修 士 論 文 の 和 文 要 旨

研究科・専攻	大学院　　情報理工学研究科　　　情報・通信工学専攻　博士前期課程		
氏　　名	村越 礼門	学籍番号	1331104
論 文 題 目	部分的協調可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路の通信路容量域		

要　旨

スマートフォンやタブレット型 PC の流行によって，遅延が少なく高い処理能力を持つ無線デバイスへの要求が急速に増加している．この要求を達成するために遅延を抑制する高効率の符号化法が必要である．高効率の符号化法を実現するために，複数の送信ノード間で協調して情報伝送を行う方法がある．送信ノード間で協調を行うことによって，理論上は伝送レートが向上することが知られている．無線技術の発展によって，このようなノード間協調が可能となりつつある．

各携帯端末から共通の基地局への通信のように，複数の送信者から共通の受信者へ通信を行う最も簡単なモデルとして，多重アクセス通信路がある．この多重アクセス通信路に定常無記憶性を仮定したものを定常無記憶な多重アクセス通信路と呼び，定常性も無記憶性も仮定しない場合を一般の多重アクセス通信路と呼ぶ．また，十分大きい符号長に対して，誤り確率が 0 に向かうレートの組の領域を通信路容量域と呼ぶ．同様に十分大きい符号長に対して，誤り確率が ε に向かうようなレートの組の領域を ε 通信路容量域と呼ぶ．

通信路容量域の導出には，ある領域に含まれるレートが達成可能であることを示す順定理と，達成可能なレートがある領域に含まれることを示す逆定理の二つを示すアプローチがとられている．通信路に定常無記憶性を仮定した場合，順定理を示すにはメッセージによる平均誤り確率の上界式を評価する方法，逆定理を示すには Fano の不等式とデータ処理不等式を用いて符号化レートを上界していく方法がとられている．しかし，通信路に定常無記憶性の仮定がない場合，逆定理の証明において Fano の不等式とデータ処理不等式では達成可能なレートに対する十分強い上界を与えないため，メッセージによる平均誤り確率の下界式を導出する必要がある．

Han は一般の多重アクセス通信路の通信路容量域を情報スペクトル的手法を用いて導出した．Willems は部分的協調が可能な符号器を有する定常無記憶な多重アクセス通信路の通信路容量域を導出した．本論文では部分的協調が可能な符号器を有する一般の多重アクセス通信路に対して，情報スペクトル的手法を用いてその通信路容量域を導出する．特に符号器の照会情報のレートを評価するための新しい情報スペクトル的下界式を導出する点に，通信路容量域の証明における本研究の新規性がある．得られた通信路容量域は定常無記憶通信路の場合，Willems が導出した結果と一致する．また，通信路容量域を導出する際に用いた上界式，下界式を利用して ε 通信路容量域の導出をする．

平成 27 年度　修士学位論文

部分協調可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路の通信路容量域

電気通信大学 大学院 情報理工学研究科

博士前期課程 情報・通信工学専攻

1331104　村越 礼門

指導教員　八木 秀樹 准教授　川端 勉 教授

提出 平成 27 年 1 月 30 日

目 次

第 1 章

はじめに

近年，スマートフォンやタブレット型PCなど小型の無線デバイスが広く用いられている．これらのデバイスをより快適に使用するために，遅延を抑制する高効率の符号化法が必要である．ここで効率性は単位時間当たりの送信可能な情報のビット数(符号化レート)を表す．高効率の符号化法を実現するために，複数の送信ノード間で協調して情報伝送を行う方法がある．送信ノード間で協調を行うことによって，理論上は伝送レートが向上することが知られている．実際に，無線技術の発展によって，このようなノード間協調が可能となりつつある．

各携帯端末から共通の基地局への通信のように，複数の送信者から共通の受信者へ通信を行う最も簡単なモデルとして，**多重アクセス通信路**がある [8]．この多重アクセス通信路に定常無記憶性を仮定したものを**定常無記憶**な多重アクセス通信路と呼び，定常性も無記憶性も仮定しない場合を**一般多重アクセス通信路**と呼ぶ．また，十分大きい符号長に対して，復号誤り確率が0に向かう符号化レートの組の領域を**通信路容量域**と呼ぶ．同様に十分大きい符号長に対して，復号誤り確率がε以下になる符号化レートの組の領域を**ε-通信路容量域**と呼ぶ．

通信路容量域の導出には，ある領域に含まれるレートが達成可能であることを示す**順定理**と，達成可能なレートがある領域に含まれることを示す**逆定理**の二つを示すアプローチがとられている．通信路に定常無記憶性を仮定した場合，順定理を示すにはメッセージによる平均誤り確率の上界式を評価する方法，逆定理を示すにはFanoの不等式とデータ処理不等式 [8] を用いて符号化レートを上界していく方法がとられている．しかし，通信路に定常無記憶性等の特殊な仮定がない場合，逆定理の証明においてFanoの不等式とデータ処理不等式では達成可能なレートに対する十分強い上界を与えないため，メッセージによる平均誤り確率の下界式を導出する必要がある．

Han [2] は一般の多重アクセス通信路の通信路容量域を**情報スペクトル的手法** [3] を用いて導出した．Willems [1] は部分協調が可能な符号器を有する定常無記憶な多重アクセス通信路の通信路容量域を導出した．本論文では符号器間で部分協調が可能な符号器を有する一般の多重アクセス通信路に対して，情報スペクトル的手法を用いてその通信路

容量域の一般公式を導出する．特に符号器間で自身が送信するメッセージに関して交換する情報（照会情報）のレートを評価するための新しい情報スペクトル的下界式を導出する点に，通信路容量域の証明における本研究の新規性がある．得られた通信路容量域は定常無記憶通信路に限定した場合，Willems [1] が導出した結果と一致することを示す．また，通信路容量域を導出する際に用いた上界式，下界式を利用して ε-通信路容量域の一般公式を導出する．ε-通信路容量域の一般公式は $\varepsilon = 0$ とおいた場合，通信路容量域の一般公式に帰着することがわかり，その意味で自然な拡張になる．

本論文の構成を以下に記す．まず第 2 章において本論文で扱う通信路モデルを紹介する．第 3 章では部分協調可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路の通信路容量域を導出する．第 4 章では先行研究である Willems [1] の通信路容量域を紹介し，第 3 章で導出した通信路容量域に通信路の定常無記憶性を仮定した場合 Willems [1] の通信路容量域と一致することを示す．第 5 章ではメッセージによる平均誤り率の制約を ε まで許した時の ε-通信路容量域を導出する．6 章において部分協調可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路の強逆性を持つ条件を示す．最後に，7 章においてまとめを述べる．

近年，スマートフォンやタブレット型 PC が流行している．これらのデバイスをより快適に使用するために，遅延を抑制する高効率の符号化法が必要である．

第 2 章

通信路符号化システム

本章では，本論文で扱う通信路符号化システムのモデルを説明する．

2.1　部分的協調が可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路

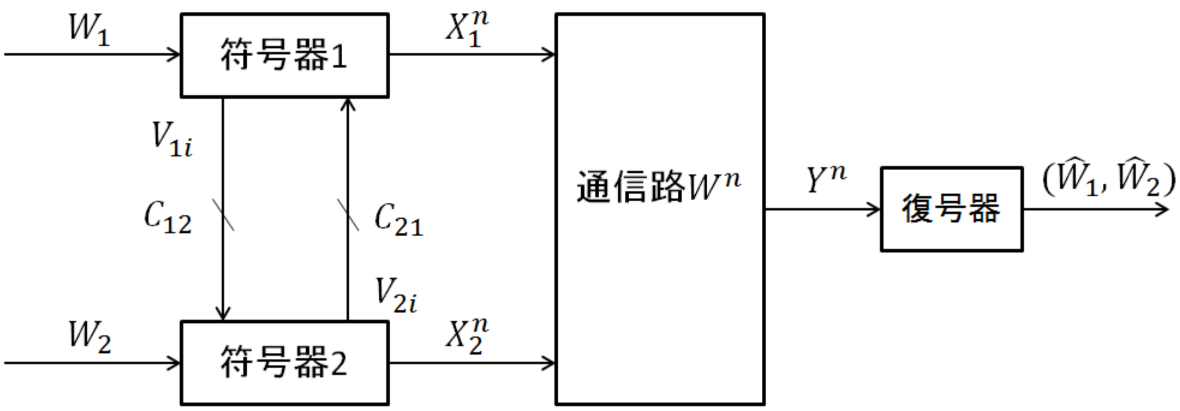

図 2.1: 部分的協調が可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路

本論文で扱う通信路符号化システムでは，複数の送信者がメッセージを送る際，互いの符号器間で複数回情報の交換を行ってから**符号化**し，その後通信路を介して伝達する．通信路ではノイズなど物理的な影響により確率的な歪みが起こり，受信者は歪みを受けた受信系列を観測する．そこで**復号化**の操作により，送信メッセージの推定を行う．送信系列を特に**符号語**と呼び，符号語の集合を**符号**と呼ぶ．このような符号化システムは例えば携帯電話のアップリンク回線の基本的な数理モデルとして，理論上重要とされている．

本論文では，図 2.1 のような 2 つの符号器からなる符号化システムを仮定する．通信路への入力アルファベットを $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ とし，出力アルファベットを $\mathcal{Y}$ とする．特に断らな

い限り $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}$ は可算無限集合とする．条件付き確率分布 $W^n : \mathcal{X}_1^n \times \mathcal{X}_2^n \to \mathcal{Y}^n$ の列 $\mathbf{W} = \{W^n\}_{n=1}^{\infty}$ を (2 ユーザー) **一般多重アクセス通信路**と呼ぶ．ただし，W^n は

$$\sum_{y^n} W^n(y^n \mid x_1^n, x_2^n) = 1 \quad (x_1^n \in \mathcal{X}_1^n, x_2^n \in \mathcal{X}_2^n, y^n \in \mathcal{Y}^n) \tag{2.1}$$

を満たす限りどのような条件付き分布でもよい．定常性やエルゴード性はもちろん，確率過程の整合性条件すら課されないことに注意しよう．

符号器 i $(i = 1, 2)$ のメッセージ集合を $\mathcal{W}_i = \{1, \ldots, M_n^{(i)}\}$ とし，メッセージは情報源から一様に独立に生起すると仮定する．両符号器はメッセージが入力されると，互いに同時に K 回情報交換を行う．時点 $k = 1, \ldots, K$ において，符号器 1 から符号器 2 に送られる情報を V_{1k}, 符号器 2 から符号器 1 へ送られる情報を V_{2k} とし，それぞれ k 回目の**照会情報**と呼ぶ．ただし，V_{1k}, V_{2k} は有限なアルファベット $\mathcal{V}_{1k}^{(n)}, \mathcal{V}_{2k}^{(n)}$ 上に値をとる確率変数とする．時点 $k-1$ までの照会情報の系列をそれぞれ $V_1^{k-1} = (V_{11}, \ldots, V_{1k-1}), V_2^{k-1} = (V_{21}, \ldots, V_{2k-1})$ とすると，V_{1k}, V_{2k} は

$$V_{1k} = h_{1k}(W_1, V_2^{k-1}), \tag{2.2}$$

$$V_{2k} = h_{2k}(W_2, V_1^{k-1}) \tag{2.3}$$

で与えられる．符号器間の協調リンクには有限なリンク容量 (C_{12}, C_{21}) が存在し，情報交換を行う際は，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K} \log |\, \mathcal{V}_{1k}^{(n)} \,| \leq C_{12}, \tag{2.4}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K} \log |\, \mathcal{V}_{2k}^{(n)} \,| \leq C_{21} \tag{2.5}$$

を満たさなくてはならない．そして，各符号器は，K 回の情報交換で得られた照会情報と入力されたメッセージから長さ n の符号語を出力する．つまり $X_1^n \in \mathcal{X}_1^n, X_2^n \in \mathcal{X}_2^n$ は符号化関数 $f_i : \mathcal{W}_i \times \mathcal{V}_{j1}^{(n)} \times \cdots \times \mathcal{V}_{jK}^{(n)} \to \mathcal{X}_i^n$ $(i = 1, 2)$ を用いて，

$$X_1^n = f_1(W_1, V_2^K), \tag{2.6}$$

$$X_2^n = f_2(W_2, V_1^K) \tag{2.7}$$

で与えられる．ここで $j \in \{1, 2\}$ は i とは異なる値を表す．

復号器は通信路からの出力 $y^n \in \mathcal{Y}^n$ から送信されたメッセージを推定する．つまり推定されたメッセージペア $(\hat{W}_1, \hat{W}_2)$ は復号化関数 $g : \mathcal{Y}^n \to \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$ を用いて，

$$(\hat{W}_1, \hat{W}_2) = g(Y^n) \tag{2.8}$$

で与えられる．

本論文で扱う符号化システムでは複数の送信者が送信したメッセージを誤り確率が漸近的にある $\varepsilon \in [0,1)$ 以下になるように復号することを目的とする．そこで，送信者が送信したメッセージペア $(W_1, W_2) \in \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$ と受信者が受け取ったメッセージペア $(\hat{W}_1, \hat{W}_2) \in \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$ が一致しない事象の確率を復号誤りと定義し，メッセージによる平均復号誤り確率を以下のように定義する．

定義 2.1.1 (メッセージによる平均復号誤り確率) メッセージペア $(i,j) \in \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$ の復号領域を $D_{ij} \subseteq \mathcal{Y}^n$ とする．この復号領域は互いに背反であるとする．このとき，符号長 n，符号語数が $M_n^{(1)}, M_n^{(2)}$ の符号のメッセージによる平均復号誤り確率 ε_n を

$$\varepsilon_n = \frac{1}{M_n^{(1)} M_n^{(2)}} \sum_{i=1}^{M_n^{(1)}} \sum_{j=1}^{M_n^{(2)}} \Pr\left\{Y^n \in D_{ij}^c \mid W_1 = i, W_2 = j\right\} \tag{2.9}$$

と定義する．ここで，集合 A に対して，A^c によりその補集合を表すものとする．また，この符号を $(n, M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, \varepsilon_n)$ 符号と定義する．

ここで達成可能レートとレート領域を定義する．

定義 2.1.2 (達成可能レートと通信路容量域)

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n^{(i)} \geq R_i \quad (i = 1, 2), \tag{2.10}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \tag{2.11}$$

を満たす $(n, M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, \varepsilon_n)$ 符号が存在するとき，レートペア (R_1, R_2) は**達成可能**であるという．ただし，$R_i \geq 0$ $(i = 1, 2)$ とする．また，多重アクセス通信路 $\mathbf{W}$ の**通信路容量域**を

$$C(\mathbf{W}) = \{(R_1, R_2) \mid (R_1, R_2) \text{ が達成可能 }\} \tag{2.12}$$

と定義する．

次に復号誤り確率を $\varepsilon \in [0,1)$ まで許容したときの達成可能レートとその領域を定義する．

定義 2.1.3 (ε-達成可能レートと ε-通信路容量域)

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n^{(i)} \geq R_i \quad (i = 1, 2), \tag{2.13}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon \tag{2.14}$$

を満たす $(n, M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, \varepsilon_n)$ 符号が存在するとき，レートペア (R_1, R_2) は ε-**達成可能**であるという．ただし，$R_i \geq 0$ $(i = 1, 2)$ とする．また，多重アクセス通信路 $\mathbf{W}$ の ε-**通信路容量域**を

$$C(\varepsilon \mid \mathbf{W}) = \{(R_1, R_2) \mid (R_1, R_2) \text{ が} \varepsilon\text{-達成可能 }\} \tag{2.15}$$

と定義する．

2.2　通信路の入出力過程

3 つの入力過程

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}_1 &= \{X_1^n = (X_{11}^{(n)}, \ldots, X_{1n}^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}, && (2.16)\\
\mathbf{X}_2 &= \{X_2^n = (X_{21}^{(n)} \ldots, X_{2n}^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}, && (2.17)\\
\mathbf{U} &= \{U^n = (U_1^{(n)}, \ldots, U_n^{(n)})\}_{n=1}^{\infty} && (2.18)
\end{aligned}
$$

を考える．ただし，$X_{1i}^{(n)}, X_{2i}^{(n)}$ は入力アルファベット $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ の中に，$U_i^{(n)}$ は有限アルファベット $\mathcal{U}$ の中に値をとる確率変数とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{g}} = \big\{(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \mid\, & P_{X_1^n X_2^n U^n}(x_1^n, x_2^n, u^n) = P_{U^n}(u^n) P_{X_1^n|U^n}(x_1^n \mid u^n) P_{X_2^n|U^n}(x_2^n \mid u^n),\\
& x_1^n \in \mathcal{X}_1^n, x_2^n \in \mathcal{X}_2^n, u^n \in \mathcal{U}^n \text{ for some finite } \mathcal{U},\ n = 1, 2, \ldots\big\} \quad (2.19)
\end{aligned}
$$

とする．ここで，U^n は補助確率変数の役割をしている．S_{g} は長さ n の入力系列の間に $X_1^n \leftrightarrow U^n \leftrightarrow X_2^n$ となるマルコフ条件を課している．入力過程 $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \in S_{\mathrm{g}}$ が与えられたとき，対応する通信路出力の過程を

$$
\mathbf{Y} = \{Y^n = (Y_1^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)})\}_{n=1}^{\infty} \quad (2.20)
$$

とする．ただし，$Y_i^{(n)}$ は出力アルファベット $\mathcal{Y}$ の中に値をとる確率変数とする．

次にコスト制約付きの符号化を考えるのに入力集合 $S_{\Gamma_1\Gamma_2}$ を定義する．まず，多重アクセス通信路 $\mathbf{W}$ の符号器 1, 符号器 2 のそれぞれに対してコスト関数 $c_1^{(n)} : \mathcal{X}_1^n \to \mathbf{R}, c_2^{(n)} : \mathcal{X}_2^n \to \mathbf{R}$ を定める．ただし，$\mathbf{R}$ は実数全体の集合である．そこで，全ての $n = 1, 2. \cdots$ に対して，

$$
\Pr\left\{\frac{1}{n} c_1^{(n)}(X_1^n) \le \Gamma_1\right\} = \Pr\left\{\frac{1}{n} c_2^{(n)}(X_2^n) \le \Gamma_2\right\} = 1 \quad (2.21)
$$

を満たす入力過程の組

$$
(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \in S_{\mathrm{g}} \quad (2.22)
$$

の全体を $S_{\Gamma_1\Gamma_2}$ とする．

2.3　情報スペクトル的量

Z_n を任意の確率変数列としたとき，確率的下極限と確率的上極限を

$$\begin{aligned}\text{p-}\liminf_{n\to\infty} Z_n &\equiv \sup\{\alpha \mid \limsup_{n\to\infty} \Pr\{Z_n < \alpha\} = 0\}, &(2.23)\\ \text{p-}\limsup_{n\to\infty} Z_n &\equiv \inf\{\beta \mid \limsup_{n\to\infty} \Pr\{Z_n > \beta\} = 0\} &(2.24)\end{aligned}$$

と定義する [3]．確率的下極限を用いて相互情報量スペクトル下限を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}\underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_2,\mathbf{U}) &\equiv \text{p-}\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n, U^n)}, &(2.25)\\ \underline{I}(\mathbf{X}_2;\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_1,\mathbf{U}) &\equiv \text{p-}\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n, U^n)}, &(2.26)\\ \underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y} \mid \mathbf{U}) &\equiv \text{p-}\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)}, &(2.27)\\ \underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}) &\equiv \text{p-}\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n)} &(2.28)\end{aligned}$$

一般の通信路符号化問題では，相互情報量に代わって相互情報量スペクトル下限を中心的な役割をする．この相互情報量スペクトル下限は確率変数列 Z_n の極限分布の左端を表している．

2.4　定常無記憶通信路

入力系列 $x_1^n = (x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}) \in \mathcal{X}_1^n, x_2^n = (x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n}) \in \mathcal{X}_2^n$ が与えられたとき出力系列 $y^n = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathcal{Y}^n$ の出現する条件付き確率 W^n が

$$W^n(y^n \mid x_1^n, x_2^n) = \prod_{i=1}^{n} W(y_i \mid x_{1i}, x_{2i}) \tag{2.29}$$

で与えられる通信路を**定常無記憶多重アクセス通信路**と呼ぶ．３つの入力組 $(X_1, X_2, Z) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{Z}$ を考える．ただし，$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ は有限な入力アルファベット，$\mathcal{Z}$ は任意の有限アルファベットとする．このとき，

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{m}} = \big\{&(x_1, x_2, z) \mid P_{X_1X_2Z}(x_1, x_2, z) = P_Z(z)P_{X_1|Z}(x_1 \mid z)P_{X_2|Z}(x_2 \mid z),\\ &x_1 \in \mathcal{X}_1, x_2 \in \mathcal{X}_2, z \in \mathcal{Z} \ \text{ for some finite } \mathcal{Z}\big\} \qquad (2.30)\end{aligned}$$

とする．Willems [1] は部分的協調が可能な符号器を有する定常無記憶多重アクセス通信路の通信路容量域を示した．この結果は 4.1 節において詳しく説明する．

第 3 章

通信路容量域

本章では部分協調可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路の通信路容量域の一般公式を求める．

3.1　通信路容量域の一般公式

本節では部分協調可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路の通信路容量域を記す.

定理 3.1.1 (通信路容量域の一般公式) リンク容量 (C_{12}, C_{21}) の協調リンクを用いて，部分協調が可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路 $\mathbf{W}$ の通信路容量域 $C(\mathbf{W})$ は

$$C(\mathbf{W}) \quad = \bigcup_{(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U})\in S_{\mathrm{g}}} \mathcal{R}_{C_{12}C_{21}}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \tag{3.1}$$

で与えられる．ただし，$\mathcal{R}_{C_{12}C_{21}}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U})$ を

$$\begin{aligned} 0 \leq \quad & R_1 & \leq \underline{I}(\mathbf{X}_1; \mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) + C_{12}, \qquad (3.2) \\ 0 \leq \quad & R_2 & \leq \underline{I}(\mathbf{X}_2; \mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{U}) + C_{21}, \qquad (3.3) \\ 0 \leq \quad & R_1 + R_2 & \leq \underline{I}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; \mathbf{Y} \mid \mathbf{U}) + C_{12} + C_{21}, \qquad (3.4) \\ 0 \leq \quad & R_1 + R_2 & \leq \underline{I}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; \mathbf{Y}) \qquad (3.5) \end{aligned}$$

を満たす (R_1, R_2) の全体とする．　□

注意 3.1.1 通信路容量域 $C(\mathbf{W})$ は閉領域であり，式 (3.1) の右辺もまた閉集合となる.

注意 3.1.2 コスト制約付き符号化の場合，式 (3.1) の右辺の入力過程の集合を S_{g} から $S_{\Gamma_1\Gamma_2}$ と置き換えればよい.

通信路容量域を証明するためには，$C(\mathbf{W})$ 内の任意のレート組が達成可能であることを示す順定理と，達成可能なレート組は $C(\mathbf{W})$ 内に存在することを示す逆定理を示す必要がある．そこで以降では通信路容量域の一般公式を示すために逆定理と順定理を証明する.

3.2　逆定理とその証明

本節では，逆定理を証明する．情報スペクトル的手法において，順定理と逆定理の証明には符号長が有限のときの平均誤り確率の上界式と下界式を用いて行う．そこで，まず以下の補題を証明する．

補題 3.2.1 (下界式) $\mathbf{W} = \{W^n : \mathcal{X}_1^n \times \mathcal{X}_2^n \to \mathcal{Y}^n\}_{n=1}^{\infty}$ を任意の多重アクセス通信路とすると，全ての $(n, M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, \varepsilon_n)$ 符号は任意の定数 $\gamma > 0$ と全ての $n = 1, 2, \cdots$ に対して，不等式

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_n \ \geq\ \Pr\Biggl\{ & \left\{ \frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n, U^n)} + \frac{1}{n}\log\frac{1}{P(U^n \mid W_2)} \leq \frac{1}{n}\log M_n^{(1)} - \gamma \right\} \\
& \cup \left\{ \frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n, U^n)} + \frac{1}{n}\log\frac{1}{P(U^n \mid W_1)} \leq \frac{1}{n}\log M_n^{(2)} - \gamma \right\} \\
& \cup \left\{ \frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + \frac{1}{n}\log\frac{1}{P(U^n)} \leq \frac{1}{n}\log M_n^{(1)} M_n^{(2)} - \gamma \right\} \\
& \cup \left\{ \frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n)} \leq \frac{1}{n}\log M_n^{(1)} M_n^{(2)} - \gamma \right\} \Biggr\} - 3e^{-n\gamma} \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

を満足する．ただし，$U^n = (V_1^K, V_2^K), X_1^n = f_1(W_1, V_2^K), X_2^n = f_2(W_2, V_1^K)$ とする．

証明　Han $[2, \mathit{Lemma}\ 4]$ の一般多重アクセス通信路に対する下界式を部分的協調可能な符号器がある場合に拡張する．$\beta_n = e^{-n\gamma}$ とし，

$$
\begin{aligned}
\frac{P(y^n \mid w_1, w_2)}{P(y^n \mid w_2)} &= \frac{P(w_1 \mid w_2, y^n)}{P(w_1 \mid w_2)} \\
&= M_n^{(1)} P(w_1 \mid w_2, y^n), \qquad (3.7) \\
\frac{P(y^n \mid w_1, w_2)}{P(y^n \mid w_1)} &= \frac{P(w_2 \mid w_1, y^n)}{P(w_2 \mid w_1)} \\
&= M_n^{(2)} P(w_2 \mid w_1, y^n), \qquad (3.8) \\
\frac{P(y^n \mid w_1, w_2)}{P(y^n \mid w_2)} &= \frac{P(w_1, w_2 \mid y^n)}{P(w_1, w_2)} \\
&= M_n^{(1)} M_n^{(2)} P(w_1, w_2 \mid y^n) \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

に注意して，3 つの集合 $L_n^{(1)}, L_n^{(2)}, L_n^{(3)} \subset \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \times \mathcal{Y}^n$ をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
L_n^{(1)} &= \{(w_1, w_2, y^n) \mid P(w_1 \mid w_2, y^n) \leq \beta_n\}, \qquad (3.10) \\
L_n^{(2)} &= \{(w_1, w_2, y^n) \mid P(w_2 \mid w_1, y^n) \leq \beta_n\}, \qquad (3.11) \\
L_n^{(3)} &= \{(w_1, w_2, y^n) \mid P(w_1, w_2 \mid y^n) \leq \beta_n\} \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

とおき，

$$
L_n = L_n^{(1)} \cup L_n^{(2)} \cup L_n^{(3)} \qquad (3.13)
$$

と定義する．メッセージの組 (i,j) に対する復号領域を D_{ij} とし，

$$B_{ij}^{(1)} = \{y^n \in \mathcal{Y}^n \mid P(i \mid j, y^n) \leq \beta_n\}, \tag{3.14}$$

$$B_{ij}^{(2)} = \{y^n \in \mathcal{Y}^n \mid P(j \mid i, y^n) \leq \beta_n\}, \tag{3.15}$$

$$B_{ij}^{(3)} = \{y^n \in \mathcal{Y}^n \mid P(i, j \mid y^n) \leq \beta_n\} \tag{3.16}$$

とすると，$P(L_n)$ は

$$\begin{aligned}
P(L_n) &= \Pr\left\{(W_1, W_2, Y^n) \in (L_n^{(1)} \cup L_n^{(2)} \cup L_n^{(3)})\right\} \\
&= \Pr\left\{Y^n \in (B_{ij}^{(1)} \cup B_{ij}^{(2)} \cup B_{ij}^{(3)}), i = W_1, j = W_2\right\} \\
&= \Pr\left\{Y^n \in \left((B_{ij}^{(1)} \cup B_{ij}^{(2)} \cup B_{ij}^{(3)}) \cap (D_{ij} \cup D_{ij}^c)\right), i = W_1, j = W_2\right\} \\
&= \Pr\left\{Y^n \in (B_{ij}^{(1)} \cup B_{ij}^{(2)} \cup B_{ij}^{(3)}) \cap D_{ij}, i = W_1, j = W_2\right\} \\
&\quad + \Pr\left\{Y^n \in (B_{ij}^{(1)} \cup B_{ij}^{(2)} \cup B_{ij}^{(3)}) \cap D_{ij}^c, i = W_1, j = W_2\right\} \\
&\leq \Pr\left\{Y^n \in (B_{ij}^{(1)} \cup B_{ij}^{(2)} \cup B_{ij}^{(3)}) \cap D_{ij}, i = W_1, j = W_2\right\} \\
&\quad + \Pr\left\{Y^n \in D_{ij}^c, i = W_1, j = W_2\right\}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned}
P(i, j, y^n) &= \frac{1}{M_n^{(1)}} \frac{1}{M_n^{(2)}} \sum_{x_1^n} \sum_{x_2^n} \sum_{u^n} 1[\{x_1^n = f_1(i, u^n)\} \cap \{x_2^n = f_2(j, u^n)\}] \\
&\quad \times W^n(y^n \mid x_1^n, x_2^n)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

のように与えられ，$1[A]$ により命題 A が真ならば 1, 偽ならば 0 をとる指示関数を表す. メッセージによる平均誤り確率の定義 (2.9) より

$$\begin{aligned}
P(L_n) &\leq \sum_i \sum_j \sum_{y^n} P(i, j, y^n) 1[y^n \in B_{ij}^{(1)} \cap D_{ij}] \\
&\quad + \sum_i \sum_j \sum_{y^n} P(i, j, y^n) 1[y^n \in B_{ij}^{(2)} \cap D_{ij}] \\
&\quad + \sum_i \sum_j \sum_{y^n} P(i, j, y^n) 1[y^n \in B_{ij}^{(3)} \cap D_{ij}] + \varepsilon_n \\
&\leq \beta_n \sum_j \sum_{y^n} P(j, y^n) \sum_i 1[y^n \in D_{ij}] \\
&\quad + \beta_n \sum_i \sum_{y^n} P(i, y^n) \sum_j 1[y^n \in D_{ij}] \\
&\quad + \beta_n \sum_{y^n} P(y^n) \sum_i \sum_j 1[y^n \in D_{ij}] + \varepsilon_n
\end{aligned} \tag{3.19}$$

となる．以上より復号領域 D_{ij} は互いに背反な領域なので,

$$P(L_n) \leq \varepsilon_n + 3\beta_n \tag{3.20}$$

となる．よって (3.20) と (3.10) ∼ (3.12) に注意すると，

$$\begin{aligned}\varepsilon_n \;\geq\; & \Pr\left\{\left\{\frac{1}{n}\log\frac{P(Y^n \mid W_1,W_2)}{P(Y^n \mid W_2)} \leq \frac{1}{n}\log M_n^{(1)} - \gamma\right\}\right. \\ & \cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{P(Y^n \mid W_1,W_2)}{P(Y^n \mid W_1)} \leq \frac{1}{n}\log M_n^{(2)} - \gamma\right\} \\ & \left.\cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{P(Y^n \mid W_1,W_2)}{P(Y^n)} \leq \frac{1}{n}\log M_n^{(1)}M_n^{(2)} - \gamma\right\}\right\} - 3e^{-n\gamma} \qquad (3.21)\end{aligned}$$

となる．ここで，$P(y^n \mid w_1,u^n) > 0, P(y^n \mid w_2,u^n) > 0, P(y^n \mid u^n) > 0$ なる $w_1 \in \mathcal{W}_1, w_2 \in \mathcal{W}_2, y^n \in \mathcal{Y}^n, u^n \in \mathcal{U}^n$ について，

$$\begin{aligned}\log\frac{P(y^n \mid w_1,w_2)}{P(y^n \mid w_2)} &= \log\frac{P(y^n \mid w_1,w_2)}{P(y^n \mid w_2,u^n)} + \log\frac{P(y^n \mid w_2,u^n)}{P(y^n \mid w_2)} \\ &\leq \log\frac{P(y^n \mid w_1,w_2)}{P(y^n \mid w_2,u^n)} + \log\frac{1}{P(u^n \mid w_2)} \qquad (3.22)\end{aligned}$$

が成り立つことに注意しよう．ここで

$$\begin{aligned}\frac{P(y^n \mid w_2,u^n)}{P(y^n \mid w_2)} &= \frac{P(y^n,u^n \mid w_2)}{P(y^n \mid w_2)P(u^n \mid w_2)} \\ &= \frac{P(u^n \mid y^n,w_2)}{P(u^n \mid w_2)} \qquad (3.23)\end{aligned}$$

の関係を用いている．同様に

$$\log\frac{P(y^n \mid w_1,w_2)}{P(y^n \mid w_1)} \leq \log\frac{P(y^n \mid w_1,w_2)}{P(y^n \mid w_1,u^n)} + \log\frac{1}{P(u^n \mid w_1)}, \qquad (3.24)$$

$$\log\frac{P(y^n \mid w_1,w_2)}{P(y^n)} \leq \log\frac{P(y^n \mid w_1,w_2)}{P(y^n \mid u^n)} + \log\frac{1}{P(u^n)} \qquad (3.25)$$

となる．よって (3.21) は

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_n \;\ge\; & \Pr\left\{\left\{\frac{1}{n}\log\frac{P(Y^n \mid W_1, W_2)}{P(Y^n \mid W_2)} \le \frac{1}{n}\log M_n^{(1)} - \gamma\right\}\right. \\
& \cup \left\{\frac{1}{n}\log\frac{P(Y^n \mid W_1, W_2)}{P(Y^n \mid W_1)} \le \frac{1}{n}\log M_n^{(2)} - \gamma\right\} \\
& \cup \left\{\frac{1}{n}\log\frac{P(Y^n \mid W_1, W_2)}{P(Y^n)} \le \frac{1}{n}\log M_n^{(1)} M_n^{(2)} - \gamma\right\} \\
& \left.\cup \left\{\frac{1}{n}\log\frac{P(Y^n \mid W_1, W_2)}{P(Y^n)} \le \frac{1}{n}\log M_n^{(1)} M_n^{(2)} - \gamma\right\}\right\} - 3e^{-n\gamma} \\
\ge\; & \Pr\left\{\left\{\frac{1}{n}\log\frac{P(Y^n \mid W_1, W_2)}{P(Y^n \mid W_2, U^n)} + \log\frac{1}{P(U^n \mid W_2)} \le \frac{1}{n}\log M_n^{(1)} - \gamma\right\}\right. \\
& \cup \left\{\frac{1}{n}\log\frac{P(Y^n \mid W_1, W_2)}{P(Y^n \mid W_1, U^n)} + \log\frac{1}{P(U^n \mid W_1)} \le \frac{1}{n}\log M_n^{(2)} - \gamma\right\} \\
& \cup \left\{\frac{1}{n}\log\frac{P(Y^n \mid W_1, W_2)}{P(Y^n \mid U^n)} + \log\frac{1}{P(U^n)} \le \frac{1}{n}\log M_n^{(1)} M_n^{(2)} - \gamma\right\} \\
& \left.\cup \left\{\frac{1}{n}\log\frac{P(Y^n \mid W_1, W_2)}{P(Y^n)} \le \frac{1}{n}\log M_n^{(1)} M_n^{(2)} - \gamma\right\}\right\} - 3e^{-n\gamma} \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

となる．

ここで，$(W_1, W_2, U^n) \leftrightarrow (X_1^n, X_2^n) \leftrightarrow Y^n$ なるマルコフ性を用いて，

$$
\begin{aligned}
P(y^n \mid w_1, w_2) &= \sum_{x_1^n}\sum_{x_2^n}\sum_{u^n} P(x_1^n, x_2^n, u^n \mid w_1, w_2) P(y^n \mid x_1^n, x_2^n, u^n, w_1, w_2) \\
&= \sum_{x_1^n}\sum_{x_2^n}\sum_{u^n} 1[x_1^n = f_1(w_1, u^n), x_2^n = f_2(w_2, u^n)] W^n(y^n \mid x_1^n, x_2^n) \\
&= \begin{cases} W^n(y^n \mid x_1^n, x_2^n), & \text{if} \quad (x_1^n, x_2^n) = f(w_1, w_2) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

となることに注意する．ただし，$f : \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \to \mathcal{X}_1^n \times \mathcal{X}_2^n$ は両符号器から定まる確定的写像とする．また，$x_1^n = f_1(w_1, u^n), x_2^n = f_2(w_2, u^n)$ において，u^n は (w_1, w_2) から一意に与えられる照会情報の組を表すものとする．Willems [1] と同様の手法により，任意の符号長 n の符号 (f_1, f_2, g) に対して，

$$
P(x_1^n, x_2^n, u^n) = P(u^n) P(x_1^n \mid u^n) P(x_2^n \mid u^n) \qquad (3.28)
$$

となることが示せる．また，

$$
P(y^n \mid w_1, u^n) = \begin{cases} P(y^n \mid x_1^n, w_1, u^n), & \text{if} \quad x_1^n = f_1(w_1, u^n) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (3.29)
$$

となることに注意しよう．このとき，$(W_1, X_1^n) \leftrightarrow U^n \leftrightarrow X_2^n$ と $X_1^n \leftrightarrow U^n \leftrightarrow X_2^n$ より，

$$\begin{aligned} P(y^n \mid w_1, u^n) &= \sum_{x_2^n} P(x_2^n \mid w_1, u^n, x_1^n) P(y^n \mid w_1, x_1^n, x_2^n, u^n) \\ &= \sum_{x_2^n} P(x_2^n \mid x_1^n, u^n) P(y^n \mid x_1^n, x_2^n, u^n) \\ &= P(y^n \mid x_1^n, u^n) \end{aligned} \tag{3.30}$$

となる．同様に $x_2^n = f_2(w_2, u^n)$ に対し $P(y^n \mid w_2, u^n) = P(y^n \mid x_2^n, u^n)$ となる．以上より，(3.26) は (3.6) と一致することが分かる．□

補題 3.2.2 任意の (V_1^i, V_2^i) $(i = 1, \ldots, K)$ に対して，

$$e^{-n\gamma} \geq \Pr\left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P(V_{1i} \mid V_1^{i-1}, V_2^{i-1})} \geq \frac{1}{n} \log |\, \mathcal{V}_{1i}^{(n)} \,| + \gamma \right\}, \tag{3.31}$$

$$e^{-n\gamma} \geq \Pr\left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P(V_{2i} \mid V_1^{i}, V_2^{i-1})} \geq \frac{1}{n} \log |\, \mathcal{V}_{2i}^{(n)} \,| + \gamma \right\} \tag{3.32}$$

が成り立つ．ただし，$\gamma > 0$ は任意の定数とする．

証明

$$T_n(v_1^{i-1}, v_2^{i-1}) = \left\{ v_{1i} \in \mathcal{V}_{1i}^{(n)} \,\middle|\, P(v_{1i} \mid v_1^{i-1}, v_2^{i-1}) \leq \frac{e^{-n\gamma}}{|\, \mathcal{V}_{1i}^{(n)} \,|} \right\} \tag{3.33}$$

とする．すると (3.31) の右辺は，

$$\begin{aligned} & \Pr\left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P(V_{1i} \mid V_1^{i-1}, V_2^{i-1})} \geq \frac{1}{n} \log |\, \mathcal{V}_{1i}^{(n)} \,| + \gamma \right\} \\ =\ & \sum_{v_{1i}} \sum_{v_1^{i-1}} \sum_{v_2^{i-1}} P(v_{1i}, v_1^{i-1}, v_2^{i-1}) 1\left[v_{1i} \in T_n(v_1^{i-1}, v_2^{i-1}) \right] \\ \leq\ & \sum_{v_1^{i-1}} \sum_{v_2^{i-1}} P(v_1^{i-1}, v_2^{i-1}) \sum_{v_{1i}} \frac{e^{-n\gamma}}{|\, \mathcal{V}_{1i}^{(n)} \,|} 1\left[v_{1i} \in T_n(v_1^{i-1}, v_2^{i-1}) \right] \\ \leq\ & \sum_{v_1^{i-1}} \sum_{v_2^{i-1}} P(v_1^{i-1}, v_2^{i-1}) \sum_{v_{1i}} \frac{e^{-n\gamma}}{|\, \mathcal{V}_{1i}^{(n)} \,|} \\ =\ & e^{-n\gamma} \end{aligned} \tag{3.34}$$

となる．ただし，$1[\cdot]$ は指示関数とする．(3.32) も同様に示される．□

これらの補題を用いて以下の逆定理を証明する．

定理 3.2.1 (逆定理) 達成可能なレートペア (R_1, R_2) は

$$(R_1, R_2) \in \bigcup_{(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \in S_{\mathrm{g}}} \mathcal{R}_{C_{12}C_{21}}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \tag{3.35}$$

となる．

証明　以降は達成可能なレートペア (R_1, R_2) について考える．まず上極限の定義より任意の $\gamma > 0$ に対して，十分大きいすべての n について

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K}\log|\mathcal{V}_{1i}^{(n)}|+\gamma \ \geq\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K}\log|\mathcal{V}_{1i}^{(n)}|, \tag{3.36}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K}\log|\mathcal{V}_{2i}^{(n)}|+\gamma \ \geq\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K}\log|\mathcal{V}_{2i}^{(n)}| \tag{3.37}$$

となることに注意する．また，任意の確率変数 $(A_1,\cdots,A_K)$ と定数 $(a_1,\cdots,a_K)$ に対して，

$$\begin{aligned}\Pr\{A_1+\cdots+A_K \geq a_1+\cdots+a_K\} &\leq \Pr\{\{A_1\geq a_1\}\cup\cdots\cup\{A_K\geq a_K\}\}\\ &\leq \sum_{i=1}^{K}\Pr\{A_i\geq a_i\}\end{aligned} \tag{3.38}$$

が成立することに注意すると，補題 3.2.2 より十分大きなすべての n に対して

$$\begin{aligned}Ke^{-n\gamma} &\geq \sum_{i=1}^{K}\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P(V_{1i}\mid V_1^{i-1},V_2^{i-1})}\geq\frac{1}{n}\log|\mathcal{V}_{1i}^{(n)}|+\gamma\right\}\\ &\geq \Pr\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K}\log\frac{1}{P(V_{1i}\mid V_1^{i-1},V_2^{i-1})}\geq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K}\log|\mathcal{V}_{1i}^{(n)}|+K\gamma\right\}\\ &\geq \Pr\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K}\log\frac{1}{P(V_{1i}\mid V_1^{i-1},V_2^{i-1})}\geq\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K}\log|\mathcal{V}_{1i}^{(n)}|+(K+1)\gamma\right\}\end{aligned} \tag{3.39}$$

が成り立つ．同様に

$$Ke^{-n\gamma}\geq\Pr\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K}\log\frac{1}{P(V_{2i}\mid V_1^{i},V_2^{i-1})}\geq\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K}\log|\mathcal{V}_{2i}^{(n)}|+(K+1)\gamma\right\} \tag{3.40}$$

となる．(3.39), (3.40) の両辺に対して $\limsup_{n\to\infty}$ をとると，(2.4), (2.5) および確率的上極限 (2.23), (2.24) の定義より，

$$\begin{aligned}\text{p-}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K}\log\frac{1}{P(V_{1i}\mid V_1^{i-1},V_2^{i-1})} &\leq \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K}\log|\mathcal{V}_{1i}^{(n)}|+(1+K)\gamma\\ &\leq C_{12}+(1+K)\gamma,\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K}\log\frac{1}{P(V_{2i}\mid V_1^{i},V_2^{i-1})}\leq C_{21}+(1+K)\gamma \tag{3.42}$$

が得られる．

(R_1, R_2) は達成可能なので，任意の定数 $\gamma > 0$ と十分大きいすべての n に対して，

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\log M_n^{(i)} &\geq R_i - \gamma \quad (i = 1, 2), &(3.43)\\ \limsup_{n\to\infty} \varepsilon_n &= 0 &(3.44)\end{aligned}$$

を満たす $(n, M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, \varepsilon_n)$ 符号が存在する．この符号に対して，入力過程を $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U})$ と表す．(3.28) が成り立つことから明らかに $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \in S_{\mathrm{g}}$ である．(3.6) に (3.43) を代入すると，十分大きな n について

$$\varepsilon_n \geq \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n, U^n)} + \frac{1}{n}\log\frac{1}{P(U^n \mid W_2)} \leq R_1 - 2\gamma\right\} - 3e^{-n\gamma}, \quad (3.45)$$

$$\varepsilon_n \geq \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n, U^n)} + \frac{1}{n}\log\frac{1}{P(U^n \mid W_1)} \leq R_2 - 2\gamma\right\} - 3e^{-n\gamma}, \quad (3.46)$$

$$\varepsilon_n \geq \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + \frac{1}{n}\log\frac{1}{P(U^n)} \leq R_1 + R_2 - 3\gamma\right\} - 3e^{-n\gamma}, \quad (3.47)$$

$$\varepsilon_n \geq \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n)} \leq R_1 + R_2 - 3\gamma\right\} - 3e^{-n\gamma} \quad (3.48)$$

が得られる．(3.47) の両辺に $\limsup_{n\to\infty}$ をとると，(3.44) より，

$$R_1 + R_2 - 3\gamma \leq \text{p-}\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + \frac{1}{n}\log\frac{1}{P(U^n)}\right) \quad (3.49)$$

となる．また，

$$P(u^n) = \prod_{i=1}^{K} P(v_{1i} \mid v_1^{i-1}, v_2^{i-1}) P(v_{2i}, v_1^i, v_2^{i-1}) \quad (3.50)$$

の関係より (3.49) は

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 - 3\gamma &\leq \text{p-}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + \text{p-}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{1}{P(U^n)}\\ &\leq \text{p-}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)}\\ &\quad + \text{p-}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K}\log\frac{1}{P(V_{1i} \mid V_1^{i-1}, V_2^{i-1})}\\ &\quad + \text{p-}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K}\log\frac{1}{P(V_{2i} \mid V_1^{i}, V_2^{i-1})}\\ &\leq \underline{I}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; \mathbf{Y} \mid \mathbf{U}) + C_{12} + C_{21} + 2(K+1)\gamma \end{aligned} \quad (3.51)$$

となる．ただし，(3.51) の不等式は (3.41), (3.42) による．(3.45), (3.46), (3.48) についても

同様に計算すると，

$$
\begin{aligned}
R_1 &\leq \underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_2,\mathbf{U}) + C_{12} + (K+3)\gamma, &(3.52)\\
R_2 &\leq \underline{I}(\mathbf{X}_2;\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_1,\mathbf{U}) + C_{21} + (K+3)\gamma, &(3.53)\\
R_1 + R_2 &\leq \underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}) + 3\gamma &(3.54)
\end{aligned}
$$

となることが示される．すべての $\gamma > 0$ に対して，(3.51) $\sim$ (3.54) が成立するので，$(R_1, R_2) \in \mathcal{R}_{C_{12}C_{21}}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U})$ が結論される．□

3.3 順定理とその証明

本節では，Slepian と Wolf [6] による共通メッセージを有する符号化法を用いて，平均誤り確率の上界式を導出し，順定理の証明を行う．まず，任意の $\gamma > 0$ に対して，

$$T_n^{(1)} = \left\{ (u^n, x_1^n, x_2^n, y^n) \mid \frac{1}{n} \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n, U^n)} + C_{12} > \frac{1}{n} \log M_n^{(1)} + \gamma \right\}, \tag{3.55}$$

$$T_n^{(2)} = \left\{ (u^n, x_1^n, x_2^n, y^n) \mid \frac{1}{n} \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n, U^n)} + C_{21} > \frac{1}{n} \log M_n^{(2)} + \gamma \right\}, \tag{3.56}$$

$$T_n^{(3)} = \left\{ (u^n, x_1^n, x_2^n, y^n) \mid \frac{1}{n} \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + C_{12} + C_{21} > \frac{1}{n} \log M_n^{(1)} M_n^{(2)} + \gamma \right\}, \tag{3.57}$$

$$T_n^{(4)} = \left\{ (u^n, x_1^n, x_2^n, y^n) \mid \frac{1}{n} \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n)} > \frac{1}{n} \log M_n^{(1)} M_n^{(2)} + \gamma \right\} \tag{3.58}$$

とし，

$$T_n = T_n^{(1)} \cap T_n^{(2)} \cap T_n^{(3)} \cap T_n^{(4)} \tag{3.59}$$

と定義する．次の補題を示す.

補題 3.3.1 (上界式) $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \in S_{\mathrm{g}}$ なる任意の通信路入力を固定し，それに対する多重アクセス通信路 $\mathbf{W}$ からの出力を $\mathbf{Y}$ とする．$M_n^{(1)}, M_n^{(2)}$ を任意の正の整数とすると，すべての $n = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$\varepsilon_n \leq \Pr\left\{ (U^n, X_1^n, X_2^n, Y^n) \notin T_n \right\} + 7e^{-n\gamma} \tag{3.60}$$

を満たす $(n, M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, \varepsilon_n)$ 符号が存在する．ただし，$\gamma > 0$ は任意の定数とする．

証明　Slepian と Wolf による共通メッセージを有する MAC [6] におけるランダム符号化を用いる．簡単のため，

$$R_{12} = \min\{R_1, C_{12}\},\ R_{21} = \min\{R_2, C_{21}\} \tag{3.61}$$

と定義する．

符号生成

任意に与えられた $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \in S_1$ に対して，ランダムに独立に $e^{n(R_{12}+R_{21})}$ 個の系列 $u^n(k)$ を P_{U^n} に従って生成する $(k = 1, \ldots, e^{n(R_{12}+R_{21})})$．各 k に対して，ランダムに独立に $e^{n(R_1-R_{12})}$ 個の系列 $x_1^n(i_2, u^n(k))$ を $P_{X_1^n|U^n=u^n(k)}$ に従って生成する $(i_2 = 1, \ldots, e^{n(R_1-R_{12})})$．同様に，各 k に対して，$e^{n(R_2-R_{21})}$ 個の系列 $x_2^n(j_2, u^n(k))$ を $P_{X_2^n|U^n=u^n(k)}$ に従って生成する $(j_2 = 1, \ldots, e^{n(R_2-R_{21})})$.

符号化

符号器 1 がメッセージ $i \in \{1, \dots, e^{nR_1}\}$ を受け取ると，長さ nR_{12} の系列と長さ $n(R_1 - R_{12})$ の系列に分割する．同様に，符号器 2 がメッセージ $j \in \{1, \dots, 2^{nR_2}\}$ を受け取ると，長さ nR_{21} の系列と長さ $n(R_2 - R_{21})$ の系列に分割する．長さ nR_{12} の系列と長さ nR_{21} の系列の組を $k \in \{1, \dots, e^{n(R_{12}+R_{21})}\}$ と一対一に対応させ，長さ $n(R_1 - R_{12})$ の系列を $i_2 \in \{1, \dots, e^{n(R_1-R_{12})}\}$，長さ $n(R_2 - R_{21})$ の系列を $j_2 \in \{1, \dots, e^{n(R_2-R_{21})}\}$ とそれぞれ一対一に対応させる．メッセージ i, j はそれぞれ $x_1^n(i_2, u^n(k)) \in \mathcal{X}_1^n$ と $x_2^n(j_2, u^n(k)) \in \mathcal{X}_2^n$ に変換されて通信路に入力される．

復号化

復号器が $y^n \in \mathcal{Y}$ を受け取ると，

$$(u^n(k), x_1^n(i_2, u^n(k)), x_2^n(j_2, u^n(k)), y^n) \in T_n \tag{3.62}$$

を満たす (i, j) (すなわち (i, j) に一対一に対応する (i_2, j_2, k)) が唯一存在するとき (i, j) を復号し，複数あるかもしくは存在しないとき復号誤りとする．

誤り確率の評価

$R_{12} = R_1$ のとき，i_2 は唯一に定まるのでその誤り確率は 0 になる．$R_{21} = R_2$ のとき，j_2 も同様に唯一に定まるのでその誤り確率は 0 になる．そこで議論の一般性を失うことなく，$R_{12} = C_{12}, R_{21} = C_{21}$ と仮定する．メッセージ (i, j)(すなわち (i, j) から一意に定まる (i_2, j_2, k)) を送ったとき，y^n を通信路の出力とすれば，復号誤り事象は,

$$(u^n(k), x_1^n(i_2, u^n(k)), x_2^n(j_2, u^n(k)), y^n) \notin T_n \tag{3.63}$$

となるか，$(\hat{i}_2, \hat{j}_2, \hat{k}) \neq (i_2, j_2, k)$ なるある $(\hat{i}_2, \hat{j}_2, \hat{k})$ に対して,

$$(u^n(\hat{k}), x_1^n(\hat{i}_2, u^n(\hat{k})), x_2^n(\hat{j}_2, u^n(\hat{k})), y^n) \in T_n \tag{3.64}$$

となるときのみ起こる．そこで，事象 E_{str} を

$$E_{str} \;=\; \{(u^n(r), x_1^n(s, u^n(r)), x_2^n(t, u^n(r)), y^n) \in T_n\} \tag{3.65}$$

とすると，符号アンサンブルにおける平均誤り確率を $\bar{\varepsilon}_n$ は,

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_n \;\leq\; & \frac{1}{M_n^{(1)}} \frac{1}{M_n^{(2)}} \sum_{i_2} \sum_{j_2} \sum_{k} \Pr\left\{E^c_{i_2 j_2 k} \mid W_1 = i, W_2 = j\right\} \\ & + \frac{1}{M_n^{(1)}} \frac{1}{M_n^{(2)}} \sum_{i_2} \sum_{j_2} \sum_{k} \Pr\left\{ \bigcup_{(\hat{i}_2, \hat{j}_2, \hat{k}) \neq (i_2, j_2, k)} E_{\hat{i}_2 \hat{j}_2 \hat{k}} \,\middle|\, W_1 = i, W_2 = j \right\} \end{aligned} \tag{3.66}$$

のように上から抑えられる．符号の対称性から (3.66) は,

$$\bar{\varepsilon}_n \leq \Pr\left\{E_{111}^c \mid W_1=1, W_2=1\right\} + \Pr\left\{ \bigcup_{(\hat{i}_2,\hat{j}_2,\hat{k})\neq(111)} E_{\hat{i}_2\hat{j}_2\hat{k}} \,\middle|\, W_1=1, W_2=1 \right\} \tag{3.67}$$

と書くことができる．(3.67) の右辺第一項は

$$\Pr\left\{E_{111}^c \mid W_1=1, W_2=1\right\} = \Pr\left\{(U^n, X_1^n, X_2^n, Y^n) \notin T_n\right\} \tag{3.68}$$

となる．また，右辺第二項は

$$\begin{aligned}
&\Pr\left\{ \bigcup_{(\hat{i}_2,\hat{j}_2,\hat{k})\neq(111)} E_{\hat{i}_2\hat{j}_2\hat{k}} \,\middle|\, W_1=1, W_2=1 \right\} \\
\leq\ & \sum_{\hat{i}_2\neq 1} \Pr\left\{E_{\hat{i}_2 11} \mid W_1=1, W_2=1\right\} \\
&+ \sum_{\hat{j}_2\neq 1} \Pr\left\{E_{1\hat{j}_2 1} \mid W_1=1, W_2=1\right\} \\
&+ \sum_{\hat{k}\neq 1} \Pr\left\{E_{11\hat{k}} \mid W_1=1, W_2=1\right\} \\
&+ \sum_{\hat{i}_2\neq 1, \hat{j}_2\neq 1} \Pr\left\{E_{\hat{i}_2\hat{j}_2 1} \mid W_1=1, W_2=1\right\} \\
&+ \sum_{\hat{i}_2\neq 1, \hat{k}\neq 1} \Pr\left\{E_{\hat{i}_2 1\hat{k}} \mid W_1=1, W_2=1\right\} \\
&+ \sum_{\hat{j}_2\neq 1, \hat{k}\neq 1} \Pr\left\{E_{1\hat{j}_2\hat{k}} \mid W_1=1, W_2=1\right\} \\
&+ \sum_{\hat{i}_2\neq 1, \hat{j}_2\neq 1, \hat{k}\neq 1} \Pr\left\{E_{\hat{i}_2\hat{j}_2\hat{k}} \mid W_1=1, W_2=1\right\}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

と上から抑えることができる．(3.55) を用いて (3.69) の右辺第一項を計算すると,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\hat{i}_2\neq 1} \Pr\left\{E_{\hat{i}_2 11} \mid W_1=1, W_2=1\right\} \\
=\ & (e^{n(R_1-C_{12})}-1) \sum_{u^n} P(u^n) \sum_{x_1^n} P(x_1^n \mid u^n) \sum_{x_2^n} P(x_2^n \mid u^n) \\
&\times \sum_{y^n} P(y^n \mid x_2^n) 1\left[(u^n, x_1^n, x_2^n, y^n) \in T_n\right] \\
\leq\ & e^{n(R_1-C_{12})} \sum_{u^n} \sum_{x_1^n} \sum_{x_2^n} P(u^n) P(x_1^n \mid u^n) P(x_2^n \mid u^n) \\
&\times \frac{e^{-n\gamma}}{M_n^{(1)} e^{-nC_{12}}} \sum_{y^n} W^n(y^n \mid x_1^n, x_2^n) \\
\leq\ & e^{-n\gamma}
\end{aligned} \tag{3.70}$$

となる．同様に (3.69) の右辺の他の項も $e^{-n\gamma}$ で上から抑えられる．よって (3.60) は示された．□

定理 3.3.1 (順定理)

$$(R_1, R_2) \in \bigcup_{(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U})\in S_{\mathrm{g}}} \mathcal{R}_{C_{12}C_{21}}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \tag{3.71}$$

を満たすレートペア (R_1, R_2) は達成可能である．

証明　固定した $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \in S_{\mathrm{g}}$ に対して，$(R_1, R_2) \in \mathcal{R}_{C_{12}C_{21}}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U})$ なる任意の (R_1, R_2) に対し，$(R_1-2\gamma, R_2-2\gamma)$ が達成可能であることを示す．そのために，定数 $\gamma > 0$ に対して，$M_n^{(1)} = e^{n(R_1-2\gamma)}, M_n^{(2)} = e^{n(R_2-2\gamma)}$ とおくと，

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n^{(1)} \;\; \geq \;\; R_1 - 2\gamma, \tag{3.72}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n^{(2)} \;\; \geq \;\; R_2 - 2\gamma \tag{3.73}$$

が自明に成り立つ．よって，補題 3.3.1 より，

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n \;\; \leq \;\; & \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n, U^n)} + C_{12} \leq R_1 - \gamma\right\} \\
& +\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n, U^n)} + C_{21} \leq R_2 - \gamma\right\} \\
& +\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + C_{12} + C_{21} \leq R_1 + R_2 - 3\gamma\right\} \\
& +\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n)} \leq R_1 + R_2 - 3\gamma\right\} + 7e^{-n\gamma}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

となる $(n, M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, \varepsilon_n)$ 符号が存在する．(3.2) ∼ (3.5) の関係を (3.74) に適用すると，

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n \;\; \leq \;\; & \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n, U^n)} \leq \underline{I}(\mathbf{X}_1; \mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) - \gamma\right\} \\
& +\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n, U^n)} \leq \underline{I}(\mathbf{X}_2; \mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{U}) - \gamma\right\} \\
& +\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} \leq \underline{I}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; \mathbf{Y} \mid \mathbf{U}) - 3\gamma\right\} \\
& +\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n)} \leq \underline{I}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; \mathbf{Y}) - 3\gamma\right\} + 7e^{-n\gamma}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

が得られる．両辺 $\limsup_{n\to\infty}$ をとると，相互情報量スペクトル下限の定義より，$\limsup_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ となり，$(R_1 - 2\gamma, R_2 - 2\gamma)$ は達成可能であることがわかる．γ は任意に小さくすることができるので，(R_1, R_2) は達成可能である．□

3.4　考察

ここでは得られた通信路容量域の一般公式 (3.1) に関して考察を行う．

符号器間のリンクのキャパシティを 0 にしたとき，部分協調可能な符号器を有する定常無記憶通信路の通信路容量域 [1] は定常無記憶多重アクセス通信路の通信路容量域 [9], [10] と一致する．しかし，今回導出した部分協調可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路の通信路容量域のリンクキャパシティを 0 にしても一般多重アクセス通信路の通信路容量域と一致しない．これは，リンク制約 (2.4), (2.5) からリンクのレートが 0 であっても，何も交換しないことと等価ではない．よって，リンクキャパシティが 0 のとき，部分協調可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路は一般多重アクセス通信路と同じものとそもそもみなすことができない．むしろ，定常無記憶な場合に両者の通信路容量域が一致することが特殊なケースといえよう．

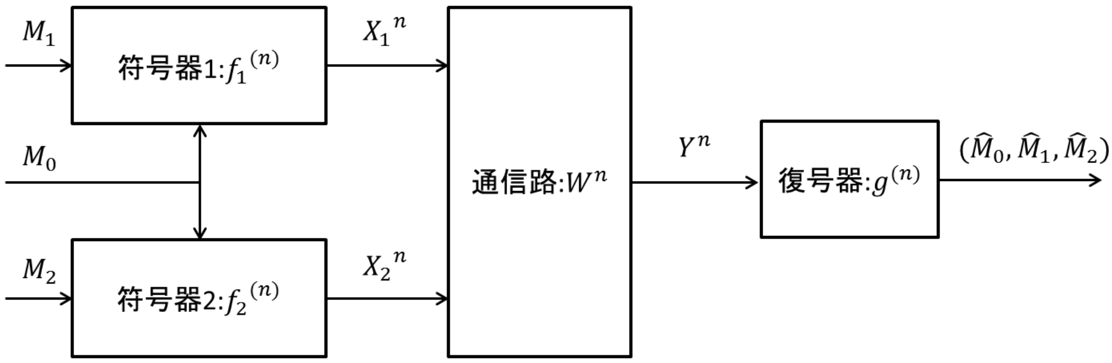

図 3.1: 共通メッセージを有する一般多重アクセス通信路

次に図 3.1 に示す，共通メッセージを有する一般多重アクセス通信路 [6] との関係性について考察する．まず共通メッセージを有する一般多重アクセス通信路の通信路容量域を示そう．ここでレート R_0 のメッセージ M_0 は両符号器が観測するメッセージを表し，符号器 i $(i = 1, 2)$ は (M_0, M_i) を符号語 X_i^n に符号化する．定理 3.1.1 の証明と同様の方針により，通信路容量域 $C_{\mathrm{com}}(\mathbf{W})$ は，

$$C_{\mathrm{com}}(\mathbf{W}) = \bigcup_{(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \in S_{\mathrm{g}}} R_{\mathrm{com}}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \tag{3.76}$$

で与えられることが示せる．ただし，$R_{\rm com}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U})$ を

$$\begin{aligned}
0 \le &\quad R_1 &&\le \underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}_2,\mathbf{U}), &(3.77)\\
0 \le &\quad R_2 &&\le \underline{I}(\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}_1,\mathbf{U}), &(3.78)\\
0 \le &\quad R_1+R_2 &&\le \underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}\mid\mathbf{U}), &(3.79)\\
0 \le &\quad R_0+R_1+R_2 &&\le \underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}) &(3.80)
\end{aligned}$$

を満たす (R_0,R_1,R_2) の全体とする．(3.76) の一般公式は定常無記憶な場合の通信路容量域 [6] の一般化となる．

ここで任意のレートペア (R_1,R_2) に対し R_{12},R_{21} を (3.61) と同様に定義しよう．$R_{12}+R_{21}$ を共通メッセージのレート，R_1-R_{12},R_2-R_{21} をプライベートメッセージのレートとし，通信路容量域からレート組 $(R_{12}+R_{21},R_1-R_{12},R_2-R_{21})$ は共通メッセージを有する一般多重アクセス通信路において達成可能であるとしよう．すると任意の通信路入力 $(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U})\in S_{\rm g}$ に対して，

$$\begin{aligned}
0 \le &\quad R_1-R_{12} &&\le \underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}_2,\mathbf{U}), &(3.81)\\
0 \le &\quad R_2-R_{21} &&\le \underline{I}(\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}_1,\mathbf{U}), &(3.82)\\
0 \le &\quad (R_1-R_{12})+(R_2-R_{21}) &&\le \underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}\mid\mathbf{U}), &(3.83)\\
0 \le &\quad (R_{12}+R_{21})+(R_1-R_{12})+(R_2-R_{21}) &&\le \underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}) &(3.84)
\end{aligned}$$

となる．式 (3.61) の定義より，(3.81) $\sim$ (3.84) は

$$\begin{aligned}
0 \le &\quad R_1 &&\le \underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}_2,\mathbf{U})+C_{12}, &(3.85)\\
0 \le &\quad R_2 &&\le \underline{I}(\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}_1,\mathbf{U})+C_{21}, &(3.86)\\
0 \le &\quad R_1+R_2 &&\le \underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}\mid\mathbf{U})+C_{12}+C_{21}, &(3.87)\\
0 \le &\quad R_1+R_2 &&\le \underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}) &(3.88)
\end{aligned}$$

が得られる．これは $(R_1,R_2)\in C(\mathbf{W})$ となることを意味する．これにより共通メッセージを有する一般多重アクセス通信路における達成可能な符号化スキームを用いると，部分協調可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路の順定理が証明できる．

第 4 章

離散無記憶な場合の通信路容量域

本章では，3 章で導出した部分協調が可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路の通信路容量域の一般公式が通信路の定常無記憶性を仮定したとき，Willems [1] が導出した通信路容量域の公式と一致することを証明する．本章では $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}$ は全て有限離散集合とする．

4.1 Willems による通信路容量域の公式

ここでは Willems [1] が導出した部分協調が可能な符号器を有する定常無記憶多重アクセス通信路の通信路容量域を紹介する．

定理 4.1.1 リンク容量 (C_{12}, C_{21}) の協調リンクを用いて，部分協調が可能な符号器を有する定常無記憶多重アクセス通信路 $\mathbf{W}$ の通信路容量域 $C(\mathbf{W})$ は

$$C(\mathbf{W}) = \bigcup_{(X_1, X_2, Z) \in S_{\mathrm{m}}} \mathcal{R}_{C_{12}C_{21}}(X_1, X_2, Z). \tag{4.1}$$

ただし，S_{m} は式 (2.30) で定義されており，$\mathcal{R}_{C_{12}C_{21}}(X_1, X_2, Z)$ は

$$\begin{aligned}
0 \leq \quad R_1 \quad &\leq I(X_1; Y \mid X_2, Z) + C_{12}, &(4.2)\\
0 \leq \quad R_2 \quad &\leq I(X_2; Y \mid X_1, Z) + C_{21}, &(4.3)\\
0 \leq R_1 + R_2 &\leq I(X_1, X_2; Y \mid Z) + C_{12} + C_{21}, &(4.4)\\
0 \leq R_1 + R_2 &\leq I(X_1, X_2; Y) &(4.5)
\end{aligned}$$

を満たすレート組 (R_1, R_2) の全体とする．□

4.2 順定理

本節では，通信路に定常無記憶性を仮定したとき，Willems [1] が導出した通信路容量域が前章で導出した通信路容量域に含まれることを証明する．

定理 4.2.1

$$\bigcup_{(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U})\in S_{\mathrm{g}}} \mathcal{R}_{C_{12}C_{21}}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) \supseteq \bigcup_{(X_1,X_2,Z)\in S_{\mathrm{m}}} \mathcal{R}_{C_{12}C_{21}}(X_1,X_2,Z). \tag{4.6}$$

ここで左辺は部分協調可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路の通信路容量域の公式 (3.1)，右辺は Willems が与えた部分協調可能な符号器を有する定常無記憶多重アクセス通信路の通信路容量域の公式 (4.1) を表す.

証明　任意の入力組 $(X_1,X_2,Z)\in S_{\mathrm{m}}$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \{X_1^n=(X_{11}^{(n)},\ldots,X_{1n}^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}, & (4.7)\\ \mathbf{X}_2 &= \{X_2^n=(X_{21}^{(n)},\ldots,X_{2n}^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}, & (4.8)\\ \mathbf{U} &= \{U^n=(U_1^{(n)},\ldots,U_n^{(n)})\}_{n=1}^{\infty} & (4.9)\end{aligned}$$

なる無記憶な入力組 $(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U})\in S_{\mathrm{g}}$ を，$\mathcal{U}=\mathcal{Z}$ かつ

$$P_U(a)=P_Z(a)\quad(\forall a\in\mathcal{Z}) \tag{4.10}$$

とおく．有限アルファベット $\mathcal{A}$ に対して,

$$\pi(b\mid u^n)=\text{系列}\,u^n\text{中に}\,b\,\text{が出てきた回数}\quad(\forall b\in\mathcal{A},\quad \forall u^n\in\mathcal{A}^n) \tag{4.11}$$

とする．任意に小さい $\delta>0$ に対して,

$$u^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(Z) \equiv \{u^n\in\mathcal{U}^n :\mid \pi(b\mid u^n)-P_Z(b)\mid\le \delta P_Z(b),\quad \forall b\in\mathcal{Z}\} \tag{4.12}$$

を満たすときアルファベット $\mathcal{Z}$ の大きさを $E=\mid\mathcal{Z}\mid$ とおくと,

$$P_{X_{1i}^{(n)}|U^n}(x_{1i}^{(n)}\mid u^n)=\begin{cases} P_{X_1|Z}(x_{1i}^{(n)}\mid 1) & \text{for}\ \ 1\le i\le n_1(u^n)\\ \quad\vdots & \qquad\vdots\\ P_{X_1|Z}(x_{1i}^{(n)}\mid E) & \text{for}\ \ n_{E-1}(u^n)<i\le n\end{cases} \tag{4.13}$$

かつ,

$$P_{X_{2i}^{(n)}|U^n}(x_{2i}^{(n)}\mid u^n)=\begin{cases} P_{X_2|Z}(x_{2i}^{(n)}\mid 1) & \text{for}\ \ 1\le i\le n_1(u^n)\\ \quad\vdots & \qquad\vdots\\ P_{X_2|Z}(x_{2i}^{(n)}\mid E) & \text{for}\ \ n_{E-1}(u^n)<i\le n\end{cases} \tag{4.14}$$

と定める．ただし,

$$n_c(u^n) = n\sum_{i=1}^{c}\pi(i\mid u^n)\quad(\forall c=1,\cdots,E-1) \tag{4.15}$$

とする．このとき

$$
\begin{aligned}
\underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) &= \text{p-}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n\mid X_1^n,X_2^n)}{P(Y^n\mid X_2^n,U^n)} \\
&\geq \text{p-}\liminf_{n\to\infty}\frac{n_1(u^n)}{n}\frac{1}{n_1(u^n)}\sum_{i=1}^{n_1(u^n)}\log\frac{W(Y_i^{(n)}\mid X_{1i}^{(n)},X_{2i}^{(n)})}{P(Y_i^{(n)}\mid X_{2i}^{(n)},Z=1)} \\
&\quad +\cdots+\text{p-}\liminf_{n\to\infty}\frac{n-n_{E-1}(u^n)}{n}\frac{1}{n-n_{E-1}(u^n)} \\
&\quad \times\sum_{i=n_{E-1}(u^n)+1}^{n}\log\frac{W(Y_i^{(n)}\mid X_{1i}^{(n)},X_{2i}^{(n)})}{P(Y_i^{(n)}\mid X_{2i}^{(n)},Z=E)} \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

となる．(4.12) より，

$$
\frac{n_d(u^n)-n_{d-1}(u^n)}{n} \geq (1-\delta)P_Z(d) \quad (\forall d\in\mathcal{Z},\quad n_0(u^n)=0,\quad n_E=n) \qquad (4.17)
$$

となる．よって，大数の法則と (4.17) より $\delta\to 0$ とすると (4.16) は

$$
\underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) \geq I(X_1;Y\mid X_2,Z) \qquad (4.18)
$$

となる．$\underline{I}(\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}_1,\mathbf{U}),\underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}\mid\mathbf{U}),\underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y})$ も同様にすると，全ての入力組 $(X_1,X_2,Z)\in S_{\mathrm{m}}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) &\geq I(X_1;Y\mid X_2,Z), && (4.19)\\
\underline{I}(\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}_1,\mathbf{U}) &\geq I(X_2;Y\mid X_1,Z), && (4.20)\\
\underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}\mid\mathbf{U}) &\geq I(X_1,X_2;Y\mid Z), && (4.21)\\
\underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}) &\geq I(X_1,X_2;Y) && (4.22)
\end{aligned}
$$

を満たす入力組 $(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U})\in S_{\mathrm{g}}$ が存在する．よって式 (4.6) が示される．□

4.3 逆定理

本節では，前節とは逆の関係を示す．そこで，まず以下の補題を証明する．

補題 4.3.1 任意の多重アクセス通信路 $\mathbf{W} = \{W^n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，すべての入力組 $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U})$ とその出力 $\mathbf{Y}$ に対して，

$$\begin{aligned} \underline{I}(\mathbf{X}_1; \mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) &\leq \liminf_{n\to\infty} I(X_1^n; Y^n \mid X_2^n, U^n), & (4.23) \\ \underline{I}(\mathbf{X}_2; \mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{U}) &\leq \liminf_{n\to\infty} I(X_2^n; Y^n \mid X_1^n, U^n), & (4.24) \\ \underline{I}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; \mathbf{Y} \mid \mathbf{U}) &\leq \liminf_{n\to\infty} I(X_1^n, X_2^n; Y^n \mid U^n), & (4.25) \\ \underline{I}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; \mathbf{Y}) &\leq \liminf_{n\to\infty} I(X_1^n, X_2^n; Y^n) & (4.26) \end{aligned}$$

を満たす.

証明

$$i(x_1^n; y^n \mid x_2^n, u^n) = \log \frac{W^n(y^n \mid x_1^n, x_2^n)}{P(y^n \mid x_2^n, u^n)} \tag{4.27}$$

とする．任意の定数 $\gamma > 0$ に対して，

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} I(X_1^n; Y^n \mid X_2^n, U^n) &= \frac{1}{n}\mathrm{E}\left[i(X_1^n; Y^n \mid X_2^n, U^n) 1\left[i(X_1^n; Y^n \mid X_2^n, U^n) \leq 0\right]\right] \\ &\quad + \frac{1}{n}\mathrm{E}\left[i(X_1^n; Y^n \mid X_2^n, U^n)\right. \\ &\quad \left.\times 1\left[0 < i(X_1^n; Y^n \mid X_2^n, U^n) \leq \underline{I}(\mathbf{X}_1; \mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) - \gamma\right]\right] \\ &\quad + \frac{1}{n}\mathrm{E}\left[i(X_1^n; Y^n \mid X_2^n, U^n)\right. \\ &\quad \left.\times 1\left[\underline{I}(\mathbf{X}_1; \mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) - \gamma < i(X_1^n; Y^n \mid X_2^n, U^n)\right]\right] \\ &\geq \frac{1}{n}\mathrm{E}\left[i(X_1^n; Y^n \mid X_2^n, U^n) 1\left[i(X_1^n; Y^n \mid X_2^n, U^n) \leq 0\right]\right] \\ &\quad + \frac{1}{n}\mathrm{E}\left[i(X_1^n; Y^n \mid X_2^n, U^n)\right] \\ &\quad \times 1\left[\underline{I}(\mathbf{X}_1; \mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) - \gamma < i(X_1^n; Y^n \mid X_2^n, U^n)\right]\right] \\ &= \sum_{x_1^n} \sum_{x_2^n} \sum_{u^n} P(x_1^n, x_2^n, u^n) \\ &\quad \times \frac{1}{n}\mathrm{E}\left[i(x_1^n; Y^n \mid x_2^n, u^n) 1\left[i(x_1^n; Y^n \mid x_2^n, u^n) \leq 0\right]\right] \\ &\quad + \frac{1}{n}\mathrm{E}\left[i(X_1^n; Y^n \mid X_2^n, U^n)\right. \\ &\quad \left.\times 1\left[\underline{I}(\mathbf{X}_1; \mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) - \gamma < i(X_1^n; Y^n \mid X_2^n, U^n)\right]\right] \end{aligned} \tag{4.28}$$

となる．Han [2, *Lemma* 3.4] より $\{U_n\}, \{V_n\}$ を情報源アルファベット $\{\mathcal{Z}_n\}$ の中に値をとる任意の確率変数列とすれば，すべての $n = 1, 2, \cdots$ に対して，

$$\mathrm{E}\left[\log \frac{P_{U_n}(U_n)}{P_{V_n}(U_n)} 1\left[\log \frac{P_{U_n}(U_n)}{P_{V_n}(U_n)} \leq 0\right]\right] \geq \frac{1}{e} \log \frac{1}{e} \tag{4.29}$$

が成り立つので，$P_{U_n}(U_n) = W^n(Y^n \mid x_1^n, x_2^n), P_{V_n} = P(Y^n \mid x_2^n, u^n)$ とすれば，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}I(X_1^n;Y^n \mid X_2^n,U^n) &\geq \sum_{x_1^n}\sum_{x_2^n}\sum_{u^n} P(x_1^n,x_2^n,u^n)\frac{1}{ne}\log\frac{1}{e} \\
&\quad + \sum_{x_1^n}\sum_{x_2^n}\sum_{u^n}\sum_{y^n} P(x_1^n,x_2^n,u^n,y^n)\frac{1}{n}i(x_1^n;y^n \mid x_2^n,u^n) \\
&\quad \times 1\left[\underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_2,\mathbf{U}) - \gamma < \frac{1}{n}i(x_1^n;y^n \mid x_2^n,u^n)\right] && (4.30) \\
&> \frac{1}{ne}\log\frac{1}{e} \\
&\quad + \sum_{x_1^n}\sum_{x_2^n}\sum_{u^n}\sum_{y^n} P(x_1^n,x_2^n,u^n,y^n)(\underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_2,\mathbf{U}) - \gamma) \\
&\quad \times 1\left[\underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_2,\mathbf{U}) - \gamma < \frac{1}{n}i(x_1^n;y^n \mid x_2^n,u^n)\right] && (4.31) \\
&= \frac{1}{ne}\log\frac{1}{e} + (\underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_2,\mathbf{U}) - \gamma) \\
&\quad \times \Pr\left\{\frac{1}{n}i(X_1^n;Y^n \mid X_2^n,U^n) > \underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_2,\mathbf{U}) - \gamma\right\} && (4.32)
\end{aligned}$$

と展開できる．ここで両辺に $\liminf_{n\to\infty}$ をとると，$\underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_2,\mathbf{U})$ の定義より，

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}I(X_1^n;Y^n \mid X_2^n,U^n) \geq \underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_2,\mathbf{U}) - \gamma \tag{4.33}$$

となる．最後に $\gamma > 0$ が任意の定数であることを考慮して $\gamma \to 0$ とすれば

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}I(X_1^n;Y^n \mid X_2^n,U^n) \geq \underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_2,\mathbf{U}) \tag{4.34}$$

となる．式 (4.24) ∼ (4.26) も同様に示される．□

定理 4.3.1

$$\bigcup_{(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U})\in S_{\mathrm{g}}} \mathcal{R}_{C_{12}C_{21}}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) \supseteq \bigcup_{(X_1,X_2,Z)\in S_{\mathrm{m}}} \mathcal{R}_{C_{12}C_{21}}(X_1,X_2,Z). \tag{4.35}$$

証明　今，定常無記憶な通信路 $\mathbf{W}$ を考えているので，

$$I(X_1^n;Y^n \mid X_2^n,U^n) \leq \sum_{i=1}^n I(X_{1i}^{(n)};Y_i^{(n)} \mid X_{2i}^{(n)},U_i^{(n)}), \tag{4.36}$$

$$I(X_2^n;Y^n \mid X_1^n,U^n) \leq \sum_{i=1}^n I(X_{2i}^{(n)};Y_i^{(n)} \mid X_{1i}^{(n)},U_i^{(n)}), \tag{4.37}$$

$$I(X_1^n,X_2^n;Y^n \mid U^n) \leq \sum_{i=1}^n I(X_{1i}^{(n)},X_{2i}^{(n)};Y_i^{(n)} \mid U_i^{(n)}), \tag{4.38}$$

$$I(X_1^n,X_2^n;Y^n) \leq \sum_{i=1}^n I(X_{1i}^{(n)},X_{2i}^{(n)};Y_i^{(n)}) \tag{4.39}$$

が成り立つ．よって補題 4.3.1 より

$$\underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) \le \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_{1i}^{(n)};Y_i^{(n)}\mid X_{2i}^{(n)},U_i^{(n)}), \tag{4.40}$$

$$\underline{I}(\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}_1,\mathbf{U}) \le \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_{2i}^{(n)};Y_i^{(n)}\mid X_{1i}^{(n)},U_i^{(n)}), \tag{4.41}$$

$$\underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}\mid\mathbf{U}) \le \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_{1i}^{(n)},X_{2i}^{(n)};Y_i^{(n)}\mid U_i^{(n)}), \tag{4.42}$$

$$\underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}) \le \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_{1i}^{(n)},X_{2i}^{(n)};Y_i^{(n)}) \tag{4.43}$$

となる．また，任意に小さい $\delta>0$ に対して，全ての $n\ge n_0$ について

$$\underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_{1i}^{(n)};Y_i^{(n)}\mid X_{2i}^{(n)},U_i^{(n)})+\delta, \tag{4.44}$$

$$\underline{I}(\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}_1,\mathbf{U}) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_{2i}^{(n)};Y_i^{(n)}\mid X_{1i}^{(n)},U_i^{(n)})+\delta, \tag{4.45}$$

$$\underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}\mid\mathbf{U}) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_{1i}^{(n)},X_{2i}^{(n)};Y_i^{(n)}\mid U_i^{(n)})+\delta, \tag{4.46}$$

$$\underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_{1i}^{(n)},X_{2i}^{(n)};Y_i^{(n)})+\delta \tag{4.47}$$

を満たす n_0 が存在する．そのような $n\ge n_0$ に対して，$\mathcal{T}=\{1,\ldots,n\}, P_T(t)=\frac{1}{n}$ とすると (4.44) ∼ (4.47) は，

$$\underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) \le I(X_{1T}^{(n)};Y_T^{(n)}\mid X_{2T}^{(n)},U_T^{(n)},T)+\delta, \tag{4.48}$$

$$\underline{I}(\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}_1,\mathbf{U}) \le I(X_{2T}^{(n)};Y_T^{(n)}\mid X_{1T}^{(n)},U_T^{(n)},T)+\delta, \tag{4.49}$$

$$\underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}\mid\mathbf{U}) \le I(X_{1T}^{(n)},X_{2T}^{(n)};Y_T^{(n)}\mid U_T^{(n)},T)+\delta, \tag{4.50}$$

$$\underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}) \le I(X_{1T}^{(n)},X_{2T}^{(n)};Y_T^{(n)}\mid T)+\delta, \tag{4.51}$$

となる．ここで，$\mid\mathcal{Z}\mid=\mid\mathcal{U}\mid\times\mid\mathcal{T}\mid$ とし，$Z=(U_T^{(n)},T)$ とするとき，

$$P_{X_1|Z}(x_1\mid z) = P_{X_{1T}^{(n)}|U_T^{(n)},T}(x_1\mid u_t^{(n)},t), \tag{4.52}$$

$$P_{X_2|Z}(x_1\mid z) = P_{X_{2T}^{(n)}|U_T^{(n)},T}(x_1\mid u_t^{(n)},t), \tag{4.53}$$

$$P_Z(z) = P_{U_T^{(n)}T}(u_t^{(n)},t) \tag{4.54}$$

を満たすような入力組 $(X_1,X_2,Z)\in S_{\mathrm{m}}$ を考える．すると (4.48) ∼ (4.50) は，

$$\underline{I}(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) \le I(X_1;Y\mid X_2,Z)+\delta, \tag{4.55}$$

$$\underline{I}(\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}_1,\mathbf{U}) \le I(X_2;Y\mid X_1,Z)+\delta, \tag{4.56}$$

$$\underline{I}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}\mid\mathbf{U}) \le I(X_1,X_2;Y\mid Z)+\delta \tag{4.57}$$

となる．また (4.51) は $T \leftrightarrow (X_1, X_2) \leftrightarrow Y$ より，

$$\begin{aligned}
\underline{I}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; \mathbf{Y}) &\le I(X_{1T}^{(n)}, X_{2T}^{(n)}; Y_T^{(n)} \mid T) + \delta && (4.58)\\
&= I(X_1, X_2; Y \mid T) + \delta && (4.59)\\
&\le I(X_1, X_2, T; Y) + \delta && (4.60)\\
&= I(X_1, X_2; Y) + \delta && (4.61)
\end{aligned}$$

となる．ここで $\delta \to 0$ とすれば，すべての入力組 $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U})$ に対して，

$$\begin{aligned}
\underline{I}(\mathbf{X}_1; \mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) &\le I(X_1; Y \mid X_2, Z), && (4.62)\\
\underline{I}(\mathbf{X}_2; \mathbf{Y} \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{U}) &\le I(X_2; Y \mid X_1, Z), && (4.63)\\
\underline{I}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; \mathbf{Y} \mid \mathbf{U}) &\le I(X_1, X_2; Y \mid Z), && (4.64)\\
\underline{I}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; \mathbf{Y}) &\le I(X_1, X_2; Y) && (4.65)
\end{aligned}$$

を満たす入力組 $(X_1, X_2, Z) \in S_{\mathrm{m}}$ が存在する．よって式 (4.35) が示される．□

第 5 章

ε-通信路容量域

前章までは，復号誤り率 $\varepsilon = 0$ 条件とした通信路容量域について議論した．一方，復号誤り率を正の定数 ε 以下にする符号化システムの性能解析も重要であり，近年盛んに研究されている．そこで本章では，部分協調可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路の ε-通信路容量域の一般公式を導出する．

5.1 ε-通信路容量域の一般公式

本節では，ε-通信路容量域の定理と，定理で用いられている記号について紹介する．

定義 5.1.1 入力組 $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U})$ に対して，

$$
\begin{aligned}
J(R_1, R_2 \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \equiv \limsup_{n \to \infty} \Pr \Bigg\{ & \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n, U^n)} + C_{12} \le R_1 \right\} \\
& \cup \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n, U^n)} + C_{21} \le R_2 \right\} \\
& \cup \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + C_{12} + C_{12} \le R_1 + R_2 \right\} \\
& \cup \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n)} \le R_1 + R_2 \right\} \Bigg\}
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

と定義する．

定理 5.1.1 (ε-通信路容量域) 部分協調が可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路 $\mathbf{W}$ の ε-通信路容量域 $C(\varepsilon \mid \mathbf{W})$ は

$$
C(\varepsilon \mid \mathbf{W}) = \bigcup_{(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \in S_{\mathrm{g}}} \mathrm{Cl} \{ (R_1, R_2) \mid R_1 \ge 0, R_2 \ge 0, J(R_1, R_2 \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \le \varepsilon \} \tag{5.2}
$$

で与えられる．ここで Cl は集合の閉包を表す．

注意 5.1.1 コスト制約付き符号化の場合，式 (5.2) の右辺の入力過程の集合として S_{g} の代わりに $S_{\Gamma_1\Gamma_2}$ とおけば，そのまま通信路容量域となる．

以降では，通信路容量域の一般公式と同様に順定理および逆定理を証明する．

5.2　順定理とその証明

ここでは，補題 3.3.1 を用いて順定理の証明を行う．

定理 5.2.1 (順定理)

$$(R_1, R_2) \in \bigcup_{(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U})\in S_{\mathrm{g}}} \mathrm{Cl}\{(R_1, R_2) \mid R_1 \geq 0, R_2 \geq 0, J(R_1, R_2 \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \leq \varepsilon\} \tag{5.3}$$

を満たすレートペア (R_1, R_2) は ε-達成可能である．

証明

$(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \in S_{\mathrm{g}}$ なる任意の入力組を考え，

$$(R_1, R_2) \in \mathrm{Cl}\{(R_1, R_2) \mid R_1 \geq 0, R_2 \geq 0, J(R_1, R_2 \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \leq \varepsilon\} \tag{5.4}$$

なる任意のレート (R_1, R_2) と任意に小さい定数 $\gamma > 0$ に対して，

$$M_n^{(1)} = e^{n(R_1 - 2\gamma)}, \tag{5.5}$$

$$M_n^{(2)} = e^{n(R_2 - 2\gamma)} \tag{5.6}$$

とおく．すると，

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log M_n^{(1)} \geq R_1 - 2\gamma, \tag{5.7}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log M_n^{(2)} \geq R_2 - 2\gamma \tag{5.8}$$

が自明に成り立つ．補題 3.3.1 より

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n \leq\ & \Pr\left\{\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n, U^n)} + C_{12} \leq R_1 - \gamma\right\}\right. \\
& \cup \left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n, U^n)} + C_{21} \leq R_2 - \gamma\right\} \\
& \cup \left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + C_{12} + C_{12} \leq R_1 + R_2 - 3\gamma\right\} \\
& \left.\cup \left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n)} \leq R_1 + R_2 - 3\gamma\right\}\right\} + 7e^{-n\gamma} \\
\leq\ & \Pr\left\{\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n, U^n)} + C_{12} \leq R_1 - \gamma\right\}\right. \\
& \cup \left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n, U^n)} + C_{21} \leq R_2 - \gamma\right\} \\
& \cup \left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + C_{12} + C_{12} \leq R_1 + R_2 - 2\gamma\right\} \\
& \left.\cup \left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n)} \leq R_1 + R_2 - 2\gamma\right\}\right\} + 7e^{-n\gamma}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

を満たす $(n, M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, \varepsilon_n)$ 符号が存在する．両辺 $\limsup_{n\to\infty}$ をとると，

$$\limsup_{n\to\infty} \varepsilon_n \le J(R_1 - \gamma, R_2 - \gamma \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \le \varepsilon \tag{5.10}$$

となる．ここで (5.10) の最右の不等号は式 (5.4) の条件による．従って $(R_1 - 2\gamma, R_2 - 2\gamma)$ は ε-達成可能である．γ は任意に小さくすることができるので，(R_1, R_2) は ε-達成可能であることが結論される．□

5.3　逆定理とその証明

ここでは，逆定理の証明を行う．そこで，まずは新しい下界式を導出する．

補題 5.3.1 十分大きい n と全ての $(n, M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, \varepsilon_n)$ 符号は，任意の定数 $\gamma > 0$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_n \ \geq \ \Pr & \left\{ \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n, U^n)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K} \log |\, \mathcal{V}_{1k}^{(n)} \,| \leq \frac{1}{n} \log M_n^{(1)} - 2\gamma \right\} \right. \\
& \cup \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n, U^n)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K} \log |\, \mathcal{V}_{2k}^{(n)} \,| \leq \frac{1}{n} \log M_n^{(2)} - 2\gamma \right\} \\
& \cup \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K} \log |\, \mathcal{V}_{1k}^{(n)} \,| \cdot |\, \mathcal{V}_{2k}^{(n)} \,| \leq \frac{1}{n} \log M_n^{(1)} M_n^{(2)} - 3\gamma \right\} \\
& \left. \cup \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n)} \leq \frac{1}{n} \log M_n^{(1)} M_n^{(2)} - \gamma \right\} \right\} - (4K+3) e^{-n\gamma} \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

を満足する．

証明　任意の $\gamma > 0$ に対して，

$$
A_1 = \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n, U^n)} + \frac{1}{n} \log \frac{1}{P(U^n \mid W_2)} \leq \frac{1}{n} \log M_n^{(1)} - \gamma \right\}, \qquad (5.12)
$$

$$
A_2 = \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n, U^n)} + \frac{1}{n} \log \frac{1}{P(U^n \mid W_1)} \leq \frac{1}{n} \log M_n^{(2)} - \gamma \right\}, \qquad (5.13)
$$

$$
A_3 = \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + \frac{1}{n} \log \frac{1}{P(U^n)} \leq \frac{1}{n} \log M_n^{(1)} M_n^{(2)} - \gamma \right\}, \qquad (5.14)
$$

$$
A_4 = \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n)} \leq \frac{1}{n} \log M_n^{(1)} M_n^{(2)} - \gamma \right\}, \qquad (5.15)
$$

$$
B_1 = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K} \log \frac{1}{P(V_{1k} \mid W_2, V_1^{k-1}, V_2^{k-1})} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K} \log |\, \mathcal{V}_{1k}^{(n)} \,| + (K+1)\gamma \right\}, \qquad (5.16)
$$

$$
B_2 = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K} \log \frac{1}{P(V_{2k} \mid W_1, V_1^{k-1}, V_2^{k-1})} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K} \log |\, \mathcal{V}_{2k}^{(n)} \,| + (K+1)\gamma \right\}, \qquad (5.17)
$$

$$
B_3 = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K} \log \frac{1}{P(V_{1k} \mid V_1^{k-1}, V_2^{k-1})} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K} \log |\, \mathcal{V}_{1k}^{(n)} \,| + (K+1)\gamma \right\}, \qquad (5.18)
$$

$$
B_4 = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K} \log \frac{1}{P(V_{2k} \mid V_1^{k}, V_2^{k-1})} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K} \log |\, \mathcal{V}_{2k}^{(n)} \,| + (K+1)\gamma \right\} \qquad (5.19)
$$

とおく．すると，

$$
\begin{aligned}
\Pr\left\{\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right\} &= 1-\Pr\left\{\bigcap_{i=1}^{4} A_i^c\right\}\\
&= 1-\Pr\left\{\left\{\bigcap_{i=1}^{4} A_i^c\right\}\cap\left\{\bigcup_{i=1}^{4} B_i\right\}\right\}-\Pr\left\{\left\{\bigcap_{i=1}^{4} A_i^c\right\}\cap\left\{\bigcap_{i=1}^{4} B_i^c\right\}\right\}\\
&\geq 1-\Pr\left\{\left\{\bigcap_{i=1}^{4} A_i^c\right\}\cap\left\{\bigcap_{i=1}^{4} B_i^c\right\}\right\}-\Pr\left\{\bigcup_{i=1}^{4} B_i\right\}\\
&\geq 1-\Pr\left\{\left\{\bigcap_{i=1}^{4} A_i^c\right\}\cap\left\{\bigcap_{i=1}^{4} B_i^c\right\}\right\}-\sum_{i=1}^{4}\Pr\left\{B_i\right\} \qquad (5.20)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．式 (5.20) の不等式はユニオン上界による．補題 3.2.2 と式 (3.38) の関係から

$$
Ke^{-n\gamma} \;\;\geq\;\; \Pr\left\{B_i\right\} \quad (\forall i=1,2,3,4) \qquad (5.21)
$$

となるので，式 (5.20) は

$$
\begin{aligned}
\Pr\left\{\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right\} &\geq 1-\Pr\left\{\left\{\bigcap_{i=1}^{4} A_i^c\right\}\cap\left\{\bigcap_{i=1}^{4} B_i^c\right\}\right\}-4Ke^{-n\gamma}\\
&= 1-\Pr\left\{\left\{A_1^c\cap B_1^c\right\}\cap\left\{A_2^c\cap B_2^c\right\}\cap\left\{A_3^c\cap B_3^c\cap B_4^c\right\}\cap A_4^c\right\}-4Ke^{-n\gamma}\\
&= \Pr\left\{\left\{A_1^c\cap B_1^c\right\}^c\cup\left\{A_2^c\cap B_2^c\right\}^c\cup\left\{A_3^c\cap B_3^c\cap B_4^c\right\}^c\cup A_4\right\}-4Ke^{-n\gamma} \qquad (5.22)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，

$$
\begin{aligned}
A_1^c\cap B_1^c &\subseteq \left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n\mid X_1^n,X_2^n)}{P(Y^n\mid X_2^n,U^n)}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\log\mid\mathcal{V}_{1k}^{(n)}\mid>\frac{1}{n}\log M_n^{(1)}-2\gamma\right\},\\
A_2^c\cap B_2^c &\subseteq \left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n\mid X_1^n,X_2^n)}{P(Y^n\mid X_1^n,U^n)}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\log\mid\mathcal{V}_{2k}^{(n)}\mid>\frac{1}{n}\log M_n^{(2)}-2\gamma\right\},\\
A_3^c\cap B_3^c\cap B_4^c &\subseteq \left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n\mid X_1^n,X_2^n)}{P(Y^n\mid U^n)}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\log\mid\mathcal{V}_{1k}^{(n)}\mid+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\log\mid\mathcal{V}_{2k}^{(n)}\mid\right.\\
&\qquad\left.>\frac{1}{n}\log M_n^{(1)}M_n^{(2)}-3\gamma\right\}
\end{aligned}
$$

となることから，

$$\begin{aligned}\Pr\left\{\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right\} \geq\ & \Pr\left\{\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n, U^n)} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\log|\,\mathcal{V}_{1k}^{(n)}\,| \leq \frac{1}{n}\log M_n^{(1)} - 2\gamma\right\}\right.\\ & \cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n, U^n)} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\log|\,\mathcal{V}_{2k}^{(n)}\,| \leq \frac{1}{n}\log M_n^{(2)} - 2\gamma\right\}\\ & \cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\log|\,\mathcal{V}_{1k}^{(n)}\,|\cdot|\,\mathcal{V}_{2k}^{(n)}\,|\right.\\ & \quad\left.\leq \frac{1}{n}\log M_n^{(1)}M_n^{(2)} - 3\gamma\right\}\\ & \left.\cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n)} \leq \frac{1}{n}\log M_n^{(1)}M_n^{(2)} - \gamma\right\}\right\}\\ & -4Ke^{-n\gamma} \end{aligned} \tag{5.23}$$

となる．補題 3.2.1 の下界式 (3.6) より，

$$\varepsilon_n \geq \Pr\left\{\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right\} - 3e^{-n\gamma} \tag{5.24}$$

となるので，式 (5.23) を代入すると

$$\begin{aligned}\varepsilon_n \geq \Pr & \left\{\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n, U^n)} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\log|\,\mathcal{V}_{1k}^{(n)}\,| \leq \frac{1}{n}\log M_n^{(1)} - 2\gamma\right\}\right.\\ & \cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n, U^n)} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\log|\,\mathcal{V}_{2k}^{(n)}\,| \leq \frac{1}{n}\log M_n^{(2)} - 2\gamma\right\}\\ & \cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\log|\,\mathcal{V}_{1k}^{(n)}\,|\cdot|\,\mathcal{V}_{2k}^{(n)}\,| \leq \frac{1}{n}\log M_n^{(1)}M_n^{(2)} - 3\gamma\right\}\\ & \left.\cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n)} \leq \frac{1}{n}\log M_n^{(1)}M_n^{(2)} - \gamma\right\}\right\} - (4K+3)e^{-n\gamma} \end{aligned} \tag{5.25}$$

が得られる．□

定理 5.3.1 (逆定理) ε-達成可能なレートペア (R_1, R_2) は

$$(R_1, R_2) \in \bigcup_{(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \in S_{\mathrm{g}}} \mathrm{Cl}\{(R_1, R_2) \mid R_1 \geq 0, R_2 \geq 0, J(R_1, R_2 \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \leq \varepsilon\} \tag{5.26}$$

となる．

証明　レートの組 (R_1, R_2) は ε-達成可能であるものとする．まず上極限の定義より任意の $\gamma > 0$ と十分大きい全ての n に対して，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K} \log|\mathcal{V}_{1k}^{(n)}| + \gamma \;\geq\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K} \log|\mathcal{V}_{1k}^{(n)}|, \tag{5.27}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K} \log|\mathcal{V}_{2k}^{(n)}| + \gamma \;\geq\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K} \log|\mathcal{V}_{2k}^{(n)}| \tag{5.28}$$

となることに注意する．また，(R_1, R_2) は ε-達成可能なので，任意の $\gamma > 0$ と十分大きい全ての n に対して，

$$\frac{1}{n}\log M_n^{(1)} \;\geq\; R_1 - \gamma, \tag{5.29}$$

$$\frac{1}{n}\log M_n^{(2)} \;\geq\; R_2 - \gamma, \tag{5.30}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \varepsilon_n \;\leq\; \varepsilon \tag{5.31}$$

を満たす $(n, M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, \varepsilon_n)$ 符号が存在する．(5.27) $\sim$ (5.31) を満たす十分大きい n を符号長に持つ $(n, M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, \varepsilon_n)$ 符号に対して補題 5.3.1 より，

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n \;\geq\; \Pr\Bigg\{ &\left\{ \frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n, U^n)} + \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\log|\mathcal{V}_{1k}^{(n)}| \leq R_1 - 4\gamma \right\} \\
&\cup \left\{ \frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n, U^n)} + \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\log|\mathcal{V}_{2k}^{(n)}| \leq R_2 - 4\gamma \right\} \\
&\cup \Bigg\{ \frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\log|\mathcal{V}_{1k}^{(n)}| + \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\log|\mathcal{V}_{2k}^{(n)}| \\
&\qquad \leq R_1 + R_2 - 7\gamma \Bigg\} \\
&\cup \left\{ \frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n)} \leq R_1 + R_2 - 3\gamma \right\} \Bigg\} - (4K+3)e^{-n\gamma}
\end{aligned} \tag{5.32}$$

となる．さらにリンク容量の定義，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K} \log|\mathcal{V}_{1k}^{(n)}| \;\leq\; C_{12}, \tag{5.33}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K} \log|\mathcal{V}_{2k}^{(n)}| \;\leq\; C_{21} \tag{5.34}$$

より，

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n \ \ \geq \ \ & \Pr\left\{\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n, U^n)} + C_{12} \leq R_1 - 4\gamma\right\}\right. \\
& \cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n, U^n)} + C_{21} \leq R_2 - 4\gamma\right\} \\
& \cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + C_{12} + C_{21} \leq R_1 + R_2 - 7\gamma\right\} \\
& \left.\cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n)} \leq R_1 + R_2 - 3\gamma\right\}\right\} - (4K+3)e^{-n\gamma} \\
\geq \ \ & \Pr\left\{\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n, U^n)} + C_{12} \leq R_1 - 4\gamma\right\}\right. \\
& \cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n, U^n)} + C_{21} \leq R_2 - 4\gamma\right\} \\
& \cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + C_{12} + C_{21} \leq R_1 + R_2 - 8\gamma\right\} \\
& \left.\cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n)} \leq R_1 + R_2 - 8\gamma\right\}\right\} - (4K+3)e^{-n\gamma} \qquad (5.35)
\end{aligned}$$

となる．両辺 $\limsup_{n\to\infty}$ をとると，式 (5.31) より

$$J(R_1 - 4\gamma, R_2 - 4\gamma \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \leq \limsup_{n\to\infty} \varepsilon_n \ \ \leq \ \ \varepsilon \qquad (5.36)$$

となりレートの組 $(R_1 - 4\gamma, R_2 - 4\gamma)$ は

$$(R_1 - 4\gamma, R_2 - 4\gamma) \in \mathrm{Cl}\left\{(R_1, R_2) \mid J(R_1, R_2 \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \leq \varepsilon\right\} \qquad (5.37)$$

を満たす．$\gamma > 0$ は任意の定数であり，(5.37) の右辺が閉集合なので

$$(R_1, R_2) \in \mathrm{Cl}\left\{(R_1, R_2) \mid J(R_1, R_2 \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \leq \varepsilon\right\} \qquad (5.38)$$

となる．□

第 6 章

通信路の強逆定理

本章では，部分協調可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路の強逆性 [3] が成り立つ必要十分条件の導出を行う．強逆性とは，通信路容量域の外にあるレートペアを持つ任意の符号列は，どのような部分列をとっても平均復号誤り確率が 1 に向かう性質のことである．

6.1　強逆定理

本節では，強逆性と強逆定理に必要な記号の定義と，強逆定理について紹介する．

定義 6.1.1 部分協調可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路 $\mathbf{W} = \{W^n : \mathcal{X}_1^n \times \mathcal{X}_2^n \to \mathcal{Y}^n\}_{n=1}^{\infty}$ の通信路容量域を $C(\mathbf{W})$ とする．$(R_1, R_2) \notin C(\mathbf{W})$ なる任意の (R_1, R_2) とると，

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n^{(i)} \quad \geq \quad R_i \quad (i = 1, 2) \tag{6.1}$$

を満たす全ての $(n, M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, \varepsilon_n)$ 符号に対して

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 1 \tag{6.2}$$

が成立するとき，部分協調可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路 $\mathbf{W}$ は**強逆性**を持つという．

強逆定理を導くために $(X_1^n, X_2^n, U^n) \in S_{\mathrm{g}}$ と通信路 $\mathbf{W}$ の出力を $\mathbf{Y}$ で表し，前章の定義 5.1.1 の関数 $J(R_1, R_2 \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U})$ の代わりに，

$$\begin{aligned}
J^*(R_1, R_2 \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \;=\; \liminf_{n\to\infty} \Pr \Bigg\{ & \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n, U^n)} + C_{12} \le R_1 \right\} \\
& \cup \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n, U^n)} + C_{21} \le R_2 \right\} \\
& \cup \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + C_{12} + C_{21} \le R_1 + R_2 \right\} \\
& \cup \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n)} \le R_1 + R_2 \right\} \Bigg\} \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

なる (R_1, R_2) の関数を定義する．そして，$\mathcal{R}^*(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U})$ を

$$\mathcal{R}^*(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) = \mathrm{Cl}\{(R_1, R_2) \mid R_1 \ge 0, R_2 \ge 0, J^*(R_1, R_2 \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) < 1\} \qquad (6.4)$$

と定義する．すると，強逆性に関する次の定理が成立する．

定理 6.1.1 (強逆定理) 部分協調可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路 $\mathbf{W}$ が強逆性を有するための必要十分条件は，

$$\bigcup_{(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \in S_{\mathrm{g}}} \mathcal{R}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) = \bigcup_{(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \in S_{\mathrm{g}}} \mathcal{R}^*(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \qquad (6.5)$$

が成り立つことである．ただし，$\mathcal{R}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U})$ は定理 3.1.1 で定められた領域とする．□

6.2　十分性の証明

本節では，定理 6.1.1 の式 (6.5) 十分性の証明を行う．つまり，

$$\bigcup_{(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U})\in S_{\rm g}} \mathcal{R}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) = \bigcup_{(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U})\in S_{\rm g}} \mathcal{R}^*(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) \tag{6.6}$$

ならば，$\mathbf{W}$ が強逆性を持つことの証明を行う．

証明　$(R_1,R_2)\notin C(\mathbf{W})$ なる (R_1,R_2) を任意に定め，

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n^{(1)} \ \geq\ R_1, \tag{6.7}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n^{(2)} \ \geq\ R_2 \tag{6.8}$$

なる $(n, M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, \varepsilon_n)$ 符号を考える．通信路容量域 $C(\mathbf{W})$ は閉領域なので，$\gamma>0$ を十分に小さいものとすると，$(R_1-3\gamma,R_2-3\gamma)\notin C(\mathbf{W})$ となる．よって，式 (6.6) より

$$(R_1-3\gamma,R_2-3\gamma)\notin \bigcup_{(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U})\in S_{\rm g}} \mathcal{R}^*(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) \tag{6.9}$$

となるが，これは

$$\begin{aligned}
&J^*(R_1-3\gamma,R_2-3\gamma \mid \mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U})\\
=\ &\liminf_{n\to\infty}\Pr\left\{\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n\mid X_1^n,X_2^n)}{P(Y^n\mid X_1^n,U^n)}+C_{12}\leq R_1-3\gamma\right\}\right.\\
&\qquad\cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n\mid X_1^n,X_2^n)}{P(Y^n\mid X_2^n,U^n)}+C_{21}\leq R_2-3\gamma\right\}\\
&\qquad\cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n\mid X_1^n,X_2^n)}{P(Y^n\mid U^n)}+C_{12}+C_{21}\leq R_1+R_2-6\gamma\right\}\\
&\qquad\left.\cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n\mid X_1^n,X_2^n)}{P(Y^n)}\leq R_1+R_2-6\gamma\right\}\right\}\\
=\ &1
\end{aligned} \tag{6.10}$$

を意味する．一方，(6.7), (6.8) より十分大きい全ての n について，

$$\frac{1}{n}\log M_n^{(1)} \ \geq\ R_1-\gamma, \tag{6.11}$$

$$\frac{1}{n}\log M_n^{(2)} \ \geq\ R_2-\gamma \tag{6.12}$$

となるので，これを補題 5.3.1 の下界式 (5.11) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_n \;\geq\; & \Pr\left\{\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n, U^n)} + C_{12} \leq R_1 - 2\gamma\right\}\right.\\
& \cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n, U^n)} + C_{21} \leq R_2 - 2\gamma\right\}\\
& \cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + C_{12} + C_{21} \leq R_1 + R_2 - 5\gamma\right\}\\
& \left.\cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n)} \leq R_1 + R_2 - 3\gamma\right\}\right\} - (4K+3)e^{-n\gamma} \quad (6.13)\\
\geq\; & \Pr\left\{\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n, U^n)} + C_{12} \leq R_1 - 3\gamma\right\}\right.\\
& \cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n, U^n)} + C_{21} \leq R_2 - 3\gamma\right\}\\
& \cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + C_{12} + C_{21} \leq R_1 + R_2 - 6\gamma\right\}\\
& \left.\cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n, X_2^n)}{P(Y^n)} \leq R_1 + R_2 - 6\gamma\right\}\right\} - (4K+3)e^{-n\gamma} \quad (6.14)
\end{aligned}
$$

となる．よって (6.14) の両辺に $\liminf_{n\to\infty}$ をとると，(6.10) より，

$$
\liminf_{n\to\infty} \varepsilon_n = 1 \tag{6.15}
$$

となる．これは $\mathbf{W}$ が強逆性を持つことを意味する．□

6.3　必要性の証明

本節では，定理 6.1.1 の式 (6.5) の必要性の証明を行う．つまり，部分協調可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路 $\mathbf{W}$ が強逆性を持つならば，

$$\bigcup_{(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U})\in S_{\mathrm{g}}} \mathcal{R}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) = \bigcup_{(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U})\in S_{\mathrm{g}}} \mathcal{R}^*(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) \tag{6.16}$$

となることを証明する．

証明　まずは任意の通信路入力 $(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) \in S_{\mathrm{g}}$ に対して，

$$J^*(R_1,R_2 \mid \mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) \le J(R_1,R_2 \mid \mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) \tag{6.17}$$

が成り立つことより，常に $\mathcal{R}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) \subseteq \mathcal{R}^*(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U})$ は自明に成り立つ．よって，通信路 $\mathbf{W}$ が強逆性を持つとき，$\mathcal{R}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) \supseteq \mathcal{R}^*(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U})$ となることを示す．任意の通信路入力 $(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) \in S_{\mathrm{g}}$ に対して，

$$(R_1,R_2) \in \mathcal{R}^*(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) \tag{6.18}$$

なるレートペア (R_1,R_2) を任意に選ぶ．$\gamma > 0$ を任意の定数とすると，

$$J^*(R_1-\gamma,R_2-\gamma \mid \mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{U}) < 1 \tag{6.19}$$

が成立する．そこで，

$$\begin{aligned} M_n^{(1)} &= e^{n(R_1-2\gamma)}, & (6.20)\\ M_n^{(2)} &= e^{n(R_2-2\gamma)} & (6.21)\end{aligned}$$

とおく．補題 3.3.1 の上界式 (3.60) より，

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n \le\ & \Pr\left\{\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n,X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n,U^n)} + C_{12} \le R_1-\gamma\right\}\right.\\
&\cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n,X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n,U^n)} + C_{21} \le R_2-\gamma\right\}\\
&\cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n,X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + C_{12}+C_{21} \le R_1+R_2-3\gamma\right\}\\
&\left.\cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n,X_2^n)}{P(Y^n)} \le R_1+R_2-3\gamma\right\}\right\} + 7e^{-n\gamma} \qquad (6.22)\\
\le\ & \Pr\left\{\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n,X_2^n)}{P(Y^n \mid X_1^n,U^n)} + C_{12} \le R_1-\gamma\right\}\right.\\
&\cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n,X_2^n)}{P(Y^n \mid X_2^n,U^n)} + C_{21} \le R_2-\gamma\right\}\\
&\cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n,X_2^n)}{P(Y^n \mid U^n)} + C_{12}+C_{21} \le R_1+R_2-2\gamma\right\}\\
&\left.\cup\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n \mid X_1^n,X_2^n)}{P(Y^n)} \le R_1+R_2-2\gamma\right\}\right\} + 7e^{-n\gamma} \qquad (6.23)
\end{aligned}$$

なる符号 $(n, M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, \varepsilon_n)$ が存在する．式 (6.23) の両辺に $\liminf_{n\to\infty}$ をとると，

$$\liminf_{n\to\infty} \varepsilon_n \leq J^*(R_1 - \gamma, R_2 - \gamma \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) < 1 \tag{6.24}$$

となる．ここで (6.19) の関係を用いた．$\mathbf{W}$ が強逆性を持つことから，もし $(R_1 - 2\gamma, R_2 - 2\gamma) \notin C(\mathbf{W})$ ならば，$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 1$ となるので (6.24) に反する．よって，$(R_1 - 2\gamma, R_2 - 2\gamma) \in C(\mathbf{W})$ でなくてはならない．$C(\mathbf{W})$ は閉領域なので，$(R_1, R_2) \in C(\mathbf{W})$ となり，$\mathcal{R}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U}) \supseteq \mathcal{R}^*(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U})$ となることが示される．以上より式 (6.16) の成立が示される．□

第 7 章

まとめ

従来，Willems [1] により部分的協調可能な符号器を有する定常無記憶通信路の通信路容量域が求められている．また，Han [2] によって一般多重アクセス通信路の通信路容量域がスペクトル的手法を用いて導出されている．本論文の 3 章では，スペクトル的手法を用いて，部分的協調可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路の通信路容量域の公式を導出した．また，4 章において，3 章に導出した通信路容量域の公式に対して，通信路の定常無記憶性を仮定した場合，Willems の通信路容量域の表現と一致することを示した．5 章では ε-通信路容量域を導出した．6 章では部分協調可能な符号器を有する一般多重アクセス通信路が強逆性を持つ必要十分条件を示した．

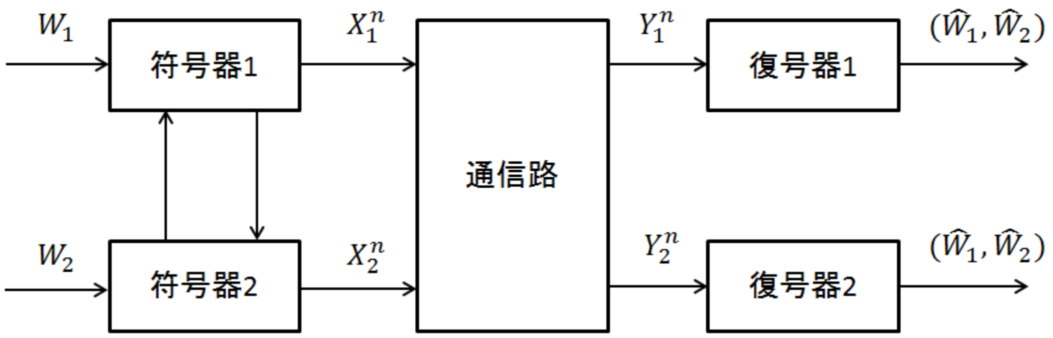

図 7.1: 部分協調可能な符号器を有する Compound 多重アクセス通信路

今後の課題として，図 7.1 のような部分協調可能な符号器を有する一般 Compound 多重アクセス通信路への拡張が考えられる．Compound **多重アクセス通信路**とは，2 つの符号器と 2 つの復号器があるシステムで，二つの符号器に入力されたメッセージを各復号器で両方のメッセージを推定する符号化システムである．各復号器から見たとき多重アクセス通信路のように見えることから Compound 多重アクセス通信路と呼ばれている．すでに Maric ら [4] によって部分協調可能な符号器を有する定常無記憶 Compound 多重

アクセス通信路の通信路容量域は導出されているが，一般通信路の通信路容量域は導出されていない．そこで本研究で示した符号化定理を Compound 多重アクセス通信路に拡張することが今後の課題である．さらに復号器 i $(i = 1, 2)$ が符号器 i からのメッセージを復号する符号化システムは**干渉通信路**と呼ばれるが，符号化定理の干渉通信路への拡張は理論上重要である．

参考文献

[1] F. M. J. Willems, “The discrete memoryless multiple channel with partially cooperating encoders,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 29, no. 3, pp. 441–445, 1983.

[2] T. S. Han, “An information-spectrum approach to capacity theorems for the general multiple-access channel,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 44, no. 7, pp. 2773–2795, 1998.

[3] 韓 太舜, 情報理論における情報スペクトル的方法, 培風館, 1998.

[4] I. Maric, R. D. Yates, and G. Kramer, “Capacity of interference channels with partial transmitter cooperation,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 53, no. 10, pp. 3536–3548, 2007.

[5] M. Wiese, H. Boche, I. Bjelakovic, and V. Jungnickel, “The compound multiple access channel with partially cooperating encoders,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 57, no. 5, pp. 3045–3066, 2011.

[6] D. Slepian and J. K. Wolf “A coding theorem for multiple access channels with correlated sources,” *Bell Syst. Tech. J.,* vol. 52, pp. 1037–1076, Sept. 1973.

[7] A. El Gamal and Y.-H.Kim, *Network Information Theory,* Cambridge University Press, Cambridge, U.K: 2012.

[8] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory, 2nd ed.*, John Wiley & Sons, New Jersy, 2006.

[9] R. Ahlswede, “Multiway communication channels,” In *2nd Int. Symp. Inf. Theory*, Tsahkadsor, 1971; Publising House of the Hungarian Academy of Science, pp. 23–52, 1973

[10] H. Liao, “A coding theorem for multiple access communications,” presented at the *Int. Symp. Inf. Theory*, Asilomar, 1972; Ph. D. dissertation, “Multiple access channels,” Dept. Electrical Engineering, Univ. Hawaii, 1972

謝辞

最後に，本研究を進めるにあたって丁寧な御指導と御鞭撻をいただいた八木秀樹准教授に深く感謝致します．また，研究において多くの有益なアドバイスをしていただいた川端勉教授，竹内啓吾助教授，大濱康匡教授に心より感謝いたします．そして，共に勉学に励んできた研究室の皆様に心より感謝いたします．