修 士 論 文 の 和 文 要 旨

研究科・専攻	大学院　　情報理工学研究科　　　情報・通信工学専攻　博士前期課程		
氏　　　名	三柴　勇太	学籍番号	1331099
論 文 題 目	置換+1e グラフの頂点彩色問題の計算複雑さ		

要　　旨

グラフ上の様々な問題について研究が行われているが、一般のグラフについては NP 完全となることが分かっている。しかし、そのような問題でも、ある特定のグラフ族においては多項式時間で解ける場合があることが知られている。ならば、そのグラフ族に「近い」グラフにおいても効率良く解ける可能性がある。そのようなグラフ族に「近い」グラフを表す方法として、辺や頂点の増減をパラメータとして与えるパラメータ化グラフが考えられている。パラメータ化グラフとの例として、あるグラフ族を F とした時、F に属するグラフに高々k 本の辺を追加または削除して得られるグラフからなるグラフ族をそれぞれ F+ke グラフ、F-ke グラフという。

本研究では、パラメータ化グラフの頂点彩色問題を扱う。頂点彩色問題とは、与えられたグラフに対して、隣り合う頂点同士を異なる色になるように最小の色数でグラフの頂点を彩色する問題である。頂点彩色問題は、一般的なグラフに対しては NP 完全であるが、二部グラフや比較可能グラフ、split グラフなどの特定のグラフ族においては多項式時間で頂点彩色問題を解くことができる。そして、これらのグラフに対して高々k 本の辺を加えたグラフである二部+ke グラフや比較可能+ke グラフ、split+ke グラフなどのパラメータ化グラフに対する頂点彩色問題の計算複雑さについて研究が行われている。

本研究では、頂点彩色問題を多項式時間で解くことができるグラフ族である置換グラフに対して辺を 1 本追加したグラフである置換+1e グラフに対する頂点彩色問題を解くアルゴリズムを提案する。そして、この置換+1e グラフに対する頂点彩色問題を解くアルゴリズムの正当性を証明し、そのアルゴリズムが計算時間 $O(n^2 \log n)$時間で解くことができることを示した。

平成26年度　修士論文

置換＋1eグラフの頂点彩色問題の計算複雑さ

学籍番号 1331099

三柴　勇太

情報・通信工学専攻　情報数理工学コース

指導教員:武永康彦准教授

副指導教員:垂井淳准教授

目 次

1　はじめに

頂点彩色問題とは、グラフの隣接する頂点が異なる色になるように頂点に色を割り当てるための必要な最小の色数 (彩色数) を求める問題であり、この問題を効率的に解くことは、計算機科学において重要な課題である。頂点彩色問題は一般に NP 完全である [1] が、特定のグラフ族に対しては多項式時間で解くことができる場合がある。そのため、そのグラフ族に“近い”グラフに対しても、多項式時間で解ける可能性がある。

特定のグラフに“近い”グラフとしてパラメータ化グラフが考えられている。パラメータ化グラフとは特定のグラフ族にどれくらい近いかをパラメータで表したものである。グラフ族 F に属するグラフに対して高々k 本の辺を加えた、あるいは削除したグラフからなるグラフ族をそれぞれ $F + ke$ グラフ、$F - ke$ グラフ という。また、その際にグラフ族 F に属するグラフに追加あるいは削除した辺の集合をモジュレータという。パラメータ化グラフに関する研究として、頂点彩色問題について比較可能グラフ+ke グラフ [2] や、chordal+ke グラフ [3]、二部+ke グラフ、split+ke グラフ [4] など様々なグラフ族のパラメータ化グラフに関して研究が行われている。

本研究では置換グラフをパラメータ化したグラフの頂点彩色アルゴリズムについて研究を行う。置換グラフの頂点彩色問題は、多項式時間で解くことが出来る。また、置換グラフは比較可能グラフに含まれる [5]。比較可能+1e グラフの頂点彩色問題は入力をグラフと追加した辺とすると γ を頂点の次数の最大値、 $|E|$ を辺の数としたとき $O(\gamma|E|)$ 時間で解くことができる [2]。よって、置換+1e グラフの頂点彩色問題も多項式時間で解くことができる。本研究では、置換+1e グラフの頂点彩色問題を計算時間 $O(n^2 \log n)$ で解くことができる置換グラフの性質を用いた頂点彩色アルゴリズムを提案する。

2　置換グラフとその頂点彩色アルゴリズム

2.1　置換グラフ

本節では置換 グラフの定義を与え、その性質について述べる。頂点数を n、$(1, 2, ..., n)$ の数字の並びを置換したものを $(\pi(1), ..., \pi(n))$ とすると、置換グラフは以下の式を満たす π が存在するグラフである。

$V = \{1, ..., n\}$,

$(i,j) \in E \Leftrightarrow (i-j)(\pi^{-1}(i) - \pi^{-1}(j)) < 0$
以下では、$\alpha < \beta$ の時、$\pi(\alpha) \prec \pi(\beta)$ と表すことにする。

置換グラフが与えられた時、線形時間で置換を求められる。

また、置換グラフはライン表現によって表される。ライン表現とは、上段は $(1,...,n)$ を昇順に並べたもの、下段は $\pi(1),\pi(2),...,\pi(n)$ の順に並べ、同じ数字を直線で結んだものである。ライン表現において線と線が交差する場合、それらの頂点間に辺が存在することを意味する。ライン表現の下段の数列を permutation と呼ぶ。図 1 に $(\pi(1),...,\pi(n)) = (4,3,5,1,2)$ のときの置換グラフとそのライン表現の例を示す。

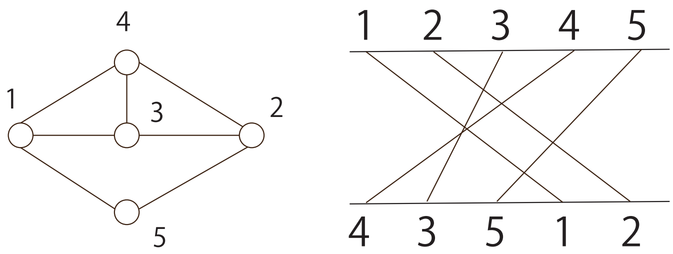

図 1: 置換グラフ (左) とそのライン表現 (右)

2.2 置換グラフに対する頂点彩色アルゴリズム

本節では置換 グラフに対する頂点彩色アルゴリズム [5] を説明する。このアルゴリズムは入力として permutation が与えられるものとする。

[アルゴリズム P_Col]
(ステップ 1) $\pi(1)$ をリスト 1 に入れる。
(ステップ 2) for $i = 2$ *to* n do
if リスト内の最大頂点番号が $\pi(i)$ 未満のリストがある
then $\pi(i)$ を二分探索を用いて、リスト内の最大頂点番号が $\pi(i)$ 未満のリストのうちリスト中の最大頂点番号が最大のリストに入れる。
else 新たなリストを作成し、そこに $\pi(i)$ を入れる。
(ステップ 3) 使われているリストの個数を出力する。

例として、図 1 の $(\pi(1),...,\pi(n)) = (4,3,5,1,2)$ のとき、まず、$\pi(1) = 4$ は、リスト 1 を作成してそこに入れる。次に、$\pi(2) = 3$ は、4 よりも小さく、リスト 1 には入れられないので、リスト 2 を新しく作成し、そこに入れる。次に $\pi(3) = 5$ は、リスト 1 にもリスト 2 にも入れられるが、最大頂点番号が最大のリストであるリスト 1 に入れる。同様に頂点を入れていくと以下のようになる。

リスト 1 : 4,5
リスト 2 : 3
リスト 3 : 1,2

図 2: (4,3,5,1,2) のリストへの割り当て

アルゴリズム P_Col で作成された各リスト内の頂点は互いに辺を持たないため同一の色で彩色可能である。このとき、使用したリストの数がそのグラフに対する彩色数となる。上記の例の場合は彩色数は 3 となる。このアルゴリズムの計算量は $O(n \log n)$ となる。

2.3 頂点彩色アルゴリズムを実行した時の置換グラフの性質

本節では、アルゴリズム P_Col を実行して置換グラフをリストに入れた時の性質を述べる。

性質 1. リスト i とリスト $j(i < j)$ について、リスト i 内のある頂点 a とリスト j のある頂点 b の間に辺が存在するとする。この時、$b < a$ かつ、$a \prec b$ を満たす。

証明. 頂点 a と b の間に辺が存在するということは、考えられる頂点番号の大きさと permutation の配置は $b < a$ かつ $a \prec b$、または、$a < b$ かつ $b \prec a$ の 2 通りである。後者が成り立たないことを背理法を用いて証明する。まず、頂点 a と頂点 b について、$a < b$ かつ、$b \prec a$ と仮定する。すると、先にリスト j に頂点 b が入ることになる。しかし、頂点 b がリスト j に入った時点でリスト i の最大頂点番号は $b(b > a)$ 以上であることになるので、後から、a をリスト i に入れることができない。これは定義に矛盾するので、背理法より成り立つ。 □

性質 2. 置換グラフに対してアルゴリズム P_Col でリストに入れるとする。リスト i の任意の頂点を s とする。この時、s からリスト *1* までの各リストを通る長さ $i-1$ のパスが存在する。

証明. 頂点 s がリスト i に入ったということは、少なくともその時のリスト 1 からリスト $i-1$ までの各リスト内の最大頂点番号は s よりも大きい。つまり、s を入れた時のリスト $i-1$ 内の最大番号の頂点と頂点 s の間に辺が存在する。頂点 s と辺を持つリスト $i-1$ の頂点に関しても同様である。そして、他の番号 i 以下のリストの頂点に関しても同様であるので s からリスト *1* までの各リスト内の頂点を通る長さ $i-1$ のパスが存在する。
$\square$

性質 3. リスト i 内に頂点 $a, b(a \prec b)$ が存在し、また、リスト $j(j > i)$ 内に頂点 $c, d(c \prec d)$ が存在したとする。この時、もし、辺 ad、辺 bc が存在するならば必ず、辺 ac、辺 bd が存在する。

証明. 辺 ad が存在するので $d < a$ かつ $a \prec d$ が成り立つ。また、辺 bc についても同様に $c < b$ かつ $b \prec c$ が成り立つ。よって、頂点番号の大きさは $c < d < a < b$、 permutation の配置は $a \prec b \prec c \prec d$ となる。この時、$c < a$ かつ $a \prec c$ なので辺 ac が存在し、また、$d < b$ かつ $b \prec d$ なので辺 bd が存在する。 $\square$

性質 4. 頂点 a がリスト i に含まれ、リスト $j(j \neq i)$ に含まれる頂点のうち a と辺を持つ最大の番号の頂点を s_{max} とする。この時、リスト i 内の a より前の頂点と、リスト j 内の s_{max} より後の頂点との間に辺は存在しない。また、リスト j に含まれる頂点のうち a と辺を持つ最小の番号の頂点を s_{min} とする。この時、リスト i 内の a より後の頂点と、リスト j 内の s_{min} より前の頂点との間に辺は存在しない。

証明. リスト i 内の a より前の頂点 b がリスト j 内の s_{max} より後の頂点 c と辺を持っていると仮定する。この時の頂点の関係を 図 3 で表す。性質 3 より、辺 ac が存在することになり、定義に矛盾する。よって、そのような頂点 c は存在しない。

リスト i 内の a より後の頂点 d がリスト j 内の s_{min} より前の頂点 e と辺を持っていると仮定する。この時の頂点の関係を 図 4 で表す。性質 3 より、辺 ae が存在することになり、定義に矛盾する。よって、そのような頂点 e は存在しない。 $\square$

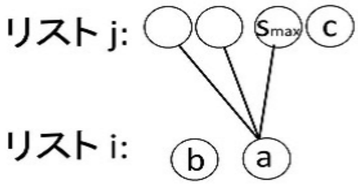

図 3: 性質 4 の s_{max} について ($j < i$ の場合)

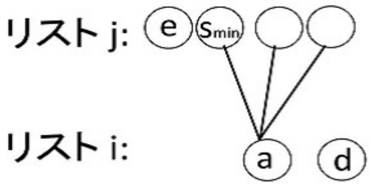

図 4: 性質 4 の s_{min} について ($j < i$ の場合)

性質 5. 頂点 $b, c(b \prec c)$ がリスト i に含まれるとする。もし、リスト $j(j \neq i)$ に含まれる頂点 d が b, c との間に辺を持つならば、リスト i に含まれ $b \prec a \prec c$ を満たす任意の頂点 a に対し、辺 ad が存在する。

証明. $j < i$ の時、辺 bd が存在するので $b < d$ かつ $d \prec b$ となる。また、辺 cd が存在するので $c < d$ かつ $d \prec c$ となる。よって、$a < d$ かつ $d \prec a$ より d と a の間にも辺が存在する。$i < j$ の時、辺 bd が存在するので $d < b$ かつ $b \prec d$ となる。また、辺 cd が存在するので $d < c$ かつ $c \prec d$ となる。よって、$d < a$ かつ $a \prec d$ より d と a の間にも辺が存在する。 □

3　置換+1e グラフの頂点彩色問題

3.1　置換+1e グラフの頂点彩色について

本章では、置換+1e グラフの頂点彩色アルゴリズムを提案する。

ここで、$G = (V, E)$ をモジュレータ $(u, v)(u < v)$ を持つ置換+1e グラフとする。また、G からモジュレータを除いて得られる置換グラフを G' とする。辺を 1 本しか加えないので、G の彩色数は、最大でも (G' の彩色数)+1 となる。

置換グラフと置換+1e グラフで異なる点はモジュレータの端点が現れたときである。G の permutation を参照する際、先に u が現れる。モジュレータの端点である u と v は同一の色で彩色することができないため同じリストに入れることは出来ない。

置換グラフの頂点彩色アルゴリズム P_Col を応用して置換+1e グラフの頂点彩色アルゴリズムを提案する。ここで、置換+1e グラフの頂点彩色問題は以下のようになる。

入力:置換グラフ G' の permutation$(\pi(1), ..., u, ..., v, ..., \pi(n))$、
　　モジュレータ (u, v)
出力:G の彩色数

3.2　置換+1e グラフの頂点彩色アルゴリズム

本節では置換+1e グラフに対する頂点彩色アルゴリズムを説明する。

[アルゴリズム $P + 1e\_Col$]

(ステップ 1) $\pi(1)$ から v までの頂点をアルゴリズム P_Col と同様にリストに入れる。

(ステップ 2) 頂点 u と v が 異なるリストに入っている場合、ステップ 7 へ。

(ステップ 3) 頂点 u と v がともにリスト i に入ったとする。リスト $i-1$ とリスト i 内の頂点に対する二部グラフを考える。頂点 u と v が非連結の場合、リスト $i-1$ 内の u と連結な頂点とリスト i 内の u と連結な頂点を入れ替え、ステップ 7 へ。

(ステップ 4) リスト i とリスト $i+1$ 内の頂点に対する二部グラフを考える。頂点 u とリスト $i+1$ 内の最大番号の頂点が非連結の場合、リスト

i 内の u と連結な頂点とリスト $i+1$ 内の u と連結な頂点を入れ替え、ステップ7へ。

(ステップ5) リスト i 内の v を除く任意の頂点 $w(w \geq u)$ に対し、リスト i 内の w 以下の番号の頂点全てを含む頂点集合 U を列挙する。
列挙した各 U に対して以下を繰り返す。
(i) 頂点集合 U に含まれる頂点と辺を持ち、リスト i 内の w より大きい番号の頂点とは辺を持たないリスト $i+1$ 内の頂点と U を入れ替える。
(ii) 番号 $i+1$ 以上のリストの頂点集合に対して、再度リスト $i+1$ を始めとしてアルゴリズム P_Col と同様にリストに頂点を入れる。
(iii) $\pi(n)$ までアルゴリズム P_Col と同様にリストに頂点を入れる。
(ステップ6) ステップ5で各 U に対して $\pi(n)$ まで入れた結果、最小のリスト数を出力し、終了。
(ステップ7) $\pi(n)$ までアルゴリズム P_Col と同様にリストに頂点を入れる。
(ステップ8) 使ったリスト数を出力し、終了。

3.3 アルゴリズムの正当性

本節では、アルゴリズム $P+1e\_Col$ の正当性の証明を行う。アルゴリズム A とアルゴリズム B を任意のアルゴリズムとする。アルゴリズム A で $\pi(1)$ から v までリストに入れた場合の各リスト内の最大頂点番号を降順に並べた数列を $(a_1,...,a_s)$ として、アルゴリズム B で $\pi(1)$ から v までリストに入れた場合の各リスト内の最大頂点番号を降順に並べた数列を $(b_1,...,b_t)$ とする。もし、$s<t$ ならば、$a_{s+1},...,a_t$ の値は 0 とする。$t<s$ の場合も同様に $b_{t+1},...,b_s$ の値を 0 とする。$a_k \leq b_k(1 \leq k \leq max\{s,t\})$ を満たすとき、$(a_1,...,a_s) \leq (b_1,...,b_t)$ と表すことにする。この時、以下の定理が成り立つので、アルゴリズム $P+1e\_Col$ では v まで入れた時点について考えている。

定理 1. 頂点 v までをリストに入れる 2 通りの方法アルゴリズム A,B があり、それぞれの各リスト内の最大頂点番号を降順に並べた数列を $a_1,...,a_s$、$b_1,....,b_t$ とする。残りの頂点をリストに追加したとき必要な最小のリスト数をそれぞれ、l_a,l_b とする。$(a_1,...,a_s) \leq (b_1,...,b_t)$ が成り立つとき、$l_a \leq l_b$ を満たす。

証明. アルゴリズム B について考える。頂点 $\pi(n)$ まで入れた時、それぞれの $b_j(1 \leq j \leq t)$ の後にリスト j に入った頂点の集合を C_j とする。この

時、C_j 内のどの頂点も、b_jより後にあり、かつ、b_j よりも大きい番号の頂点である。よって、C_jに含まれる任意の頂点は a_jより後にあり、a_jより大きい番号の頂点なので、アルゴリズム A で得られたリスト j の a_j の後に C_j を入れられる。したがって、$l_a = l_b$ が成り立つ。 □

以下で、アルゴリズム $P+1e\_Col$ のステップ 2、ステップ 3、ステップ 4、ステップ 5 の 4 つのケースに対してアルゴリズム $P+1e\_Col$ の正当性を証明する。

まず、ステップ 2 の u と v が異なるリストに入っている場合は、$\pi(1)$ から v まではアルゴリズム P_Col と同様にリストに頂点を入れたので、明らかに各リストの最大頂点番号は最小である。

次に、アルゴリズム $P+1e\_Col$ のステップ 3 のリスト $i-1$ とリスト i の頂点に対する二部グラフについて、u と v が非連結の場合における正当性の証明を行う。

ステップ 3 でリスト $i-1$ とリスト i の頂点を入れ替えても各リストの最大頂点番号は変化しない。よって、リスト $i-1$ とリスト i の頂点に対しての二部グラフについて、頂点 u, v が連結でない場合のアルゴリズム $P+1e\_Col$ の正当性の証明の方針として、u と v を 異なるリストに入るようにして、かつ、入れ替えてもリスト内に辺が存在しないことを示すことで正当性を証明できる。

頂点 v と連結でないリスト $i-1$ 内の最大番号の頂点を p とする。また、リスト $i-1$ 内の p の一つ後の頂点を a とする。同様に v と連結でないリスト i 内の最大番号の頂点を q とする。また、リスト i 内の q の一つ後の頂点を c とする。頂点 v はリスト i に入っているので、v を入れた時点のリスト $i-1$ 内の最大番号の頂点と必ず辺を持っている。

補題 1. リスト $i-1$ とリスト i 内の頂点に対する二部グラフにおいて、リスト $i-1$ 内の a 未満の番号の頂点は v と連結ではなく、リスト i 内の c 未満の番号の頂点も v と連結ではない。また、辺 ac が存在する。

証明. まず、リスト $i-1$ とリスト i について、以下が成り立つことを証明する。

(i) リスト $i-1$ 内のある頂点 $x(x \geq a)$ とリスト i 内のある頂点 $z(z \geq c)$ を端点として持つ辺に対して、頂点 x はリスト i 内のある頂点 $y(y < q)$ と辺を持たない。

(ii) リスト i 内のある頂点 $x'(x' \geq c)$ とリスト $i-1$ 内のある頂点 $z'(z' \geq a)$ を端点として持つ辺に対して、頂点 x' はリスト $i-1$ 内のある頂点 $y'(y' < p)$

と辺を持たない。

[(i) について]

辺 xy が存在すると仮定する。この時、性質 5 より、辺 xq が存在し、頂点 q が v と連結ということになる。しかし、頂点 q は v と連結にならないので、定義に反する。よって、辺 xy は存在しない。

[(ii) について]

辺 $x'y'$ が存在すると仮定する。この時、性質 5 より、辺 $x'p$ が存在し、頂点 p が v と連結ということになる。しかし、頂点 p は v と連結にならないので、定義に反する。よって、辺 $x'y'$ は存在しない。

次に、頂点 a, c について考える。頂点 a 未満 の番号の頂点は v と連結でないので、a は v と連結なリスト $i-1$ 内の頂点の中で最小の頂点番号である。また、同様に c は v と連結なリスト i 内の頂点の中で最小の頂点番号である。よって、a はリスト i 内の c 以上の番号のいずれかの頂点と辺を持つ。頂点 a がリスト i 内の頂点 $f(f \geq c)$ と辺を持つとする。この時、c についてもリスト $i-1$ 内の a 以上の番号のいずれかの頂点と辺を持っているので、性質 3 より、辺 ac が存在する。 □

補題 2. リスト $i-1$ とリスト i の頂点に対する二部グラフにおいて、$p < c$ かつ $q < a$ が成立する。

証明. 背理法を用いて証明をする。つまり、「$c < p$ または $a < q$」の時に矛盾が生じることを示せばよい。ここで、リスト $i-1$ 内の最大番号の頂点を b とする。

まず、$c < p$ の時、リスト $i-1$ とリスト i について、頂点番号の大きさは、仮定より、$q < c < p < a < b$ である。補題 1 より、頂点 p と c の間に辺は存在しない。仮定より $c < p$ であるため、$p \prec c$ であれば、辺 cp が存在することになる。したがって、$c \prec p$ である。また、リスト $i-1$ で p の後に a,b があるので、$c \prec p \prec a \prec b$ となる。この時、 permutation の配置が $c \prec a \prec b$ であり、頂点番号の大きさが $c < a < b$ であるので、辺 ac が存在しないことになる。しかし、補題 1 より、辺 ac は存在するので矛盾する。よって、$p < c$ である。

次に、$a < q$ の時について、同様に考えると頂点番号の大きさは、$p < a < q < c < v$ である。そして、 permutation の配置は $p \prec a \prec q \prec c \prec v$ となる。この時、 permutation の配置が $a \prec c \prec v$ であり、頂点番号の大きさが $a < c < v$ であるので、辺 ac が存在しないことになる。しかし、補題 1 より、辺 ac は存在するので矛盾する。よって、$q < a$ である。

以上より、リスト $i-1$ とリスト i の頂点に対する二部グラフについて、

$p < c$ かつ $q < a$ が成立する。 □

定理 2. リスト $i-1$ とリスト i の頂点に対する二部グラフについて、u と v が連結でない時、各リストの最大頂点番号を変化させずに u と v を異なるリストに入れることができる。

証明. 補題 1 より、リスト $i-1$ 内の a 未満の番号の頂点とリスト i 内の c 未満の番号の頂点は、v と連結でないので、v と連結な頂点との辺は存在しない。よって、入れ替えを行っても同一リスト内に辺は存在しない。また、補題 2 より、$p < c$ かつ $q < a$ が成り立つので、入れ替えた後もリスト $i-1$ 内の頂点もリスト i 内の頂点も増加順に格納されていることになる。よって、各リスト内は増加順に頂点が格納されている。 □

アルゴリズム $P+1e\_Col$ のステップ 4 のリスト i とリスト $i+1$ の頂点に対する二部グラフについて、リスト $i+1$ 内に u と連結な頂点が存在し、かつ、頂点 u とリスト $i+1$ 内の最大番号の頂点が非連結の場合におけるアルゴリズムの正当性の証明は、上記のアルゴリズム $P+1e\_Col$ のステップ 3 におけるアルゴリズムの正当性の証明と同様である。

最後に、アルゴリズム $P+1e\_Col$ のステップ 4 のリスト i とリスト $i+1$ の頂点に対する二部グラフについてリスト $i+1$ 内に u と連結な頂点が存在しない場合と、ステップ 5 のリスト i とリスト $i+1$ の頂点に対する二部グラフについて頂点 u とリスト $i+1$ 内の最大番号の頂点が連結の場合に対するアルゴリズムの正当性の証明を行う。

まず、u と v を異なるリストに入れるためには、u または v を異なるリストに移動する必要がある。以下で、v をリスト i 以外のリストに移動しても各リストの最大頂点番号は最小にはならず、v はリスト i に入れたままにする方が良いということを証明する。頂点 v からリスト 1 内のある頂点まで各リストの頂点を通る長さ $i-1$ のパスのうち、各リストの中で最大の番号の頂点からなるパスを δ とする。パス δ 上の頂点は、permutation の中で長さ i の減少部分列となるため、これらの頂点は必ず異なるリストに含まれる。これらの頂点が含まれるリストをリスト 1,..., リスト i とする。もし、パス δ がリスト 1 からリスト i までの最大番号の頂点からなるパスならば、リスト $i'(1 \leq i' \leq i)$ 内のパス δ 上の頂点は、番号 i' 以上のリストのどの頂点よりも大きい番号の頂点である。また、パス δ 内に、あるリストの最大番号の頂点でない頂点を含む場合についても以下の定理が成り立つ。ここで、リスト 1 からリスト $i-1$ までの各リストに対して、パス δ の頂点よりも後にある頂点の集合を D とする。

定理 3. 各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $c_1, ..., c_s$ とする。頂点集合 D の頂点を、D の頂点を含まないリストに入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $d_1, ..., d_t$ とする。この時、$(c_1, ..., c_s) \leq (d_1, ..., d_t)$ を満たす。

証明. 頂点集合 D に含まれる頂点が p 個のリストに入っているとする。頂点集合 D に含まれる頂点は同じリスト内の D に含まれる頂点 より前にある頂点よりも大きい番号の頂点を持つ。リスト $p+1$ の最大番号の頂点を a とする。頂点 a からリスト *1* までの各リストを通るパスを ϵ とする。パス ϵ 上の頂点の番号は全て a 以上である。よって、D に含まれる全ての頂点の番号は a よりも大きい。番号 $p+2$ 以上のリスト内の頂点はリスト $p+1$ の最大番号の頂点である a よりも小さい。よって、D に含まれる全ての頂点の番号は番号 $p+2$ 以上のリスト内のどの頂点よりも大きい。したがって、p 個のリストに入っている D に含まれる頂点は、D に含まれる頂点のみをアルゴリズム P_Col に従って入れた場合と同じ頂点の入れ方になる。以上より、p 個のリストに入っている D に含まれる頂点は最適な入れ方で入れられている。

次に、D に含まれる頂点を他のリストに入れる場合を考える。

まず、D に含まれる頂点が p 個のリストになるように、D に含まれる頂点を他のリストに入れる場合について考える。頂点集合 D に含まれる頂点を他のリストに入れる前は、D に含まれる頂点のリストへの入れ方は最適な入れ方であった。よって、D に含まれる頂点を他のリストに入れても各リストの最大頂点番号が最小になることはない。次に D に含まれる頂点を p 個より多くのリストに入れた場合について考える。D に含まれる頂点が存在するリスト $q(1 \leq q \leq p)$ の最大番号の頂点を b とする。頂点 b からリスト 1 までの各リストを通る長さ $q-1$ の減少列が存在する。したがって、b 以上の番号の頂点が入るリストが q 個は存在する。よって、D に含まれる頂点を含むリストの中でリスト q の最大頂点番号を b より小さい頂点番号にすることはできない。したがって、$(c_1, ..., c_s) \leq (d_1, ..., d_t)$ が成り立つ。 □

以下で、正当性の証明の方針を述べる。頂点 u と v を異なるリストに入れるために、u または v をリスト i 以外のリストに移動する必要がある。しかし、上記より、v はリスト i に入れたままにする。頂点 u をリスト i 以外のリストに移動することを考えるが、u だけでなく、u と他の頂点も合わせてリストを移動させた方が良い可能性がある。よって、リストの移動の方法として、u を含む頂点集合を番号 i 未満のリストに入れる方法と

番号 $i+1$ 以上のリストに入れる方法の 2 つを考える。つまり、u を含む頂点集合を番号 i 以上のリストから番号 i 未満のリストに入れる場合について、そして、その逆の番号 i 以下のリストから番号 $i+1$ 以上のリストに入れる場合を考える。最初に、u を含む頂点集合をどのように取れば、各リストの最大頂点番号を最小にできるのかを 定理 1 に基づいて示す。

次に、u を含む頂点集合を番号 $i+1$ 以上のリストまたは、番号 i 未満のリストに移動する場合を考える。しかし、アルゴリズム $P+1e\_Col$ のステップ 5 の場合では、どのような u を含む頂点集合を取れば、彩色数を求められるかを判定できない場合がある。よって、まずは、u を含む頂点集合を番号 $i+1$ 以上のリストに入れる場合について考え、各リストの最大頂点番号が最小になるような u を含む頂点集合の入れ方 (最適な入れ方) を求める。また、u を含む頂点集合を番号 i 未満のリストに入れる場合について考え、各リストの最大頂点番号が最小になるような u を含む頂点集合の入れ方を求める。

リスト i 内の v を除く任意の頂点 $w(w \geq u)$ に対して、リスト i 内の w 以下の番号の頂点全てを含んでいる頂点集合を取るとする。そして、その頂点集合を番号 $i+1$ 以上のリストへ最適な移動をする場合、その頂点集合は、その頂点集合の w と u を含む真部分集合を移動する場合よりも、各リストの最大頂点番号が小さくなることを示す。

最後に、u を含む頂点集合に対して、番号 $i+1$ 以上のリストに入れる最適な入れ方をした方が番号 i 未満のリストに入れる最適な入れ方をするよりも各リストの最大頂点番号が小さくなることを示す。

その結果、リスト i 内の w 以下の番号の頂点全てを含む各 u を含む頂点集合に対する各リストの最大頂点番号が最小になるリストへの入れ方は、アルゴリズム $P+1e\_Col$ のステップ 5、ステップ 6 の入れ方であることが証明され、正当性を証明できる。

以下では、全て、リスト $i-1$ とリスト i の頂点に対する二部グラフにおいて、u と v が連結であり、かつ、リスト i とリスト $i+1$ の頂点に対する二部グラフにおいて、u と辺を持つ頂点がリスト $i+1$ 内に存在しない、または、u とリスト $i+1$ の最大番号の頂点が連結であるものとする。

定理 4. リスト i 内の任意の頂点 x からリスト *1* 内の頂点まで各リストの頂点を通る長さ $i-1$ の任意のパスを η とする。頂点 x を番号 i 未満のリストに入れた場合、パス η 上の少なくとも一つの頂点は必ず、番号 i 以上のリストに存在する。

証明. パス η がリスト i からリスト *1* 内の頂点までの各リストの頂点を含

んでいるならば、η 上の頂点は permutation の中で長さ i の減少列である。よって、この長さ i の減少列のどの 2 個の頂点も同じリストに入れることはできない。その減少列の頂点全てを入れるのに i 個のリストが必要なので、少なくとも一つの頂点は番号 i 以上のリストに入ることになる。 □

定理 5. 頂点 u と辺を持つリスト $i+1$ 内の頂点の中で最小の番号の頂点を b とする。リスト $i+1$ 内の最大番号の頂点 c と辺を持つリスト i 内の頂点の中で最大の番号の頂点を a とする。この時、リスト i 内の $u \prec x \prec a$ を満たす任意の頂点 x は u と連結であり、リスト $i+1$ 内の $b \prec y \prec c$ を満たす任意の頂点 y は u と連結である。

証明. リスト i 内で $u \prec f \prec a$ を満たす u と連結でない最大番号の頂点 $f(f \neq u)$ が存在すると仮定する。リスト i 内の $f \prec p \prec a$ を満たすある頂点 p とリスト $i+1$ 内の $b \prec q \prec c$ を満たすある頂点 q を端点として持つ辺を考える。この時、性質 5 より、q はリスト i 内の $u \prec r \prec f$ を満たす頂点 r と辺を持たない。よって、リスト i 内の f 未満の番号の頂点は c と連結でない。しかし、リスト i 内の u 以上 f 未満の番号の頂点は c と連結なので、矛盾する。したがって、そのような f は存在しない。次にリスト $i+1$ 内で $b \prec f' \prec c$ を満たす u と連結でない最大番号の頂点 f' を存在すると仮定する。この場合も上記と同様にして、そのような f' は存在しないことが証明できる。 □

まず、u を番号 $i+1$ 以上のリストに入れる場合を考える。リスト i に含まれる頂点からリスト 1 までの各リストの頂点を通る長さ $i-1$ のパスを考える。このようなパスのいずれかに含まれる頂点の集合から、パス δ に含まれる頂点を除いた頂点集合を V'_c とする (図 5)。頂点 u を含む V'_c の任意の頂点集合を C とする。

以下で、C を番号 $i+1$ 以上のリストに入れる場合について考える。C に含まれるある頂点から番号 i 以上の各リストを通る任意のパスを考える。C に含まれる頂点を番号 $i+1$ 以上のリストに入れる場合、そのパス上の C の要素数以下の数の番号 $i+1$ 以上のリストに含まれるそのパス上の頂点を番号 i 未満のリストに入れられる。以下では、そのようなパスに C に含まれる頂点が 1 つのみの場合について述べる。番号 $i+1$ 以上のリスト内の頂点集合から番号 i 以下のリストに入れる頂点を除いた頂点集合を V_c とする。以下で、C をどのように選べば、各リストの最大頂点番号が最小になるのかを示す。C 内の頂点のうち、最小番号のリスト j に存在する頂点を頂点番号の小さい順に $g_1, ..., g_m$ とする。頂点集合 $g_1, ..., g_m$

を G_c と表す。頂点集合 G_c に含まれる頂点と辺を持ち、V_c' に含まれるリスト $j+1$ 内の頂点を頂点番号の小さい順に $h_1, ..., h_l$ とする。頂点集合 $h_1, ..., h_l$ を H と表す。C に含まれる頂点からリスト i までの各リストを通るパスを考え、そのパス上の頂点でリスト i に含まれる頂点集合を U_c とする。

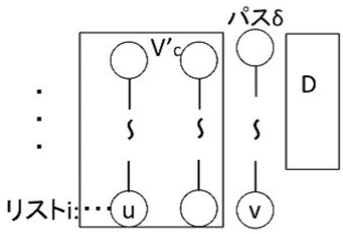

図 5: 番号 i 以下のリスト内の V_c'

補題 3. $g_s < q(1 \leq s \leq m)$ かつ、$q \prec g_s$ を満たす頂点 $q(q \in (V_c \cup C - G_c))$ はどの s に対しても存在しない。また、$h_t < r(1 \leq t \leq l)$ かつ、$r \prec h_t$ を満たす頂点 $r(r \in V_c \cup (C - G_c) \cup H)$ はどの t に対しても存在しない。

証明. $g_s < q(1 \leq s \leq m)$ かつ、$q \prec g_s$ を満たす頂点 q が存在すると仮定する。その時、頂点 q は $V_c \cup (C - G_c)$ に含まれる頂点なので、番号 $j+1$ 以上のリストに存在する。しかし、q を入れた時点で、q を入れたリストより小さい番号のリストには q 以上の番号の頂点が入っていなくては、そのリストに q が入らない。よって、リスト j 内には q 以上の頂点が存在し、その後で q よりも小さい g_s をリスト j に入れることは不可能であり、g_s の定義に矛盾する。したがって、そのような頂点 q は存在しない。

また、同様に、$h_t < r(1 \leq t \leq l)$ かつ、$r \prec h_t$ を満たす頂点 r は存在しないことを示せる。 □

次の補題で C を番号 $i+1$ 以上のリストに入れるよりも $C - G_c \cup H$ を番号 $i+1$ 以上のリストに入れる方が各リストの最大頂点番号が小さくなることを示す。

補題 4. $V_c \cup (C - G_c) \cup H$ および、$V_c \cup C$ をアルゴリズム P_Col に従って頂点をリストに入れた時の各リストの最大頂点番号を降順にした数列をそれぞれ、$c_1, ..., c_s$、$d_1, ..., d_t$ とする。この時、$(c_1, ..., c_s) \leq (d_1, ..., d_t)$ を満たす。

証明. $V_c \cup C$ をアルゴリズム P_Col に従ってリストに入れたとする。この時、リスト $k(1 \leq k \leq t)$ に含まれる頂点集合を W_k とする。補題 3 と性質 1 より、$V_c \cup C$ において、G_c は W_1 に含まれている。もし、リスト *1* 内の G_c を H に置き換えてもリスト 1 内で辺が存在しないならば、置き換えた後の状態が $V_c \cup (C - G_c) \cup H$ の各リスト内に辺が存在しないリストへの格納になっている。したがって、$h_l < g_m$ を示せば、他のリストについては同じ頂点なので $(c_1, ..., c_s) \leq (d_1, ..., d_t)$ を示せる。

以下で、リスト *1* 内の G_c を H に置き換えてもリスト *1* 内で辺が存在しないことを示す。ここで G_c と H の関係について、まず、h_l に注目する。g_m と h_l の間に辺は存在しないと仮定する。頂点 h_l と辺を持つ G_c の g_m 以外のリスト j の頂点を g_x とする。そして、g_m と辺を持つ H の h_l 以外の頂点を h_y とする。この時、性質 3 より h_l と g_m の間に辺が存在することになり、仮定に矛盾する。よって、g_m と h_l の間に辺が存在する。したがって、$h_l < g_m$ かつ $g_m \prec h_l$ となり、$h_1 < h_l < g_m$ が成り立つ。次に h_1 に注目する。上記と同様に、頂点 h_1 と辺を持つ G_c の頂点と、g_1 と辺を持つ H の頂点を考え、性質 3 より、h_1 と g_1 の間に辺が存在する。よって、$h_1 < g_1$ かつ $g_1 \prec h_1$ となり、$g_1 \prec h_1 \prec h_l$ が成り立つ。この時、 permutation の中で g_m が存在する箇所として以下の 2 つが考えられる。

[(i) $g_1 \prec g_m \prec h_1 \prec h_l$ **の場合**]

$V_c \cup C$ におけるリストについて考える。以下で、リスト 1 に入ることができる $V_c \cup (C - G_c)$ の頂点について述べる。

$h_1 < g_1$ より、G_c に含まれる頂点は全て h_1 より大きい頂点番号を持つ。そして、 permutation の中の g_1 から h_1 の間において、G_c に含まれる頂点以外でリスト *1* に入れられるのは g_1 以上の番号の $V_c \cup (C - G_c)$ に含まれる頂点である。しかし、補題 3 より、 permutation の中で h_1 より前に h_1 より大きい番号を持つ $V_c \cup (C - G_c) \cup H$ に含まれる頂点は存在しない。よって、 permutation において、g_1 から h_1 の間にある $V_c \cup (C - G_c)$ に含まれる頂点はリスト *1* には入らない。

また、$h_l < g_m$ より、H に含まれる全ての頂点は g_m より小さい頂点番号を持つ。そして、 permutation の中の g_m から h_l の間において、リスト *1* に入れられるのは g_m 以上の番号の $V_c \cup (C - G_c)$ に含まれる頂点である。しかし、補題 3 より、 permutation の中で h_l より前に h_l より大きい番号を持つ $V_c \cup (C - G_c) \cup H$ に含まれる頂点は存在しない。よって、permutation において、g_m から h_l の間にある $V_c \cup (C - G_c)$ に含まれる頂点はリスト *1* には入らない。したがって、$V_c \cup C$ において、リスト 1 に

入ることのできる $V_c \cup (C - G_c)$ の頂点は g_1 より前と h_l より後にしかないことが分かる。

[**(ii)**$g_1 \prec h_1 \prec g_m \prec h_l$ **の場合**]

$V_c \cup C$ におけるリストについて考える。以下で、$V_c \cup C$ において、リスト 1 に入ることができる頂点について述べる。

$V_c \cup C$ で考えると (i) と同様にして、permutation の中の g_1 から h_1 と g_m から h_l の間に関しては $V_c \cup (C - G_c)$ の頂点はリスト 1 に入らないと示せる。

Permutation の中の h_1 から g_m について考える。この場合は、リスト *1* に $V_c \cup (C - G_c)$ に含まれる頂点が存在しても、G_c に含まれる頂点とも、H に含まれる頂点とも辺を持たないことを示せば、G_c を H に 置き換えても、リスト内に辺が存在しないことを証明できる。まず、 permutation の中の h_1 から g_m の間に存在し、リスト *1* に入る $V_c \cup (C - G_c)$ に含まれる頂点 f が存在すると仮定する。補題 3 より、頂点 f は、 permutation において、f より後にある H に含まれる全ての頂点よりも小さい頂点番号である。 Permutation において、f の前にある H に含まれる頂点との関係について考える。頂点 f は f より前にある H に含まれるある頂点 h_z より小さい頂点番号であると仮定する。h_z と辺を持つ G_c に含まれるある頂点を $g_{z'}$ とすると、$h_z < g_{z'}$ かつ $g_{z'} \prec h_z$ となる。この時、f と h_z についても考えると $f < h_z < g_{z'}$ かつ $g_{z'} \prec h_z \prec f$ となり、$g_{z'}$ と f の間に辺が存在し、同じリスト *1* に入ることができず f の定義に矛盾する。よって、頂点 f は f より前にあるどの H に含まれる頂点よりも大きい頂点番号である。したがって、h_1 から g_m の間のリスト *1* に入る $V_c \cup (C - G_c)$ に含まれる頂点は G_c を H に置き換えてもリスト 1 内で辺を持たない。

以上より、$V_c \cup C$ において、リスト 1 に入ることのできる $V_c \cup C$ の考慮すべき頂点は g_1 より前と h_l より後の頂点となる。ここで (i)、(ii) の $V_c \cup C$ におけるリスト 1 について考えると g_1 より前の頂点は全て h_1 より前にあり h_1 未満、そして、g_m より後にある頂点は全て h_l より後にあり、かつリスト 1 で g_m より後にあるので h_l 以上である。よって、置き換えてもリスト 1 に辺は存在しない。 □

定理 6. C を番号 $i+1$ 以上のリストに入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $f_1, ..., f_t$ とする。U_c を番号 $i+1$ 以上のリストに入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $e_1, ..., e_s$ とする。この時、$(e_1, ..., e_s) \leq (f_1, ..., f_t)$ を満たす。

証明. $(C - G_c) \cup H$ を番号 $i+1$ 以上のリストに入れた場合の各リストの最

大頂点番号を降順にした数列を $c_1, ..., c_r$ とする。この時、$c_1, ..., c_i$、$f_1, ..., f_i$ については、パス δ の定義と 定理 3 より、リスト *1* からリスト i の最大番号の頂点は他のリストに移動しないので、$(c_1, ..., c_i) \leq (f_1, ..., f_i)$ を満たす。そして、補題 4 では、番号 $i+1$ 以上のリストに焦点をあてて考えていた。よって、補題 4 より $(c_{i+1}, ..., c_r) \leq (f_{i+1}, ..., f_t)$ が成り立つ。C を $(C-G_c) \cup H$ とすると、新たな G_c と H に対して 補題4が成り立つ。これを $(C-G_c) \cup H$ が U_c になるまで繰り返していくと、$(e_1, ..., e_s) \leq (f_1, ..., f_t)$ が成り立つ。 □

以下では、u を含むリスト i 内の頂点集合 U を番号 $i+1$ 以上のリストに入れる場合について、各リストの最大頂点番号が最小になるような U の最適な選び方を求める。

U に含まれる頂点から番号 $i+1$ 以上の各リストの頂点を通るパス上の頂点集合を考える。その頂点集合から、U 内の最大番号の頂点の 後の頂点から番号 $i+1$ 以上の各リストの頂点を通るパス上の頂点集合と U を除いた頂点集合を V_a とする。リスト $i+1$ 内の V_a に含まれている頂点集合を T とする (図 6)。

V_a の部分集合を S とする。U を番号 $i+1$ 以上のリストに入れる時、S をリスト i に入れるようにする。なぜなら、U のある頂点からリスト 1 までの各リストを通るパスは長さ $i-1$ の減少列となっている。よって、U が番号 $i+1$ 以上のリストに入り、S に含まれる頂点を番号 i 未満のリストに入れようとしてもその頂点よりも大きい番号の頂点が $i-1$ 個存在するので、S に含まれる頂点はリスト i に入れるしかない。U に含まれる頂点から番号 $i+1$ 以上の各リスト内の 1 つの頂点を通るあるパスに 2 つ以上の S に含まれる頂点が存在すると仮定する。そのパス内の U に含まれる頂点からリスト 1 までの各リストを通るパスが存在している。よって、そのパス内に 2 つ以上の S に含まれる頂点が存在すれば、番号 i 以下のリストに入れるべき頂点集合の中に長さ $i+1$ の減少列ができてしまう。したがって、そのパスの中には S に含まれる頂点は一つのみである。以下で、リスト i に入れる S をどのように選べば、各リストの最大頂点番号が最小になるのかを考える。

頂点集合 S に含まれる頂点を含むリストの番号が最大の頂点の集合を P とする。P に含まれる頂点が入っているリストを k とする。V_a の頂点のうち、リスト $k-1$ に属し、P に含まれる頂点と辺を持つ頂点の集合を Q とする。

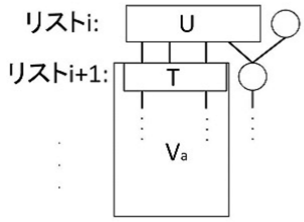

図 6: 番号 i 以上のリストの例

補題 5. U を番号 $i+1$ 以上のリストに入れ、$(S-P)\cup Q$ を番号 i 以下のリストに入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $c_1, ..., c_s$ とする。U を番号 $i+1$ 以上のリストに入れ、S を番号 i 以下のリストに入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $d_1, ..., d_t$ とする。この時、$(c_1, ..., c_s) \leq (d_1, ..., d_t)$ を満たす。

証明. まず、U を番号 $i+1$ 以上のリストに入れ、S または $(S-P)\cup Q$ を番号 i 以下のリストに入れる場合、番号 i 以下のリストの最大頂点番号は変化しないので番号 $i+1$ 以上のリストに関して考慮する。S を番号 i 以下のリストに入れる場合を考える。その時、S に含まれる頂点からリスト *1* までの各リストを通るパスについて、番号 i 以下のリスト内にはその S に含まれる頂点よりも大きい番号の頂点が $i-1$ 個存在する。よって、S に含まれる頂点はリスト i に入ることになる。$(S-P)\cup Q$ についても同様である。S と $(S-P)\cup Q$ の違いは P を含むか Q を含むかの違いだけである。$(S-P)\cup Q$ をリスト i に入れる時、もし、Q に含まれるある頂点がリスト i 内の U に含まれない頂点と辺を持つならば、その頂点をリスト i 以外のリストに入れなければならない。しかし、その時は P に含まれる頂点もその頂点と辺を持っている。頂点 $b(b\in P)$ と頂点 $c(c\in Q)$ を含む V_a 内のリスト $i+1$ からリスト k までの長さ $k-i$ の任意のパス ζ について考える。この時のパス ζ 内の最大番号の頂点はリスト $i+1$ 内の頂点であり、最小番号の頂点は b である。S をリスト i に入れ、U を番号 $i+1$ 以上のリストに入れる場合、番号 $i+1$ 以上のリストにおけるパス ζ の頂点で変化するのは、パス ζ の最小番号の頂点が c になることである。$(S-P)\cup Q$ をリスト i に入れ、U を番号 $i+1$ 以上のリストに入れる場合、番号 $i+1$ 以上のリストにおけるパス ζ の最小番号の頂点は b のままである。ここで、両者ともパス ζ 上の最小番号の頂点以外は同じ頂点で

ある。よって、S をリスト i に入れる場合と $(S-P)\cup Q$ をリスト i に入れる場合の違いは、P に含まれるある頂点と Q に含まれるある頂点を含む V_a 内のリスト $i+1$ からリスト k までの長さ $k-i$ のパスの最小の番号がその Q に含まれる頂点になるかその P に含まれる頂点になるかの違いである。したがって、$b < c$ であるので、$(c_1, ..., c_s) \leq (d_1, ..., d_t)$ が成り立つ。 □

定理 7. U を番号 $i+1$ 以上のリストに入れ、リスト $i+1$ 内の V_a に含まれている頂点集合 T を番号 i 以下のリストに入れた場合の、各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $e_1, ..., e_s$ とする。U を番号 $i+1$ 以上のリストに入れ、S を番号 i 以下のリストに入れた場合の、各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $f_1, ..., f_t$ とする。この時、$(e_1, ..., e_s) \leq (f_1, ..., f_t)$ を満たす。

証明. U を番号 $i+1$ 以上のリストに入れ、$(S-P)\cup Q$ を番号 i 以下のリストに入れた場合の、各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $c_1, ..., c_r$ とする。この時、補題 5 より、$(c_1, ..., c_r) \leq (f_1, ..., f_t)$ が成り立つ。S を $(S-P)\cup Q$ とすると、新たな P と Q に対して 補題 5 が成り立つ。これを $(S-P)\cup Q$ が T になるまで繰り返していくと、$(e_1, ..., e_s) \leq (f_1, ..., f_t)$ が成り立つ。 □

以下では、C に含まれる頂点から番号 $i+1$ 以上の各リストを通る任意のパス内に C に含まれる頂点が複数存在する場合を考える。

定理 8. C に含まれる頂点から番号 $i+1$ 以上の各リストを通る任意のパスに C に含まれる頂点が複数存在する場合を考える。C に含まれる頂点を番号 $i+1$ 以上のリストに入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $d_1, ..., d_t$ とする。U_c に含まれる頂点を番号 $i+1$ 以上のリストに入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $c_1, ..., c_s$ とする。この時、$(c_1, ..., c_s) \leq (d_1, ..., d_t)$ を満たす。

証明. C に含まれる頂点を番号 $i+1$ 以上のリストに入れる時、番号 $i+1$ 以上のリスト内の頂点から番号 i 以下のリストに入れる頂点の集合を M とする。C に含まれる頂点と M に含まれる頂点を含むリスト 1 から番号 i 以上のリストまで各リストの頂点を一つ含むように通る任意のパス ξ を考える。まず、パス ξ 上で、C に含まれる頂点の中で最大番号の頂点を p とする。パス ξ 上で、p と隣接していて、かつ、p 未満の番号の頂点を q とする。そして、パス ξ 上で、M に含まれる頂点の中で最小の頂点を

xとして、xと隣接していて、かつ、x以上の番号の頂点をyとする。補題5の証明より、xを含む頂点集合Mを番号i以下のリストに入れるよりも、$(M-\{x\})\cup\{y\}$を番号i以下のリストに入れる方が各リストの最大頂点番号が小さくなる。よって、次はyをxとして、この操作をパスξ上のMに含まれる頂点が一つ減るまで繰り返す。また、補題4の証明より、Cを番号$i+1$以上のリストに入れるよりも、$(C-\{p\})\cup\{q\}$を番号$i+1$以上のリストに入れる方が各リストの最大頂点番号が小さくなる。よって、次はqをpとして、この操作をパスξ上のCに含まれる頂点が一つ減るまで繰り返す。

上記の操作を任意のパス上にCとMに含まれる頂点がそれぞれ高々一つになるまで繰り返すことで 定理6と同様にして、$(c_1,...,c_s)\leq(d_1,...,d_t)$が成立する。 □

以上より、番号$i+1$以上のリストに入れるuを含む頂点集合はリストi内から選べば各リストの最大頂点番号を最小にできることが分かる。

以下では、uを含む頂点集合Uの選び方について述べる。定理8より、uを含む頂点集合はリストiの頂点のみから選ぶ方が各リストの最大頂点番号を最小にできることが分かっている。ここで、同一リスト内の2頂点間の全ての頂点からなる頂点集合をリスト内の連続した頂点集合と呼ぶ。それ以外のものを不連続であると呼ぶ。リストi内の最小の番号の頂点からvを除く任意の頂点$w(w\geq u)$までの頂点全てを含む連続な頂点集合をXとする。Xのuとwを含む真部分集合をYとする。以下で、Yを番号$i+1$以上のリストに入れるよりもXを番号$i+1$以上のリストに入れた方が各リストの最大頂点番号が小さくなることを証明する。

証明の方針として、Xを番号$i+1$以上のリストに入れる場合とYを番号$i+1$以上のリストに入れる場合を比較して、前者の方が各リストの最大頂点番号が最小になることを示す。

Xを番号$i+1$以上のリストに入れた場合と、Yを番号$i+1$以上のリストに入れた場合で、共通していることについて考える。Xに含まれる頂点と辺を持ち、かつ、リストi内のwより後の頂点とも辺を持つリスト$i+1$内の頂点集合をFとする。

補題 6. Yに含まれる頂点と辺を持ち、かつ、リストi内のwより後の頂点と辺を持つリスト$i+1$内の頂点集合はFと等しい。

証明. 頂点集合Fは、wを含むXに含まれる頂点とも辺を持ち、さらにwより後の頂点とも辺を持つリスト$i+1$の頂点集合である。よって、性

質 5 より F に含まれる頂点は必ず w と辺を持つ。そして、Y に含まれる頂点には w が含まれている。したがって、Y に含まれる頂点と辺を持ち、かつ、リスト i 内の w より後の頂点と辺を持つリスト $i+1$ 内の頂点集合は F と等しい。 □

定理 9. X に含まれる頂点を番号 $i+1$ 以上のリストに入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $c_1, ..., c_s$ とする。Y に含まれる頂点を番号 $i+1$ 以上のリストに入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $d_1, ..., d_t$ とする。この時、$(c_1, ..., c_s) \leq (d_1, ..., d_t)$ を満たす。

証明. 定理 7 より、X(または Y) をリスト $i+1$ に入れ、X(または Y) に含まれる頂点と辺を持ち、w より後の頂点とは辺を持たないリスト $i+1$ 内の頂点をリスト i に入れることを考える。この時、リスト $i+1$ 内で F に含まれる頂点と X に含まれる頂点が辺を持つ場合、F に含まれる頂点は異なるリストに入ることになる。補題 6 より Y に含まれる頂点をリスト $i+1$ に入れる場合も同様である。

Y をリスト $i+1$ に入れる場合を考える。X に含まれていて、Y に含まれていないリスト i 内の頂点を z とする。Y に含まれる頂点と辺を持ち、w より後の頂点とは辺を持たないリスト $i+1$ 内のある頂点と z が辺を持つと、その頂点をリスト i に入れる場合にリスト i 内で辺を持つことになる。よって、z が異なるリストに入ることになる。しかし、z は番号 $i+1$ 以上のリストには移動しない頂点である。よって、z を番号 i 以下のリストに入れる。この時、z からリスト *1* までの各リストを通るパスが存在し、そのパスの頂点は減少列になっている。よって、z を番号 i 以下のリストに入れても番号 $i+1$ 以上のリストに z 以上の番号の頂点が入る。X に含まれる頂点をリスト $i+1$ に入れる場合より多くの頂点を番号 $i+1$ 以上のリスト に入れても各リストの最大頂点番号が最小になることはないので $(c_1, ..., c_s) \leq (d_1, ..., d_t)$ が成立する。 □

以上より、u を番号 $i+1$ 以上のリストに移動する場合に、各リストの最大頂点番号が最小になる移動の方法が分かった。

次に、u を番号 i 未満のリストに入れる場合について考える。頂点 u を含む番号 i 以上のリスト内の頂点集合を $V'_{c'}$ とする (図 7)。頂点 u を含む $V'_{c'}$ の任意の頂点集合を C' とする。
C' に含まれるある頂点からリスト 1 までの各リストを通る任意のパスを考える。C' に含まれる頂点を番号 i 未満のリストに入れる場合、そのパ

ス上の C' の要素数以下の数の番号 i 未満のリストに含まれるそのパス上の頂点を番号 i 以上のリストに入れられる。以下では、そのようなパスに C' の頂点が1つのみ含まれている場合について述べる。頂点集合 C' 内の頂点のうち、最大番号のリスト j' に存在する頂点集合を P' とする。P' に含まれる頂点と辺を持ち、$V'_{c'}$ に含まれるリスト $j'-1$ 内の頂点集合を Q' とする。頂点集合 C' に含まれる頂点からリスト i までの各リストを通るパスについて、リスト i 内でそのパス上の頂点に含まれる頂点集合を $U_{c'}$ とする。

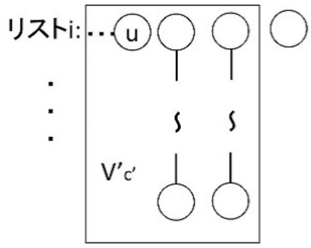

図 7: 番号 i 以上のリスト内の $V'_{c'}$

補題 7. $(C'-P')\cup Q'$ を番号 i 未満のリストに入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $c_1,...,c_s$ とする。C' を番号 i 未満のリストに入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $d_1,...,d_t$ とする。この時、$(c_1,...,c_s)\leq(d_1,...,d_t)$ を満たす。

証明. パス δ の定義と 定理3より、C' または $(C'-P')\cup Q'$ を番号 i 未満のリストに入れる場合、番号 i 以下のリストの最大頂点番号は変化しないので番号 $i+1$ 以上のリストに関して考える。

C' と $(C'-P')\cup Q'$ の違いは P' を含むか Q' を含むかの違いだけである。Q' に含まれるある頂点と辺を持つ番号 $j'-1$ 未満のリスト内の頂点とは P' に含まれるある頂点とも辺を持つ。リスト i からリスト j' までの各リストを通り、頂点 $b(b\in P')$ と頂点 $c(c\in Q')$ を含む長さ $j'-i-1$ のパス ζ について考える。この時のパス ζ 内の最大番号の頂点はリスト i に含まれ、最小番号の頂点は b である。C' を番号 i 未満のリストに入れると、番号 i 以上のリストにおけるパス ζ の最小番号の頂点が c になる。$(C'-P')\cup Q'$ を番号 i 未満のリストに入れると、番号 i 以上のリストにおけるパス ζ の最小番号の頂点は b のままである。よって、C' を 番号 i

未満のリストに入れる場合と $(C'-P')\cup Q'$ を番号 i 未満のリストに入れる場合の違いは、リスト i からリスト j' までの各リストを通り、P' に含まれるある頂点と Q' に含まれるある頂点を含む長さ $j'-i-1$ のパスの最小の番号がその Q' に含まれる頂点になるか、その P' に含まれる頂点になるかの違いである。そのパスの他の最小番号の頂点以外は同じ番号の頂点である。したがって、$b<c$ であるので、$(c_1,...,c_s)\leq(d_1,...,d_t)$ が成り立つことを示せる。 □

定理 10. C' を番号 i 未満のリストに入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $f_1,...,f_t$ とする。$U_{c'}$ を番号 i 未満のリストに入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $e_1,...,e_s$ とする。この時、$(e_1,...,e_s)\leq(f_1,...,f_t)$ を満たす。

証明. $(C'-P')\cup Q'$ を番号 i 未満のリストに入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $c_1,...,c_r$ とする。この時、補題 7 より、$(c_1,...,c_r)\leq(f_1,...,f_t)$ が成り立つ。C' を $(C'-P')\cup Q'$ とすると、新たな P' と Q' に対して 補題 7 が成り立つ。これを $(C'-P')\cup Q'$ が $U_{c'}$ になるまで繰り返していくと、$(e_1,...,e_s)\leq(f_1,...,f_t)$ が成り立つ。 □

以下では、u を含むリスト i 内の頂点集合 U' を番号 i 未満のリストに入れる場合について、各リストの最大頂点番号が最小になるような U' の最適な入れ方を求める。U' に含まれる頂点からリスト 1 までの各リストの頂点を通るパス上の頂点の集合からパス δ 上の頂点と U' を除いた頂点集合 V_b を考える。リスト $i-1$ 内の V_b に含まれている頂点集合を T' とする (図 8)。V_b 内の部分集合を S' とする。

以下で、S' を番号 i 以上のリストに入れる場合について考える。番号 i 以上のリスト内の頂点集合から番号 i 未満のリストに入れる頂点を除いた頂点集合を V_d とする。以下で、S' をどのように選べば、各リストの最大頂点番号が最小になるのかを示す。S' 内の頂点のうち、最小番号のリスト k' に存在する頂点を頂点番号の小さい順に $g'_1,...,g'_{m'}$ とする。頂点集合 $g'_1,...,g'_{m'}$ を G'_c と表す。頂点集合 G'_c に含まれる頂点と辺を持ち、V_b に含まれるリスト $k'+1$ 内の頂点を頂点番号の小さい順に $h'_1,...,h'_{l'}$ とする。頂点集合 $h'_1,...,h'_{l'}$ を H' と表す。

次の補題で S' を番号 i 以上のリストに入れるよりも $(S'-G'_c)\cup H'$ を番号 i 以上のリストに入れる方が各リストの最大頂点番号が小さくなることを示す。

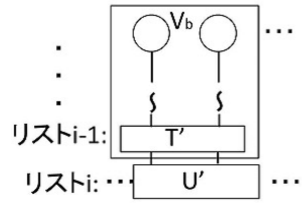

図 8: 番号 i 以下のリスト内の V_b

補題 8. $V_d \cup (S' - G'_c) \cup H'$ および、$V_d \cup S'$ をアルゴリズム P_Col と同様にリストに入れた時の各リストの最大頂点番号を降順にした数列をそれぞれ、$c_1, ..., c_s$、$d_1, ..., d_t$ とする。この時、$(c_1, ..., c_s) \leq (d_1, ..., d_t)$ を満たす。

証明. 補題 4 と同様の方法で $(c_1, ..., c_s) \leq (d_1, ..., d_t)$ が成立することを示せる。

定理 11. U' を番号 i 未満のリストに入れる時、S' を番号 i 以上のリストに入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $f_1, ..., f_t$ とする。U' を番号 i 未満のリストに入れる時、T' を番号 i 以上のリストに入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $e_1, ..., e_s$ とする。この時、$(e_1, ..., e_s) \leq (f_1, ..., f_t)$ を満たす。

証明. 定理 6 と同様の方法で $(e_1, ..., e_s) \leq (f_1, ..., f_t)$ が成立することを示せる。

以下で、C' からリスト 1 までの各リストを通るパス上に C' に含まれる頂点が複数存在する場合を考える。

定理 12. C' に含まれる頂点からリスト *1* までの各リストを通るパスに C' に含まれる頂点が複数存在する場合を考える。C' に含まれる頂点を番号 i 未満のリストに入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $d_1, ..., d_t$ とする。$U_{c'}$ に含まれる頂点を番号 i 未満のリストに入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $c_1, ..., c_s$ とする。この時、$(c_1, ..., c_s) \leq (d_1, ..., d_t)$ を満たす。

証明. C' に含まれる頂点を番号 i 未満のリストに入れる時、番号 i 未満のリスト内の頂点から番号 i 以上のリストに入れる頂点の集合を M とす

る。C' に含まれる頂点と M に含まれる頂点を含むリスト 1 から番号 i 以上のリストまで各リストの頂点を一つ含むように通る任意のパス ξ を考える。まず、パス ξ 上で、C' に含まれる頂点の中で最小番号の頂点を p とする。パス ξ 上で p と隣接していて、かつ、p 以上の番号の頂点を q とする。そして、パス ξ 上で、M に含まれる頂点の中で最大の頂点を x、x と隣接していて、かつ、x 未満の番号の頂点を y とする。この時、補題 8 の証明より、M に含まれる頂点を番号 i 以上のリストに入れるよりも、$(M-\{x\})\cup\{y\}$ を番号 i 以上のリストに入れる方が各リストの最大頂点番号が小さくなる。よって、次は y を x として、この操作をパス ξ 上の M に含まれる頂点が一つ減るまで繰り返す。また、補題 7 の証明より、C' を番号 i 未満のリストに入れるよりも、$(C'-\{p\})\cup\{q\}$ を番号 i 未満のリストに入れる方が各リストの最大頂点番号が小さくなる。よって、次は q を p として、この操作をパス ξ 上の C' に含まれる頂点が一つ減るまで繰り返す。

上記の操作を任意のパス上で、C' と M に含まれる頂点がそれぞれ高々一つになるまで繰り返すことで 定理 10 と同様にして、$(c_1,...,c_s)\leq(d_1,...,d_t)$ が成立する。 □

以上より、以降は u を含む頂点集合を番号 i 未満のリストに入れる場合は、リスト i 内の u を含む頂点を番号 i 未満のリストに入れると考える。

以下で、u を含む頂点集合を番号 i 未満のリストに入れる場合と、番号 $i+1$ 以上のリストに入れる場合を比較する。

定理 13. リスト i 内の v を除く任意の頂点 $w(w\geq u)$ に対し、リスト i 内の w 以下の番号の頂点全てを含む頂点集合を U_a とする。リスト i 内の u と w を含む U_a の任意の真部分集合を U_b とする。U_a を番号 $i+1$ 以上のリストに最適な入れ方で入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $c_1,...,c_s$ とする。U_b を番号 i 未満のリストに最適な入れ方で入れた場合の各リストの最大頂点番号を降順にした数列を $d_1,...,d_t$ とする。この時、$(c_1,...,c_s)\leq(d_1,...,d_t)$ を満たす。

証明. 定理 7 より、U_a を番号 $i+1$ 以上のリストに入れる場合の最適な入れ方は、U_a をリスト $i+1$ に入れ、U_a に含まれる頂点と辺を持ち、w の後のリスト i 内の頂点とは辺を持たないリスト $i+1$ 内の頂点集合 T をリスト i に入れるようにする方法である。

定理 11 より、U_b を番号 i 未満のリストに入れる場合の最適な入れ方は、U_b をリスト $i-1$ に入れ、U_b に含まれる頂点と辺を持つリスト $i-1$ 内の

頂点集合 T' をリスト i に入れるようにする方法である。

パス δ の定義と 定理 3 より、このように頂点を入れ替えても番号 i 以下のリストの最大番号の頂点は変化しないので、$(c_1, ..., c_i) \leq (d_1, ..., d_i)$ が成り立つ。よって、番号 $i+1$ 以上のリストに ついて考える。まず、U_b を番号 i 未満のリストに入れる場合について述べる。頂点集合 T' に含まれる頂点と辺を持つ リスト i 内の w より後の頂点集合を S_p とする。T' に含まれる頂点がリスト i に入る時、リスト i 内で辺が存在してしまうので S_p は番号 $i+1$ 以上のリストに入る。次に、U_a を番号 $i+1$ 以上のリストに入れる場合について述べる。w と辺を持ち、w の一つ後のリスト i 内の頂点 $x(\in S_p)$ とも辺を持つリスト $i+1$ 内の頂点集合を R とする。頂点集合 U_a をリスト $i+1$ に入れるとリスト $i+1$ 内で R に含まれる頂点と辺を持つことになる。よって、R は番号 $i+2$ 以上のリストに入れる。

以下で、U_a を番号 $i+1$ 以上のリストに入れる場合と U_b を番号 i 未満のリストに入れる場合の比較をする。U_bを番号 i 未満 のリストに入れる場合は x、そして、R に含まれるある頂点 y、そして、番号 $i+2$ 以上の各リストを通る頂点を含むパスは番号 $i+1$ 以上のリストに入る。一方、U_a を番号 $i+1$ 以上のリストに入れる場合は、w、そして、y、そして、番号 $i+2$ 以上の各リストを通る頂点を含むパスが番号 $i+1$ 以上のリストに入る (図 9, 図 10, 図 11)。ここで、それらのパスの番号 $i+2$ 以上の各リストの頂点についてはどちらも同じ頂点である。よって、それらのパスを考えるとリスト $i+1$ におけるパスの頂点は、x と w で w の方が小さいので、$(c_{i+1}, ..., c_s) \leq (d_{i+1}, ..., d_t)$ が成り立つ。 □

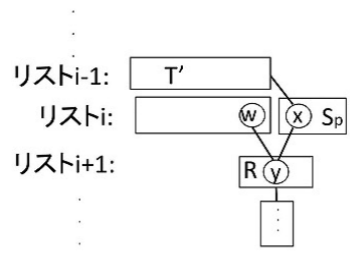

図 9: パスの状態 (初期)

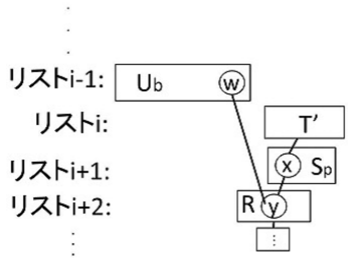

図 10: パスの状態 (U_b移動)

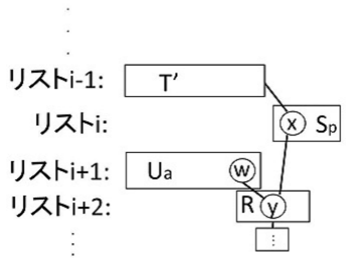

図 11: パスの状態 (U_a 移動)

以上より、u を含む頂点集合を番号 $i+1$ 以上のリストに入れれば各リストの最大頂点番号が最小になることが分かった。

アルゴリズム $P+1e\_Col$ のステップ 4 のリスト i とリスト $i+1$ の頂点に対する二部グラフについて、リスト $i+1$ 内に u と連結な頂点が存在しない場合は、リスト $i+1$ 内には u と辺を持つ頂点は存在しない。もし、リスト $i+1$ 内に u より大きい番号の頂点が存在するならば、u のみをリスト $i+1$ に入れれば各リスト内で辺が存在せず、各リストの最大頂点番号も変わらない。もし、リスト $i+1$ 内には u 未満の番号の頂点しか存在しないならば、 permutation の配置は、リスト $i+1$ 内の最大番号の頂点の後に u、そしてリスト i 内の u より後の頂点となる。よって、リスト i 内の u より後の頂点もリスト $i+1$ 内の頂点と辺を持たない。リスト i 内の任意の頂点 $w(u \leq w < v)$ 以下の全ての頂点を含む頂点集合をリスト $i+1$ に入れてもリスト $i+1$ 以外のリストの最大頂点番号は変化しない。よって、リスト i 内の u と u より大きい番号の頂点を入れるより u のみをリスト $i+1$ に入れた方が各リストの最大頂点番号が最小になる。したがって、アルゴリズム $P+1e\_Col$ のステップ 4 のリスト $i+1$ 内に u と連

結な頂点が存在しない場合は、u のみをリスト $i+1$ に入れれば、各リストの最大頂点番号が最小になる。

以上より、アルゴリズム $P+1e\_Col$ の正当性の証明ができた。

以下で、アルゴリズム $P+1e\_Col$ の計算時間の評価を行う。アルゴリズム $P+1e\_Col$ のステップ 5, ステップ 6 で U を列挙する計算時間が $O(n)$ かかり、各 U に対して、 permutation の頂点を入れるのに、$O(n\log n)$ 時間かかるので、アルゴリズム $P+1e\_Col$ の計算時間は $O(n^2\log n)$ となる。

以下で考察を述べる。アルゴリズム $P+1e\_Col$ が計算時間 $O(n^2\log n)$ で頂点彩色問題を解けることが分かった。しかし、以下の予想が証明できれば、もっと効率の良い計算時間になると考えられる。また、アルゴリズム $P+1e\_Col$ のステップ 5 の (ii) で頂点を入れ直すことで最適なリストの入れ方をしているが、移動する必要のある頂点だけ移動すれば、入れ直す必要はないと考えている。

(予想) リスト i 内の u 以上 v 未満の番号の頂点について、その頂点から番号 $i+1$ 以上の各リストを通る最長のパスの長さを求める。以下の図 12 のように、リスト i 内の頂点 $x(u \leq x < v)$ からリスト i 内の頂点 $y(x \leq y < v)$ までの頂点が同じパスの長さであるとする。この時、U を選ぶときに、U に含まれる最大番号の頂点として、x を選べば、x より大きく y 以下の番号の頂点は x の場合よりも各リストの最大頂点番号が小さくなることはないので考えなくても良い。また、y よりも後の頂点から番号 $i+1$ 以上の各リストを通る最長のパスの長さが、x から y の間の頂点から番号 $i+1$ 以上の各リストを通る最長のパスの長さより長いならば、x から y のいずれかを選んでも各リストの最大頂点番号は変化しない。

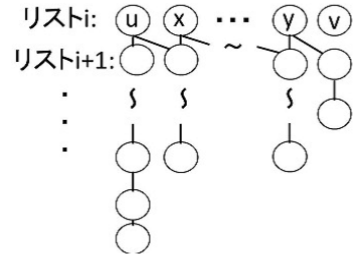

図 12: リスト i の頂点からのパスの状態

4　おわりに

本研究で、置換+1e グラフに対する頂点彩色問題を計算時間 $O(n^2 \log n)$ で解くことができることを示した。今後の課題としては、考察で述べたことを証明して置換+1e グラフに対する頂点彩色問題をもっと効率的に解くことができるかどうかの解明する、また、$k \geq 2$ の場合の置換+ke グラフの頂点彩色問題の計算複雑さを明らかにすることが考えられる。

参考文献

[1] Richard M. Karp, “Reducibility Among Combinatorial Problems, ” Complexity of Computer Computations, pp.85-103, 1972.

[2] Y.Takenaga and K.Higashide,“Vertex Coloring of Comparability+ke and -ke Graphs, ” 32nd International Workshop on Graph-Theoretic Consepts in Computer Science, LNCS 4271, pp.102-112, 2006.

[3] Daniel Marx, “ Parameterized coloring problems on chordal graphs, ” Lecture Notes in Computer Science Volume 3162, pp.83-95, 2004.

[4] Leizhen Cai, “ Parameterized complexity of vertex colouring, ” Discrete Applied Mathematics 127, pp.415-429, 2003.

[5] Martin Chrles Golumbic, “ Algorithmic graph theory and perfect graphs second edition, ” Elservier, 2004.