

修 士 論 文 の 和 文 要 旨

研究科・専攻	大学院 情報理工学研究科 情報・通信工学専攻 博士前期課程		
氏 名	大坪隼弥	学籍番号	1431023
論 文 題 目	非線形数値シミュレーションによるせん断流れが持つ交換型不安定性の抑制効果の検証		

要 旨

流体がせん断流れの中にあるとき、流体の示す様々な変動が抑制されることが線形理論により知られている。そのような変動として交換型不安定性がある。線形理論において、せん断流れの下で交換型不安定性が抑制される条件はすでに知られている。本研究の目的は、非線形性を導入した場合にも同様に抑制が見られるかを非線形シミュレーションにより検証することである。

本研究では、2次元非圧縮流体について渦度方程式と連続の式を導出し、非線形シミュレーションを行うことで、せん断流れ中の交換型不安定性の非線形な振る舞いについて調べた。非周期的なせん断流れを考えると、周期境界条件をそのまま用いることはできない。そこで、中心計算領域に対して隣接領域がせん断流れにあわせてずれていくことで周期性を保つ **shearing box** 境界条件を用いた。

線形理論で不安定性が抑制されるパラメータにおいて、密度の初期擾乱を変更しながらシミュレーションを行った。1つの波数で表される初期擾乱を与えた場合、線形理論と一致する結果が得られた。一方、同じ初期擾乱に複数の波数成分からなるノイズを加えてシミュレーションしたとき、2次的に発生した Kelvin-Helmholtz 不安定性が成長し乱流となった。

本研究では、線形理論における抑制条件の下でも非線形シミュレーションでは抑制されない場合があることが確認された。今後の課題としては、基本擾乱の振幅とノイズの大きさを変えながらシミュレーションを行って抑制の有無を観察し、非線形シミュレーションにおける抑制条件を示すことが挙げられる。また、本研究で行ったシミュレーションでは空間解像度が粗く乱流に対する継続的なシミュレーションは行うことができなかった。解像度を上げてシミュレーションを行い乱流になった後の振る舞いを観察することも今後の課題である。

平成27年度
修士論文

非線形数値シミュレーションによるせん断
流れが持つ交換型不安定性の抑制効果の
検証

平成28年3月15日

電気通信大学
情報理工学研究科

1431023 大坪 隼弥

指導教員 龍野 智哉 准教授
副指導教員 仲谷 栄伸 教授

目次

1	はじめに	3
2	数理モデル	3
2.1	支配方程式の導出	4
2.1.1	渦度方程式	4
2.1.2	密度に関する連続の式	7
2.1.3	渦度の流れ関数に関する Poisson 方程式	8
2.2	境界条件	9
3	方程式の離散化	9
3.1	時間差分	10
3.2	Poisson 括弧の離散化	12
3.3	粘性項の離散化	12
3.4	Poisson 方程式の離散化	13
3.5	Shearing box 境界条件の離散化	13
4	線形化した方程式と非線形シミュレーション結果の比較	16
4.1	線形理論での常微分方程式の導出	17
4.2	常微分方程式の漸近的振る舞い	19
4.3	シミュレーション結果との比較	20
5	非線形シミュレーションによる不安定性の抑制効果の検証	21
5.1	パラメータと初期値の選択	21
5.2	$\alpha = 1$ におけるシミュレーション	22
5.2.1	振幅 10^{-2} の擾乱	22
5.2.2	ノイズを加えた振幅 10^{-2} の擾乱	22
5.2.3	振幅 10^{-1} の擾乱	23
5.3	$\alpha = 0.5$ のシミュレーション	25
5.3.1	ノイズを加えた振幅 10^{-2} の擾乱	25
5.3.2	振幅 10^{-1} の擾乱	25
5.4	結果のまとめ	27

6	まとめ	28
付録 A	Shearing box 境界条件における補間の精度	30
付録 B	移流方程式の差分解法による位相速度の遅れ	32
B.1	移流方程式	32
B.2	数値解	33
B.2.1	誤差	33
B.2.2	解析解との速度差	33
付録 C	ρ_1 および ϕ の振幅の関係	39
C.1	ρ_1 および ϕ の方程式	39
C.2	$\hat{\phi}(t)$ と $\hat{\rho}_1(t)$ の関係	40

1 はじめに

密度差のある流体が層をなしていて、密度で変化する力を受けている状態を考える．例えば、密度の低い流体の上に密度の高い流体があり、下向き重力がかかっている場合である．このとき、密度の高い流体は重力により下方向に移動しようとし、密度の低い流体は逆に浮力により上方向に移動しようとする．もし、流体の層が水平であれば力が釣り合うが、界面に摂動があるとき、密度の微小な乱れから変化が成長していく．これを交換型不安定性という．

流体が密度勾配に垂直なせん断流れの中にあるとき、交換型不安定性が抑制される条件が線形理論により確認されている [1]．本研究の目的は、流体運動の非線形性を考慮に入れた場合に、せん断流れが持つ交換型不安定性の抑制効果が線形理論における場合と変化するかを検証することである．線形分布したせん断流れを持つ 2 次元非圧縮性流体の運動の支配方程式として、流体の運動方程式である Navier-Stokes 方程式を簡略化した渦度方程式、密度に関する連続の式、および流れ関数に関する Poisson 方程式の導出を行った．境界条件として、せん断流れの下で周期性を満たすように、Shearing Box 境界条件を用いた [3]．その連立方程式を差分法により解く非線形シミュレーションプログラムを作成した．

第 2 章では現象の支配方程式の導出を行った．第 3 章では方程式の離散化について議論した．第 4 章では線形理論による結果と比較することでプログラムの妥当性を示した．第 5 章では初期値やパラメータを変えながら非線形シミュレーションを行い、抑制効果の検証を行った．第 6 章では結果についてまとめ、今後の研究の展開について述べた．

2 数理モデル

密度が y 方向に勾配を持ち、外力として一定の重力 g が y の負方向にかかる状態では交換型不安定性が起こる．その状態に加え、図 1 のように x 方向のせん断流れが存在する 2 次元流体に関する数理モデルを導出する．

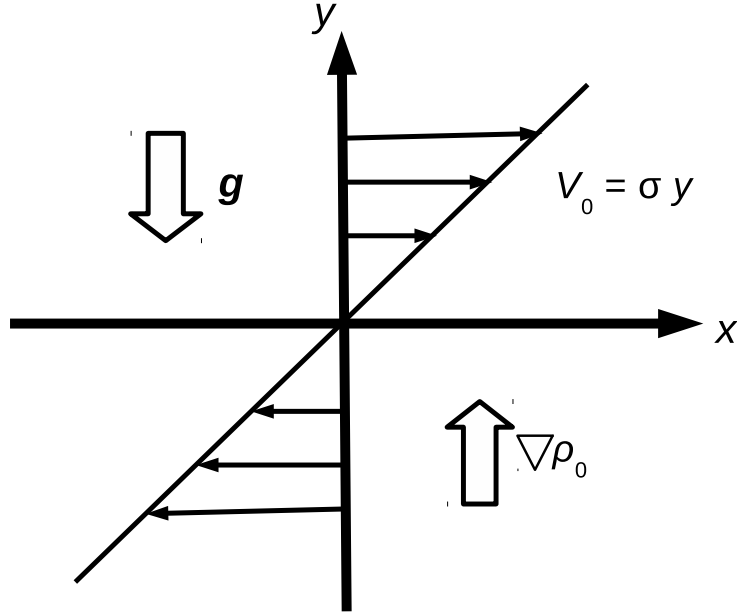


図 1: せん断流れ，重力および密度の勾配の概略図

2.1 支配方程式の導出

2.1.1 渦度方程式

流体の運動を表す方程式として，Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (1)$$

がある．ここで，時刻 t ，位置 \mathbf{x} として，流速 $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ ，圧力 $p(t, \mathbf{x})$ ，密度 $\rho(t, \mathbf{x})$ ，動粘性係数 ν であり，重力加速度 \mathbf{g} は大きさ g で y の負の方向である．

ρ について平衡密度 ρ_0 およびゆらぎ $\rho_1(t, \mathbf{x})$ を導入し

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (2)$$

として表す．また， p について ρ_0 と重力による圧力 $p_0(y)$ とゆらぎ $p_1(t, \mathbf{x})$ を導入し

$$p = p_0 + p_1 \quad (3)$$

として表す．このとき，

$$\mathbf{g} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 \quad (4)$$

である．密度および圧力のゆらぎが平衡量に対して十分に小さく，

$$\begin{aligned}\rho_1 &\ll \rho_0 \\ p_1 &\ll p_0\end{aligned}\tag{5}$$

であるとして，Boussinesq 近似 [2] を行う．仮定から ρ_1 および p_1 の 2 次以上の項を無視すれば，式 (1) 中の圧力項と外力項の和は

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} &= -\frac{1}{\rho_0 + \rho_1}\nabla(p_0 + p_1) + \mathbf{g} \\ &\approx -\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0^2}\right)(\nabla p_0 + \nabla p_1) + \mathbf{g} \\ &\approx -\frac{1}{\rho_0}\nabla p_1 + \frac{\rho_1}{\rho_0}\mathbf{g}\end{aligned}\tag{6}$$

と近似され，よって，式 (1) は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p_1 + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\rho_1}{\rho_0}\mathbf{g}\tag{7}$$

のようにできる．

式 (7) の両辺に $\nabla \times$ を作用させれば，ベクトル公式

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{A} = \nabla \left(\frac{1}{2} A^2 \right) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A})\tag{8}$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0\tag{9}$$

より，

$$\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{v})}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})) = \nu \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla \times \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \mathbf{g} \right)\tag{10}$$

となる．

せん断流れについて，流れの方向は x 軸と平行，空間変化は y について直線的に変化し，時間変化はしないとすれば，せん断流の速度 v_0 は，定数 σ を用いて

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} \sigma y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\tag{11}$$

と表される (図 1)．以降 $v_0 = \sigma y$ とする． \mathbf{v}_1 を

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ 0 \end{pmatrix}\tag{12}$$

として，渦度 $\nabla \times \mathbf{v}$ からせん断流れによる渦度 $\nabla \times \mathbf{v}_0$ を除いたものを ω とする．このとき， ω は

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v} - \nabla \times \mathbf{v}_0 \quad (13)$$

$$= \nabla \times \mathbf{v}_1 \quad (14)$$

である．以降， ω を単に渦度と呼び，その z 成分を ω_z とする．渦度 ω の導入により，式 (10) は

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{v}_0)}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times (\omega - \sigma \hat{z})) = \nu \nabla^2 (\omega - \sigma \hat{z}) + \nabla \times \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \mathbf{g} \right) \quad (15)$$

とできる．ここで， \hat{z} は z 方向の単位ベクトルである．さらに， \mathbf{v}_0 が時間で一定， σ が定数であることを考えれば，

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times (\omega - \sigma \hat{z})) = \nu \nabla^2 \omega + \nabla \times \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \mathbf{g} \right) \quad (16)$$

となる．

式 (16) の左辺第 2 項は，ベクトル公式

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (17)$$

より，

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{v} \times (\omega - \sigma \hat{z})) &= ((\omega - \sigma \hat{z}) \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\omega - \sigma \hat{z}) \\ &\quad + \mathbf{v}(\nabla \cdot (\omega - \sigma \hat{z})) - (\omega - \sigma \hat{z})(\nabla \cdot \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (18)$$

となり，式 (18) の右辺各項と \hat{z} との内積を考えると，2 次元流れより成り立つ

$$\hat{z} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (19)$$

及び，非圧縮流れより成り立つ

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (20)$$

より，

$$\hat{z} \cdot ((\omega - \sigma \hat{z}) \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0 \quad (21)$$

$$\hat{z} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\omega - \sigma \hat{z}) = \mathbf{v} \cdot \nabla(\omega_z - \sigma) \quad (22)$$

$$\hat{z} \cdot \mathbf{v}(\nabla \cdot (\omega - \sigma \hat{z})) = 0 \quad (23)$$

$$\hat{z} \cdot (\omega - \sigma \hat{z})(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (24)$$

であるから，結局，

$$\hat{z} \cdot (\nabla \times (\mathbf{v} \times (\omega - \sigma \hat{z}))) = -\mathbf{v} \cdot \nabla(\omega - \sigma \hat{z}) \quad (25)$$

である .

v_1 についての流れ関数 ϕ を考える . v_1 と ϕ の関係は

$$\mathbf{v}_1 = \nabla \phi \times \hat{\mathbf{z}} = {}^t \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial x}, 0 \right) \quad (26)$$

となる . これは式 (20) を満たす . 式 (25) 右辺を展開し変形すれば ,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla (\omega - \sigma \hat{\mathbf{z}}) &= (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1) \cdot \nabla \omega \\ &= v_0 \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v_{1x} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v_{1y} \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \\ &= v_0 \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \\ &= v_0 \frac{\partial \omega_z}{\partial x} - \{\phi, \omega_z\} \end{aligned} \quad (27)$$

と表される . ここで , $\{f, g\}$ は Poisson 括弧であり , Jacobian

$$J(f, g) = \left| \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right| \quad (28)$$

に等しい .

式 (16) の右辺第 4 項と $\hat{\mathbf{z}}$ の内積は ,

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \mathbf{g} \right) = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \quad (29)$$

である .

以上より , 渦度方程式

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \omega_z}{\partial x} - \{\phi, \omega_z\} = \nu \nabla^2 \omega_z - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \quad (30)$$

が導出された .

2.1.2 密度に関する連続の式

密度に関する連続の式は ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (31)$$

である . 式 (31) の第 1 項は ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \quad (32)$$

式 (31) の第 2 項について ,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}) &= \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_1 + \rho_1 \mathbf{v}_0) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_1 \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial(\rho_1 v_0)}{\partial x} \\
&= \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \rho_1}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \\
&= -\{\phi, \rho_1\} + v_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial x}
\end{aligned} \tag{33}$$

であり , また

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) &= \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1 + \rho_0 \mathbf{v}_0) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial(\rho_0 v_0)}{\partial x} \\
&= -\rho'_0 \frac{\partial \phi}{\partial x}
\end{aligned} \tag{34}$$

である . ここで , ρ'_0 は ρ_0 の y 微分である . すなわち背景密度の重力方向の傾きであり , 不安定性を引き起こすパラメータである . 以降では ρ'_0 が定数である場合を考える .

以上より , 密度に関する連続の式 (31) から ,

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} - \{\phi, \rho_1\} = \rho'_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{35}$$

が導出された .

2.1.3 渦度の流れ関数に関する Poisson 方程式

式 (14) と式 (26) より ,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= \nabla \times (\nabla \phi \times \hat{\mathbf{z}}) \\
&= {}^t \left(\frac{\partial}{\partial y} \cdot 0 - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \cdot 0, \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \\
&= {}^t \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z}, -\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right)
\end{aligned} \tag{36}$$

z 成分のみに注目して ,

$$\omega_z = -\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = -\nabla^2 \phi \tag{37}$$

となるから，Poisson 方程式

$$\nabla^2 \phi = -\omega_z \quad (38)$$

が導出された．

2.2 境界条件

計算領域を運動する流体について，周期性を持っていると考える．つまり，右の境界から出た流体は左の境界から入り，上の境界から出た流体は下の境界から入るような条件である．以降計算領域を

$$0 \leq x \leq L_x, \quad 0 \leq y \leq L_y \quad (39)$$

とする．

x 方向の境界において，関数 $f(x, y)$ について周期境界条件

$$f(x, y) = f(x + L_x, y) \quad (40)$$

を用いる．

y 方向について，せん断流れ (11) は周期境界条件を満たさない．時刻 $t = 0$ で y 方向について周期境界条件を満たすと仮定すると，

$$f(x, y) = f(x, y \pm L_y) \quad (t = 0) \quad (41)$$

である． $t = 0$ で隣接領域内 $(x, y \pm L_y)$ の流体は， $t = t_1$ において (x, y) の流体に対して $\pm \sigma L_y t_1$ だけせん断流れにより x 方向に移動している．よって， y 方向の境界条件は，せん断流れによる移動量だけ隣接領域を移動させればよく，

$$f(x, y) = f(x \pm \sigma L_y t, y \pm L_y) \quad (t > 0) \quad (42)$$

である．これが shearing box 境界条件である [3]．

3 方程式の離散化

n ステップ目の時刻 t を t^n と表す． t についての任意の関数 y について，

$$y^n := y(t^n) \quad (43)$$

と定義する．時間ステップの幅を

$$t^{n+1} - t^n = \Delta_1, \quad t^n - t^{n-1} = \Delta_2 \quad (44)$$

とする .

xy 平面上の矩形の計算領域を , 刻み幅 h_x, h_y で $(N_x + 1) \times (N_y + 1)$ のグリッドに分割する . 領域上で座標が最小の点を (x_0, y_0) とし , そこから x 正方向 i 番目のグリッドの x 座標を x_i , y 正方向 j 番目のグリッドの y 座標を y_j と表す . このとき ,

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + ih_x & i &= 0, 1, 2, \dots, N_x \\ y_j &= y_0 + jh_y & j &= 0, 1, 2, \dots, N_y \end{aligned} \quad (45)$$

である . x, y についての任意の関数 f について ,

$$f_{i,j} := f(x_i, y_j) \quad (46)$$

と定義する .

3.1 時間差分

ω_z と ρ_1 の時間差分について第 1 ステップに前進 Euler 法 , それ以降に 2 次の Adams-Bashforth 法 [5] が用いられている .

前進 Euler 法による第 1 ステップは次のとおり .

$$\omega_{z,i,j}^1 = \omega_{z,i,j}^0 + \Delta_1 \left(-v_{0j} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \Big|_{i,j}^0 + \{\phi, \omega_z\}_{i,j}^0 + (\nabla^2 \omega_z)_{i,j}^0 - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \Big|_{i,j}^0 \right) \quad (47)$$

$$\rho_{1,i,j}^1 = \rho_{1,i,j}^0 + \Delta_1 \left(v_{0j} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \Big|_{i,j}^0 + \{\phi, \rho\}_{i,j}^0 + \rho_0' \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{i,j}^0 \right) \quad (48)$$

ここで , $v_0 = v_0(y)$ であるので , v_0 は x 方向に一様であり , $v_{0j} = v_0(y_j)$ を表す .

Adams-Bashforth 法は , 微分方程式を積分に置き換え , Lagrange 補間多項式により近似する方法である . 微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \quad (49)$$

を考える . これは ,

$$y^{n+1} = y^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t)) dt \quad (50)$$

と同値である . ここで , \tilde{f} を $(t^n, f(t^n, y^n))$ と $(t^{n-1}, f(t^{n-1}, y^{n-1}))$ が与えられた Lagrange 補間多項式とすれば ,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t, y(t)) &= \frac{t - t^{n-1}}{t^n - t^{n-1}} f(t^n, y^n) + \frac{t - t^n}{t^{n-1} - t^n} f(t^{n-1}, y^{n-1}) \\ &= \frac{t - t^{n-1}}{\Delta_2} f(t^n, y^n) - \frac{t - t^n}{\Delta_2} f(t^{n-1}, y^{n-1}) \end{aligned} \quad (51)$$

である．これを用いて，式 (50) を近似すれば，

$$y^{n+1} \approx y^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \tilde{f}(t, y(t)) dt \quad (52)$$

となる．積分部分は

$$\begin{aligned} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \tilde{f}(t, y(t)) dt &= \frac{f(t^n, y^n)}{\Delta_2} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t - t^{n-1}) dt - \frac{f(t^{n-1}, y^{n-1})}{\Delta_2} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t - t^n) dt \\ &= \frac{f(t^n, y^n)}{\Delta_2} \left[\frac{1}{2} (t^{n+1} - t^{n-1})^2 - \frac{1}{2} (t^n - t^{n-1})^2 \right] \\ &\quad - \frac{f(t^{n-1}, y^{n-1})}{\Delta_2} \frac{1}{2} (t^{n+1} - t^n)^2 \\ &= \frac{\Delta_1(\Delta_1 + 2\Delta_2)}{2\Delta_2} f(t^n, y^n) - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta_2} f(t^{n-1}, y^{n-1}) \end{aligned} \quad (53)$$

となるから，結局， y の差分近似式は

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= y^n + c_1 f(t^n, y^n) + c_2 f(t^{n-1}, y^{n-1}) \\ c_1 &= \frac{\Delta_1(\Delta_1 + 2\Delta_2)}{2\Delta_2}, \quad c_2 = -\frac{\Delta_1^2}{2\Delta_2} \end{aligned} \quad (54)$$

となる．

ω_z と ρ_1 について，式 (54) を適用した式はそれぞれ次の通り．

$$\begin{aligned} \omega_{z,i,j}^{n+1} &= \omega_{z,i,j}^n + c_1 \left(-v_{0j} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \Big|_{i,j}^n + \{\phi, \omega_z\}_{i,j}^n + (\nabla^2 \omega_z)_{i,j}^n - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \Big|_{i,j}^n \right) \\ &\quad + c_2 \left(-v_{0j} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \Big|_{i,j}^{n-1} + \{\phi, \omega_z\}_{i,j}^{n-1} + (\nabla^2 \omega_z)_{i,j}^{n-1} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \Big|_{i,j}^{n-1} \right) \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \rho_{1,i,j}^{n+1} &= \rho_{1,i,j}^n + c_1 \left(v_{0j} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \Big|_{i,j}^n + \{\phi, \rho\}_{i,j}^n + \rho'_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{i,j}^n \right) \\ &\quad + c_2 \left(v_{0j} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \Big|_{i,j}^{n-1} + \{\phi, \rho\}_{i,j}^{n-1} + \rho'_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{i,j}^{n-1} \right) \end{aligned} \quad (56)$$

3.2 Poisson 括弧の離散化

このプログラムでは, Poisson 括弧の離散化について Arakawa スキーム [6] が用いられている. Arakawa スキームによる離散化は, 離散化前の渦度方程式が満たすエントロピー保存の性質を保つ. エントロピーとは渦度の 2 乗の空間積分である. Jacobian $J(f, g) = \{f, g\}$ について 3 つの形

$$J^{++} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \quad (57)$$

$$J^{+\times} = \frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{\partial g}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(f \frac{\partial g}{\partial x} \right) \quad (58)$$

$$J^{\times+} = \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (59)$$

を考える. 3 つの式それぞれを 2 次の中心差分式に離散化した後, 式 (57)-(59) 各々の $1/3$ の和, つまり, 平均をとれば,

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{i,j} = & -\frac{1}{12h_x h_y} \{ (g_{i,j-1} + g_{i+1,j-1} - g_{i,j+1} - g_{i+1,j+1})(f_{i+1,j} - f_{i,j}) \\ & + (g_{i-1,j-1} + g_{i,j-1} - g_{i-1,j+1} - g_{i,j+1})(f_{i,j} - f_{i-1,j}) \\ & + (g_{i+1,j} + g_{i+1,j+1} - g_{i-1,j} - g_{i-1,j+1})(f_{i,j+1} - f_{i,j}) \\ & + (g_{i+1,j-1} + g_{i+1,j} - g_{i-1,j-1} - g_{i-1,j})(f_{i,j} - f_{i,j-1}) \\ & + (g_{i+1,j} - g_{i,j+1})(f_{i+1,j+1} - f_{i,j}) \\ & + (g_{i,j-1} - g_{i-1,j})(f_{i,j} - f_{i-1,j-1}) \\ & + (g_{i,j+1} - g_{i-1,j})(f_{i-1,j+1} - f_{i,j}) \\ & + (g_{i+1,j} - g_{i,j-1})(f_{i,j} - f_{i+1,j-1}) \} \end{aligned} \quad (60)$$

となり近似された, これが Arakawa スキームによる Jacobian である.

Arakawa スキームにより離散化された Jacobian は, Jacobian の性質

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (61)$$

を厳密に満たすため, エントロピーの保存が丸め誤差程度で保証される.

3.3 粘性項の離散化

粘性項のラプラシアン $\nabla^2 f$ に対しては, 二次中心差分

$$(\nabla^2 f)_{i,j}^n = \frac{f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{h_y^2} \quad (62)$$

が用いられている。

3.4 Poisson 方程式の離散化

式 (38) を中心差分近似すると，

$$\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{h_y^2} = -\omega_{z\,i,j} \quad (63)$$

となる。

$\phi_{i,j}$ および $\omega_{z\,i,j}$ について次のようなベクトル Φ, Ω を考える。

$$\begin{aligned} \Phi &= {}^t(\phi_{0,0}, \phi_{0,1}, \dots, \phi_{0,N_y}, \phi_{1,0}, \dots, \phi_{N_x,N_y}) \\ \Omega &= {}^t(\omega_{z\,0,0}, \omega_{z\,0,1}, \dots, \omega_{z\,0,N_y}, \omega_{z\,1,0}, \dots, \omega_{z\,N_x,N_y}) \end{aligned} \quad (64)$$

式 (63) に，境界条件を与えることで，連立 1 次方程式

$$A\Phi = \Omega \quad (65)$$

となる疎行列 A が定まる。

本研究では実疎行列の連立 1 次方程式反復解法ライブラリ Lis^{*1}[4] が提供する Biconjugate Gradient(BiCG) 法を用いて式 (65) を解いた。

BiCG 法のアルゴリズム [7] をアルゴリズム 1 に示す。

3.5 Shearing box 境界条件の離散化

式 (42) で表される shearing box 境界条件を，離散化されたグリッド上での計算が可能になるように離散化する。

$\sigma \geq 0$ の場合を考える。計算領域とその隣接領域がずれていく様子を図 2 に示す。計算領域に対する上側隣接領域の速度 V および下側隣接領域の速度 $-V$ は

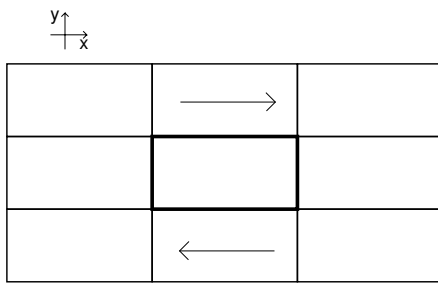
$$V = \sigma L_y \quad (66)$$

である。以降，グリッド j を $-1, N_y + 1$ まで拡張する。離散化した式で $0 \leq j \leq N_y$ での値を計算するためには， $-1 \leq j \leq N_y + 1$ での値を用いることから， $j = N_y + 1, j = -1$ での値を $j = 1, j = N_y - 1$ の値よりそれぞれ知ることが出来れば，離散化した式を計算していくことが可能となる。図 3 はグリッド $(0, 0)$ 近傍を拡大したものである。ここで，

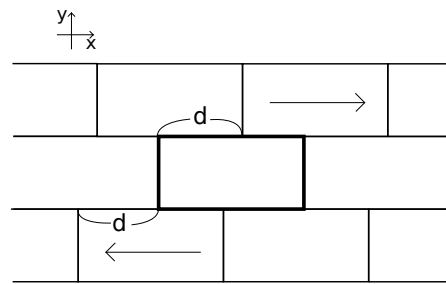
^{*1} The Scalable Software Infrastructure Project において西田晃 (九州大学) らにより作成された，実疎行列の線形方程式及び固有値問題を解く反復法ライブラリ。Version 1.0.0 は 2005 年 9 月 20 日に公開された。2016 年 1 月 25 日現在の最新版は Version 1.5.62。

アルゴリズム 1 連立一次方程式 $Ax = b$ に対する BiCG 法

x_0 : 初期ベクトル
 $r_0 \leftarrow b - Ax_0$
choose r_0^* such that $r_0^* \cdot r_0 \neq 0$
 $p_0 \leftarrow r_0$
 $p_0^* \leftarrow r_0^*$
while $\|r_k\| > \epsilon \|b\|$ **do**
 $q_k \leftarrow Ap_k$
 $q_k^* \leftarrow A^H p_k^*$
 $\alpha_k \leftarrow \frac{r_k^* \cdot r_k}{p_k^* \cdot q_k}$
 $x_{k+1} \leftarrow x_k + \alpha_k p_k$
 $r_{k+1} \leftarrow r_k - \alpha_k q_k$
 $r_{k+1}^* \leftarrow r_k^* - \alpha_k q_k^*$
 $\beta_k \leftarrow \frac{r_{k+1}^* \cdot r_{k+1}}{r_k^* \cdot r_k}$
 $p_{k+1} \leftarrow r_{k+1} + \beta_k p_k$
 $p_{k+1}^* \leftarrow r_{k+1}^* + \beta_k p_k^*$
end while



(a) $t = 0$



(b) $t = t_0 > 0$

図 2: 計算領域と隣接領域のずれの様子．中心にある太線の矩形が計算領域を表し，その周囲に存在する細線の矩形が隣接領域を表す． $t = 0$ では x, y 双方向に周期的であるが，時間の経過と共に背景流のため隣接領域が矢印の方向に動く．

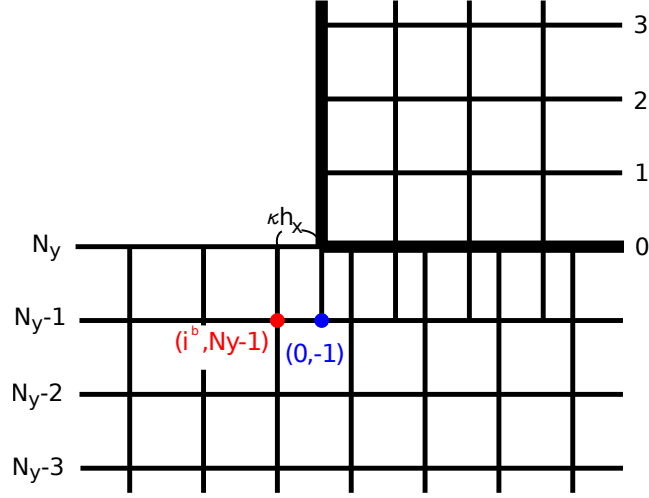


図 3: グリッド $(0, 0)$ 近傍の拡大．格子状の直線は空間グリッドを表し，太線は空間グリッドの境界である．青丸は計算領域の拡張されたグリッドであり，この点での値を赤丸で示す隣接領域におけるグリッドの値を用いて補間する．

図 3 のように，青丸で示したグリッド $(0, -1)$ の左隣に存在する下側隣接領域のグリッドを $(i^b, N_y - 1)$ (赤丸で示した) とする．時刻 t での上下の隣接領域の移動距離 d は

$$d = Vt \quad (67)$$

である． d はグリッド幅の d/h 倍の長さである．この時，ある整数 n, i^b ($0 \leq i^b < N_x$) で

$$i^b + nN_x \leq d/h < i^b + nN_x + 1 \quad (68)$$

となるものがある． x 方向の周期性よりグリッド数の周期 N_x の整数倍は同一であるから，

$$i^b \equiv \text{floor}(d/h) \pmod{N_x} \quad (69)$$

とする．ここで， floor は床関数である．上面と下面の対称性より， $(0, N_y + 1)$ の左隣 $(i^t, 1)$ は

$$i^t = N_x - i^b - 1 \quad (70)$$

と求められる． x 方向が周期境界であることから， $(i, N_y + 1)$ の左隣 $(i^t(i), 1)$ および $(i, -1)$ の左隣 $(i^b(i), N_y - 1)$ について，

$$i^b(i) \equiv i^b(0) + i \pmod{N_x} \quad (71)$$

である．ここで $i^t(0) = i^t$, $i^b(0) = i^b$ である．図 3 において, $(i^b, N_y - 1)$ と $(0, -1)$ 間の距離とグリッド幅 h_x の比が $\kappa : 1$ であるとする．この時, κ は $(i^b, N_y - 1)$, $(0, -1)$ の距離をグリッド数に換算した値で, $0 \leq \kappa < 1$ である．ここで, κ は隣接領域の移動距離のグリッド換算 d/h の小数部分だから,

$$\kappa = d/h - \text{floor}(d/h) \quad (72)$$

である．

$(i, N_y + 1)$ の左隣の上側隣接領域のグリッド $(i^t, 1)$ について, 上面と下面の対称性より,

$$\begin{aligned} i^t(0) &= N_x - i^b(0) - 1 \\ i^t(i) &\equiv i^t(0) + i \pmod{N_x} \end{aligned} \quad (73)$$

である．また, $(i, N_y + 1)$ と $(i^t, 1)$ 間の距離は $(1 - \kappa)h_x$ である．

$(i, -1)$ および $(i, N_y + 1)$ それぞれについて, 近傍の 4 点を元に 3 次の Lagrange 補間 (4 次精度) により近似値を求める．ここで, 差分より高精度の補間を用いるのは, 差分と補間を合わせた誤差 (付録 A(105)) が 2 次のオーダーとなるようにするためである．詳細は付録 A で述べる． $x_{k-1} < x_k \leq x \leq x_{k+1} < x_{k+2}$ である 4 点 $x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}$ のデータ $f_{k-1}, f_k, f_{k+1}, f_{k+2}$ を用いた 4 次精度の Lagrange 補間は,

$$\begin{aligned} f(x; k-1, k, k+1, k+2) &\approx \sum_{m=-1}^2 f_{f+m} l_m(x) \\ l_m(x) &= \prod_{\substack{-1 \leq m' \leq 2 \\ m \neq m'}} \frac{x - x_{m'}}{x_m - x_{m'}} \end{aligned} \quad (74)$$

である．求めた $i^t(i)$ および $i^b(i)$ を k と考えれば (74) と同様に補間を行うことができる．

4 線形化した方程式と非線形シミュレーション結果の比較

線形理論では, せん断流れの下で不安定性が抑制されることが確認されている．この節では線形理論による不安定性の抑制に関する解析 [1] とシミュレーションの結果を比較し, シミュレーションプログラムの妥当性を確認する．

4.1 線形理論での常微分方程式の導出

渦度方程式 (30) および連続の式 (35) に対して $\nu = 0$ とした上で線形化を行うと

$$(\partial_t + v_0 \partial_x) \nabla^2 \phi = \frac{g}{\rho_0} \partial_x \rho_1 \quad (75)$$

$$(\partial_t + v_0 \partial_x) \rho_1 = \rho'_0 \partial_x \phi \quad (76)$$

が得られる．ここで， $v_0 = \sigma y$ であり， ω_z には Poisson 方程式 (38) を代入した．式 (75) の両辺に $(\partial_t + v_0 \partial_x)$ を作用させ，式 (76) を代入すると， ϕ に関する方程式

$$(\partial_t + v_0 \partial_x)^2 \nabla^2 \phi = \frac{\rho'_0 g}{\rho_0} \partial_x^2 \phi \quad (77)$$

が得られる．

式 (77) の ϕ についてフーリエ逆変換

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \bar{\phi}(t, \mathbf{k}) \tilde{\varphi}(t; \mathbf{k}, \mathbf{x}) d\mathbf{k} \quad (78)$$

を代入する． $\tilde{\varphi}$ にはせん断流れに合わせて変化するモード

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t; \mathbf{k}, \mathbf{x}) &= \exp [ik_x (x - \sigma y t) + ik_y y] \\ &= \exp [ik_x x + i\tilde{k}_y(t) y] \end{aligned} \quad (79)$$

を用いる．ここで， $\tilde{k}_y(t) = k_y - k_x \sigma t$ である．

$\nabla^2 \phi$ の $\partial_y^2 \phi$ について

$$\partial_y^2 \phi = \int \bar{\phi}(t, \mathbf{k}) \partial_y^2 \tilde{\varphi}(t; \mathbf{k}, \mathbf{x}) d\mathbf{k} = - \int \tilde{k}_y^2 \bar{\phi} \tilde{\varphi} d\mathbf{k} \quad (80)$$

$\partial_x^2 \phi$ についても同様にすれば，

$$\nabla^2 \phi = (\partial_x^2 + \partial_y^2) \phi = - \int (k_x^2 + \tilde{k}_y^2) \bar{\phi} \tilde{\varphi} d\mathbf{k} \quad (81)$$

となる．

$\partial_t \nabla^2 \phi$ について，

$$\begin{aligned} \partial_t \nabla^2 \phi &= -\partial_t \int (k_x^2 + \tilde{k}_y^2) \bar{\phi} \tilde{\varphi} d\mathbf{k} \\ &= - \int \partial_t \left[(k_x^2 + \tilde{k}_y^2) \bar{\phi} \right] \tilde{\varphi} d\mathbf{k} - \int (k_x^2 + \tilde{k}_y^2) \bar{\phi} \partial_t \tilde{\varphi} d\mathbf{k} \\ &= - \int \partial_t \left[(k_x^2 + \tilde{k}_y^2) \bar{\phi} \right] \tilde{\varphi} d\mathbf{k} + i\sigma y \int (k_x^2 + \tilde{k}_y^2) \bar{\phi} k_x \tilde{\varphi} d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (82)$$

であり, また $v_0 \partial_x \nabla^2 \phi$ は

$$v_0 \partial_x \nabla^2 \phi = -\sigma y \partial_x \int (k_x^2 + \tilde{k}_y^2) \bar{\phi} \tilde{\varphi} d\mathbf{k} = -i\sigma y \int (k_x^2 + \tilde{k}_y^2) \bar{\phi} k_x \tilde{\varphi} d\mathbf{k} \quad (83)$$

であるので,

$$(\partial_t + v_0 \partial_x) \nabla^2 \phi = - \int \partial_t \left[(k_x^2 + \tilde{k}_y^2) \bar{\phi} \right] \tilde{\varphi} d\mathbf{k} \quad (84)$$

である. (84) に対して再度同様に $(\partial_t + v_0 \partial_x)$ を作用させ,

$$(\partial_t + v_0 \partial_x)^2 \nabla^2 \phi = - \int \partial_t^2 \left[(k_x^2 + \tilde{k}_y^2) \bar{\phi} \right] \tilde{\varphi} d\mathbf{k} \quad (85)$$

を得る. (77) の左辺に (85) に等しい $\tilde{\varphi}(t; \mathbf{k}', \mathbf{x})$ を掛け, \mathbf{x} で積分する. 表記の簡単のため, $\tilde{\varphi}(t; \mathbf{k}, \mathbf{x})$ の t 依存性については略すことにすると,

$$\begin{aligned} \int \tilde{\varphi}(\mathbf{k}', \mathbf{x}) (LHS) d\mathbf{x} &= - \int \tilde{\varphi}(\mathbf{k}', \mathbf{x}) \int \partial_t \left[(k_x^2 + \tilde{k}_y^2) \bar{\phi} \right] \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) d\mathbf{k} d\mathbf{x} \\ &= - \int \partial_t \left[(k_x^2 + \tilde{k}_y^2) \bar{\phi} \right] \int \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}', \mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{k} \\ &= -4\pi^2 \int \partial_t \left[(k_x^2 + \tilde{k}_y^2) \bar{\phi} \right] \delta(k_x + k'_x) \delta(\tilde{k}_y + \tilde{k}'_y) d\mathbf{k} \\ &= -4\pi^2 \frac{d}{dt} \left[(k_x'^2 + \tilde{k}_y'^2) \bar{\phi}(-\mathbf{k}') \right] \end{aligned} \quad (86)$$

となる. ただしここで,

$$\int \exp(i(k_x + k'_x)x) dx = 2\pi \delta(k_x + k'_x) \quad (87)$$

などを用いた [8].

(77) の右辺について,

$$\frac{\rho'_0 g}{\rho_0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{\rho'_0 g}{\rho_0} \int k_x^2 \bar{\phi} \tilde{\varphi} d\mathbf{k} \quad (88)$$

である. (77) の右辺に $\tilde{\varphi}(t; \mathbf{k}', \mathbf{x})$ を掛け, \mathbf{x} で積分する. 表記の簡単のため, $\tilde{\varphi}(t; \mathbf{k}, \mathbf{x})$ の t 依存性については略すことにすると,

$$\begin{aligned} \int \tilde{\varphi}(\mathbf{k}', \mathbf{x}) (RHS) d\mathbf{x} &= -\frac{\rho'_0 g}{\rho_0} \int \tilde{\varphi}(\mathbf{k}', \mathbf{x}) \int k_x^2 \bar{\phi} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) d\mathbf{k} d\mathbf{x} \\ &= -\frac{\rho'_0 g}{\rho_0} \int k_x^2 \bar{\phi} \int \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}', \mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{k} \\ &= -4\pi^2 \frac{\rho'_0 g}{\rho_0} \int k_x^2 \bar{\phi} \delta(k_x + k'_x) \delta(\tilde{k}_y + \tilde{k}'_y) d\mathbf{k} \\ &= -4\pi^2 \frac{\rho'_0 g}{\rho_0} k_x'^2 \bar{\phi}(-\mathbf{k}') \end{aligned} \quad (89)$$

となる .

(86) および (89) より , $\bar{\phi}(t)$ に関する常微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[\left(k_x^2 + \tilde{k}_y^2(t) \right) \bar{\phi}(t) \right] = k_x^2 \gamma^2 \bar{\phi}(t) \quad (90)$$

を得る . ここで , $\gamma^2 = \rho'_0 g / \rho_0$ と置いた .

4.2 常微分方程式の漸近的振る舞い

(90) の両辺に $1/k_x^2 \sigma^2 t^2$ をかけ ,

$$\left(1 + \left(\frac{1}{\sigma t} \right)^2 + \left(\frac{k_y}{k_x \sigma t} \right)^2 \right) \frac{d^2 \bar{\phi}}{dt^2} + \left(\frac{4}{t} - \frac{4k_y}{k_x \sigma t^2} \right) \frac{d\bar{\phi}}{dt} + \left(\frac{2}{t^2} - \frac{\gamma^2}{\sigma^2 t^2} \right) \bar{\phi} = 0 \quad (91)$$

を得る . t が十分に大きく ,

$$t \gg \frac{k_y}{k_x \sigma}, \quad t \gg \frac{1}{\sigma} \quad (92)$$

であるとき , k によらない方程式

$$\frac{d^2 \bar{\phi}}{dt^2} + \frac{4}{t} \frac{d\bar{\phi}}{dt} + \frac{2 - \alpha}{t^2} \bar{\phi} = 0 \quad (93)$$

が得られる . ここで $\alpha = \gamma^2 / \sigma^2$ であり , 交換型不安定性を起こす強さを示す γ とせん断流れの強さを示す σ の比である . (93) は $t = e^\tau$ とおくことで

$$\frac{d^2 \bar{\phi}}{d\tau^2} + 3 \frac{d\bar{\phi}}{d\tau} + (2 - \alpha) \bar{\phi} = 0 \quad (94)$$

となり , これを解くことで

$$\bar{\phi} = C_1 t^{m_+} + C_2 t^{m_-} \quad (95)$$

を得る . ここで , C_1 および C_2 は定数であり ,

$$m_{\pm} = \frac{-3 \pm \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \quad (96)$$

である . $m_+ \geq m_-$ より , (95) の漸近的振る舞いは m_+ の符号によって決定されるから ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\phi} = \begin{cases} \infty & \alpha > 2 \\ \text{const.} & \alpha = 2 \\ 0 & \alpha < 2 \end{cases} \quad (97)$$

であることがわかる .

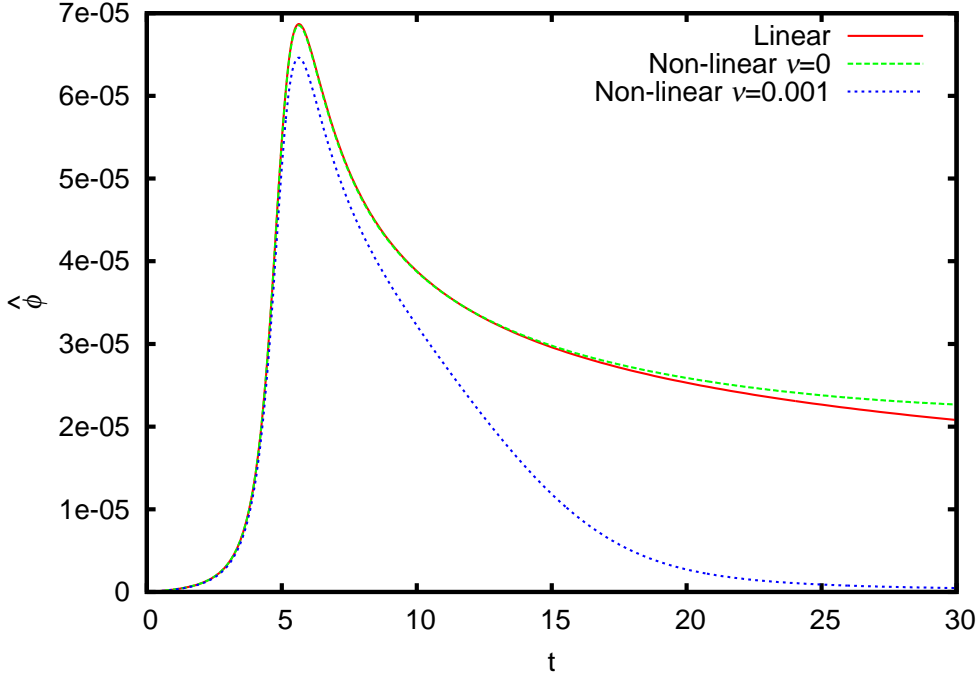


図 4: 線形方程式と非線形シミュレーションの比較

4.3 シミュレーション結果との比較

初期値に

$$\begin{aligned}\omega_z(0, \mathbf{x}) &= 0 \\ \phi(0, \mathbf{x}) &= 0 \\ \rho_1(0, \mathbf{x}) &= \epsilon \cos(2x + 10y)\end{aligned}\tag{98}$$

を与え, (30), (35) および (38) を解くシミュレーションを行った. このとき, $L_x = \pi, L_y = \pi, N_x = 80, N_y = 200, \Delta t = 0.001$ とした. y 方向の波数 $\tilde{k}_y = k_y - \sigma k_x t$ は時間変化し, 細かい構造が現れるので, N_y を多く取らなければならない. 一方, $k_x = 2$ は定数であるから, N_x は少なくてよい. 定数は $\epsilon = 10^{-5}, g/\rho_0 = 1, \rho'_0 = 1, \sigma = 1$ とし, この条件は $\alpha = 1$ である. 粘性係数について $\nu = 0, 0.001$ の 2 通りで行った. 常微分方程式 (90) について, 付録 C に示したように (98) と等価な初期値を与え, 4 次 Runge-Kutta 法で解いた.

ϕ の振幅 $\bar{\phi}$ の時間変化を図 4 に示す. シミュレーションでは ϕ の最大値 ϕ_{max} を $\bar{\phi}$ とみなした. 線形 (赤実線) および粘性無し非線形シミュレーション (緑破線) の計算結果を比較すると, $t = 15$ 付近までよく一致している. このことから, シミュレーションプログ

表 1: 各シミュレーションに用いたパラメータ

ラン	ϵ_1	ϵ_2	α
A	10^{-2}	0	1
B	10^{-2}	$\epsilon_1/2$	1
C	10^{-1}	0	1
D	10^{-2}	$\epsilon_1/2$	0.5
E	10^{-1}	0	0.5

ラムは正しく計算できていることがわかる．一方, $t = 15$ 以降では一致していない．これは, t が大きいとき $|\tilde{k}_y(t)| = |(k_y - \sigma k_x t)|$ が増大することによって, 付録 B で示した位相速度の遅れの効果が強くなるからである． $N_y = 200$ では, $t = 10$ 程度 ($\tilde{k}_y = -20$) から位相速度の遅れが無視できなくなる．粘性を入れた場合を見ると, 不安定性がより強く抑制されていることがわかる．

5 非線形シミュレーションによる不安定性の抑制効果の検証

5.1 パラメータと初期値の選択

線形理論で不安定性が抑制される α をとり, 密度に与える初期擾乱を変えて 5 種のシミュレーション A から E を行った (表 1)．密度の初期擾乱 $\rho_1(0, x, y)$ として,

$$\rho_1(0, x, y) = \rho_f + \rho_n \quad (99)$$

与え, 1 波数からなる基本擾乱 ρ_f のみを与えた場合 (A,C,E) と, 更にノイズ ρ_n を加えた場合 (B,D) でシミュレーションを行った．ここで, 基本擾乱 ρ_f は振幅 ϵ_1 および波数 $k_x = 2, k_y = 10$ を持つ

$$\rho_f = \epsilon_1 \cos(2x + 10y) \quad (100)$$

であり, ノイズ ρ_n は

$$\rho_n = \sum_{\substack{-2 \leq k_x \leq 2 \\ 0 \leq k_y \leq 10}} \epsilon_2 (R_s(k_x, k_y) \sin(k_x x + k_y y) + R_c(k_x, k_y) \cos(k_x x + k_y y)) \quad (101)$$

で表される複数の正弦波の重ねあわせである．ここで, R_s, R_c は区間 $(-1, 1)$ の乱数であり, 各正弦波で異なる値を持つ．各シミュレーションは $L_x = \pi, L_y = \pi, N_x = 200, N_y = 200, \Delta t = 0.001$ として行った．

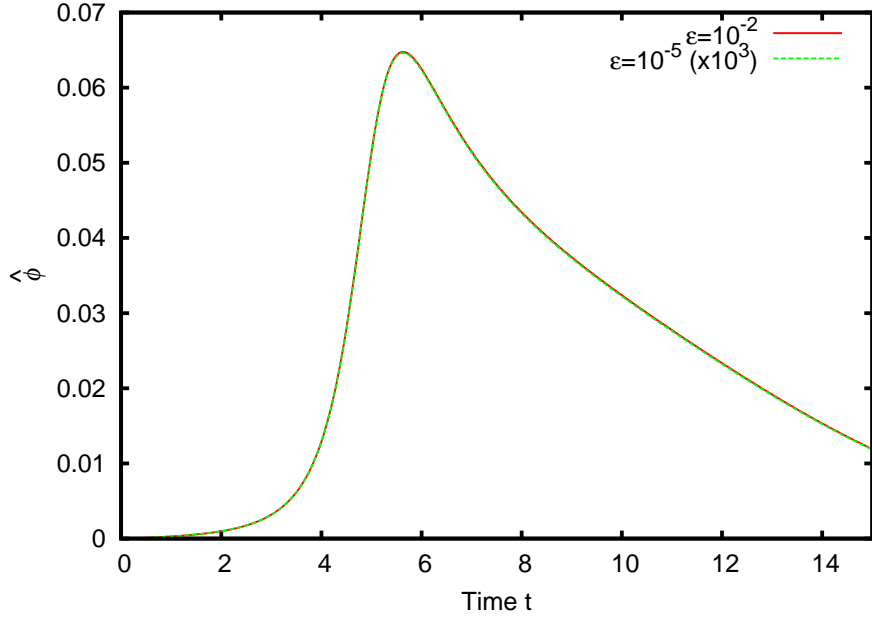


図 5: 振幅 10^{-2} の初期擾乱を与えたときの ϕ_{max} の時間変化 (赤実線) と振幅 10^{-5} の初期擾乱を与えたときの $\phi_{max} \times 10^3$ の時間変化 (緑破線)(ラン A)

5.2 $\alpha = 1$ におけるシミュレーション

シミュレーション A,B,C は線形理論で不安定性が抑制される $\alpha = 1$ において, 密度の初期擾乱を 3 種類与えたものである.

5.2.1 振幅 10^{-2} の擾乱

A における ϕ_{max} の時間変化を図 5 に示す. 不安定性は抑制され ϕ_{max} が減衰している. また, $\epsilon = 10^{-2}$ のときの ϕ_{max} の時間発展は, $\epsilon = 10^{-5}$ の場合の 10^3 倍とよく一致している. 初期値の比と同じ比を保ったまま時間発展しているので, 初期擾乱が単一の波であるとき, この問題は線形であると言える.

5.2.2 ノイズを加えた振幅 10^{-2} の擾乱

B は A の初期擾乱に $\epsilon_2 = \epsilon_1/2$ のノイズを加えたものである. B における ϕ_{max} の時間変化を図 6 に示す. 交換型不安定性は $t = 5$ 程度まで成長した後に抑制されるが, $t = 7$ から再び $\bar{\phi}$ の増加が見られる. $t = 10$ 以降での渦度 ω_z の xy 平面プロットを図 7 に示

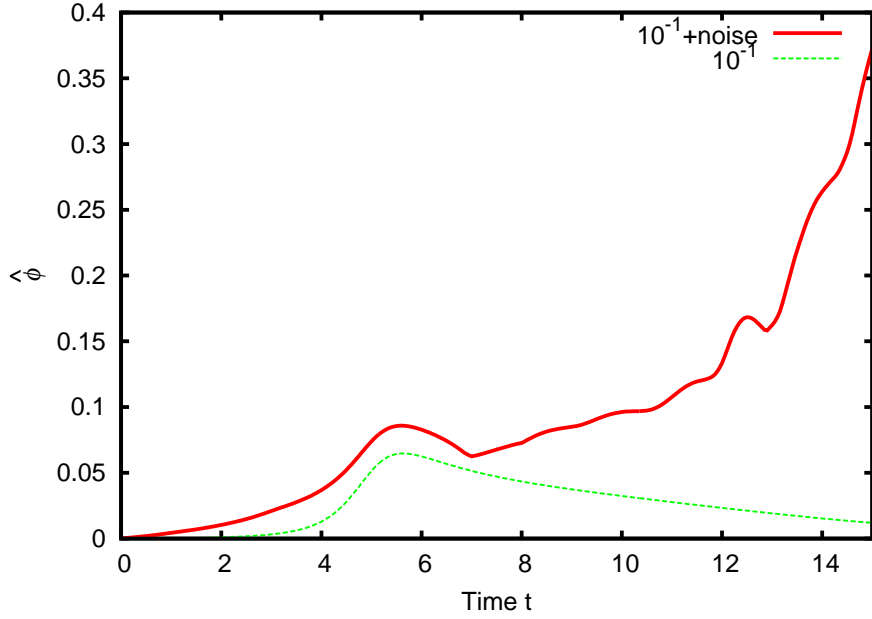


図 6: 振幅 10^{-2} の初期擾乱にノイズを加えたときの ϕ_{max} の時間変化 (赤実線) と加えていないときの ϕ_{max} の時間変化 (緑破線)(ラン B)

す. $t = 10$ では波数 $(k_x, \tilde{k}_y(10)) = (2, 5)$ の基本擾乱に由来する形が見られるが, その後ノイズによる摂動から Kelvin-Helmholtz(KH) 不安定性が成長し, $t = 18$ には乱流となっている様子が見られる.

5.2.3 振幅 10^{-1} の擾乱

C は $\epsilon_1 = 10^{-1}$ の基本擾乱を与え、ノイズは加えない ($\epsilon_2 = 0$) ものである. C における ϕ_{max} の時間変化を図 8 に示す. $t = 10$ までは振幅が小さいときとよく一致しているが, それ以降では ϕ_{max} が急激に増加している.

$t = 10$ 以降での渦度 ω_z の xy 平面プロットを図 9 に示す. $t = 10$ では波数 $(k_x, \tilde{k}_y(10)) = (2, 5)$ の基本擾乱の形が見られるが, その後 KH 不安定性が成長し, $t = 12$ には乱流となっている様子が見られる.

KH 不安定性は速度差のある界面が存在しても, そこに摂動がなければ起こらない. $\epsilon_2 = 0$ のため, KH 不安定性を引き起こす状態を意図して設定してはいないが, 数値シミュレーションで発生する丸め誤差が微小な摂動となり, KH 不安定性が成長したと考えられる.

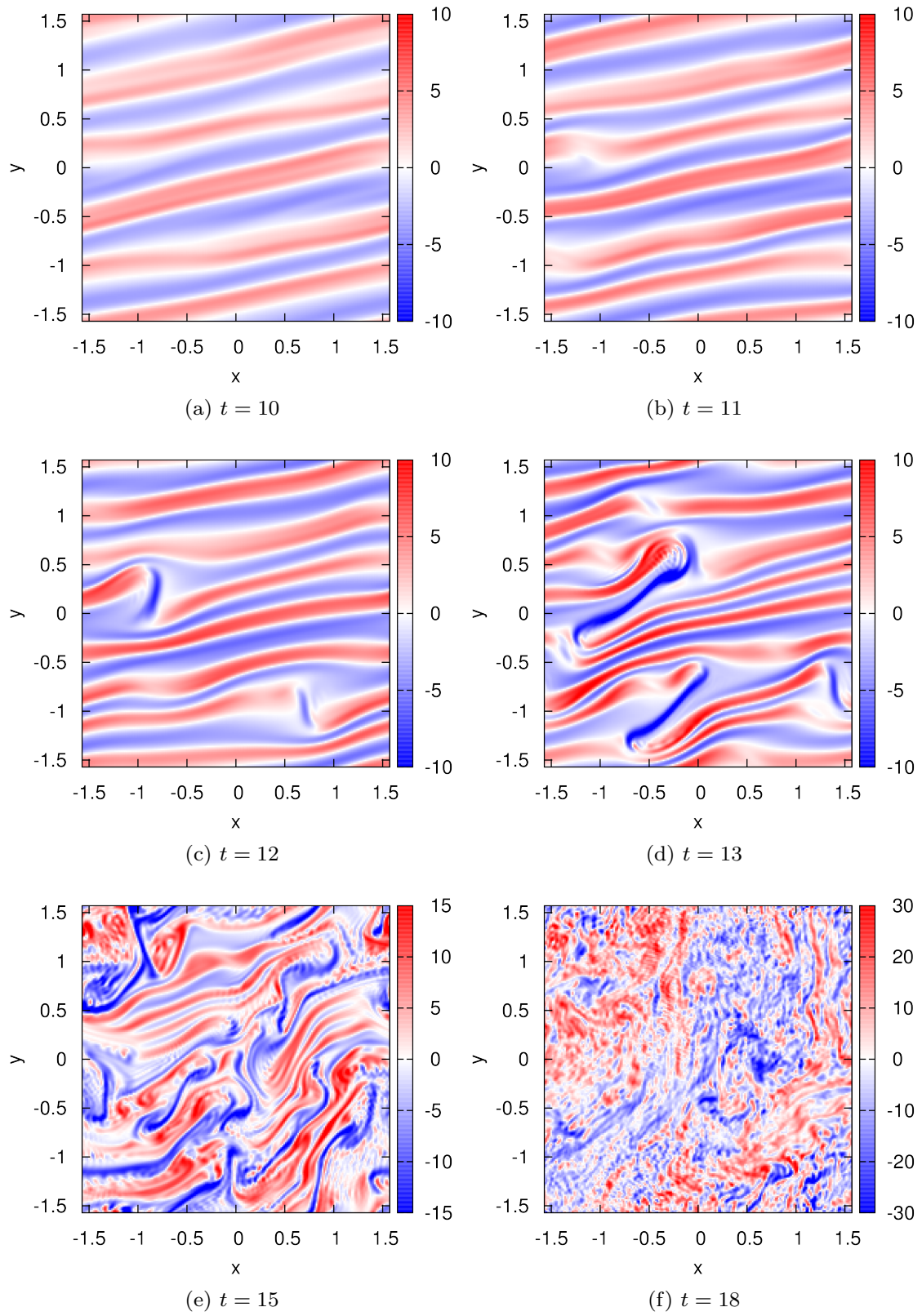


図 7: ノイズを加えた振幅 10^{-2} の初期擾乱を与えたときの ω_z の時間変化 (ラン B)

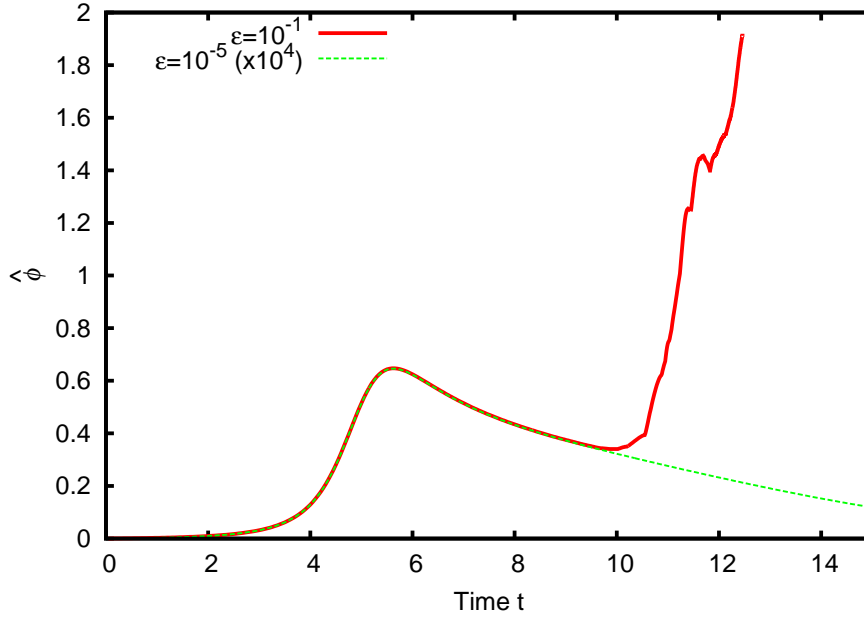


図 8: 振幅 10^{-1} の初期擾乱を与えたときの ϕ_{max} の時間変化 (赤実線) と振幅 10^{-5} の初期擾乱を与えたときの $\phi_{max} \times 10^3$ の時間変化 (緑破線)(ラン C)

5.3 $\alpha = 0.5$ のシミュレーション

$\alpha = 1$ の非線形シミュレーションで交換型不安定性が抑制されなかった B,C について, $\rho'_0 = 0.5$ に変更して, より抑制効果が強い $\alpha = 0.5$ においてシミュレーション D,E を行った.

5.3.1 ノイズを加えた振幅 10^{-2} の擾乱

D は初期擾乱を $\epsilon_1 = 10^{-1}\epsilon_2 = \epsilon_1/2$ として与えたシミュレーションである. D における ϕ_{max} の時間変化を図 10 に示す. $t < 15$ の範囲では, 交換型不安定性が抑制され, その後も増加が見られない. $t > 15$ では $|\tilde{k}_y| > 20$ の細かい構造となるため, 空間刻み $(N_x, N_y) = (200, 200)$ ではシミュレーションを行うことができなかった.

5.3.2 振幅 10^{-1} の擾乱

E における ϕ_{max} の時間変化を図 11 に示す. $\alpha = 0.5$ では不安定性が抑制され, $\bar{\phi}$ が収束していく様子が見られた. $\alpha = 1$ である C で見られた丸め誤差によるノイズに起因

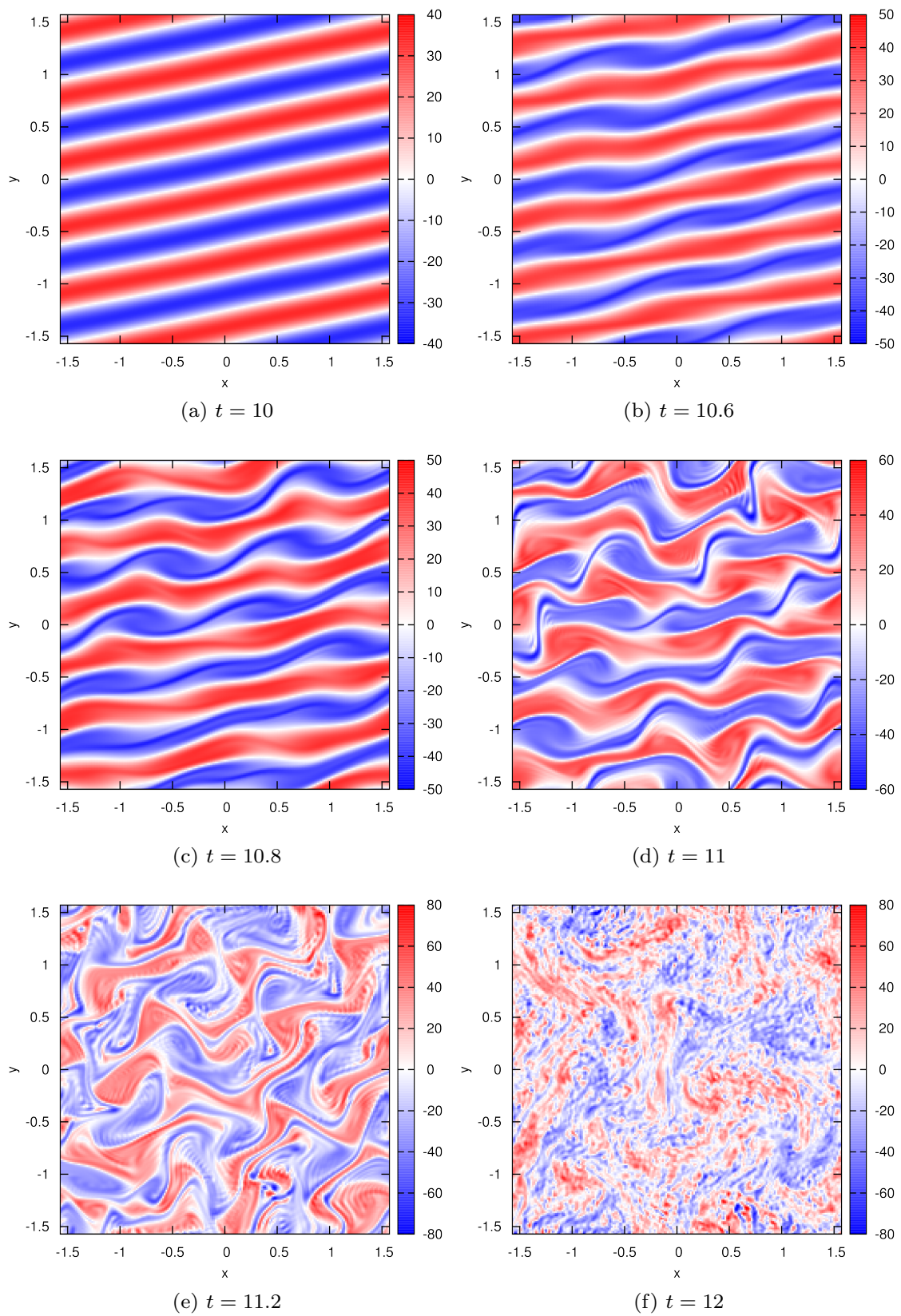


図 9: 振幅 10^{-1} の擾乱を与えたときの ω_z の時間変化 (ラン C)

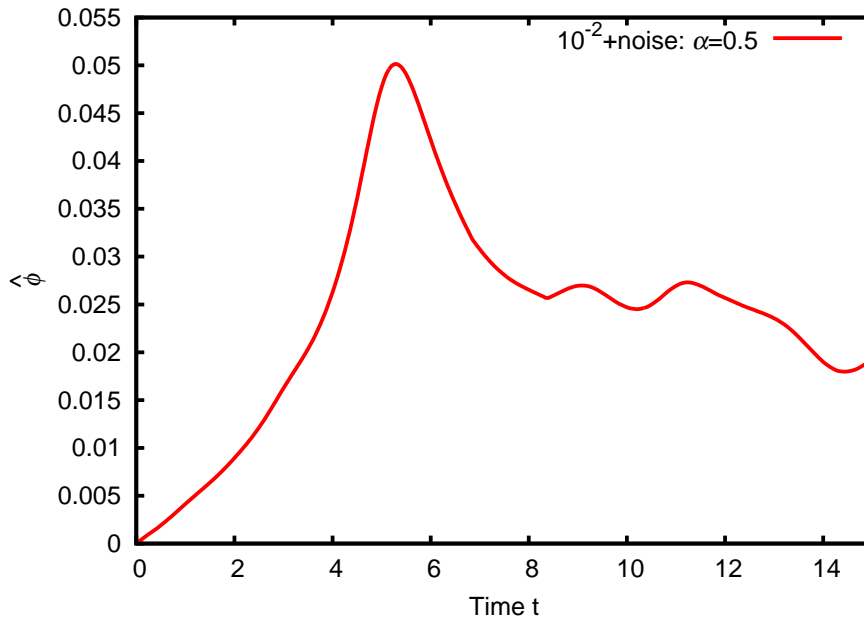


図 10: $\alpha = 0.5$ で振幅 10^{-2} の初期擾乱にノイズを加えたときの ϕ_{max} の時間変化 (ラン D)

する KH 不安定性は、せん断流れが強く交換型不安定性が起こりにくい条件 ($\alpha = 0.5$) においては発生しなかった。

5.4 結果のまとめ

$\alpha = 1$ で、単一の波数からなる振幅 $\epsilon_1 = 10^{-2}$ の初期擾乱を与えた A(5) では ϕ_{max} は減衰し、また、初期擾乱が 1 波数のみである場合この問題は線形であることがわかった。A の初期擾乱に多くの波数からなる振幅 $\epsilon_2 = 10^{-2}/2$ のノイズを入れた B(図 6, 7) では、KH 不安定性が発生し、 ϕ_{max} は増加した。 $\alpha = 1$ のとき、線形理論 [1] からは交換型不安定性の抑制が報告されているが、非線形シミュレーションでは 2 次的な KH 不安定性により運動が抑制されず乱流になる場合があることが確認された。 $\alpha = 1$ で基本擾乱の振幅 $\epsilon_1 = 10^{-1}$ 、ノイズなし ($\epsilon_2 = 0$) とした C(図 8, 5.2.3) では、単一の波数の初期擾乱からでも KH 不安定性が発生し乱流になることが確認された。丸め誤差が微小なノイズとして働き、KH 不安定性が発生した。

2 次的な KH 不安定性により乱流となった B および C に対して、より不安定性の駆動が弱い $\alpha = 0.5$ としてシミュレーションを行った D(図 10), E(図 11) では 2 次的な不安定性の成長が抑制されることが観測された。非線形を考慮した場合でも駆動が十分に弱け

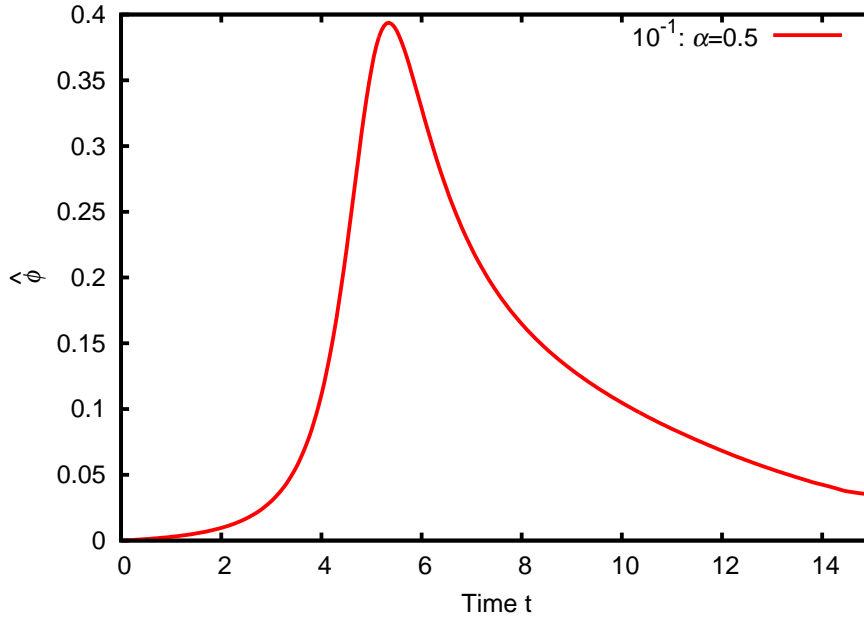


図 11: $\alpha = 0.5$ で振幅 10^{-1} の初期擾乱を与えたときの ϕ_{max} の時間変化 (ラン E)

れば，せん断流れは不安定性を抑制することが示唆される．

6 まとめ

せん断流れを持つ 2 次元非圧縮流体について，shearing box 境界条件の下で渦度方程式と連続の式を差分法により解くことで，交換型不安定性に対するせん断流れの影響について調べた．線形理論では不安定性を引き起こす強さ γ^2 とせん断流れの強さ σ^2 の比 α が $\alpha < 2$ を満たせば交換型不安定性が抑制される [1]．しかし，非線形項を導入したとき，交換型不安定性が抑制されても，せん断流れによって増幅されたゆらぎから 2 次的な Kelvin-Helmholtz 不安定性が成長し，乱流になる場合があることがシミュレーションの結果よりわかった．

$\alpha = 1$ のとき，線形理論 [1] からは流れによる交換型不安定性の抑制が報告されているが，非線形シミュレーションでは 2 次的な不安定性が観測された．これと同じ初期値を用いて不安定性の駆動が更に弱い $\alpha = 0.5$ でシミュレーションしたところ， $t = 15$ までは 2 次的な不安定性成長が抑制されていることがわかった．このことから非線形性を考慮した場合でも安定化させるには，駆動が十分に弱ければ，せん断流れは交換型不安定性を抑制

できることが示唆される。

本研究で行ったグリッド数 $(N_x, N_y) = (200, 200)$ のシミュレーションでは、不安定性が抑制されない場合に乱流になることを確認できたが、解像度の問題で乱流の飽和など、より継続的なシミュレーションは行えなかった。一方、不安定性が抑制されていると見られる場合には、 $t > 15$ で $|\tilde{k}_y| > 20$ となる細かい構造ができることが原因で、シミュレーションで追うことはできなかったが、あまりに細かい構造は粘性で減衰されることが考えられる [9]。

今後の課題としては、空間解像度を上げた状態で基本擾乱の振幅とノイズの大きさを変えながらシミュレーションを行って抑制の有無を観察し、線形理論における α に相当する非線形シミュレーションにおける抑制条件を示すことが挙げられる。また、本研究で観測された乱流が継続する場合、乱流レベルの α や γ, σ に関する依存性を調べる必要がある。

計算手法の面からは、CPU でのシミュレーションでは、図 6 の計算で $t = 15$ までに 4 時間、 $t = 18$ までに 8.6 時間、図 8 の計算で $t = 12.4$ までに 11 時間かかり、結果を得るまで時間がかかるため、GPU を用いた高速計算の実装という課題も考えられる。

線形理論で抑制される条件においてシミュレーションを行った。1 つの波数で表される初期擾乱を与えた場合、線形理論と同じように不安定性が抑制された。一方、同じ初期擾乱にノイズを加えてシミュレーションを行ったとき、2 次的に発生した Kelvin-Helmholtz 不安定性が成長し、乱流となった。線形理論で安定である条件においても、非線形性を考慮した場合では不安定になる場合があることが確認された。

謝辞

本論文の執筆にあたり、指導教員の龍野智哉准教授から、熱心なご指導を賜りました。ここに感謝の意を表します。また、日常の議論を通じて知識や助言を頂いた龍野研究室の皆様にも感謝します。

付録 A Shearing box 境界条件における補間の精度

ラプラシアン $\nabla^2 \phi$ の 2 次精度中心差分の離散化は誤差を含めると

$$(\nabla^2 \phi)_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{h_y^2} + O(h_x^2) + O(h_y^2) \quad (102)$$

である． $j = 0$ のとき、 y 方向の離散化された shearing box 境界条件において補間が行われる．4 次精度の Lagrange 補間

$$f(x; k-1, k, k+1, k+2) \approx \sum_{m=-1}^2 f_{f+m} l_m(x) \quad (103)$$

$$l_m(x) = \prod_{\substack{-1 \leq m' \leq 2 \\ m \neq m'}} \frac{x - x_{m'}}{x_m - x_{m'}}$$

を用いて，

$$\phi_{i,-1} = f(x; k-1, k, k+1, k+2) + O(h_x^4) \quad (104)$$

のように計算される．ここで k は 3.5 節で述べた隣接領域のグリッドである． $j = N_y$ のときも同様に計算される．(102) に補間によって求める項がある場合、誤差のオーダーは

$$O\left(\frac{h_x^4}{h_y^2}\right) + O(h_x^2) + O(h_y^2) \quad (105)$$

となる． $h_x = h_y = h$ のときを考えると、(105) は $O(h^2)$ となり、差分による誤差のオーダーと一致する．このことから、 h_x と h_y を同程度の大きさにとるとき、全体で 2 次精度を実現するためには、補間について 4 次精度の手法を用いることが必要だといえる．

実際の精度を確かめるために、差分に 2 次中心差分、補間に 2 次精度および 4 次精度を用いて

$$\phi(x, y) = A \sin(2x + (10 - 2t)y) \quad (106)$$

$$A = 10^4, \quad t = 5.345 \quad (107)$$

における Poisson 方程式 $\omega = \nabla^2 \phi$ を $-\pi/2 < L_x < \pi/2, -\pi/2 < L_y < \pi/2$ の領域でシミュレーションコードを用いて計算した．この解は

$$\omega(x, y) = -B \sin(2x + (10 - 2t)y) \quad (108)$$

$$B = \frac{A}{4 + (10 - 2t)^2} \quad (109)$$

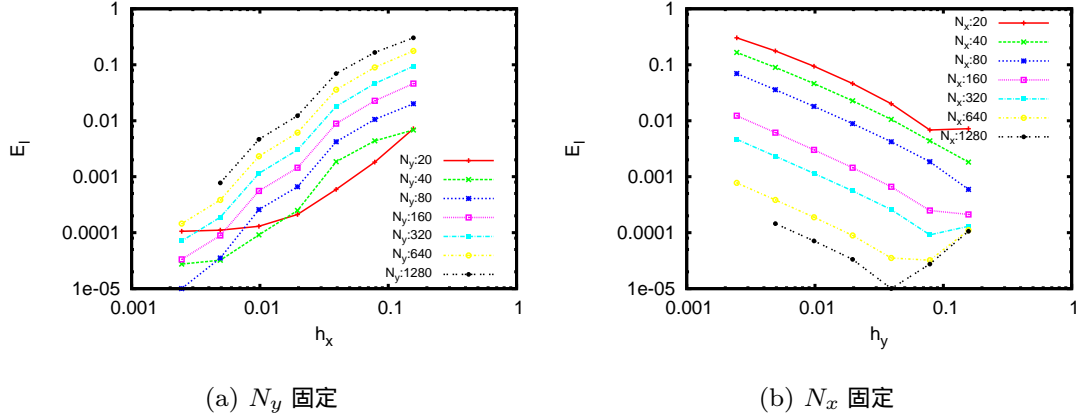


図 12: 補間に 2 次精度の手法を用いた時の E_l の空間刻み幅依存 . (a) N_x を固定したときの誤差 E_l の N_y 依存 , (b) N_y を固定したときの誤差 E_l の N_x 依存 .

である . N_y を固定し様々な N_x をとった場合と N_x を固定し様々な N_y をとった場合における相対誤差と空間刻み幅の関係を , 2 次精度補間について図 12 に 4 次精度補間について図 13 にそれぞれ示す . ここで相対誤差は無限大ノルム

$$E_l = \frac{1}{B} \max_{\substack{i=1,2,\dots,N_x \\ j=1,2,\dots,N_y}} |\omega(x_i, y_j) - \omega_{i,j}| \quad (110)$$

を用いた .

2 次精度の補間を用いた場合 , 図 12(a) から , N_y を固定したとき , E_l はおよそ $O(h_x^2)$ に従って変化していることがわかる . しかし , 図 12(b) では , h_y を小さくすると E_l が大きくなっている . このことから , 2 次の補間を用いることは適切でないことが確認できる . 4 次精度の補間を用いた場合 , 図 13(a) から , N_y を固定したとき , $h_y < h_x$ の範囲では E_l はおよそ $O(h_x^2)$ に従って変化していることがわかる . 図 13(b) では , h_x 一定で h_y を小さくしても誤差が増加していない様子が見られる . 2 次精度の補間で見られた h_y を小さくtookたときに E_l が大きくなる問題は , 4 次精度の補間を用いることで解消された .

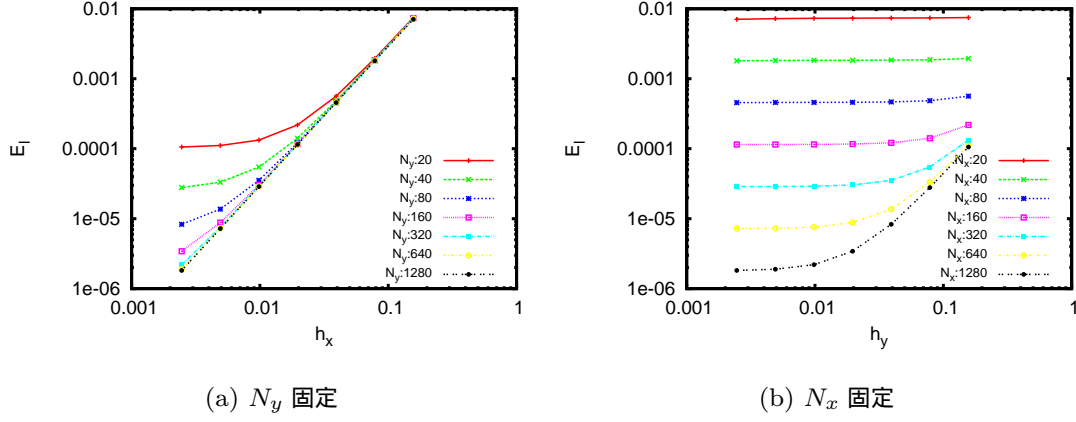


図 13: 補間に 4 次精度の手法を用いた時の E_l の空間刻み幅依存 . (a) N_x を固定したときの誤差 E_l の N_y 依存 , (b) N_y を固定したときの誤差 E_l の N_x 依存 .

付録 B 移流方程式の差分解法による位相速度の遅れ

B.1 移流方程式

物理量 $u(x, t)$ が速度 $c = \text{const.} > 0$ で x 正方向に移流する 1 次元移流方程式は次のように記述できる .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (111)$$

この一般解は解析的に求めることができ ,

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad (112)$$

である . ここで $f(x) = u(x, 0)$ である .

式 (111) を時間微分に対して 2 次 Adams-Bashforth 法 , 空間微分に対して中心差分法を用い離散化した .

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{3}{2} \Delta \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} - \frac{1}{2} \Delta \frac{u_{i+1}^{n-1} - u_{i-1}^{n-1}}{2h} \quad (113)$$

ここで , Δ および h はそれぞれ時間および空間の刻み幅である . 第 1 ステップには Euler 法を用いた .

B.2 数値解

式 (113) を用いて式 (111) を解くコードを作成し，速度 $c = 1$ ，初期値 $u(x, 0) = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ として周期境界条件 $u(-\pi, t) = u(\pi, t)$ の下で計算した．ここで λ は波長であり， $\lambda = 2\pi, \pi$ の 2 種類について計算を行った．

時間刻み幅 $\Delta = 0.001$ ，空間グリッド数 $N = 10, 20, 40, 80, 160 (h = N/2\pi)$ とした時の時刻 $t = 5, 10$ における $u(t)$ を図 14，15 に示す． $N \geq 320$ のときは解析解と重なるので省略した．

B.2.1 誤差

時刻 $t = 5$ において誤差を無限大ノルム

$$E_m = \max_{i=1,2,\dots,N} |u(x_i, t=5) - u_i| \quad (114)$$

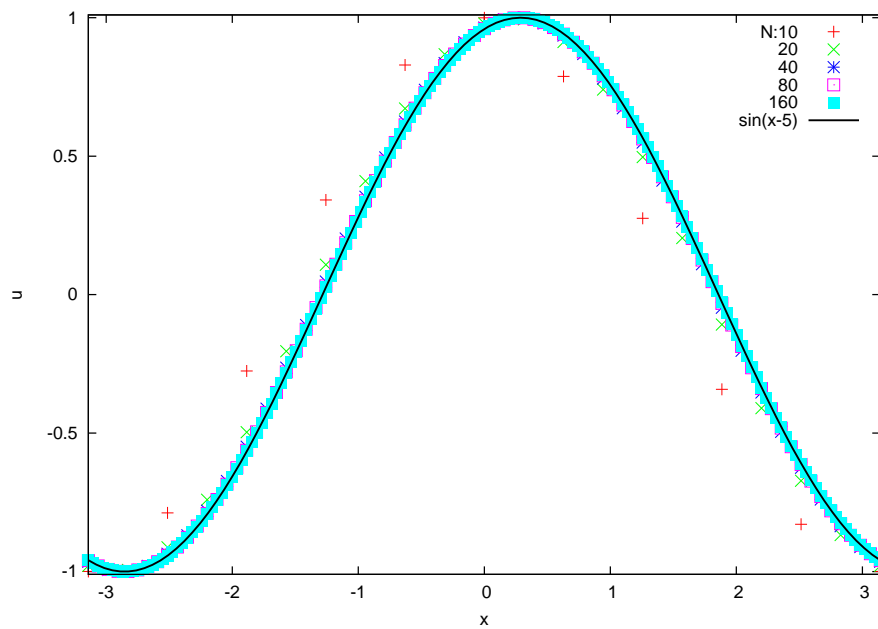
としてとった．ここで， $u(x_i, t=5)$ は厳密解 (112) の $t = 5$ におけるグリッド x_i での値を示す．グリッド幅と誤差のプロットを図 16 に示す．図 16 より，グリッド幅を小さくしたとき h^2 のオーダーで誤差が落ちていることがわかる．

B.2.2 解析解との速度差

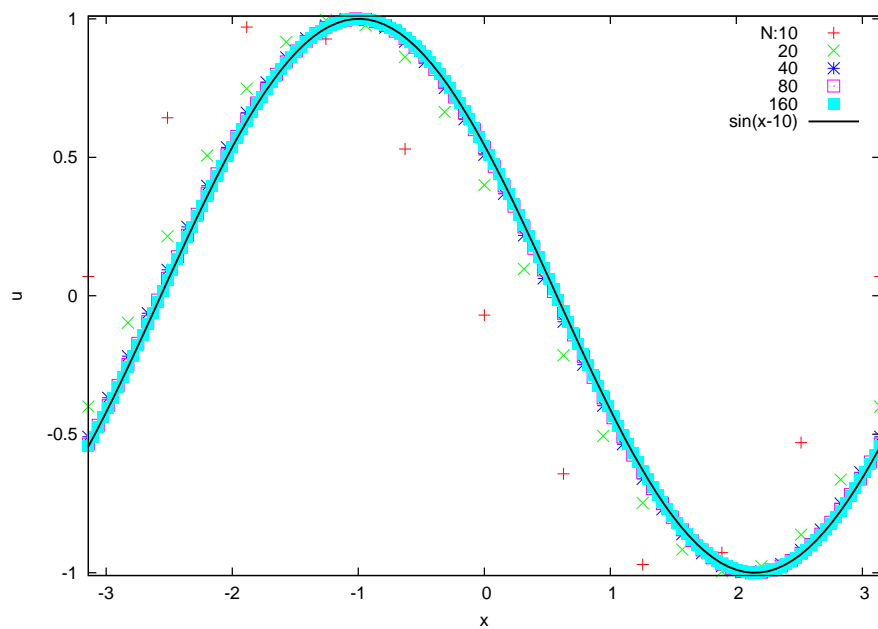
図 14，15 を見ると，グリッド数が少ないとき波が遅く伝わっていることがわかる．解析解と比べて位相速度がどの程度ずれているかを調べた．

各データについて gnuplot を用いて $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - a)\right)$ ($ct - \lambda \leq a \leq ct$) にフィッティングし，位相 a を求めた．また， a を元に各 h における波の数値的な位相速度 v_p を求め，厳密解の位相速度 $c = 1$ との差 v_{diff} をとった．結果を表 2 および図 17，18 に示す．

図 17 は計測された位相速度を波長に対するグリッド幅の大きさについて示したものであるが，2 つの異なる λ でのプロットが一致している．これは，精度よく計算するために必要なグリッド幅が波長によって決定され，その関係が線形であることを意味する． $v_{\text{diff}} \sim O(10^{-3})$ 程度の十分な精度で計算するには，波長 λ に対して 0.02 倍程度のグリッド幅を取ればよいことがわかる．

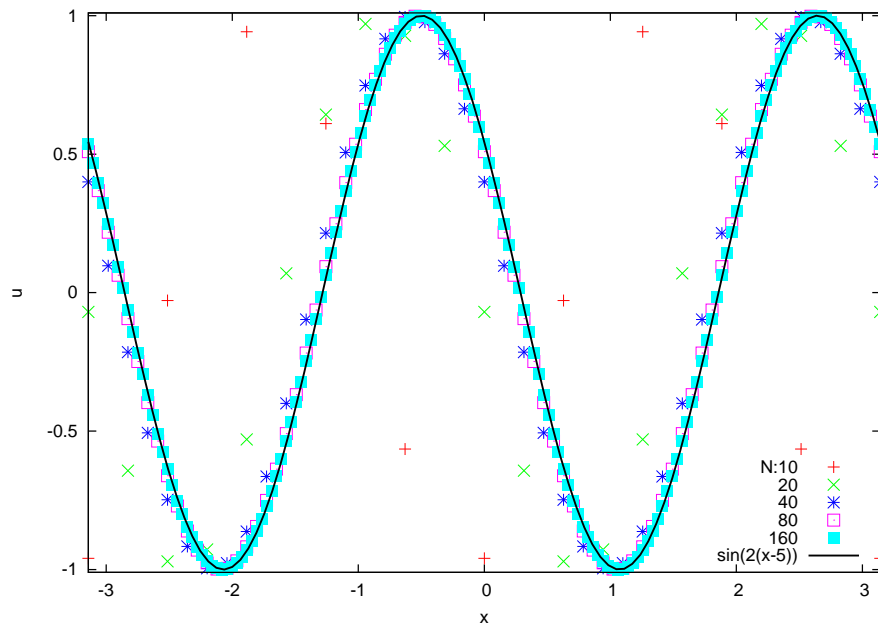


(a) $t = 5$

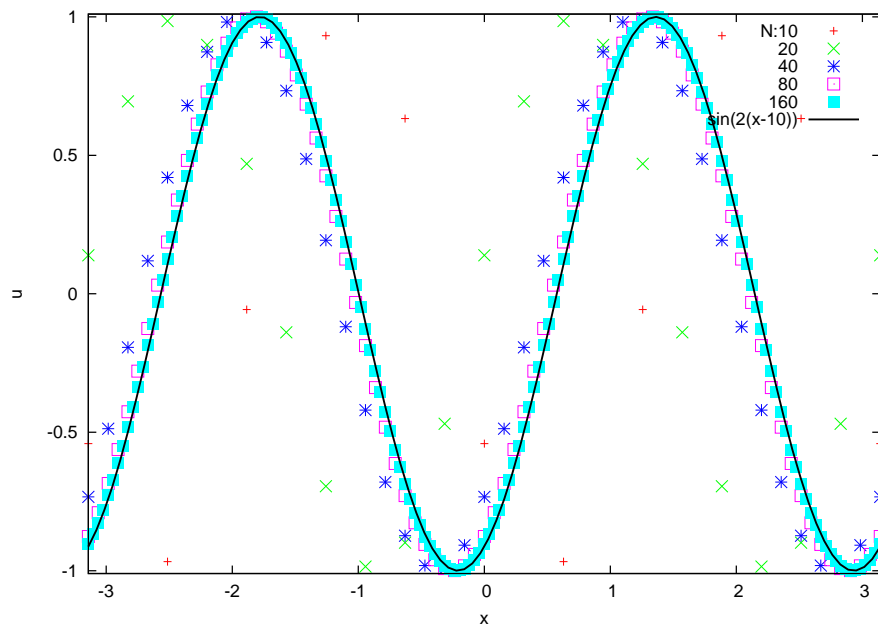


(b) $t = 10$

図 14: $\lambda = 2\pi$ の時の数値解



(a) $t = 5$



(b) $t = 10$

図 15: $\lambda = \pi$ の時の数値解

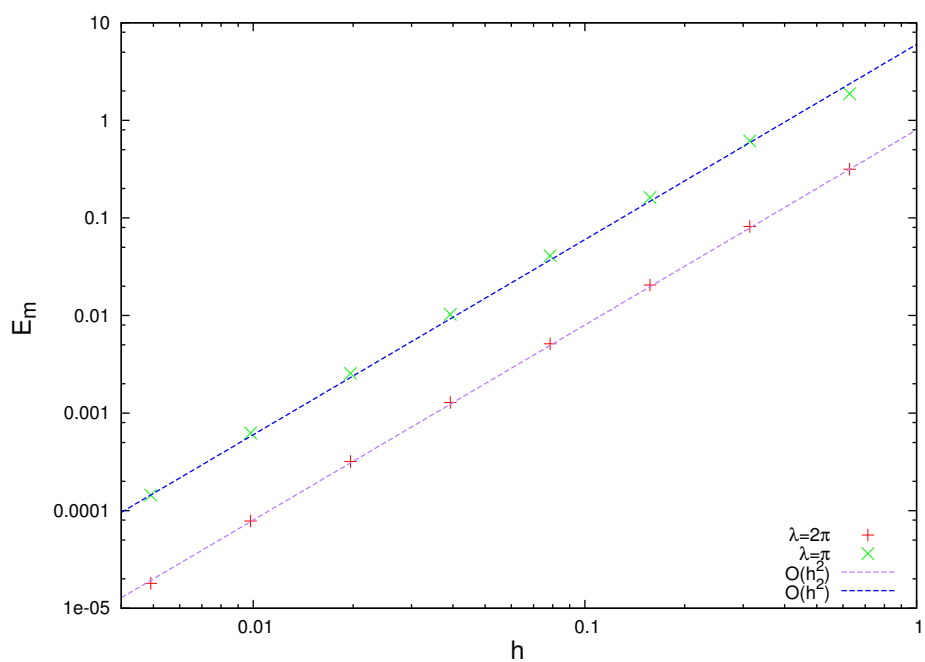


図 16: $t = 5$ における誤差とグリッド幅の関係

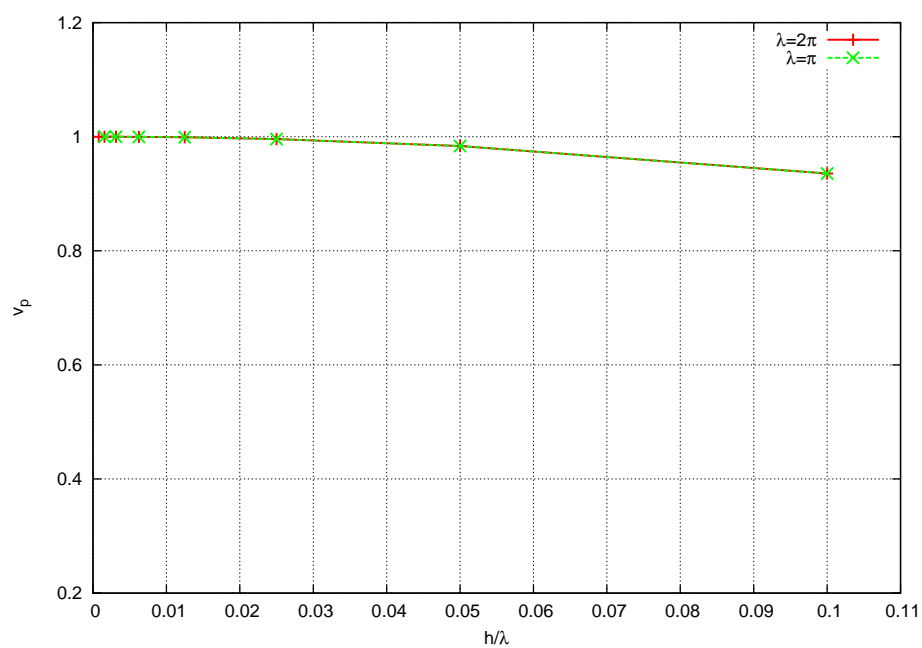


図 17: 位相速度 v_p と波長に対するグリッド幅の比 h/λ のプロット

表 2: $\lambda = 2\pi$ での各 N, t における位相 a と位相速度 v_p

(a) $\lambda = 2\pi$

N	h	$a @ t = 5$	$a @ t = 10$	v_p	v_{diff}
10	0.6283	4.677	9.355	0.9354	6.45×10^{-2}
20	0.3142	4.918	9.836	0.9836	1.64×10^{-2}
40	0.1571	4.979	9.959	0.9959	4.11×10^{-3}
80	0.07854	4.995	9.990	0.999	1.03×10^{-3}
160	0.03927	4.999	9.997	1.000	2.57×10^{-4}
320	0.01963	5.000	9.999	1.000	6.4×10^{-5}
640	0.009817	5.000	10.000	1.000	1.6×10^{-5}
1280	0.004909	5.000	10.000	1.000	4×10^{-6}

(b) $\lambda = \pi$

N	h	$a @ t = 5$	$a @ t = 10$	v_p	v_{diff}
10	0.6283	3.784	4.427	0.757	2.31×10^{-1}
20	0.3142	4.677	9.355	0.935	6.45×10^{-2}
40	0.1571	4.918	9.836	0.984	1.63×10^{-2}
80	0.07854	4.979	9.959	0.996	4.11×10^{-3}
160	0.03927	4.995	9.990	0.999	1.03×10^{-3}
320	0.01963	4.999	9.997	1.000	2.55×10^{-4}
640	0.009817	5.000	9.999	1.000	6.3×10^{-5}
1280	0.004909	5.000	10.000	1.000	1.4×10^{-5}

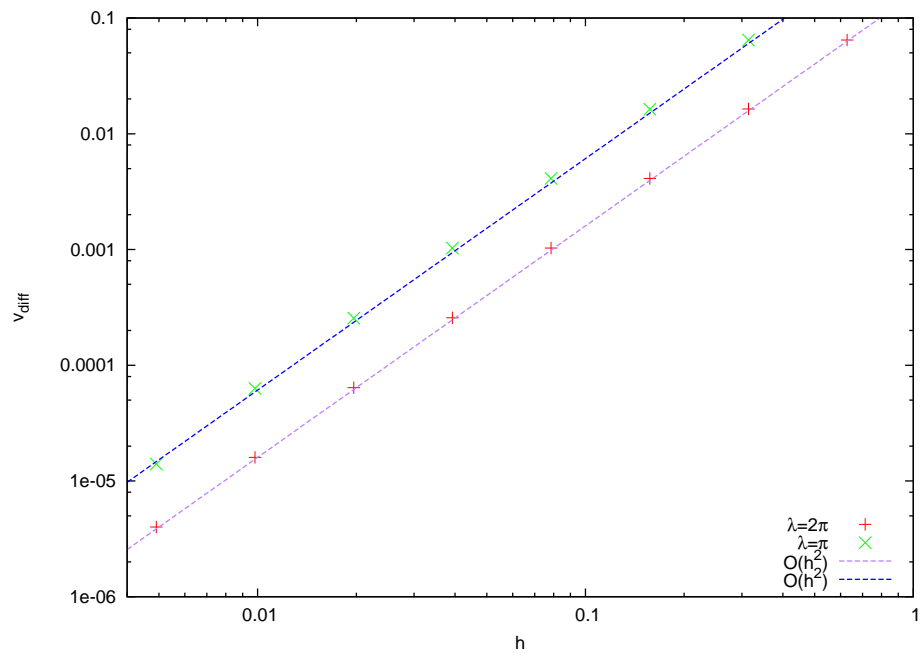


図 18: 速度差 v_{diff} とグリッド幅の関係

付録 C ρ_1 および ϕ の振幅の関係

$\hat{\phi}$ に関する常微分方程式 (90) は $t = 0$ で $\hat{\phi}$ および $d\hat{\phi}/dt$ を与えて解くことができるが、シミュレーションに初期値として与える量は ρ_1 および $\omega (= \nabla^2 \phi)$ である。シミュレーションと常微分方程式で同じ初期条件の解を求めるために、密度の振幅 $\hat{\rho}_1(t = 0)$ と流れ関数の振幅の時間微分 $d\hat{\phi}/dt(t = 0)$ の関係を導く。この節では $\nu = 0$ の場合を考える。

C.1 ρ_1 および ϕ の方程式

線形化した渦度方程式 (75) より ρ_1 および ϕ の常微分方程式を導く。(75) の左辺は (84) に等しい。これに $\tilde{\varphi}(t; \mathbf{k}', \mathbf{x})$ を掛け、 \mathbf{x} で積分する。表記の簡単のため、 $\tilde{\varphi}(t; \mathbf{k}, \mathbf{x})$ の t 依存性については略すことにすると、

$$\begin{aligned}
 \int \tilde{\varphi}(\mathbf{k}', \mathbf{x}) (LHS) d\mathbf{x} &= - \int \tilde{\varphi}(\mathbf{k}', \mathbf{x}) \int \partial_t \left[\left(k_x^2 + \tilde{k}_y^2 \right) \bar{\phi} \right] \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) d\mathbf{k} d\mathbf{x} \\
 &= - \int \partial_t \left[\left(k_x^2 + \tilde{k}_y^2 \right) \bar{\phi} \right] \int \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}', \mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{k} \\
 &= -4\pi^2 \int \partial_t \left[\left(k_x^2 + \tilde{k}_y^2 \right) \bar{\phi} \right] \delta(k_x + k'_x) \delta(\tilde{k}_y + \tilde{k}'_y) d\mathbf{k} \\
 &= -4\pi^2 \frac{d}{dt} \left[\left(k_x'^2 + \tilde{k}_y'^2 \right) \bar{\phi}(t, -\mathbf{k}') \right]
 \end{aligned} \tag{115}$$

となる。

(75) の右辺の $\partial_x \rho_1$ は

$$\begin{aligned}
 \partial_x \rho_1 &= \int \bar{\rho}_1 \partial_x \tilde{\varphi} d\mathbf{k} \\
 &= i \int k_x \bar{\rho}_1 \tilde{\varphi} d\mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{116}$$

とできる。(75) の右辺に $\tilde{\varphi}(t; \mathbf{k}', \mathbf{x})$ を掛け、 \mathbf{x} で積分する。(115) と同様、 $\tilde{\varphi}(t; \mathbf{k}, \mathbf{x})$ の t 依存性については略すことにすると、

$$\begin{aligned}
 \int \tilde{\varphi}(\mathbf{k}', \mathbf{x}) (RHS) d\mathbf{x} &= iC \int \tilde{\varphi}(\mathbf{k}', \mathbf{x}) \int k_x \bar{\rho}_1 \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) d\mathbf{k} d\mathbf{x} \\
 &= -4\pi^2 iC k'_x \bar{\rho}_1(t, -\mathbf{k}')
 \end{aligned} \tag{117}$$

を得る。

式 (115) および式 (117) について $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$ と置いて、常微分方程式

$$\frac{d}{dt} \left[\left(k_x^2 + \tilde{k}_y^2(t) \right) \bar{\phi}(t, \mathbf{k}) \right] = -iC k_x \bar{\rho}_1(t, \mathbf{k}) \tag{118}$$

が得られた．式 (118) の左辺は

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(k_x^2 + \tilde{k}_y^2(t) \right) \bar{\phi}(t, \mathbf{k}) + \left(k_x^2 + \tilde{k}_y^2(t) \right) \frac{d\bar{\phi}}{dt}(t, \mathbf{k}) \\ &= -2\sigma k_x \tilde{k}_y(t) \bar{\phi}(t, \mathbf{k}) + \left(k_x^2 + \tilde{k}_y^2(t) \right) \frac{d\bar{\phi}}{dt}(t, \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (119)$$

と展開できるので， $\phi(0, x) = 0$ とすると $\phi(0, \mathbf{k}) = 0$ であり， $\tilde{k}_y(0) = k_y$ より $t = 0$ における (118) は

$$\frac{d\bar{\phi}}{dt}(0, \mathbf{k}) = -i \frac{C k_x}{k_x^2 + k_y^2} \bar{\rho}_1(0, \mathbf{k}) \quad (120)$$

である．

C.2 $\hat{\phi}(t)$ と $\hat{\rho}_1(t)$ の関係

(120) を見ると， $\bar{\phi}$ は $\bar{\rho}_1$ に $-i$ を掛けて得られることがわかる．これは，実空間での関数 ϕ と ρ_1 の位相は $\pi/2$ ずれていると考えられる．簡単な三角関数

$$\phi(t, x) = \hat{\phi}(t) \sin(k_x x + \tilde{k}_y(t) y) \quad (121)$$

$$\rho_1(t, x) = \hat{\rho}_1(t) \cos(k_x x + \tilde{k}_y(t) y) \quad (122)$$

を仮定し，振幅 $\hat{\phi}$ と $\hat{\rho}_1$ の関係を導く．

(75) の左辺について考える．まず，

$$\nabla^2 \phi = - \left(k_x^2 + \tilde{k}_y^2(t) \right) \hat{\phi}(t) \sin(k_x x + \tilde{k}_y(t) y) \quad (123)$$

であり，これより

$$\begin{aligned} \partial_t \nabla^2 \phi &= - \left[\partial_t \left(k_x^2 + \tilde{k}_y^2(t) \right) \right] \hat{\phi}(t) \sin(k_x x + \tilde{k}_y(t) y) \\ &\quad - \left(k_x^2 + \tilde{k}_y^2(t) \right) \left[\partial_t \hat{\phi}(t) \right] \sin(k_x x + \tilde{k}_y(t) y) \\ &\quad - \left(k_x^2 + \tilde{k}_y^2(t) \right) \hat{\phi}(t) \left[\partial_t \sin(k_x x + \tilde{k}_y(t) y) \right] \\ &= 2\sigma k_x \tilde{k}_y \hat{\phi}(t) \sin(k_x x + \tilde{k}_y(t) y) \\ &\quad - \left(k_x^2 + \tilde{k}_y^2(t) \right) \left[\partial_t \hat{\phi}(t) \right] \sin(k_x x + \tilde{k}_y(t) y) \\ &\quad + \sigma k_x y \left(k_x^2 + \tilde{k}_y^2(t) \right) \hat{\phi}(t) \cos(k_x x + \tilde{k}_y(t) y) \end{aligned} \quad (124)$$

である．また，

$$\partial_x \nabla^2 \phi = -k_x \left(k_x^2 + \tilde{k}_y^2(t) \right) \hat{\phi}(t) \cos \left(k_x x + \tilde{k}_y(t) y \right) \quad (125)$$

である．よって，

$$(\partial_t + \sigma y \partial_x) \nabla^2 \phi = \left(2\sigma k_x \tilde{k}_y(t) \hat{\phi}(t) - \left(k_x^2 + \tilde{k}_y^2(t) \right) \left[\partial_t \hat{\phi}(t) \right] \right) \sin \left(k_x x + \tilde{k}_y(t) y \right) \quad (126)$$

となる．

(75) の右辺は (122) を代入することで

$$C \partial_x \rho_1 = -C k_x \hat{\rho}_1(t) \sin \left(k_x x + \tilde{k}_y(t) y \right) \quad (127)$$

となる．

(126) および (127) より，

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt}(t) + \frac{2\sigma k_x \tilde{k}_y(t)}{k_x^2 + \tilde{k}_y^2(t)} \hat{\phi}(t) = \frac{C k_x}{k_x^2 + \tilde{k}_y^2(t)} \hat{\rho}_1(t) \quad (128)$$

が得られ， $t = 0$ で $\hat{\phi}(t) = 0$ とすると，

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt}(0) = \frac{C k_x}{k_x^2 + k_y^2} \hat{\rho}_1(0) \quad (129)$$

となる．

以上より，シミュレーションの初期値に

$$\begin{aligned} \omega &= 0 \\ \phi &= 0 \\ \rho_1 &= \epsilon \cos(k_x x + k_y y) \end{aligned} \quad (130)$$

を与えることと等価な常微分方程式 (90) に対する初期値は

$$\hat{\phi} = 0, \quad \frac{d\hat{\phi}}{dt} = \frac{C k_x}{k_x^2 + k_y^2} \epsilon \quad (131)$$

である．

参考文献

- [1] T. Tatsuno, F. Volponi, and Z. Yoshida, Transient Phenomena and Secularity of Linear Interchange Instabilities with Shear Flows in Homogeneous Magnetic Field Plasmas, *Physics of Plasmas* **8**, 399 (2001).
- [2] 九州大学大学院総合理工学府大気海洋環境システム学専攻編, 地球環境を学ぶための流体力学 (成山堂書店, 2006) p. 201.
- [3] J. Hawley, C. Gammie, and S. Balbus, Local Three-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of Accretion Disks, *The Astrophysical Journal* **440**, 742 (1995).
- [4] Scalable Software Infrastructure for Scientific Computing, 反復解法ライブラリ Lis, <http://www.ssisc.org/lis/>
- [5] 田中光宏, 基礎数値解析,
http://www.made.gifu-u.ac.jp/~tanaka/LectureNote/numerical_analysis.pdf
- [6] A. Arakawa, Computational Design for Long-Term Numerical Integration of the Equations of Fluid Motion: Two-Dimensional Incompressible Flow. Part I, *Journal of Computational Physics* **1**, 119 (1966).
- [7] 多田野寛人, 並列数値アルゴリズム I,
<http://www.ccs.tsukuba.ac.jp/workshop/HPCseminar/2011/material/2011-04-linear-system.pdf>
- [8] 松下泰雄, フーリエ解析 –基礎と応用– (培風館, 2010) p. 52.
- [9] A. B. Hassam, Nonlinear stabilization of the RayleighTaylor instability by external velocity shear, *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, **4**, 485 (1992).