1/(1-q)$  が減衰定数であるような指数関数的減衰を示す。ただし、 $q$  が変化しても、 $(0; q)_\infty = 1$ 、 $\lim_{a \rightarrow 1} (a; q)_\infty = 0$

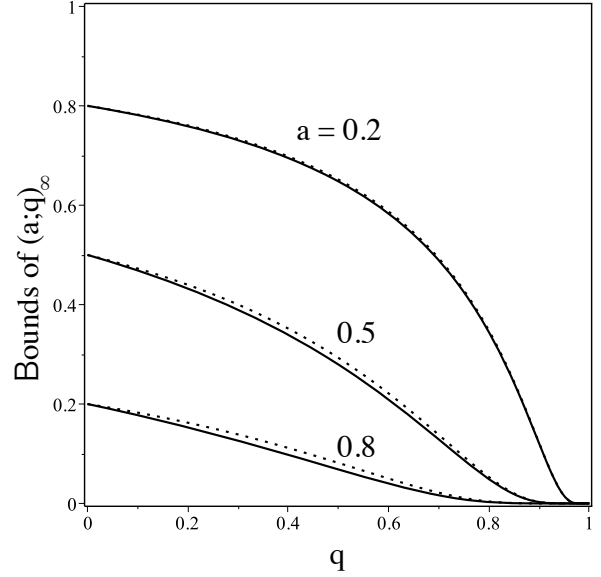


Fig.3 Bounds of  $(a; q)_\infty$  as a function of the  $q$ . Each curve corresponds to a given value of the  $a = 0.2, 0.5, 0.8$ .

は変わらない (Fig.2)。 $a = 1$  の近辺では、有限の勾配があり、 $q$  の増加にともなってその値が減少する。途中の  $a$  では、 $q$  の値によってその性質が変わる。例として  $a = 0.8$  を考えよう。 $q = 0.5$  の時はスケール因子  $a$  を変化させると最終残存確率も変化が見られる。一方、 $q = 0.8$  の場合、 $a = 0.8$  の近辺で変化させても確率はほとんど変化しない。

$q$  に関する最終残存確率の依存性は、減衰率  $q = 0$  近辺に関しては、この確率が取り得る最大値  $(a; 0)_\infty = 1-a$  なので、 $a$  の増加に伴って減少する。一方、 $a > 0$  の時、 $\lim_{q \rightarrow 1} (a; q)_\infty$  はいつも零である。 $q$  の途中の値では、確率の勾配の大きさが増加したのち、1 の近辺では勾配が非常に小さくなる (Fig.3)。 $q \rightarrow 1$  における勾配を調べてみよう。式 (5) について、 $q$  に関する対数微分を取ると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(a; q)_\infty}{\partial q} &= \frac{1}{(a; q)_\infty} \frac{\partial (a; q)_\infty}{\partial q} \\ &= -\frac{\partial L_q}{\partial q} \end{aligned}$$

から、

$$\begin{aligned} \frac{\partial (a; q)_\infty}{\partial q} &= -(a; q)_\infty \frac{\partial L_q}{\partial q} \\ &= -(1-a) \exp[-L_q(a)] \frac{\partial L_q}{\partial q} \end{aligned} \quad (11)$$

になる。

式 (B.4) から、 $q$  が 1 に近づくと、 $\partial L_q / \partial q \rightarrow Li_2(a) / [q(1-q)^2] = Li_2(a) / [(1-q)^2]$  になる。最後の等式で発散する  $1/(1-q)^2$  を残した。ま

た  $L_q \rightarrow Li_2(a)/(1-q)$  であるので、 $\lim_{q \rightarrow 1} (1-a) \exp[-Li_2(a)/(1-q)] Li_2(a)/(1-q)^2$  を求めれば良い。 $x := 1/(1-q)$  とし、極限を  $\lim_{x \rightarrow \infty}$  で置き換えると、

$$\begin{aligned} & \lim_{q \rightarrow 1} (1-a) \exp[-L_q(a)] \frac{\partial L_q}{\partial q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1} (1-a) \exp\left[-\frac{Li_2(a)}{1-q}\right] \frac{Li_2(a)}{(1-q)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1-a) Li_2(a) x^2 \exp[-Li_2(a)x] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

となり、 $0 \leq a \leq 1$  に関して、 $q \rightarrow 1$  の極限で  $q$  に関する勾配は厳密に零になる。このことから、減衰率  $q$  が 1 である近辺では、 $q$  の変化が最終残存確率に与える影響は非常に小さく、スケール因子  $a$  に依存しない。

## 4 議論

この節では、数値計算のための近似として式 (4) を利用し、その剰余項を評価する。次にこの剰余項と相対誤差を関連づけて、数値実験から得られた相対誤差と比較する。最後に、式 (4) を初等的な方法で求め、その方法を一般の  $p_i$  に対して適用し、剰余項の評価から収束速度を議論する。

### 4.1 $L_q$ を用いた $q$ シフト因子の近似と、その剰余項解析

第  $M$  項で  $L_q$  を打ち切った多項式を  $L_q^M$ 、剰余項を  $R_{M+1}$  とすると、 $(a; q)_\infty$  は、下記のようになる；

$$(a; q)_\infty = f_q^M(a) \exp[-R_{M+1}], \quad (13a)$$

$$f_q^M(a) := (1-a) \exp[-L_q^M(a)], \quad (13b)$$

$$L_q^M(a) := \sum_{m=1}^M [(1/m)/(1-q^m)] (aq)^m, \quad (13c)$$

$$R_{M+1} := \sum_{m=M+1}^{\infty} [(1/m)/(1-q^m)] (aq)^m. \quad (13d)$$

ここで  $f_q^M$  は、 $(a; q)_\infty$  に対する近似になる。

式 (13d) から、剰余項  $R_{M+1}$  は以下のように評価できる；

$$\begin{aligned} R_{M+1} &< \frac{1}{M+1} \frac{1}{1-q^{M+1}} \sum_{m=M+1}^{\infty} (aq)^m \\ &= \frac{1}{M+1} \frac{1}{1-q^{M+1}} \frac{(aq)^{M+1}}{1-aq}. \end{aligned} \quad (14)$$

定義域から  $aq < 1$  なので、剰余項は項数  $M$  に対して指数関数的に減少する。また  $aq$  は  $a, q$  の小さい方よりも小さいので、積を  $N$  因子で打ち切った近似  $(a; q)_N$  の剰余項  $\sim q^{N+1}$  (付録 C 参照) よりも減少は速い。

さて、相対誤差を  $\delta_q^M(a) := (f_q^M - (a; q)_\infty)/(a; q)_\infty$  で定義すると、式 (13a) から、

$$\delta_q^M = \exp[R_{M+1}] - 1 \quad (15)$$

になる。 $R_{M+1} \ll 1$  の時、この結果は簡単になって、

$$\begin{aligned} \delta_q^M &= R_{M+1} \\ &< \frac{1}{M+1} \frac{1}{1-q^{M+1}} \frac{(aq)^{M+1}}{1-aq}. \end{aligned} \quad (16)$$

すなわち、剰余項が小さい場合には、シフト因子の近似  $f_q^M$  の相対誤差は剰余項そのものになる。

### 4.2 相対誤差に関する数値実験

相対誤差に関する評価式 (16) を検証するために、 $a$  と  $q$  を変動させて数値実験を行った。この実験では、 $a$  については 0.1 から 0.9 まで、 $q$  については 0.1 から 0.6 まで\*2、それぞれ、0.1 刻みで増加させ、項数  $M = 4, 16, 64, 256$  について計算を実施した。計算には Maple を用いて有効桁数 32 桁で  $q$  シフト因子の近似式 (13b) を計算した。また、実験相対誤差  $\delta$  を求めるための「真値」として、有効桁数を 64 桁に指定し、無限乗積  $(a; q)_\infty$  について Maple で計算をしたものを使用した。

評価式 (16) に基づいて結果を整理するため、 $\delta$  の絶対値に  $(M+1)(1-aq)$  を掛けた  $(M+1)(1-aq)|\delta|$  の  $(aq)^{M+1}$  依存性を両対数でプロットしたものが、Fig.4 である。なお、この実験に関する  $q$  の範囲では、 $1-q^{M+1}$  の項は 0.95 より大きくなるので無視した。縦軸  $y := (M+1)(1-aq)|\delta|$ 、横軸  $x := (aq)^{M+1}$  とすると、評価式 (16) に従っている場合に  $y = x$  になる。このグラフを実線で示した。このプロットでは、 $M = 4, 16, 64, 256$  について、それぞれ、\*、○、△、▽ でプロットした。

この結果から、 $(aq)^{M+1} = 10^{-30} \sim 10^{-2}$ 、 $M = 4 \sim 64$  の範囲で式 (16)、即ち、 $\delta = \delta_q^M$  が成立している。この範囲における  $y = x$  との一致は非常によい。

一方、 $(aq)^{M+1} < 10^{-30}$  に関しては、 $(M+1)(1-aq)|\delta| \sim 10^{-30}$  になっていて、ほぼ一定である。また項数  $M = 64, 256$  がこの範囲に入っている。特に、項数が 256 項の場合、全てこの範囲に入っている。 $M = 64, 256$  について、この一定値をとる範囲の相対誤差の絶対値  $|\delta|$  を調べると、64 項で  $0 \leq |\delta| < 4.5 \times 10^{-32}$ 、256 項で  $0 \leq |\delta| < 6.7 \times 10^{-32}$  であった。項数 64 のものより項数 256 の相対誤差が増加していること、 $10^{-32}$  は数値実験の有効桁数 32 桁に対応する値であることから、 $(aq)^{M+1} < 10^{-30}$  における依存性は丸め誤差であると判断した。

\*2  $q$  に関する範囲は、後述する真値が Maple によって計算可能な範囲を用いた。

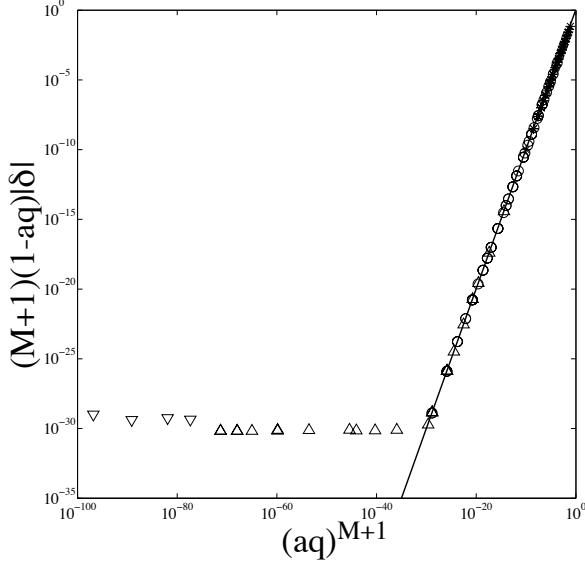


Fig.4 Test plot of relative error  $\delta$  for the calculation on the polynomial approximation to  $\ln(a; q)_\infty$  for  $M=4$  (asterisk), 16 (circle), 64 (triangle) and 256 (down-pointing triangle). An estimated relative error formula (16) corresponds to the solid line.

以上の結果から、丸め誤差を増やさないように項数に注意すれば、相対誤差  $\delta_q^M$  に関する式 (16) が有効計算桁数まで成立することが確かめられた。

#### 4.3 $L_q$ の初等的な導出と式 (4) の一般化

2.1 項では、 $\ln(a; q)_\infty$  のもっている性質を見通しやすい表式 (4) として得ることができた。ただし、アベル・プラナの和公式による方法は、項別積分と級数の複雑な再構成を含んでいて、他の  $p_i$  に拡張するのが難しい。

そこでこの項では、まず、上記  $\ln(a; q)_\infty$  に関する表式を和公式を利用しないで初等的に求める。

ここでは  $q$  シフト因子  $(a; q)_\infty$  の対数を、

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \ln(1 - aq^n) \\ &= \ln(1 - a) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} a^m q^{nm} \quad (17a) \end{aligned}$$

$$= \ln(1 - a) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q^m}{1 - q^m} a^m \quad (17b)$$

のように再構成して式 (4) を得た。式 (17a) の右辺第一項は  $a \rightarrow 1$  の極限で対数発散する項であり、この項のみが、 $a \rightarrow 1$  の極限で発散する。第二項は、 $aq^n$  に関して対数がマクローリン展開 (展開の次数は  $m$ ) されている。式 (17b) の第二項では、項数  $n$  に関する和を完了し、最終的に  $m$  に関する無限和として  $a$  のベキ級数になっている。積の因子数  $n$  に関する和を完了できたことで、 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{(aq)^m}{1 - q^m} = \frac{1}{1 - q} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{(aq)^m}{1 + q + q^2 + \dots + q^{m-1}}$

のように  $q \rightarrow 1$  における発散を  $1/(1 - q)$  の因子に分離できたことになる。なお、このような級数の再構成は、分割数  $p(n)$  の上界評価の際に、Euler の母関数  $\prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^i)^{-1}$  に使用されている [7, pp.316–318]。

以上の導出方法に倣って、一般的な  $p_i$  に関する最終残存確率  $P = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{N-1} (1 - p_i)$  を式 (4)、即ち、式 (17b) に類似の形で表現する。

$p_i$  について以下の仮定をおこなう；

1.  $p_i$  はスケール因子  $0 \leq a < 1$  と、減衰に関連するパラメータ  $s$  の関数  $u_i(s)$  によって、 $p_i = au_i(s)$  とあらわせる。
2. また、 $u_0 = 1$ 、 $i \geq 1$  について  $0 \leq u_i < 1$  であり正項級数  $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$  が収束する。

まず、式 (17a) と同様に、 $P$  の対数をとる。次にそれぞれの項の対数を  $p_i$  についてマクローリン展開し、因子数に関する引数  $i$  についての和を完了する。

$$\ln P = \ln(1 - a) - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} a^m u_i^m \quad (18)$$

$$= \ln(1 - a) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m}{m} a^m. \quad (19)$$

ここで  $g_m$  は、

$$g_m(s) := \sum_{i=1}^{\infty} u_i^m(s) \quad (20)$$

で定義される。 $u_i$  に対する仮定より、正項級数である  $\sum_{n=1}^{\infty} u_i$  が収束するので、式 (20) から  $g_1$  も収束する。 $m > 1$  のとき、 $i \geq 1$  について  $u_i^m \leq u_i$  であるので、 $0 \leq g_m \leq g_1$  であるため、 $g_m$  も収束する。さらに、 $m < l$  のとき、 $u_i$  に関する仮定から全ての  $i$  について  $u_i^m \geq u_i^l$  であるので、 $g_m \geq g_l$  である。つまり、 $g_m$  は  $m$  について非増加である。

さて、 $u_i$  に関する仮定の下に級数  $g_m(s) := \sum_{i=1}^{\infty} u_i^m(s)$  は収束し、 $m$  に関する非増加関数であることが解った。このことを利用して、式 (19) を  $M$  で打ち切ったときの剰余項  $R_{M+1}$  を評価しよう；

$$\begin{aligned} R_{M+1} &= \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{g_m}{m} a^m \\ &< \frac{g_{M+1}}{M+1} \sum_{m=M+1}^{\infty} a^m \\ &= \frac{g_{M+1}}{M+1} \frac{a^{M+1}}{1 - a}. \quad (21) \end{aligned}$$

したがって、 $g_m(s)$  の表式が求まれば、評価式 (21) が決定できる。また、無限乗積の因子の個数に対応する和を先に完了することで、 $a^{M+1}/(M+1)$  が収束を加速することが解る。

## 5 まとめ

本報文では、式 (4) を用いて  $q$  シフト因子を  $(a; q)_\infty = (1-a) \exp[-\sum_{m=1}^{\infty} (aq)^m / [m(1-q^m)]]$  で定式化し、上下界を評価することで  $(a; q)_\infty$  の性質を考察した。特に、 $a$  の増加にともなう  $(a; q)_\infty$  の減少は、 $q \rightarrow 1$  において発散する因子  $1/(1-q)$  が減衰定数として機能することを明らかにした。

また、式 (4) から  $q$  シフト因子の近似を構成し、その剰余項を評価した。更に数値実験によってこの評価が成立していることを確かめた。最後に、式 (4) を初等的に求め、一般的な最終残存確率への適用を行った。

## 付録 A アベル・プラナの和公式による、式 (4) の導出

この和公式は、関数  $f(j)$  に関する和と  $f(x)$  に関する定積分を関連づける公式であり、和を複素平面の周回積分に置き換えることで導かれる [3, pp.289–290]。  $(a; q)_\infty$  を計算する際には零から無限大までの和をとるので、

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \int_0^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{2} f(0) + i \int_0^{\infty} \frac{f(iy) - f(-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy \quad (\text{A.1})$$

と書ける。この公式を使って、式 (4) を求めてみよう。以下では右辺第一項の積分を  $I_1$ 、第三項の積分を  $I_2$  とする。

■関数  $f(x)$  和を取る関数  $f$  が以下の条件を満たせば、和公式 (A.1) を使用できる [8]。

1.  $\sum_{j=0}^{\infty} f(j)$  か、 $I_1 = \int_0^{\infty} f(x) dx$  の存在を示すことができる。
2. 複素関数  $f(z)$  は、 $\text{Re} z \geq 0$  で解析的である。
3. 有限区間の  $x$  について一様に  $\lim_{y \rightarrow \infty} |f(x \pm iy)| e^{-2\pi y} = 0$  が成立する。
4. 積分  $\int_0^{\infty} |f(x + iy) - f(x - iy)| e^{-2\pi y} dy$  が全ての  $x \geq 0$  で存在して  $x \rightarrow \infty$  の極限で零に収束する。

$q$  シフト因子を計算するために対数を取って、和に変換する。  $\ln(a; q)_\infty = \sum_{j=0}^{\infty} \ln(1 - aq^j)$  なので、  $f(x) = \ln(1 - aq^x)$  と表わせる。ここで、定義域  $D$  は  $0 \leq a < 1$ 、  $0 \leq q < 1$  である。

$|\ln(1 - aq^{x \pm iy})| \leq |\ln(1 - aq^x)| \leq |\ln(1 - a)|$ 、  $|\ln(1 - aq^{x+iy}) - \ln(1 - aq^{x-iy})| \leq 2|\ln(1 - aq^x)|$  から、複素数  $z = x + iy$  を引数とした  $f(z) := \ln(1 - aq^z)$  は以下

の性質を持つ；

$$\lim_{y \rightarrow \infty} |\ln(1 - aq^{x \pm iy})| e^{-2\pi y} \leq \lim_{y \rightarrow \infty} |\ln(1 - a)| e^{-2\pi y} = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} |\ln(1 - aq^{x+iy}) - \ln(1 - aq^{x-iy})| e^{-2\pi y} dy \\ & \leq 2 \int_0^{\infty} |\ln(1 - aq^x)| e^{-2\pi y} dy \\ & = \frac{1}{\pi} |\ln(1 - aq^x)| \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

式 (A.3) における  $x \rightarrow \infty$  の結果は、  $0 \leq q < 1$  を用いた。また、  $\ln(1 - aq^z)$  の特異点  $z^* = -|\ln a / \ln q| + 2n\pi i$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  であるので  $z$  の左側半平面に存在する。よって、閉右側半平面で  $\ln(1 - aq^z)$  は正則である。従って、この正則性と式 (A.2)、(A.3)、および、後述する  $I_1$  から、式 (A.1) を使用できる。

■積分  $I_1$  変数変換  $t := aq^x$  をおこなうと、

$$I_1 = -\frac{1}{\ln q} \int_0^a \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \frac{1}{\ln q} Li_2(a) \quad (\text{A.4})$$

になる。ここで、  $Li_2(x)$  は dilogarithm 関数、

$$Li_2(x) := -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j^2} \quad (\text{A.5})$$

である。

■積分  $I_2$   $f(x) = \ln(1 - aq^x)$  を  $I_2$  に代入して、

$$\begin{aligned} I_2 &= i \int_0^{\infty} \frac{\ln(1 - aq^{iy}) - \ln(1 - aq^{-iy})}{e^{2\pi y} - 1} dy \\ &= -i \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \frac{e^{iny \ln q} - e^{-iny \ln q}}{e^{2\pi y} - 1} dy \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \int_0^{\infty} \frac{\sin(ny \ln q)}{e^{2\pi y} - 1} dy \end{aligned}$$

となる。ここで、第二の等式で対数を  $aq^{\pm iy}$  でマクローリン展開し、最後の等式で積分と和の順序を交換した。正弦関数が関係する積分は、

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{e^{\beta x} - 1} dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{\beta} \coth \frac{\alpha\pi}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right)$$

である [9, p.253]。  $\alpha = n \ln q, \beta = 2\pi$  を代入すると、

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \left( \frac{1}{2} \coth \frac{n \ln q}{2} - \frac{1}{n \ln q} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \left( -\frac{1}{2} \frac{1+q^n}{1-q^n} - \frac{1}{n \ln q} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \frac{1-q^n+2q^n}{1-q^n} - \frac{1}{\ln q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \left( \frac{1}{2} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) - \frac{1}{\ln q} Li_2(a) \\ &= \frac{1}{2} \ln(1-a) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \frac{q^n}{1-q^n} - \frac{1}{\ln q} Li_2(a) \end{aligned}$$

となる。

以上の結果を式 (A.1) に代入し、

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \ln(1-aq^j) &= I_1 + \frac{1}{2} f(0) + I_2 \\ &= \frac{1}{\ln q} Li_2(a) + \frac{1}{2} \ln(1-a) \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln(1-a) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \frac{q^n}{1-q^n} - \frac{1}{\ln q} Li_2(a) \\ &= \ln(1-a) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \frac{q^n}{1-q^n} \\ &= (4). \end{aligned}$$

## 付録 B 上界・下界の評価

この付録では、本文で用いた上界・下界の導出を行う。また、同様な方法を用いて、最終残存確率の勾配を評価するために必要な  $a \partial L_q / \partial a$  と  $q \partial L_q / \partial q$  の上下界を導く。

### B.1 $L_q$ と $a \partial L_q / \partial a$ の上界・下界

以下の評価は [7, pp. 316–318] に基づいておこなった。 $(1-q^m)/(1-q) = 1+q+q^2+\dots+q^{m-1}$  と  $0 \leq q < 1$  から、

$$mq^{m-1} < \frac{1-q^m}{1-q} < m$$

である。上式に  $(1-q)/q^m$  を掛けて、

$$\frac{m(1-q)}{q} < \frac{1-q^m}{q^m} < \frac{m(1-q)}{q^m}$$

となる。逆数を取り、 $m$  で割ると、

$$\frac{q^m}{m^2(1-q)} < \frac{q^m}{m(1-q^m)} < \frac{q}{m^2(1-q)}. \quad (\text{B.1})$$

従って、

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(aq)^m}{m^2(1-q)} < L_q(a) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m q}{m^2(1-q)}.$$

式 (A.5) から、

$$\frac{Li_2(aq)}{1-q} < L_q(a) < \frac{q Li_2(a)}{1-q} \quad (\text{B.2})$$

となる。

式 (B.1) において、 $m$  で割らなければ  $a \partial L_q / \partial a = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(aq)^m}{1-q^m}$  の上界・下界が得られる；

$$-\frac{\ln(1-aq)}{1-q} < a \frac{\partial L_q}{\partial a} < \frac{-q \ln(1-a)}{1-q}. \quad (\text{B.3})$$

### B.2 $q \partial L_q / \partial q$ の上界・下界

以下の評価は、[10, p.1671] に基づいておこなった。 $0 \leq q < 1$  のとき、

$$\begin{aligned} \frac{1-q^m}{1-q} &= \sum_{j=0}^{m-1} q^j \\ &= q^{(m-1)/2} \\ &\quad \times \begin{cases} \sum_{j=0}^{m/2-1} (q^{j+\frac{1}{2}} + q^{-j-\frac{1}{2}}) & (m \text{ が偶数}) \\ 1 + \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}-1} (q^{j+1} + q^{-j-1}) & (m \text{ が奇数}) \end{cases} \end{aligned}$$

である。 $0 \leq x < 1$  のとき、 $x+1/x > 2$  だから、

$$mq^{(m-1)/2} < \frac{1-q^m}{1-q} < m$$

となる。二乗し、 $q^m$  で割ると、

$$\frac{m^2}{q} < \frac{(1-q^m)^2}{q^m(1-q)^2} < \frac{m^2}{q^m}$$

となる。逆数を取って、

$$\frac{q^m}{m^2} < \frac{q^m(1-q)^2}{(1-q^m)^2} \leq \frac{q}{m^2}.$$

$q \partial L_q / \partial q = \sum_{m=1}^{\infty} (aq)^m / (1-q^m)^2$  なので、 $a^m$  を掛け、 $m$  で和を取り、最後に  $(1-q)^2$  で割ると、

$$\frac{Li_2(aq)}{(1-q)^2} < q \frac{\partial L_q}{\partial q} < \frac{q Li_2(a)}{(1-q)^2} \quad (\text{B.4})$$

になる。

## 付録 C 因子数を有限で打ち切った近似との比較

ここでは、有限因子数  $N$  で打ち切った  $(a; q)_N$  で  $(a; q)_\infty$  を近似した際の相対誤差  $\delta_q^N(a) := ((a; q)_N - (a; q)_\infty) / (a; q)_\infty$  の評価式をもとめ、式 (16)、すなわち、 $\delta_q^M$  と比較する。関係式

$$(a; q)_N = \frac{(a; q)_\infty}{(q^N a; q)_\infty} \quad (\text{C.1})$$



を  $\tilde{\delta}_q^N$  の定義に代入すると、

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_q^N &= \frac{(a; q)_\infty / (q^N a; q)_\infty - (a; q)_\infty}{(a; q)_\infty} \\ &= \frac{1}{(q^N a; q)_\infty} - 1\end{aligned}$$

になる。ここで式 (5) から  $(q^N a; q)_\infty = (1 - aq^N) \exp(-L_q(q^N a))$  であるので、

$$\tilde{\delta}_q^N = \frac{\exp(L_q(q^N a))}{1 - aq^N} - 1 \quad (\text{C.2})$$

を得る。

さて、 $L_q(q^N a)$  の評価式は

$$\begin{aligned}L_q(q^N a) &= \sum_{m=1}^{\infty} [(1/m)/(1 - q^m)] q^{Nm+m} a^m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} [(1/m)/(1 - q^m)] (q^{N+1} a)^m \\ &< \frac{1}{1 - q} \sum_{m=1}^{\infty} (q^{N+1} a)^m \\ &= \frac{1}{1 - q} \frac{q^{N+1} a}{1 - q^{N+1} a}\end{aligned}$$

になる。 $q^N$  と  $L_q(q^N a)$  の両方が 1 より十分小さくなるように  $N$  を調整しよう。そのときに式 (C.2) は簡単になり、

$$\tilde{\delta}_q^N = L_q(q^N a) < \frac{q^{N+1} a}{1 - q} \quad (\text{C.3})$$

になる。したがって、 $q^{N+1}$  で減少する。

本報文で得た近似法の相対誤差  $\delta_q^M$  と比較するために、 $M = N$  として比をとり、 $N$  に依存する部分を取りだすと

$$\frac{\delta_q^N}{\tilde{\delta}_q^N} \sim \frac{a^N}{N + 1} < 1 \quad (\text{C.4})$$

となる。 $\delta_q^N \sim \frac{a^N}{N+1} \tilde{\delta}_q^N$  であるため、 $a < 1$  による指数関数的な減少と  $N + 1$  の割算だけ  $\delta_q^N$  が速く収束することが解る。

## 文献

- [1] 高木：“解析概論”，岩波書店，改訂第 3 版 軽装版 (1983).
- [2] G. E. Andrews, R. Askey and R. Roy: “Special Functions”, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press (2001).
- [3] F. Olver: “Asymptotics and Special Functions”, AKP Classics, CRC Press, 2nd edition (1997).
- [4] A. B. O. Daalhuis: “Asymptotic expansions for q-gamma, q-exponential, and q-bessel functions”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **186**, pp. 896–913 (1992).
- [5] R. J. McIntosh: “Some asymptotic formulae for  $q$ -shifted factorials”, The Ramanujan Journal, **3**, pp. 205–214 (1999).
- [6] A. N. Kirillov: “Dilogarithm identities”, Progress of Theoretical Physics Supplement, 118, pp. 61–142 (1995). arXiv:hep-th/9408113v2.
- [7] T. M. Apostol: “Introduction to Analytic Number Theory”, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1st edition (1998). Corr. 5th printing 1998/7/1.
- [8] P. L. Butzer, P. J. S. G. Ferreira, G. Schmeisser and R. L. Stens: “The summation formulae of Euler–Maclaurin, Abel–Plana, Poisson, and their interconnections with the approximate sampling formula of signal analysis”, Results in Mathematics, **59**, 3-4, pp. 359–400 (2011).
- [9] 森口, 宇田川, 一松: “微分積分・平面曲線”, 岩波数学公式, 第 1 巻, 岩波書店 (1987).
- [10] E. Koelink and W. van Assche: “Leonhard Euler and a  $q$ -analogue of the logarithm”, Proceedings of the American Mathematical Society, **137**, 5, pp. 1663–1676 (2009).