

修 士 論 文 の 和 文 要 旨

研究科・専攻	大学院 情報理工 学研究科 情報・通信工学専攻 博士前期課程		
氏 名	市原 臣時	学籍番号	1331010
論 文 題 目	混合整数 2 次錐最適化のポートフォリオ最適化への応用		
<p>要 旨</p> <p>金融工学においてポートフォリオ最適化問題とは、いくつかの投資対象に投資する際、リスクを小さくリターンが大きくなるような、または、一定のリターンを確保しつつリスクを最小化する投資割合（ポートフォリオ）を決定する問題である。ポートフォリオ最適化問題のモデルはいくつか提案されており、その一つとしてトラッキングエラー最小化モデルがある。これは、投資家が目標とするポートフォリオ（ベンチマークと言う）に連動するポートフォリオの構築を目指す。</p> <p>ポートフォリオ最適化問題は、資産の収益率を推定する部分が難しい。そのため、誤ったパラメータで最適化問題を行った結果理論的なパフォーマンスから大きく乖離するようなポートフォリオを構築することがあり、投資家から敬遠されがちである。そこで、最適化のパラメータの不確実性にロバストな最適化を行うことが考えられている。そして、ロバスト・トラッキングエラー最小化問題が半正定値計画問題として定式化できることが知られている。</p> <p>ロバスト・トラッキングエラー最小化問題は、ベンチマークより少ない資産の種類、より少ない投資金額でトラッキングしたいと考えている。もしそうでないなら、ベンチマークと同じポートフォリオを構築すればよい。先行研究では、投資しない資産を指定する必要がある、熟練した投資家の技術を要する。そこで、本論文では、投資対象数の上限を与えると、自動で資産を選定するモデルを提案し、混合整数 2 次錐計画問題として定式化する。また、混合整数 2 次錐計画問題として定式化すると整数制約が原因で解けなくなる可能性があるため、2 次錐制約を多面錐近似により線形制約とする手法、妥当不等式によるカット、多面錐近似と妥当不等式によるカットを組み合わせた手法で定式化し比較実験を行う。</p> <p>実験の結果、投資対象の上限制約を追加することで、最適な資産の組み合わせを選ぶことが出来た。しかし、投資対象数の増加により解けなくなることがわかった。また、2 次錐制約を線形制約に緩和する定式化は、多面錐近似する前より計算時間がかかった。一方、粗めの多面錐近似を行った後に妥当不等式によるカットを追加する手法は、投資上限数が大きい場合、計算時間が短縮できることが分かった。最適化ソルバである Gurobi を用いて 3 つの手法を実験したが、緩和前の問題を最適化ソルバである CPLEX を用いるとより高速に解が得られた。そのため、3 つの手法を CPLEX を用いることでより大規模な問題が解けるようになると考えられる。</p>			

平成 26 年度 修士論文

混合整数 2 次錐最適化のポートフォリオ最適化への応用

指導教員 村松 正和 教授

平成 27 年 1 月 30 日

電気通信大学大学院 情報理工学研究科
情報・通信工学専攻

1331010 市原 臣時

目次

1	はじめに	3
2	2次錐制約に対する多面錐近似	3
2.1	「Tower of variables」による多面錐近似	4
2.2	L_3 に対する多面錐近似	5
3	トラッキングエラー最小化モデル	6
3.1	ロバスト・トラッキングエラー最小化モデル	7
3.2	半正定値計画問題として定式化	8
3.2.1	ロバスト・トラッキングエラー最小化問題の期待値 μ に関する制約	8
3.2.2	ロバスト・トラッキングエラー最小化問題の分散共分散行列 Σ に関する制約	10
3.3	2次錐計画問題として定式化	11
4	投資上限数制約付きロバスト・トラッキングエラー最小化モデル	15
4.1	投資上限数制約付きロバスト・トラッキングエラー最小化問題の多面錐近似	16
4.1.1	「Tower of variables」による多面錐近似	16
4.1.2	「Tower of variables」による多面錐近似の改良	16
4.1.3	妥当不等式によるカットの追加	19
5	数値実験	21
5.1	投資上限数制約の有無による最適値と計算時間	21
6	考察	27
A	補題の証明	29
A.1	補題 3 の証明	29
A.2	補題 4 の証明	29
A.3	補題 5 の証明	30
B	実験で使ったベンチマーク ψ_{10} , ψ_{15} , ψ_{20}	31

1 はじめに

金融工学においてポートフォリオ最適化問題とは、いくつかの投資対象に投資する際、リスクを小さくリターンが大きくなるような、または、一定のリターンを確保しつつリスクを最小化する投資割合（ポートフォリオ）を決定する問題である。代表的なモデルとして、Markowitz による平均分散モデル [1] がある。[1] は、資産の収益率の期待値と分散共分散行列を用い、一定のリターンを保障したリスク最小ポートフォリオ、または、一定のリスクで利益最大ポートフォリオを求める問題を凸 2 次計画問題として定式化できることを示した。ポートフォリオ最適化問題のモデルはいくつか提案されており、その一つとしてトラッキングエラー最小化モデルがある。これは、投資家が目標とするポートフォリオ（ベンチマークと言う）に連動するポートフォリオの構築を目指す。このようなポートフォリオは、ベンチマークとして日経 225 や TOPIX を選ぶことで市場と連動し、市場が上昇傾向ならポートフォリオは上昇しやすく、逆に下落傾向ならポートフォリオは下落しやすくなる。このようなポートフォリオを構築することをパッシブ運用と呼び、投資信託などで活用されている。

平均分散モデルに代表されるポートフォリオ最適化問題は、資産の収益率を推定する部分が難しい。そのため、誤ったパラメータで最適化問題を行った結果、理論的なパフォーマンスから大きく乖離するようなポートフォリオを構築することがあり、投資家から敬遠されがちである。そこで、Ben-tal ら [2] によって提案された、最適化のパラメータの不確実性にロバストな最適化を行うことが考えられている。

Lobo[3] は、ロバスト・トラッキングエラー最小化問題が半正定値計画問題として定式化できることを示した。さらに、稲場ら [5] はロバスト・トラッキングエラー最小化問題が 2 次錐計画問題として定式化できることを示し、より効率よく解けることを示した。

ロバスト・トラッキングエラー最小化問題は、ベンチマークより少ない資産の種類、より少ない投資金額でトラッキングしたいと考えている。もしそうでないなら、ベンチマークと同じポートフォリオを構築すればよい。先行研究 [3], [5] では、投資しない資産を指定する必要がある、熟練した投資家の技術を要する。そこで、本論文では、投資対象数の上限を与えると、自動で資産を選定するモデルを提案し、混合整数 2 次錐計画問題として定式化する。また、混合整数 2 次錐計画問題として定式化すると整数制約が原因で解けなくなる可能性があるため、Ben-tal ら [6] により提案された 2 次錐制約を多面錐近似により線形制約とする手法、妥当不等式によるカットを追加する手法で定式化し比較実験を行う。

2 2 次錐制約に対する多面錐近似

Ben-tal ら [6] は、変数が $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ である 2 次錐制約

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x} - d \quad (1)$$

を多面体によって近似することを提案した。ただし、 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{r \times k}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$, $d \in \mathbb{R}$ である。また、本論文では $\|\cdot\|$ をユークリッドノルムとする。 $\epsilon > 0$ とし、2 次錐集合 \mathbf{L}_{k+1}

と線形写像 Π_{k+1} を次のように定義する.

$$\mathbf{L}_{k+1} = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \|\mathbf{y}\| \leq t \right\}$$

$$\Pi_{k+1}(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}) : \mathbb{R}^{k+1+p} \rightarrow \mathbb{R}^q$$

このとき, [6] では Π_{k+1} が次の二つの条件

- (i) $\begin{bmatrix} t \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \in \mathbf{L}_{k+1} \implies \exists \mathbf{u} \in \mathbb{R}^p \text{ s.t. } \Pi_{k+1}(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}) \geq \mathbf{0}$
- (ii) $\begin{bmatrix} t \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1}$ としたとき, $\exists \mathbf{u} \in \mathbb{R}^p \text{ s.t. } \Pi_{k+1}(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}) \geq \mathbf{0} \implies \|\mathbf{y}\| \leq (1 + \epsilon)t$

を満たすとき \mathbf{L}_{k+1} の多面体 ϵ -近似と定義した. 多面体 ϵ -近似 Π_{k+1} を用いると (1) は

$$\begin{aligned} \Pi_{k+1}(\mathbf{c}^T \mathbf{x} - d, A\mathbf{x} - \mathbf{b}, \mathbf{u}) &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{u} &\in \mathbb{R}^p \end{aligned} \quad (2)$$

と線形制約として近似できる. (2) は

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| \leq (1 + \epsilon)(\mathbf{c}^T \mathbf{x} - d) \quad (3)$$

と等価であり, ϵ を十分小さくとれば, (1) の良い近似となる.

2.1 「Tower of variables」による多面錐近似

Ben-tal ら [6] は, 2 次錐制約に対する多面体 ϵ -近似 Π_{k+1} を具体的に与えた. $\epsilon \in (0, 1]$, $k \in \mathbb{N}$ が与えられたとする. ただし, 一般性を失わず, $k = 2^\theta$ ($\theta \in \mathbb{N}$) とする. $k+1$ 変数の 2 次錐制約

$$\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_k^2} \leq t \quad (4)$$

を考える. この $k+1$ 次元 2 次錐制約を複数の 3 次元 2 次錐制約に書き直し, 各 3 次元 2 次錐制約を近似する. y_1, y_2, \dots, y_k, t を世代 0 の変数と呼び, $(y_1, y_2), (y_3, y_4), \dots, (y_{k-1}, y_k)$ のペアを考え, 各ペアに対し変数を追加し世代 1 と呼ぶ. 次に, 世代 1 の変数に対して世代 0 と同様にペアにして, 各ペアに対し変数を追加し世代 2 と呼ぶ. この操作を世代 θ の変数を追加するまで繰り返す. ここで, 世代 l の i 番目の変数を y_i^l とし, 追加されたすべての変数を「tower of variables」と呼ぶことにする. このとき, $(y_1, y_2, \dots, y_k) = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_k^0)$ であり, y_1^0 を t とおけば, (4) は

$$\sqrt{(y_{2i-1}^{l-1})^2 + (y_{2i}^{l-1})^2} \leq y_i^l, \quad i = 1, 2, \dots, 2^{\theta-l}, \quad l = 1, 2, \dots, \theta$$

と書ける.

例 1 2 次錐制約

$$\sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2 + (y_4)^2 + (y_5)^2 + (y_6)^2 + (y_7)^2 + (y_8)^2} \leq t$$

について「tower of variables」を用いて書き直せば

$$y_1^0 = y_1, y_2^0 = y_2, y_3^0 = y_3, y_4^0 = y_4, y_5^0 = y_5, y_6^0 = y_6, y_7^0 = y_7, y_8^0 = y_8$$

$$\sqrt{(y_1^0)^2 + (y_2^0)^2} \leq y_1^1, \sqrt{(y_3^0)^2 + (y_4^0)^2} \leq y_2^1, \sqrt{(y_5^0)^2 + (y_6^0)^2} \leq y_3^1, \sqrt{(y_7^0)^2 + (y_8^0)^2} \leq y_4^1$$

$$\sqrt{(y_1^1)^2 + (y_2^1)^2} \leq y_1^2, \sqrt{(y_3^1)^2 + (y_4^1)^2} \leq y_2^2$$

$$\sqrt{(y_1^2)^2 + (y_2^2)^2} \leq y_1^3 = t$$

「tower of variables」により, $2k - 1$ 個の制約に変換された 3 次元 2 次錐制約について多面体 ϵ_l -近似

$$\Pi_3^l(y_i^l, y_{2i-1}^{l-1}, y_{2i}^{l-1}, \mathbf{u}^l) \geq 0, i = 1, 2, \dots, 2^{\theta-l}, l = 1, 2, \dots, \theta$$

を考える. このとき, $\mathbf{y} = [y_1^0, y_2^0, \dots, y_k^0]^T$, $t = y_\theta^0$ とし, \mathbf{u} を \mathbf{u}_i^l, y_i^l ($l = 1, 2, \dots, \theta$) で構成すると, (4) の多面体 ϵ -近似 $\Pi_{k+1}(t, \mathbf{y}, \mathbf{u})$ の ϵ は

$$\epsilon = \prod_{l=1}^{\theta} (1 + \epsilon_l) - 1$$

となる.

2.2 L_3 に対する多面錐近似

次に, $\alpha \in \mathbb{N}$ が与えられ, 変数 ξ_j, ζ_j ($j = 0, 1, \dots, \alpha$) としたとき, $\mathbf{L}_3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq x_1 \right\}$ に対して,

$$\begin{aligned} \xi_0 - |x_2| &\geq 0 \\ \zeta_0 - |x_3| &\geq 0 \\ \xi_j - \cos\left(\frac{\pi}{2^{j+1}}\right) \xi_{j-1} - \sin\left(\frac{\pi}{2^{j+1}}\right) \zeta_{j-1} &= 0, j = 1, \dots, \alpha \\ \zeta_j - \left| -\sin\left(\frac{\pi}{2^{j+1}}\right) \xi_{j-1} + \cos\left(\frac{\pi}{2^{j+1}}\right) \zeta_{j-1} \right| &\geq 0, j = 1, \dots, \alpha \\ x_1 - \xi_\alpha &\geq 0 \\ \tan\left(\frac{\pi}{2^{\alpha+1}}\right) \xi_\alpha - \zeta_\alpha &\geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

を考える. このとき, \mathbf{u} を ξ_j, ζ_j ($j = 0, 1, \dots, \alpha$) を集めたものとして, 上式をまとめた線形写像を $\Pi^{(\alpha)}(x_1, x_2, x_3, \mathbf{u}) \geq 0$ とする.

命題 1 [6] $\Pi^{(\alpha)}$ は L_3 の多面体 $\delta(\alpha)$ -近似である。ただし、

$$\delta(\alpha) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{\alpha+1}}\right)} - 1$$

である。また、 \cos をテイラー展開すれば、

$$\delta(\alpha) = O\left(\frac{1}{4^\alpha}\right)$$

となる。

以上の結果から、各 Π_3^l を (5) にもとづき各世代を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\theta \in \mathbb{N}$ で多面体近似すると、(4) の多面体 ϵ -近似 $\Pi_{k+1}(t, \mathbf{y}, \mathbf{u})$ を構成する不等式は

$$\begin{aligned} \xi_0^{l,i} - |y_{2i-1}^{l-1}| &\geq 0 \\ \zeta_0^{l,i} - |y_{2i}^{l-1}| &\geq 0 \\ \xi_j^{l,i} - \cos\left(\frac{\pi}{2^{j+1}}\right) \xi_{j-1}^{l,i} - \sin\left(\frac{\pi}{2^{j+1}}\right) \zeta_{j-1}^{l,i} &= 0, j = 1, \dots, \alpha \\ \zeta_j^{l,i} - \left| -\sin\left(\frac{\pi}{2^{j+1}}\right) \xi_{j-1}^{l,i} + \cos\left(\frac{\pi}{2^{j+1}}\right) \zeta_{j-1}^{l,i} \right| &\geq 0, j = 1, \dots, \alpha \\ y_i^l - \xi_{\alpha_l}^{l,i} &\geq 0 \\ \tan\left(\frac{\pi}{2^{\alpha+1}}\right) \xi_{\alpha_l}^{l,i} - \zeta_{\alpha_l}^{l,i} &\geq 0 \\ i = 1, 2, \dots, 2^{\theta-l}, l = 1, 2, \dots, \theta \end{aligned} \quad (6)$$

と与えられ、 ϵ は

$$\epsilon = \prod_{l=1}^{\theta} (1 + \delta(\alpha_l)) - 1 = \prod_{l=1}^{\theta} \left(1 + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{\alpha_l+1}}\right)} - 1 \right) - 1 = O\left(\frac{1}{4^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\theta}}\right)$$

である。ここで、 Π_{k+1} の \mathbf{u} の次元数を p_{k+1} 、 Π_{k+1} を構成する不等式の数 q_{k+1} とする。精度よく近似するために ϵ を小さくしようとすれば、 p と q が大きくなるが、次の定理により、 ϵ 、 p 、 q について次の関係が得られている。

定理 1 [6] Tower of variables による多面体近似は、任意の k 、任意の $\epsilon \in (0, 1]$ に対して、 L_{k+1} の多面体 ϵ -近似について次が成り立つ。

$$p + q \leq O(1)k \ln \frac{2}{\epsilon}$$

3 トラッキングエラー最小化モデル

投資対象の資産が n 個あるとし、各資産の投資終了後の利回りを $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T \in \mathbb{R}^n$ とする。 \mathbf{r} を確率変数とみなし、期待値を $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ 、分散共分散行列を $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ とする。分散共分散行列の定義から、

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}[(\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu})^T] = \mathbb{E}[\mathbf{r}\mathbf{r}^T] - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T \quad (7)$$

である．投資する割合をポートフォリオ $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]^T \in \mathbb{R}^n$ とし， $\sum_{i=1}^n \phi_i = 1$ となるように構成する．ベンチマークの投資割合は $\psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n]^T \in \mathbb{R}^n$ で与えられる．トラッキングエラーは ϕ で得られる利益と ψ で得られる利益の差の二乗の期待値で定義するので，

$$\begin{aligned} E[(\mathbf{r}^T(\phi - \psi))^2] &= E[\mathbf{r}^T(\phi - \psi)\mathbf{r}^T(\phi - \psi)] \\ &= E[(\phi - \psi)^T \mathbf{r} \mathbf{r}^T (\phi - \psi)] \\ &= (\phi - \psi)^T E[\mathbf{r} \mathbf{r}^T] (\phi - \psi) \\ &= (\phi - \psi)^T (\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T + \boldsymbol{\Sigma}) (\phi - \psi) \quad (\because (7)) \end{aligned}$$

となる．トラッキングエラー最小化モデルの制約として，ロングポジションのみ $\phi_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，ポートフォリオを $\sum_{i=1}^n \phi_i = 1$ となるように構築，実務上の制約 $A\phi \leq \mathbf{b}$ を考える．ただし， $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ， $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ である．よって，トラッキングエラー最小化モデルは

$$\begin{aligned} \min \quad & (\phi - \psi)^T (\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T + \boldsymbol{\Sigma}) (\phi - \psi) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n \phi_i = 1 \\ & A\phi \leq \mathbf{b} \\ & \phi_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \tag{8}$$

と定式化することが出来る． $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\Sigma}$ を正確に予測できる場合，(8) を解くことで最適なポートフォリオ ϕ が得られる．しかし，各資産の利回りの期待値や分散共分散行列を正確に見積もることは難しい．また，理論的な利回りの期待値と実際の利回りが少しでも異なると，パフォーマンスが大きく変化することがあり，実務家は敬遠されがちである．

3.1 ロバスト・トラッキングエラー最小化モデル

Ben-tal と Nemirovski[2] は，データに誤差のある状況においても適用可能な最適化モデルを考えるロバスト最適化を提案した．Lobo ら [3] はこの考えを (8) に適用し，各資産の利回りの期待値 $\boldsymbol{\mu}$ と分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ が，不確実性集合 $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ と $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ に含まれると仮定し，(8) を解くことを考えた．つまり，

$$\begin{aligned} \min \quad & \max_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{M}, \boldsymbol{\Sigma} \in \mathcal{S}} (\phi - \psi)^T (\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T + \boldsymbol{\Sigma}) (\phi - \psi) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n \phi_i = 1 \\ & A\phi \leq \mathbf{b} \\ & \phi_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \tag{9}$$

を解くことを考える。(9)は

$$\begin{aligned}
& \text{mini} \quad \nu + \lambda \\
& \text{s.t.} \quad \max_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{M}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} \leq \lambda \\
& \quad \max_{\boldsymbol{\Sigma} \in \mathcal{S}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\Sigma} \tilde{\boldsymbol{\phi}} \leq \nu \\
& \quad \sum_{i=1}^n \phi_i = 1 \\
& \quad A\boldsymbol{\phi} \leq \mathbf{b} \\
& \quad \phi_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
& \quad \tilde{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}
\end{aligned} \tag{10}$$

と等価な問題である。この問題をロバスト・トラッキングエラー最小化問題と呼ぶ。

3.2 半正定値計画問題として定式化

3.2.1 ロバスト・トラッキングエラー最小化問題の期待値 $\boldsymbol{\mu}$ に関する制約

Lobo[3]によれば、利回りの期待値 $\boldsymbol{\mu}$ が楕円体集合に入ると仮定すれば、(10)の制約

$$\max_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{M}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} \leq \lambda \tag{11}$$

は、半正定値制約となる。[3]では不確実性集合 \mathcal{M} を、確率変数である利回り \mathbf{r} の期待値 $\boldsymbol{\mu}_0$ と正定値対称行列 $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を用いて

$$\mathcal{M} := \{\boldsymbol{\mu} | (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \mathbf{G} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) \leq 1\} \tag{12}$$

と定義している。(11)を言い換えると、

$$(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \mathbf{G} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) \leq 1 \text{ を満たすすべての } \boldsymbol{\mu} \text{ について } \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\mu}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu} \leq \lambda \tag{13}$$

である。ここで

$$\begin{aligned}
F_1(\boldsymbol{\mu}) &= -(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \mathbf{G} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) + 1 \\
F_0(\boldsymbol{\mu}) &= -\boldsymbol{\mu}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu} + \lambda
\end{aligned}$$

と置けば、(13)は

$$F_1(\boldsymbol{\mu}) \geq 0 \text{ を満たすすべての } \boldsymbol{\mu} \text{ について } F_0(\boldsymbol{\mu}) \geq 0 \tag{14}$$

となる。以降、本論文では $\mathbf{A} \succeq 0$ は \mathbf{A} が半正定値対称行列、 $\mathbf{A} \succ 0$ は \mathbf{A} が正定値対称行列であることを表す。

補題 1 (\mathcal{S} -procedure) ([4], [7], [8]) $F_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}_i \mathbf{x} + 2\mathbf{b}_i^T \mathbf{x} + c_i (i = 0, 1)$ を $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に関する 2 次関数とすれば次が成り立つ.

$$\exists \tau \geq 0 \quad s.t. \quad \begin{bmatrix} c_0 & \mathbf{b}_0^T \\ \mathbf{b}_0 & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix} - \tau \begin{bmatrix} c_1 & \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \succeq 0$$

$\iff F_1(\mathbf{x}_0) > 0$ を満たすすべての \mathbf{x}_0 について $F_0(\mathbf{x}_0) \geq 0$ となる

補題 1 より, (14) の必要十分条件は

$$\begin{aligned} \exists \tau \geq 0 \quad s.t. \quad & \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & -\tilde{\phi}\tilde{\phi}^T \end{bmatrix} - \tau \begin{bmatrix} 1 - \boldsymbol{\mu}_0^T \mathbf{G} \boldsymbol{\mu}_0 & \boldsymbol{\mu}_0^T \mathbf{G} \\ \mathbf{G} \boldsymbol{\mu}_0 & -\mathbf{G} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \tau \boldsymbol{\mu}_0^T \mathbf{G} \boldsymbol{\mu}_0 - \tau + \lambda & -\tau \boldsymbol{\mu}_0^T \mathbf{G} \\ -\tau \mathbf{G} \boldsymbol{\mu}_0 & \tau \mathbf{G} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\phi}^T \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

となる. ここで,

$$S = \begin{bmatrix} \tau \boldsymbol{\mu}_0^T \mathbf{G} \boldsymbol{\mu}_0 - \tau + \lambda & -\tau \boldsymbol{\mu}_0^T \mathbf{G} \\ -\tau \mathbf{G} \boldsymbol{\mu}_0 & \tau \mathbf{G} \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0, \tilde{\phi}^T \end{bmatrix}, V = 1$$

とおく.

補題 2 (Schur complement) ([3], [9]) 対称行列

$$U = \begin{bmatrix} V & W \\ W^T & S \end{bmatrix}$$

において V が正則のとき,

$$U \succeq 0 \iff V \succ 0, S - W^T V^{-1} W \succeq 0.$$

補題 2 を適用すれば (15) は

$$\exists \tau \geq 0 \quad s.t. \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{\phi}^T \\ 0 & \tau \boldsymbol{\mu}_0^T \mathbf{G} \boldsymbol{\mu}_0 - \tau + \lambda & -\tau \boldsymbol{\mu}_0^T \mathbf{G} \\ \tilde{\phi} & -\tau \mathbf{G} \boldsymbol{\mu}_0 & \tau \mathbf{G} \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (16)$$

となり, (11) を半正定値制約として表現できる.

3.2.2 ロバスト・トラッキングエラー最小化問題の分散共分散行列 Σ に関する制約

Goldfarb と Iyenger[4] は (10) の分散共分散行列に関する制約

$$\max_{\Sigma \in \mathcal{S}} \tilde{\phi}^T \Sigma \tilde{\phi} \leq \nu \quad (17)$$

を半正定値行列として表現した．[4] では，分散共分散行列の不確実性集合を，確率変数である利回り r の分散共分散行列 Σ_0 と不確実パラメータ $\eta \geq 0$ を用いて

$$\mathcal{S} := \{\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n} | \Sigma^{-1} = \Sigma_0 + \Delta \succeq 0, \Delta = \Delta^T, \|\Sigma_0^{1/2} \Delta \Sigma_0^{1/2}\| \leq \eta\} \quad (18)$$

と定義した．ただし， $\|\mathbf{A}\| = \max_i |\lambda_i(\mathbf{A})|$ である．このとき (17) は

$$\left\| \begin{bmatrix} 2\Sigma_0^{1/2} \tilde{\phi} \\ (1-\eta)\nu - 1 \end{bmatrix} \right\| \leq (1-\eta)\nu + 1 \quad (19)$$

となることが示されている [4]．ここで，

$$S = (1-\eta)\nu + 1, W = \begin{bmatrix} 2\Sigma_0^{1/2} \tilde{\phi} \\ (1-\eta)\nu - 1 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} (1-\eta)\nu + 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (1-\eta)\nu + 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (1-\eta)\nu + 1 \end{bmatrix}$$

とおけば，(19) は

$$S - W^T V^{-1} W \geq 0$$

と書ける．よって，(19) は補題 2 を適用すれば，

$$\begin{bmatrix} (1-\eta)\nu + 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & (1-\eta)\nu + 1 & 0 & \cdots & 0 & 2\Sigma_0^{1/2} \tilde{\phi} \\ 0 & 0 & & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (1-\eta)\nu + 1 & (1-\eta)\nu - 1 \\ & 2\tilde{\phi}^T \Sigma_0^{1/2} & & & (1-\eta)\nu - 1 & (1-\eta)\nu + 1 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (20)$$

となり，(17) は半正定値制約として表せる．

以上のことから、不確実性集合を (12) と (17) とすれば (9) は

$$\begin{aligned}
& \min \quad \nu + \lambda \\
& \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{\phi}^T \\ 0 & \tau \mu_0^T \mathbf{G} \mu_0 - \tau + \lambda & -\tau \mu_0^T \mathbf{G} \\ \tilde{\phi} & -\tau \mathbf{G} \mu_0 & \tau \mathbf{G} \end{bmatrix} \succeq 0 \\
& \quad \tau \geq 0 \\
& \quad \begin{bmatrix} (1-\eta)\nu + 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & (1-\eta)\nu + 1 & 0 & \cdots & 0 & 2\Sigma_0^{1/2} \tilde{\phi} \\ 0 & 0 & & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (1-\eta)\nu + 1 & (1-\eta)\nu - 1 \\ & 2\tilde{\phi}^T \Sigma_0^{1/2} & & & (1-\eta)\nu - 1 & (1-\eta)\nu + 1 \end{bmatrix} \succeq 0 \\
& \quad A\phi \leq \mathbf{b} \\
& \quad \phi_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
& \quad \tilde{\phi} = \phi - \psi
\end{aligned} \tag{21}$$

となり、半正定値計画問題として定式化できる。

3.3 2次錐計画問題として定式化

稲場ら [5] は、(16) を 2 次錐制約に帰着できることを示し、(9) を 2 次錐計画問題として定式化した。 \mathbf{G} は正定値対称行列だから、直交行列 M により $M\mathbf{G}M^T = \Lambda$ と対角化可能である。ここで Λ は対角要素に \mathbf{G} の固有値を持つ対角行列である。 $\Lambda^{1/2}$ を Λ の各要素の平方根をとったものとすれば、 $\Lambda = \Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}$ となる。以上のことから、 $\mathbf{G} = M^T\Lambda M = M^T\Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}M = M^T\Lambda^{1/2}MM^T\Lambda^{1/2}M$ となる。ここで、 $\mathbf{G}^{1/2} = M^T\Lambda^{1/2}M$ とおけば、 $\mathbf{G} = \mathbf{G}^{1/2}\mathbf{G}^{1/2}$ となる。また、 \mathbf{G} の固有値が 0 より大きいため、 $\det(\mathbf{G}) \neq 0$ となり \mathbf{G}^{-1} が存在する。そのため、 $M\mathbf{G}M^T = \Lambda$ を変形し $\mathbf{G}^{-1} = M^T\Lambda^{-1}M$ となり、上の議論と同

様に $\mathbf{G}^{-1/2}$ が存在する. したがって, (16) の半正定値制約は,

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{\phi}^T \\ 0 & \tau \mu_0^T \mathbf{G} \mu_0 - \tau + \lambda & -\tau \mu_0^T \mathbf{G} \\ \tilde{\phi} & -\tau \mathbf{G} \mu_0 & \tau \mathbf{G} \end{bmatrix} \succeq 0 \\
\iff & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}^T \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{\phi}^T \\ 0 & \tau \mu_0^T \mathbf{G} \mu_0 - \tau + \lambda & -\tau \mu_0^T \mathbf{G} \\ \tilde{\phi} & -\tau \mathbf{G} \mu_0 & \tau \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}^T \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}^{-1/2} \end{bmatrix} \succeq 0 \\
\iff & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}^T \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{\phi}^T \mathbf{G}^{-1/2} \\ 0 & \tau \mu_0^T \mathbf{G} \mu_0 - \tau + \lambda & -\tau \mu_0^T \mathbf{G}^{1/2} \\ \tilde{\phi} & -\tau \mathbf{G} \mu_0 & \tau \mathbf{G}^{1/2} \end{bmatrix} \succeq 0 \\
\iff & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{\phi} \mathbf{G}^{-1/2} \\ 0 & \tau \mu_0^T \mathbf{G} \mu_0 - \tau + \lambda & -\tau \mu_0^T \mathbf{G}^{1/2} \\ \mathbf{G}^{-1/2} \tilde{\phi} & -\tau \mathbf{G}^{1/2} \mu_0 & \tau \mathbf{I} \end{bmatrix} \succeq 0
\end{aligned} \tag{22}$$

と書くことが出来る. $\tau = 0$ のとき, (22) の行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{\phi} \mathbf{G}^{-1/2} \\ 0 & \lambda & 0 \\ \mathbf{G}^{-1/2} \tilde{\phi} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり, (22) の必要十分条件は

$$\lambda \geq 0, \tilde{\phi} = \mathbf{0} \tag{23}$$

となる. $\tau > 0$ のとき,

$$S = \tau \mathbf{I}, W = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}^T \mathbf{G}^{-1/2} \\ -\tau \mu_0^T \mathbf{G}^{1/2} \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \mu_0^T \mathbf{G} \mu_0 - \tau + \lambda \end{bmatrix}$$

とおけば, (22) は補題 2 より

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \mu_0^T \mathbf{G} \mu_0 - \tau + \lambda \end{bmatrix} - \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}^T \mathbf{G}^{-1/2} \\ -\tau \mu_0^T \mathbf{G}^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{1/2} \tilde{\phi} & -\tau \mathbf{G}^{1/2} \mu_0 \end{bmatrix} \succeq 0 \\
\iff & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \mu_0^T \mathbf{G} \mu_0 - \tau + \lambda \end{bmatrix} - \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}^T \mathbf{G}^{-1} \tilde{\phi} & -\tau \tilde{\phi}^T \mu_0 \\ -\tau \mu_0^T \tilde{\phi} & \tau^2 \mu_0^T \mathbf{G} \mu_0 \end{bmatrix} \succeq 0 \\
\iff & \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\tau} \tilde{\phi}^T \mathbf{G}^{-1} \tilde{\phi} & \tilde{\phi}^T \mu_0 \\ \mu_0^T \tilde{\phi} & -\tau + \lambda \end{bmatrix} \succeq 0 \\
\iff & \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\tau} \mathbf{w}^T \mathbf{w} & z \\ z & -\tau + \lambda \end{bmatrix} \succeq 0
\end{aligned} \tag{24}$$

と書ける. ここで, $\mathbf{w} = \mathbf{G}^{-1/2} \tilde{\phi}$, $z = \mu_0^T \tilde{\phi}$ と置いた.

補題 3 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とすれば次が成り立つ.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \succeq 0 \iff a \geq 0, c \geq 0, ac - b^2 \geq 0$$

(証明は付録参照)

(24) に補題 3 を適用すれば,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\tau} \mathbf{w}^T \mathbf{w} &\geq 0 \\ -\tau + \lambda &\geq 0 \\ (1 - \frac{1}{\tau} \mathbf{w}^T \mathbf{w})(-\tau + \lambda) - z^2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{25}$$

となる. ここで, 変数 $x, y \in \mathbb{R}$ を導入して,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\tau} \mathbf{w}^T \mathbf{w} &\geq x \\ -\tau + \lambda &= y \\ xy - z^2 &\geq 0 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned} \tag{26}$$

と置き換えても制約式としては同じである. (26) を整理し,

$$\begin{aligned} \tau(1 - x) &\geq \mathbf{w}^T \mathbf{w} \\ y &= -\tau + \lambda \\ xy &\geq z^2 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned} \tag{27}$$

とする. いま, τ の値で場合わけをしたが, (27) は $\tau = 0$ のときの (23) と同値なため, 以降, $\tau \geq 0$ とし, (27) を考える.

補題 4 $x, y \geq 0, z \in \mathbb{R}^n$ とすれば, 次が成り立つ.

$$z^T z \leq xy \iff \left\| \begin{bmatrix} 2z \\ x - y \end{bmatrix} \right\| \leq x + y$$

(証明は付録参照)

補題 4 より, (27) は

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{bmatrix} 2\mathbf{w} \\ \tau + x - 1 \end{bmatrix} \right\| &\leq \tau - x + 1 \\
y &= -\tau + \lambda \\
\left\| \begin{bmatrix} 2z \\ x - y \end{bmatrix} \right\| &\leq x + y \\
x &\geq 0 \\
y &\geq 0
\end{aligned} \tag{28}$$

と書くことができ, 2 次錐制約となる.

以上のことから, 各資産の利回りの \mathbf{r} の期待値 \mathcal{M} と分散共分散行列 \mathcal{S} の不確実性集合を (12) と (18) とすれば, ロバストなトラッキングエラー最小化問題 (10) は次の 2 次錐計画問題となる.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \nu + \lambda \\
\text{s.t.} \quad & \left\| \begin{bmatrix} 2\mathbf{w} \\ \tau + x - 1 \end{bmatrix} \right\| \leq \tau - x + 1 \\
& y = -\tau + \lambda \\
& \left\| \begin{bmatrix} 2z \\ x - y \end{bmatrix} \right\| \leq x + y \\
& x \geq 0 \\
& y \geq 0 \\
& \tau \geq 0 \\
& \mathbf{w} = \mathbf{G}^{-1/2} \tilde{\boldsymbol{\phi}} \\
& z = \boldsymbol{\mu}_0^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} \\
& \left\| \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{\Sigma}_0^{1/2} \tilde{\boldsymbol{\phi}} \\ (1 - \eta)\nu - 1 \end{bmatrix} \right\| \leq (1 - \eta)\nu + 1 \\
& \sum_{i=1}^n \phi_i = 1 \\
& A\boldsymbol{\phi} \leq \mathbf{b} \\
& \phi_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, n) \\
& \tilde{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}
\end{aligned} \tag{29}$$

4 投資上限数制約付きロバスト・トラッキングエラー最小化モデル

本論文では, (29) に投資上限数制約の追加を考える. 投資上限数 $U \in \{1, 2, \dots, n\}$ と 2 値変数 $b_i \in \{0, 1\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を導入すれば, 投資上限数制約は

$$\begin{aligned} b_i &\geq \phi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^n b_i &\leq U \end{aligned} \quad (30)$$

と書ける. なぜなら, b_i が 0 のときは ϕ_i が 0 になり, b_i が 1 のときは ϕ_i が 0 から 1 の値を取れるため b_i が資産 i に投資するかどうかを決定する変数となり, b_i の総和を U 以下とする制約から, 投資対象数が U 以下になるからである. 以上のことから, 投資上限数制約付きロバスト・トラッキングエラー最小化モデルは (29) と (30) より

$$\begin{aligned} \min \quad & \nu + \lambda \\ \text{s.t.} \quad & \left\| \begin{bmatrix} 2\mathbf{w} \\ \tau + x - 1 \end{bmatrix} \right\| \leq \tau - x + 1 \quad (a) \\ & y = -\tau + \lambda \\ & \left\| \begin{bmatrix} 2z \\ x - y \end{bmatrix} \right\| \leq x + y \quad (b) \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \\ & \tau \geq 0 \\ & \mathbf{w} = \mathbf{G}^{-1/2} \tilde{\boldsymbol{\phi}} \\ & z = \boldsymbol{\mu}_0^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} \\ & \left\| \begin{bmatrix} 2\Sigma_0^{1/2} \tilde{\boldsymbol{\phi}} \\ (1 - \eta)\nu - 1 \end{bmatrix} \right\| \leq (1 - \eta)\nu + 1 \quad (c) \\ & \sum_{i=1}^n \phi_i = 1 \\ & A\boldsymbol{\phi} \leq \mathbf{b} \\ & \phi_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ & \tilde{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi} \\ & b_i \geq \phi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ & \sum_{i=1}^n b_i \leq U \end{aligned} \quad (31)$$

と定式化できる. (31) を投資上限数制約付きロバスト・トラッキングエラー最小化問題と呼ぶ. 投資上限数制約 (30) は線形制約と整数変数を含むため, (31) は混合整数 2 次錐計画問題となる.

4.1 投資上限数制約付きロバスト・トラッキングエラー最小化問題の多面錐近似

2次錐計画問題は、主双対内点法により効率よく解けることが知られている。さらに、多くの混合整数計画問題は、分枝限定法により効率よく解けることが知られている。そのため、混合整数2次錐計画問題は、それなりの問題サイズでも解けることが予想される。しかし、問題の構造によっては、計算時間の都合で解けないこともある。そこで、2章で紹介した Ben-tal ら [6] による多面錐近似を考える。

4.1.1 「Tower of variables」による多面錐近似

近似パラメータ $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c$ とし, (31.a), (31.b), (31.c) を多面体 ϵ -近似 $\Pi_{n+2}^a(\tau - x + 1, 2\mathbf{w}, \tau + x - 1)$, $\Pi_2^b(x + y, 2z, x - y)$, $\Pi_{n+2}^c((1 - \eta)\nu + 1, \Sigma_0^{1/2}\tilde{\phi}, (1 - \eta)\nu - 1)$ により線形制約として近似すると, 投資上限数制約付きロバスト・トラッキングエラー最小化問題 (31) は

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \nu + \lambda \\
 \text{s.t.} \quad & \Pi_{n+2}^a(\tau - x + 1, 2\mathbf{w}, \tau + x - 1) \geq \mathbf{0} \\
 & y = -\tau + \lambda \\
 & \Pi_2^b(x + y, 2z, x - y) \geq \mathbf{0} \\
 & x \geq 0 \\
 & y \geq 0 \\
 & \tau \geq 0 \\
 & \mathbf{w} = \mathbf{G}^{-1/2}\tilde{\phi} \\
 & z = \boldsymbol{\mu}_0^T \tilde{\phi} \\
 & \Pi_{n+2}^c((1 - \eta)\nu + 1, \Sigma_0^{1/2}\tilde{\phi}, (1 - \eta)\nu - 1) \geq \mathbf{0} \\
 & A\phi \leq \mathbf{b} \\
 & \phi_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
 & \tilde{\phi} = \phi - \psi \\
 & b_i \geq \phi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
 & \sum_{i=1}^n b_i \leq U
 \end{aligned} \tag{32}$$

となる。

4.1.2 「Tower of variables」による多面錐近似の改良

(32) は精度よく解くことを考えると、膨大な数の制約式を必要とする。しかし、最適解を求めるために必要の無い制約式が存在すると考えられる。そこで、粗めに多面錐近似した問題を解き、その結果から多面錐近似する前の (31) の2次錐制約に違反する解を取り除く制約を追加する方法をとる。

補題 5 2次錐集合

$$K_{n+1} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\tilde{\mathbf{x}}\| \leq x_0 \right\}$$

と $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して次が成り立つ.

$$\mathbf{y} \in K_{n+1} \iff \forall \mathbf{z} \in K_{n+1}, \mathbf{y}^T \mathbf{z} \geq 0$$

(証明は付録参照)

いま, (32) を解き,

$$\begin{bmatrix} \hat{\tau} - \hat{x} + 1 \\ 2\hat{\mathbf{w}} \\ \hat{\tau} + \hat{x} - 1 \end{bmatrix}$$

が得られたとする. この解が, 2次錐制約 (31.a) に違反していると, 補題5よりある $\mathbf{a}_1 = [a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}] \in K_{n+2}$ が存在して,

$$\begin{bmatrix} \hat{\tau} - \hat{x} + 1 \\ 2\hat{\mathbf{w}} \\ \hat{\tau} + \hat{x} - 1 \end{bmatrix}^T \mathbf{a}_1 < 0 \quad (33)$$

である. そのため, 新たな制約として

$$\begin{bmatrix} \hat{\tau} - \hat{x} + 1 \\ 2\hat{\mathbf{w}} \\ \hat{\tau} + \hat{x} - 1 \end{bmatrix}^T \mathbf{a}_1 \geq 0$$

を追加して (32) を解く. この不等式は (32) の実行可能領域を切断するが, 最適解を除くことがなく, 妥当不等式と呼ばれる. \mathbf{a}_1 はパラメータ $\mathbf{x} = [\hat{\tau} - \hat{x} + 1, 2\hat{\mathbf{w}}^T, \hat{\tau} + \hat{x} - 1]^T$ を用いて,

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{a}_1^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix} \right\| \leq x_0 \end{aligned} \quad (34)$$

を解くことで得られる. 同様のことを (31.b), (31.c) に関する解にも行う. 以上の手順をまとめると次のようになる.

アルゴリズム 1 「Tower of variable」による多面錐近似アルゴリズムの改良

ステップ 0. 初期化最大反復回数 K 反復回数 $k = 1$ 許容誤差 $\epsilon \geq 0$ 近似パラメータ $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c$ **ステップ 1.**

(32) を解き, 2 次錐制約に関する得られた解を

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\tau} - \hat{x} + 1 \\ 2\hat{\mathbf{w}} \\ \hat{\tau} + \hat{x} - 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \hat{x} + \hat{y} \\ 2\hat{z} \\ \hat{x} - \hat{y} \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} (1 - \hat{\eta})\hat{\nu} + 1 \\ 2\Sigma_0^{1/2}\hat{\hat{\phi}} \\ (1 - \hat{\eta})\hat{\nu} - 1 \end{bmatrix}$$

とし, 得られたポートフォリオを $\hat{\phi}$ とする.**ステップ 2.** $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ をパラメータとする (34) を解き, それぞれの最適解を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ とする**ステップ 3. 終了判定**次のいずれかを満たしたとき, $\hat{\phi}$ を出力し, アルゴリズムを終了する.(a) $\mathbf{x}_1^T \mathbf{a}_1 \geq -\epsilon$, $\mathbf{x}_2^T \mathbf{a}_2 \geq -\epsilon$, $\mathbf{x}_3^T \mathbf{a}_3 \geq -\epsilon$ を満たす.(b) $k = K$ **ステップ 4. 制約の追加** $\mathbf{x}_1^T \mathbf{a}_1 < -\epsilon$ のとき, 次の制約を (32) に追加

$$\begin{bmatrix} \hat{\tau} - \hat{x} + 1 \\ 2\hat{\mathbf{w}} \\ \hat{\tau} + \hat{x} - 1 \end{bmatrix}^T \mathbf{a}_1 \geq 0$$

 $\mathbf{x}_2^T \mathbf{a}_2 < -\epsilon$ のとき, 次の制約を (32) に追加

$$\begin{bmatrix} x + y \\ 2z \\ x - y \end{bmatrix}^T \mathbf{a}_2 \geq 0$$

 $\mathbf{x}_3^T \mathbf{a}_3 < -\epsilon$ のとき, 次の制約を (32) に追加

$$\begin{bmatrix} (1 - \eta)\nu + 1 \\ 2\Sigma_0^{1/2}\tilde{\phi} \\ (1 - \eta)\nu - 1 \end{bmatrix}^T \mathbf{a}_3 \geq 0$$

 $k \leftarrow k + 1$ ステップ 1. へ戻る

4.1.3 妥当不等式によるカットの追加

「Tower of variables」による多面錐近似の改良は、ステップ0で粗めの多面錐近似をしている。粗めの多面錐近似が、計算時間にどのように影響するかを知るために「tower of variables」による多面錐近似をしないアルゴリズムを考える。(32)から多面錐近似の制約を除いた問題は

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \nu + \lambda \\
 \text{s.t.} \quad & y = -\tau + \lambda \\
 & x \geq 0 \\
 & y \geq 0 \\
 & \tau \geq 0 \\
 & \mathbf{w} = \mathbf{G}^{-1/2} \tilde{\phi} \\
 & z = \boldsymbol{\mu}_0^T \tilde{\phi} \\
 & A\phi \leq \mathbf{b} \\
 & \phi_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
 & \tilde{\phi} = \phi - \psi \\
 & b_i \geq \phi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
 & \sum_{i=1}^n b_i \leq U
 \end{aligned} \tag{35}$$

である。この問題に対し、「tower of variables」による多面錐近似の改良と同じ方法で妥当不等式を追加していく。手順をまとめると次のようになる。

アルゴリズム 2 妥当不等式によるカットの追加

ステップ 0. 初期化最大反復回数 K 反復回数 $k = 1$ 許容誤差 $\epsilon \geq 0$ **ステップ 1.**

(35) を解き, 2 次錐制約に関する得られた解を

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\tau} - \hat{x} + 1 \\ 2\hat{\mathbf{w}} \\ \hat{\tau} + \hat{x} - 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \hat{x} + \hat{y} \\ 2\hat{z} \\ \hat{x} - \hat{y} \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} (1 - \hat{\eta})\hat{\nu} + 1 \\ 2\Sigma_0^{1/2}\hat{\phi} \\ (1 - \hat{\eta})\hat{\nu} - 1 \end{bmatrix}$$

とし, 得られたポートフォリオを $\hat{\phi}$ とする.**ステップ 2.** $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ をパラメータとする (34) を解き, それぞれの最適解を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ とする**ステップ 3.** 終了判定次のいずれかを満たしたとき, $\hat{\phi}$ を出力し, アルゴリズムを終了する.(a) $\mathbf{x}_1^T \mathbf{a}_1 \geq -\epsilon$, $\mathbf{x}_2^T \mathbf{a}_2 \geq -\epsilon$, $\mathbf{x}_3^T \mathbf{a}_3 \geq -\epsilon$ を満たす.(b) $k = K$ **ステップ 4.** 制約の追加 $\mathbf{x}_1^T \mathbf{a}_1 < -\epsilon$ のとき, 次の制約を (35) に追加

$$\begin{bmatrix} \hat{\tau} - \hat{x} + 1 \\ 2\hat{\mathbf{w}} \\ \hat{\tau} + \hat{x} - 1 \end{bmatrix}^T \mathbf{a}_1 \geq 0$$

 $\mathbf{x}_2^T \mathbf{a}_2 < -\epsilon$ のとき, 次の制約を (35) に追加

$$\begin{bmatrix} x + y \\ 2z \\ x - y \end{bmatrix}^T \mathbf{a}_2 \geq 0$$

 $\mathbf{x}_3^T \mathbf{a}_3 < -\epsilon$ のとき, 次の制約を (35) に追加

$$\begin{bmatrix} (1 - \eta)\nu + 1 \\ 2\Sigma_0^{1/2}\tilde{\phi} \\ (1 - \eta)\nu - 1 \end{bmatrix}^T \mathbf{a}_3 \geq 0$$

 $k \leftarrow k + 1$ ステップ 1. へ戻る

5 数値実験

実験で使用するベンチマークは，2014 年 11 月 13 日時点での日本平均株価 [12] の構成銘柄から 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50 個選び， ψ_{10} , ψ_{15} , ψ_{20} , ψ_{25} , ψ_{30} , ψ_{40} , ψ_{50} とする．各ベンチマークの詳細は付録に示す．期待値 μ の不確実性パラメータ G は，資産 i の利回り r_i の標準偏差を σ_i として

$$G = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/\sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

とした．分散共分散行列 Σ の不確実性パラメータ η は 0.5 とした．線形計画問題，2 次錐計画問題を解くために Gurobi V.5.6[10] と CPLEX12.6[11] をデフォルトのパラメータで使した．計算機は表 1 の 2 つを使用した．簡単のため，ロバスト・トラッキングエラー最小

表 1: 計算に使用した計算機

計算機名	CPU	memory	OS
machine1	core2 Quad 2.66GHz (4 コア、4 スレッド)	4GB	windows8
machine2	Xeon CPU E5-2450 2.1GHz \times 2 (16 コア、32 スレッド)	126GB	Ubuntu 12.04

化問題 (29) を RTEP，投資上限数付きロバスト・トラッキングエラー最小化問題 (31) を L-RTEP，L-RTEP を「tower of variable」によって多面錐近似したものを ToV L-RTEP，アルゴリズム 1 を ToV Cut L-RTEP，アルゴリズム 2 を Cut L-RTEP と呼ぶ．RTEP において $\phi_i = 0$ (i は $\{1, 2, \dots, n\}$ からランダムに $n - U$ 個選ぶ) として，人為的に投資対象上限が U となるようにし，投資可能なすべての組み合わせについて RTEP を解き，最も良い最適値を RTEP の最適値とした．また，すべての組み合わせについて RTEP を解くためにかかった計算時間の合計を RTEP の計算時間とした．

5.1 投資上限数制約の有無による最適値と計算時間

ToV L-RTEP の近似パラメータを $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c = n$ ，ToV Cut L-RTEP の近似パラメータ $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c = n/2$ ， $\epsilon = 10^{-5}$ ，Cut L-RTEP の近似パラメータ $\epsilon = 10^{-5}$ とする．投資上限数 U を変化させたときの RTEP，L-RTEP，ToV L-RTEP，ToV Cut L-RTEP，Cut L-RTEP の最適値を図 1，図 2，図 3，図 4，図 5 に示す．ただし，ToV L-RTEP は ψ_{25} のとき，投資上限数が 4 以上では，双対ギャップが 50% 以上であったためデータを省いている．また，machine1 ではメモリ不足のため ψ_{25} で投資上限数を 10 以上とした L-RTEP を解くことができなかったためデータがない．図 4 を見ると ToV L-RTEP だけ最適値の

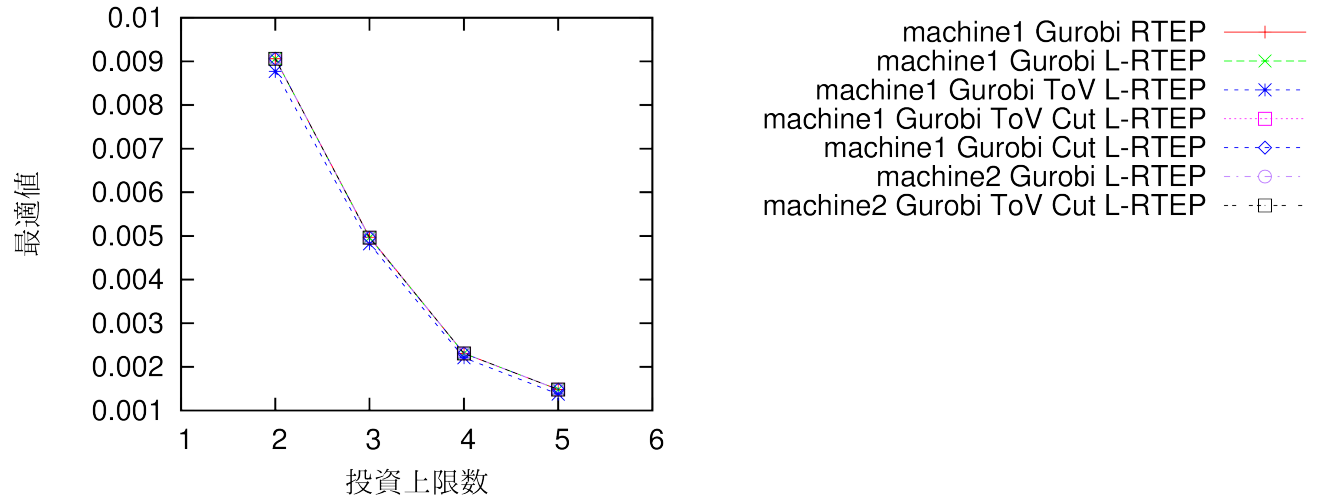


図 1: ベンチマーク ψ_{10} に対する最適値

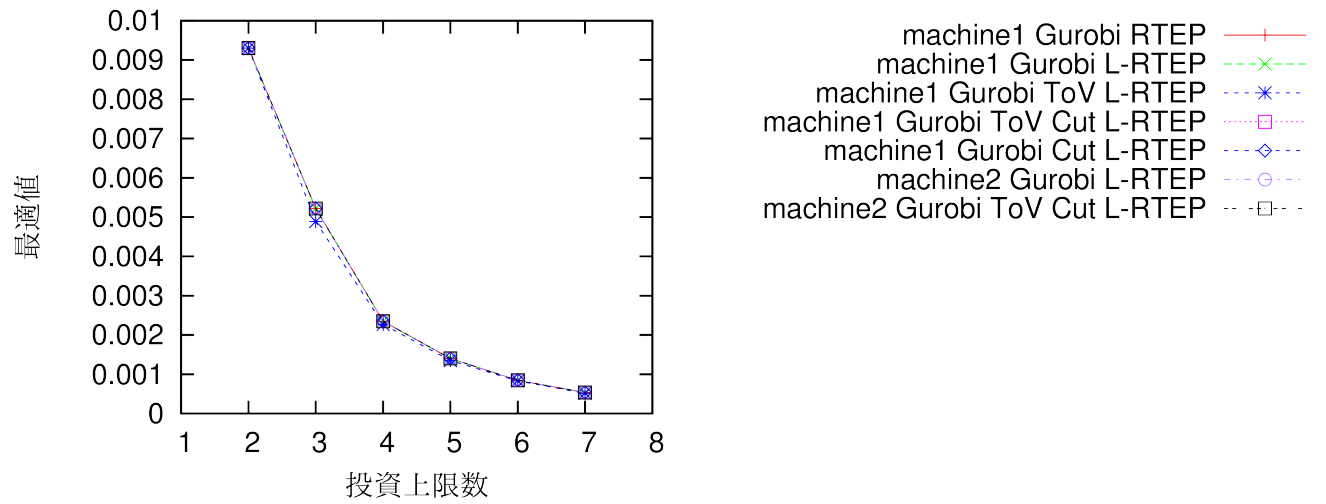


図 2: ベンチマーク ψ_{15} に対する最適値

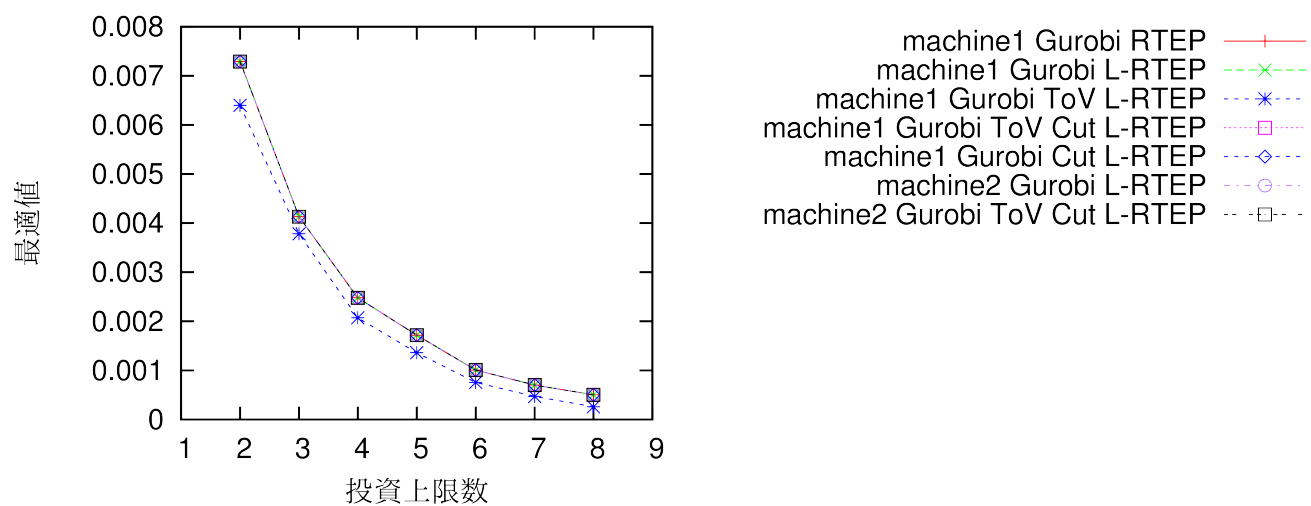


図 3: ベンチマーク ψ_{20} に対する最適値

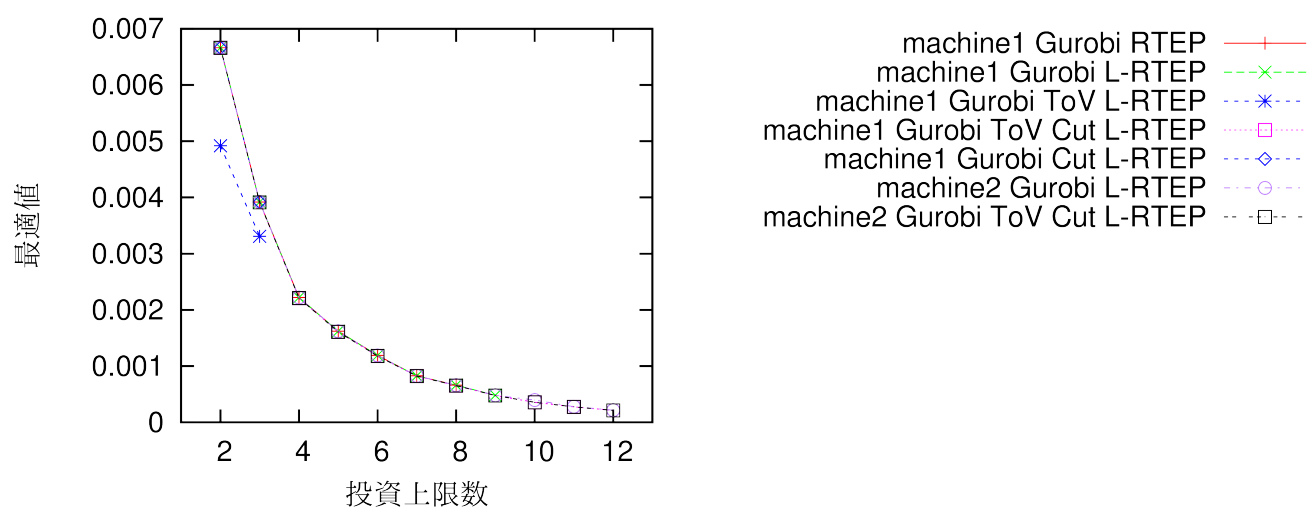


図 4: ベンチマーク ψ_{25} に対する最適値

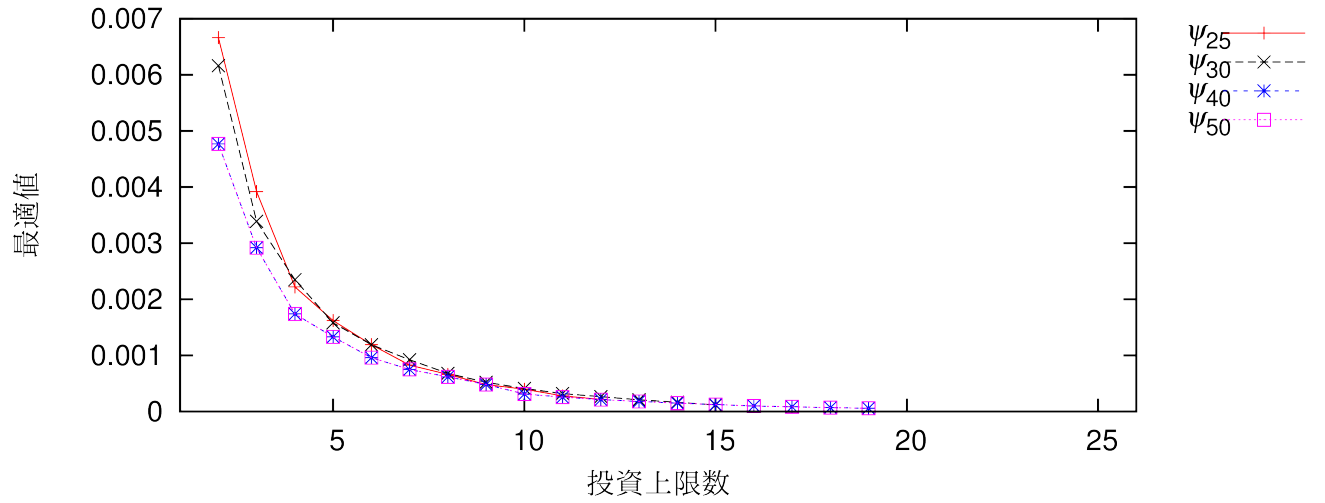


図 5: machine2 CPLEX L-RTEP の ψ_{25} , ψ_{30} , ψ_{40} , ψ_{50} に対する最適値

値がずれているが、図 1, 図 2, 図 3, 図 4 から概ねどの方法も最適値が一致していることが分かる。このことから、L-RTEP, ToV L-RTEP, ToV Cut L-RTEP, Cut L-RTEP がうまく実行できたことが分かる。Gurobi ではベンチマークを ψ_{30} , ψ_{40} , ψ_{50} としたとき、投資上限数を大きくすると計算時間の問題で解けなかったが、CPLEX を用いることで最適値が求まり図 5 となった。次に、RTEP, L-RTEP, ToV L-RTEP, ToV Cut L-RTEP, Cut L-RTEP で投資上限数 U を変化させたときの計算時間を図 6, 図 7, 図 8, 図 9, 図 10 に示す。ただし、それぞれの方法のパラメータは最適値を求めたときと同じである。

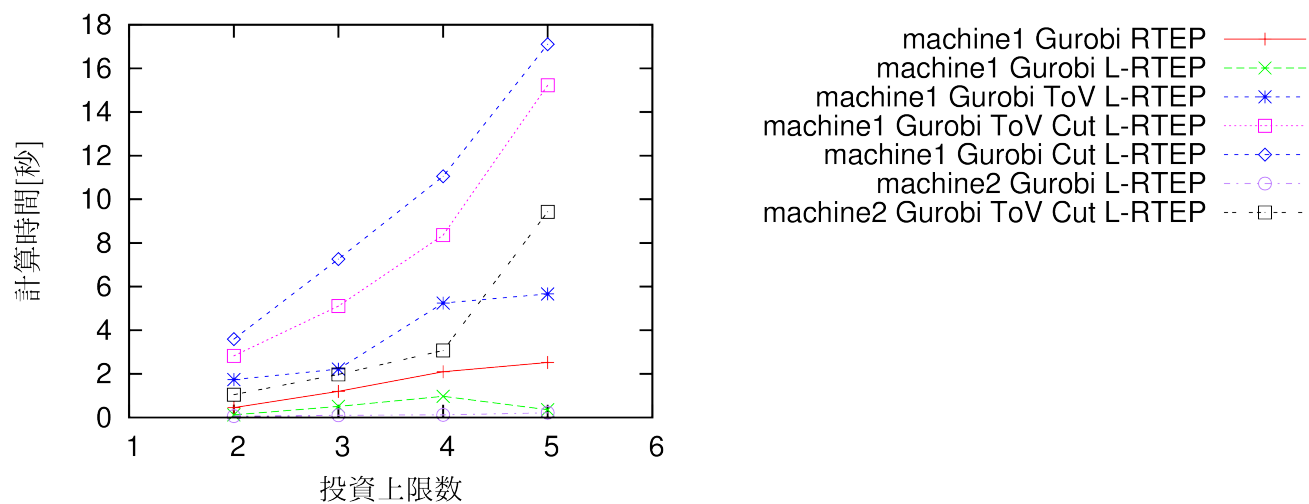


図 6: ベンチマーク ψ_{10} に対する計算時間

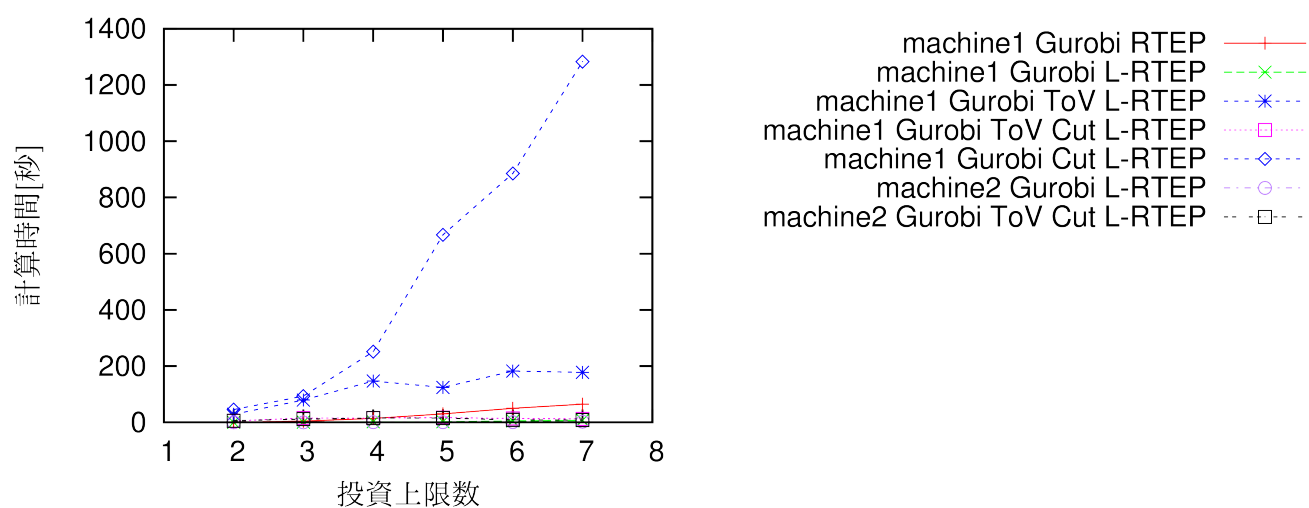


図 7: ベンチマーク ψ_{15} に対する計算時間

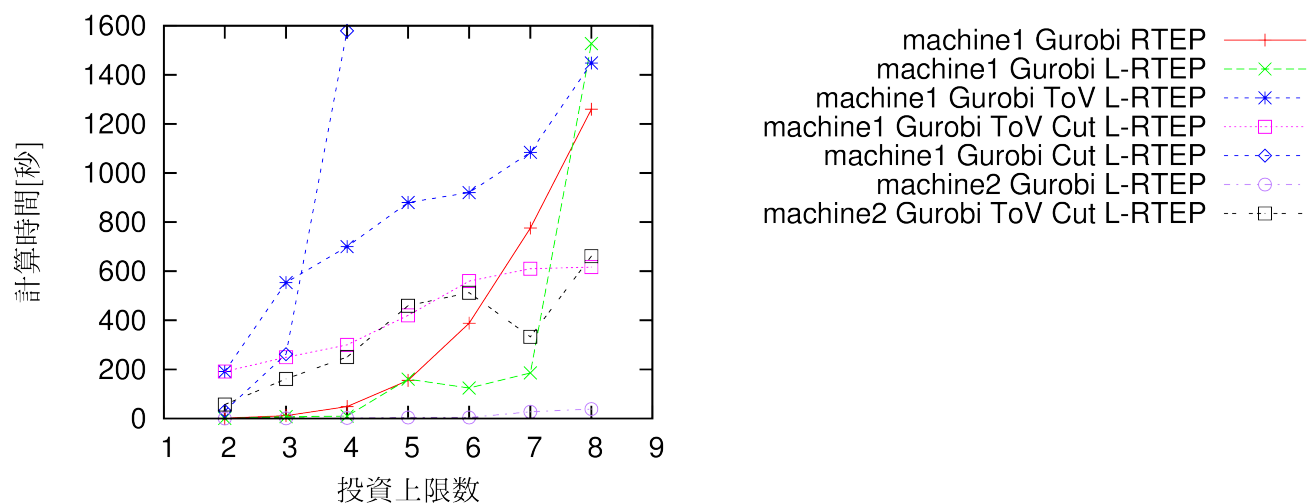


図 8: ベンチマーク ψ_{20} に対する計算時間

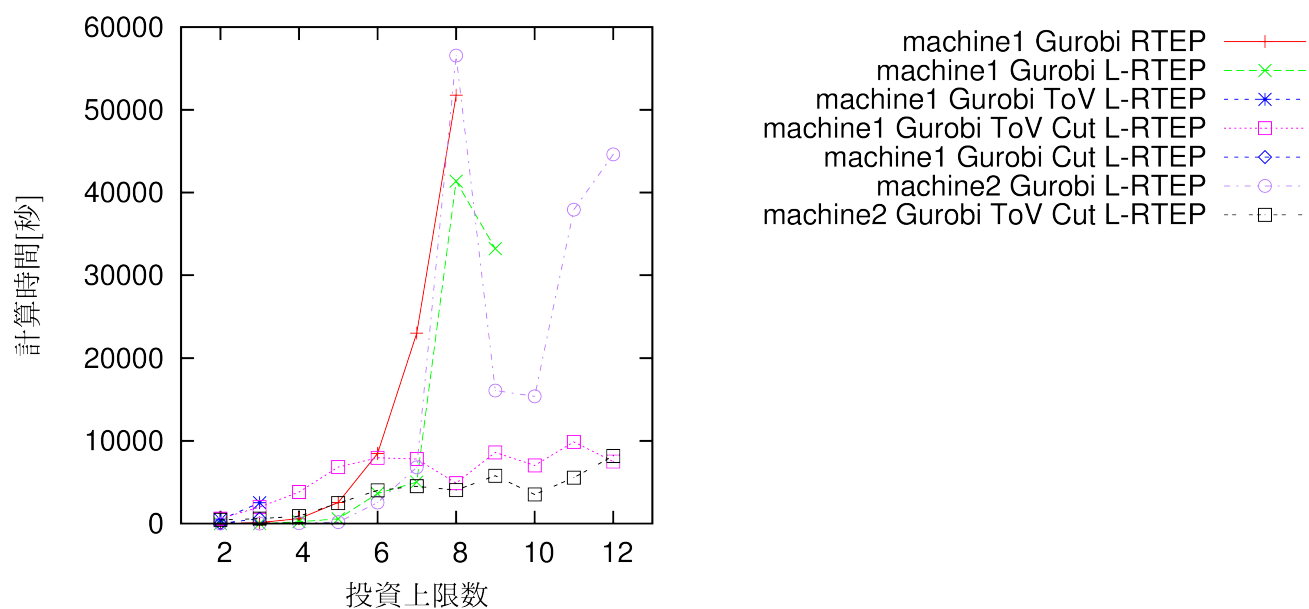


図 9: ベンチマーク ψ_{25} に対する計算時間

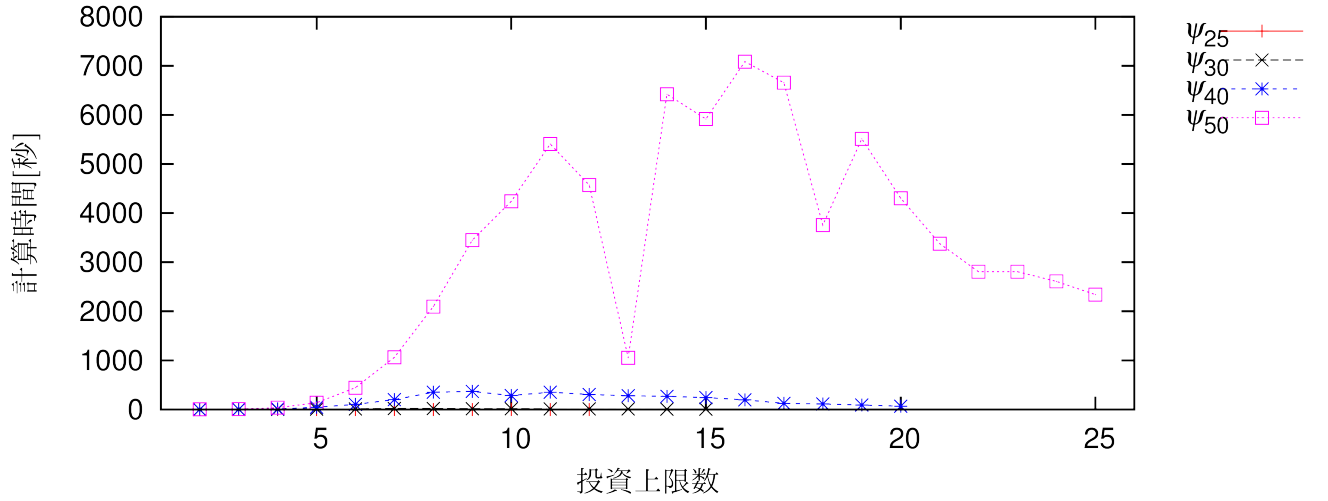


図 10: machine2 CPLEX L-RTEP の ψ_{25} , ψ_{30} , ψ_{40} , ψ_{50} に対する計算時間

図6, 図7, 図8, 図9を見ると, L-RTEP は投資対象数 n と投資上限数 U が大きくなるにつれて指数関数的に計算時間がかかった。これに対する解決法として考えた ToV L-RTEP と Cut L-RTEP は, L-RTEP より計算時間がかかり, L-RTEP の計算時間の短縮にはならなかった。しかし, ToV Cut L-RTEP は投資上限数が大きくなるにつれて L-RTEP より計算時間が短くなった。計算機の違いによる計算時間については, コア数を4倍, スレッド数を8倍にしても計算時間はあまり変わらなかった。ベンチマークを ψ_{25} , 投資上限数を12としたとき, L-RTEP を Gurobi で解くと45000秒程度, CPLEX で解くと3秒程度で解が求まり, CPLEX は Gurobi より15000倍効率よく解けることが分かった。これは, CPLEX が L-RTEP の問題の構造を認識し, 効率的な前処理を行ったためと考えられる。 ψ_{50} の場合, 投資上限数が25のときポートフォリオの資産の組み合わせが最大になる。そのため, 投資上限数が25のとき計算時間が一番長くなると考えられる。しかし, 図10より ψ_{50} とした場合, 投資上限数16あたりで計算時間が長くなっていた。

6 考察

投資上限数制約によって, 投資可能な組み合わせを列挙しロバスト・トラッキングエラー最小化問題を解くことなく, 最適なポートフォリオを構築できた。しかし, 投資上限数制約により計算時間が指数関数的にかかった。この問題を解決するために, 妥当不等式によるカットの追加を考えたが, L-RTEP より計算時間がかかる結果となった。また, tower of variables による多面錐近似は投資対象数が大きい場合, L-RTEP より計算時間が短くなる可能性があるが, 近似パラメータと最適値の関係は現時点では分かっていない。一方, tower of variables による多面錐近似と妥当不等式によるカットの追加を組み合わせると L-RTEP と同じ程度の最適値を持つポートフォリオを構築でき, 投資上限数を大きくすると L-RTEP より計算時間が短くなった。

L-RTEP を解く場合，CPLEX を用いることで Gurobi を用いた場合と比べ高速に解くことができ，銘柄数の大きいベンチマークを扱うことが出来た．今回の実験では，提案する手法で使用する最適化ソルバを Gurobi としたが，CPLEX にすることでより大規模な L-RTEP を解ける可能性がある．

A 補題の証明

A.1 補題 3 の証明

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とすれば次が成り立つ.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \succeq 0 \iff a \geq 0, c \geq 0, ac - b^2 \geq 0$$

証明：任意の $[x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ を考える. $a \neq 0$ のとき, $[x_1, x_2]^T$ を補題 3 の行列の左右から掛けると,

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= [x_1, x_2] \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ bx_1 + cx_2 \end{bmatrix} \\ &= ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} &= a(x_1^2 + 2\frac{b}{a}x_1x_2 + \frac{c}{a}x_2^2) \\ &= a((x_1 + \frac{b}{a}x_2)^2 - \frac{b^2}{a^2}x_2^2 + \frac{c}{a}x_2^2) \\ &= a((x_1 + \frac{b}{a}x_2)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}x_2^2) \end{aligned} \tag{37}$$

となる. $a \geq 0, c \geq 0, ac - b^2 \geq 0$ であれば, (37) は 0 以上となり, 補題 3 の行列は半正定値行列であることが分かる. また, 補題 3 の行列が半正定値行列であれば, (37) は 0 以上だから, $a \geq 0, c \geq 0, ac - b^2 \geq 0$ が成り立つ. $a = 0$ のとき, 補題 3 の行列が半正定値行列であれば, (36) は

$$2bx_1x_2 + cx_2^2 \geq 0$$

だから, $b = 0, c \geq 0$ が成り立つ. また, $b = 0, c \geq 0$ であれば, (36) は 0 となり, 補題 3 の行列は半正定値行列であることが分かる. \square

A.2 補題 4 の証明

$x, y \geq 0, z \in \mathbb{R}^n$ とすれば, 次が成り立つ.

$$z^T z \leq xy \iff \left\| \begin{bmatrix} 2z \\ x - y \end{bmatrix} \right\| \leq x + y$$

証明：

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}^T \mathbf{z} \leq xy &\Leftrightarrow 4\mathbf{z}^T \mathbf{z} \leq 4xy \\
&\Leftrightarrow 4\mathbf{z}^T \mathbf{z} \leq x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2) \\
&\Leftrightarrow 4\mathbf{z}^T \mathbf{z} \leq (x+y)^2 - (x-y)^2 \\
&\Leftrightarrow 4\mathbf{z}^T \mathbf{z} + (x-y)^2 \leq (x+y)^2 \\
&\Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} 2\mathbf{z} \\ x-y \end{bmatrix} \right\| \leq x+y \quad (\because x, y \geq 0)
\end{aligned}$$

□

A.3 補題5の証明

集合

$$K_{n+1} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\tilde{\mathbf{x}}\| \leq x_0 \right\}$$

と $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して次が成り立つ.

$$\mathbf{y} \in K_{n+1} \iff \forall \mathbf{z} \in K_{n+1} \text{ に対して } \mathbf{y}^T \mathbf{z} \geq 0$$

証明：まず

$$\mathbf{y} \in K_{n+1} \implies \forall \mathbf{z} \in K_{n+1} \text{ に対して } \mathbf{y}^T \mathbf{z} \geq 0$$

を示す. $\forall \mathbf{y} = [y_0, \tilde{\mathbf{y}}]^T, \mathbf{z} = [z_0, \tilde{\mathbf{z}}]^T \in K_{n+1}$ とすれば,

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^T \mathbf{z} &= y_0 z_0 + \sum_{i=1}^{n+1} y_i z_i \\
&\geq y_0 z_0 - \sum_{i=1}^{n+1} |y_i| |z_i| \\
&\geq y_0 z_0 - \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} y_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} z_i^2} \quad (\because \text{Cauchy - Shwarz 不等式}) \\
&\geq y_0 z_0 - y_0 z_0 \quad (\because \mathbf{y}, \mathbf{z} \in K_{n+1}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となり, 示せた. 次に

$$\mathbf{y} \in K_{n+1} \iff \forall \mathbf{z} \in K_{n+1} \text{ に対して } \mathbf{y}^T \mathbf{z} \geq 0$$

の対偶

$$\mathbf{y} \notin K_{n+1} \implies \exists \mathbf{z} \in K_{n+1} \text{ に対して } \mathbf{y}^T \mathbf{z} < 0$$

を示す. $\mathbf{y} = [y_0, \tilde{\mathbf{y}}]^T \notin K_{n+1}$ だから, $y_0 < \|\tilde{\mathbf{y}}\|$ である. $\tilde{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$ のとき, $\mathbf{z} = [1, -\tilde{\mathbf{y}}/\|\tilde{\mathbf{y}}\|]^T \in K$ とすれば,

$$\mathbf{y}^T \mathbf{z} = y_0 - \frac{\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{y}}}{\|\tilde{\mathbf{y}}\|} = y_0 - \|\tilde{\mathbf{y}}\| < 0 \quad (\because y_0 < \|\tilde{\mathbf{y}}\|)$$

となる. $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$ のとき, $\mathbf{z} = [1, \mathbf{0}]^T \in K_{n+1}$ とすれば,

$$\mathbf{y}^T \mathbf{z} = y_0 < 0$$

となる. □

B 実験で使⽤したベンチマーク ψ_{10} , ψ_{15} , ψ_{20}

ベンチマーク ψ_{10} , ψ_{15} , ψ_{20} の構成割合は, 日経平均株価の構成銘柄での割合から算出した. また, 各資産の期待利回りは, 各資産 i の時点 t における価格を $V_{i,t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $t = 1, 2, \dots, T$) としたとき, $\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} (V_{i,t+1} - V_{i,t})$ とした.

$$\psi_{10} = \begin{bmatrix} 0.0461538462 \\ 0.0769230769 \\ 0.5230769231 \\ 0.1 \\ 0.0230769231 \\ 0.0307692308 \\ 0.0435897436 \\ 0.0948717949 \\ 0.0358974359 \\ 0.0256410256 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{J フロント} \\ \text{協和キリン} \\ \text{アステラス} \\ \text{資生堂} \\ \text{日製鋼} \\ \text{G S ユアサ} \\ \text{丸紅} \\ \text{三井物} \\ \text{三菱UFJ} \\ \text{三井住友FG}$$

$$\psi_{15} = \begin{bmatrix} 0.0738137083 \\ 0.0386643234 \\ 0.007029877 \\ 0.1599297012 \\ 0.0035149385 \\ 0.0158172232 \\ 0.007029877 \\ 0.0474516696 \\ 0.0210896309 \\ 0.2460456942 \\ 0.0298769772 \\ 0.3110720562 \\ 0.0105448155 \\ 0.0175746924 \\ 0.0105448155 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{コムシスHD} \\ \text{明治HD} \\ \text{東洋紡} \\ \text{富士フイルム} \\ \text{板硝子} \\ \text{日製鋼} \\ \text{日軽金HD} \\ \text{千代建} \\ \text{NTN} \\ \text{日東電} \\ \text{凸版} \\ \text{東エレク} \\ \text{ANAHD} \\ \text{大ガス} \\ \text{東宝} \end{array}$$

$$\psi_{20} = \begin{bmatrix} 0.0189873418 \\ 0.0886075949 \\ 0.1054852321 \\ 0.0696202532 \\ 0.0654008439 \\ 0.0126582278 \\ 0.0084388186 \\ 0.0084388186 \\ 0.0168776371 \\ 0.0105485232 \\ 0.1181434599 \\ 0.0569620253 \\ 0.0696202532 \\ 0.0168776371 \\ 0.0801687764 \\ 0.0506329114 \\ 0.0168776371 \\ 0.0464135021 \\ 0.052742616 \\ 0.0864978903 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{日水} \\ \text{コムシスHD} \\ \text{ハウス} \\ \text{麒麟HD} \\ \text{クラレ} \\ \text{三菱ケミHD} \\ \text{宇部興} \\ \text{ヤフー} \\ \text{三菱マ} \\ \text{古河機金} \\ \text{日立建機} \\ \text{千代建} \\ \text{安川電} \\ \text{NEC} \\ \text{カシオ} \\ \text{大日印} \\ \text{ソニーFH} \\ \text{東建物} \\ \text{小田急} \\ \text{三菱倉} \end{array}$$

参考文献

- [1] H.M. Markowitz, PORTFOLIO SELECTION, EFFICIENT DIVERSIFICATION OF INVESTMENTS, 1959
- [2] A.Ben-tal and A.Nemirovski, ROBUST CONVEX OPTIMIZATION, MATHEMATICS OF OPERATIONS RESEARCH, 23(1998), 796-805
- [3] M.S.Lobo, ROBUST AND CONVEX OPTIMIZATION WITH APPLICATIONS IN FINANCE, Doctor thesis, 2000
- [4] D.Goldfarb and G.Iyengar, Robust portfolio selection problems, CORC Technical Report TR-2002-03, 2002
- [5] 稲場広記・水野眞治・中田和秀、2次錐計画問題によるロバスト・トラッキングエラー最小化、日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌、48(2005)、12-25
- [6] A.Ben-tal and A.Nemirovski, On polyhedral approximations of the second-order cone, Mathematics of Operations Research, 26(2001), 193-205
- [7] I.Polik and T.Terlaky, A Survey of the S-Lemma SIAM REVIEW, 49(2007), 371-418
- [8] S.Boyd, L.E.Ghaoui, E.Feron, and V.Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory(SIAM,1994)
- [9] S.Boyd and L.Vandenberghe, Convex Optimization(Cambridge University Press, 2004)
- [10] OCTOBER SKY CO.,LTD, Gurobi Optimizer, <http://www.octobersky.jp/products/gurobi/gurobi.html>, 2015/1/20
- [11] IBM, IBM ILOG CPLEX Optimization Studio, <http://www-03.ibm.com/software/products/en/ibmilogcpleoptistud/>, 2015/2/27
- [12] 日本経済新聞社、日経平均プロフィール、<http://indexes.nikkei.co.jp/nkave/index/component?idx=nk225>、2014/11/13