

修 士 論 文 の 和 文 要 旨

研究科・専攻	大学院 情報理工学研究科 情報・通信工学専攻 博士前期課程		
氏 名	山村 光卓	学籍番号	1431109
論 文 題 目	多線条線路理論を用いた車載ワイヤーハーネスの特性評価モデル		
<p>要 旨</p> <p>本論文では、近年注目度が高まっている、自動車における EMC（ElectroMagnetic Compatibility）問題に焦点を当て、特に、電子制御を行うマイコンや電子機器類を相互に接続するワイヤーハーネスに注目している。EMC を考慮したハーネスの配線設計のためには、実機によるテストの繰り返しや、CAD による 3 次元電磁界シミュレーションが行われるが、いずれもコストや時間を要してしまうという問題がある。そこで本論文では、配線設計を簡易に行うための、多線条伝送線路理論による特性評価手法を提案している。</p> <p>提案手法では、まずハーネスを伝わる信号やノイズの波長に比べて十分に短い区間に分割し、各区間におけるトランスヴァース面の形状から、提案近似式を用いることで等価回路化する。次に、各区間の等価回路について成立する電信方程式を、状態変数法やモード分解法といった多線条線路理論の手法で解き、縦続行列を得る。そして、各区間の縦続行列をカスケードすることで、ハーネス全体を回路網として表現する。</p> <p>本論文では、ハーネスの EMC 問題で重要となる 300 kHz～1 GHz の周波数範囲において、実測や電磁界シミュレーションの結果と比較検討を行い、提案手法の有効性を確認している。まず、配線条件の変化するツイストペアケーブルをモデル化し、撚りピッチ一つを 10～20 区間に分割して状態変数法を用いれば、あらゆる配線条件に対して提案手法が適用可能であることを示した。次に、太さの異なる 2 本線路系と、グラウンド面からの配線高が連続的に変化する 3 本線路系をそれぞれモデル化して、いずれにおいても提案手法の有効性を確認し、また、モード分解法を用いて、独立・直交な各伝搬モードについて検討した。</p> <p>さらに、より実際のハーネスに近い系への応用として、途中に分岐を含む線路系の伝送特性と、配線上の不均衡が要因となって生じるコモンモード電流の評価を行い、ハーネスの配線設計問題における提案手法の適用可能性を提示している。</p>			

電気通信大学大学院 情報理工学研究科 情報・通信工学専攻

平成 27 年度修士論文

多線条線路理論を用いた 車載ワイヤーハーネスの 特性評価モデル

情報・通信工学専攻

電子情報システムコース

肖研究室

学籍番号 : 1431109

氏名 : 山村 光卓

主任指導教員 : 肖 鳳超 教授

指導教員 : 和田 光司 教授

提出日 : 平成 28 年 1 月 29 日

目次

第 1 章	序章	1
1.1	はじめに ～EMC（電磁環境両立性）とは～	1
1.2	本研究の概要 ～自動車における EMC 問題～	2
1.3	本論文の構成	4
第 2 章	理論	5
2.1	伝送線路理論	5
2.1.1	集中定数回路と分布定数回路 [9][10]	5
2.1.2	電信方程式 [10]	6
2.1.3	伝搬定数と特性インピーダンス [10]	9
2.1.4	縦続行列表示	11
2.2	多線条線路における伝送線路理論	12
2.2.1	多線条線路の電信方程式 [11]	13
2.2.2	状態変数法	16
2.2.3	状態変数法の単独線路への適用および物理的意味についての考察	23
2.2.4	モード分解法	26
2.2.5	モード分解法の対称 2 本線路への適用および奇モード・偶モードと ディファレンシャルモード・コモンモード	30
2.3	S パラメータ	37
2.3.1	S パラメータの定義 [17]	37
2.4	各種行列の変換	39
2.4.1	縦続行列から散乱行列への変換 [17]	39
2.4.2	S 行列と T 行列の変換 [18]	42

第 3 章	提案手法	44
3.1	縦続行列による回路網モデル化	44
3.2	一次定数の近似導出式	45
3.2.1	R 行列	46
3.2.2	L 行列	49
3.2.3	C 行列	50
3.2.4	G 行列	51
第 4 章	ツイストペアケーブルのモデル化	52
4.1	検討モデル	52
4.1.1	実験	53
4.1.2	提案手法による理論計算	54
4.1.3	シミュレーション	55
4.2	計算手法を変えた場合	55
4.2.1	結果	56
4.2.2	考察	61
4.3	1 ピッチあたりの分割数を変えた場合	62
4.3.1	結果	62
4.3.2	考察	68
第 5 章	種々のケーブルのモデル化	69
5.1	太さの異なる 2 本線路系	69
5.1.1	実験系	69
5.1.2	理論計算	70
5.1.3	結果	71
5.1.4	考察	73
5.2	配線高の変化する 3 本線路系	76
5.2.1	実験系	76
5.2.2	理論計算	76
5.2.3	結果	78
5.2.4	考察	84

第 6 章	提案モデルの応用	88
6.1	途中に分岐を含む線路系への適用	88
6.1.1	モデルの概要	88
6.1.2	結果	92
6.1.3	考察	99
6.2	コモンモード電流の計算	99
6.2.1	理論	99
6.2.2	結果	101
6.2.3	考察	103
第 7 章	まとめ	104
参考文献		105

第 1 章

序章

1.1 はじめに ～EMC（電磁環境両立性）とは～

近年の情報通信技術（Information and Communication Technology : ICT）の発展はめざましい。一人が複数台のコンピュータや携帯電話，スマートフォンを持つことは珍しくなくなっていたり，あらゆるモノがインターネットを介してつながる Internet of Things : IoT 時代が到来していたりと，我々の身の回りにある電子機器・通信機器の数は急増しており，社会基盤として必要不可欠な存在となっている。

我々の生活が豊かになる一方で，これまでにはなかった新たな課題が生じている。それが **EMC（ElectroMagnetic Compatibility：電磁環境両立性）** の問題である。電子機器が動作したり通信が行われたりすると，電磁波が発生する。この電磁波は，あるシステムにおいて情報を伝送するためには必要なものである一方，それとは別のシステムにおいては不要なノイズとして作用し，機器の誤動作や情報伝達の誤りの原因となる可能性がある。そのため，他の系に悪影響を与えるような電磁波を抑えることと，他の系からの電磁波による悪影響を抑えることを両立したシステムの設計が要求される。

このような現象は，身の回りのあらゆる場面で電子機器・通信機器が用いられるようになったからこそ顕著となったのである。たとえば，携帯型音楽プレーヤーなどに採用されている無線通信規格である Bluetooth には 2.4 GHz 帯が割り当てられているが，これは電子レンジで用いられている 2.45 GHz の電磁波と重複する。そのため，Bluetooth を使用したワイヤレススピーカーで音楽を聴いている最中に電子レンジで加熱調理を行うと，混信により音声途切れることがある。

EMC 問題の難しさは、このように“目に見えない電磁波”によって引き起こされることにある。そのため、EMC の研究課題の一つとしては、不要電磁波を出したり受けたりしてしまうメカニズムを解析し、数式としてモデル化するなどの手法により可視化することがある。また、不要電磁波の計測技術や、計測結果の評価法とそれを受けての規格化も、EMC の重要な研究テーマである。

先述の通り、EMC は最近になって初めて問題となったことも多く、まだ解明されていないことも多い。そのため、EMC の研究成果は、時代の最先端として社会へ影響を与えることも多い。最近の例では、電車内における携帯電話の使用に関するルールの変更がある。JR 東日本では、以前は「優先席付近では電源を切る」よう案内を行っていたが、2015 年 10 月 1 日以降は「優先席付近では 混雑時には 電源を切る」よう案内を改めた。これは、総務省の委員会による「携帯電話を心臓のごく近傍まで近付けない限り、ペースメーカーは誤動作するような影響を受けない」という調査結果を受けて、ガイドラインが改正されたことによるものである。つまり、以前は電磁波の悪影響がある“かもしれない”ために一律で使用に制限があったものが、EMC の研究を経て、電磁波の悪影響が“確認された”場合のみ使用を制限するものに改正されたのである。このように、EMC の研究は、我々の生活をより便利なものとするように日々続けられており、非常に重要なものなのである。

1.2 本研究の概要 ～自動車における EMC 問題～

本研究では、近年注目度が高まっている、自動車における EMC 問題に焦点を当てている。従来は、自動車は熱機関を中心とする機械的な見方が支配的であった。しかし最近では、電気信号を用いて制御が行われていたり、カーナビやカーオーディオといった多種多様な車載電子機器が搭載されていたり、さらには熱ではなく電気を動力源とする電気自動車が普及し始めていたり、と、“自動車の電子機器化”と呼ぶべき事態が急速に進行している。特に自動車の場合は、誤動作せずに安全に走行できることが確実に必要となるため、自動車を電氣的・電子的に捉え、EMC 問題を解明することの重要度が非常に高い。特に本論文では、電子制御を行うマイコンである ECU (Electronic Control Unit) や電子機器類を相互に接続するワイヤーハーネス (Wiring Harness) に注目している。ECU や機器の数が増えれば増えるほど、それらを繋ぐハーネスの量も増加するので、ハーネスにおける EMC 問題を考慮する必要性も大きくなっていく。そのため、ハーネスに着目した EMC の研究がなされている [1]。

この問題を考えるため、ハーネスをアンテナとして捉え、受信アンテナとしてのハーネス＝感受性（Susceptibility）に関する EMC 問題と、送信アンテナとしてのハーネス＝放射（Emission）に関する EMC 問題をそれぞれ検討する。前者については、エンジンの点火や ECU のクロックによって発生する数 MHz～数百 MHz のノイズ [2] をハーネスが受け取り、接続された機器類や他の ECU に伝導ノイズとして伝わる現象や、それに関連して数十 kHz～数百 MHz にて規定されたハーネス関連の EMC 試験規格 [3] が検討課題である。また後者については、ステアリングやブレーキなどの制御系にて用いられている車載 LAN 規格である CAN（Control Area Network）や FlexRay といった、数百 Kbps～数 Mbps の通信速度で差動伝送を行うシステム [4][5] における、配線の不平衡に起因する、ノイズの放射源となる共通モード電流の発生が検討課題である。ハーネスの配線設計においては、これらの問題を考慮して、ECU や電子機器、また他のハーネス間との関係に注意する必要がある。

しかし、自動車の場合は筐体のサイズが大きいため、実機によるテストを繰り返して設計を行うことはコストの面で問題がある。また、電磁界シミュレーションを行うにしても、配線が三次元的に複雑な構造を持つため、高性能な計算機と計算時間を要してしまうといった問題がある。そこで本研究では、電磁気学の理論に基づいて、ハーネスにおける現象の定式化を検討する。

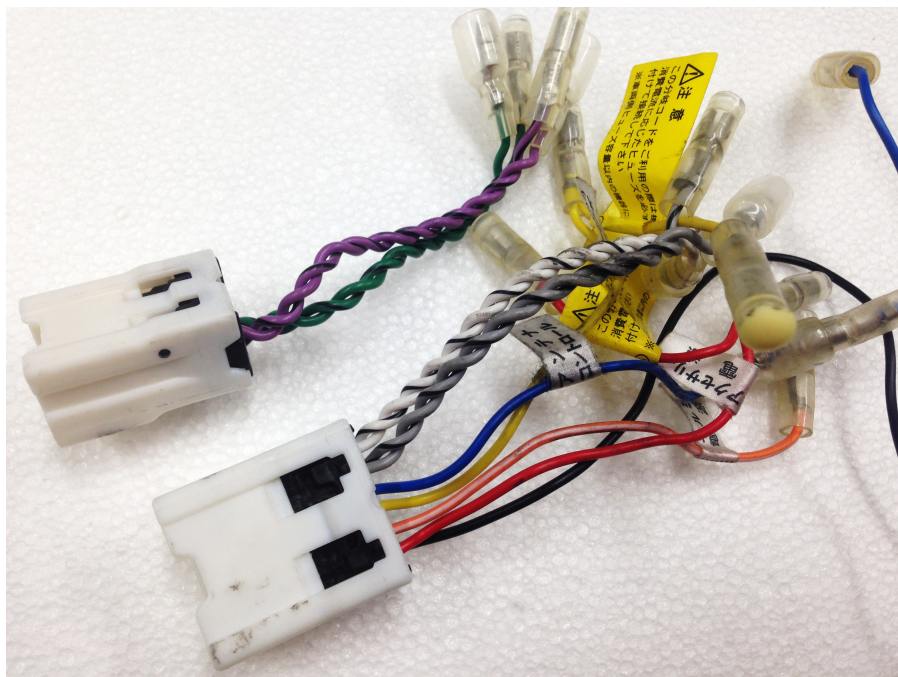


図 1.1 車載ワイヤーハーネスの一例

ハーネスは図 1.1 に示すように、複数本の絶縁体被覆電線を束ねて構成されるため、多線条線路とみて伝送線路理論によってモデル化を行う。伝送線路理論では、線路近傍における電磁界の姿態として TEM (Transverse ElectroMagnetic) モードまたは準 TEM (Quasi-TEM) モードが仮定され、波長に比べて十分に短い微小部分に線路を区切ることで等価回路として表される。そこで提案手法では、等価回路を特徴づける線路系の一次定数が一様とみなせる区間長にハーネスを分割し、各区間を縦続行列表現した上で、それらをカスケードしてハーネス全体を回路網としてモデル化する。

ここで、等価回路化のため必要となる各区間の一次定数は、TEM または準 TEM モードの仮定により、線路系の各トランスヴァース面における二次元の静電磁界問題を考えることで求められる。しかしハーネスの場合は、被膜により誘電率が一様ではないため、一次定数を解析解として表すことはできない。そのため従来手法では、断面形状が対称性などを有する限られた部分のみを用いて検討 [6],[7] したり、形状ごとに有限要素法などによるシミュレーションでパラメータを抽出 [8] したりしていた。しかしこれらの手法では、モデル化できるハーネスの種類が限られてしまったり、一次定数を求めるのに時間がかかってしまったりといった問題がある。そこで本手法では、各パラメータについての近似導出式を提案し、各区間の等価回路を任意の断面形状から計算式によって求められるようにする。

本論文では、以上のようにして車載ワイヤーハーネスを多線条伝送線路としてモデル化し、EMC 問題に関する特性の評価を簡易な計算で行う手法を提案している。

1.3 本論文の構成

本論文は、まず第 2 章にて、検討に必要な理論について多線条伝送線路の理論を中心に整理している。提案手法は、第 3 章において、線路系の縦続行列表現による回路網モデル化および一次定数の近似導出式について述べている。提案手法を用いた具体的な検討は、第 4 章と第 5 章にて行っている。第 4 章では、撚りピッチやケーブル長、配線高といった条件を変化させたツイストペアケーブルをモデル化し、実測値やシミュレーション値と比較検討することで、提案手法の有効性について検証している。また第 5 章では、太さの異なる電線による 2 本線路系や、グラウンド平面からの配線高が変化する 3 本線路系といった種々のケーブルをモデル化し、実測値と比較検討している。その上で、第 6 章では、より実際のハーネスに近い系への提案モデルの応用として、途中に分岐を含む線路系における伝送特性や、コモンモード電流の計算といった評価を行っている。最後に、これらの検討について、第 7 章にてまとめている。

第 2 章

理論

2.1 伝送線路理論

2.1.1 集中定数回路と分布定数回路 [9][10]

直流回路や低周波回路の解析を行う際には，抵抗やコイル，コンデンサといった素子の形状や大きさ，またそれらを繋ぐ導線の長さや配線経路を考慮する必要はなかった．これは，素子や導線間において信号が無限に短い時間で伝送されるため，言い換えると，素子や導線の特性が一点に集中して存在すると考えられるため，線路における電圧や電流の値がどこでも一定とみなせるためである．たとえば，関東地方における商用電源の周波数は 50 Hz であるが，これは真空中の波長に直すと，約 $3.0 \times 10^8 / 50 = 6000$ km に相当する．よって，数 mm 程度の抵抗やコンデンサのような回路素子，また数 cm 四方程度の回路基板については，大きさが波長に比べて十分に小さいので，形状などの影響を無視することができるのである．このように取り扱える回路を，**集中定数回路**（Lumped-Constant Circuit）という．

一方で，線路を流れる信号の周波数が高くなってくると，図 2.1 に示したように，波長に対して素子の大きさが無視できなくなってくる．図 2.1 の例では，周波数 5 GHz，すなわち真空中において 6 cm の波長である信号について，リード線を含めて 6 cm の抵抗素子における 2 点 (A)，(B) にて電圧の位相に差異が生じていることを概念的に表している．このように，高周波回路においては，素子の形状や大きさ，また配線の長さや経路を踏まえて，線路電圧・電流を時間だけでなく位置の関数とみて解析を行う必要が生じてくる．このような回路を**分布定数回路**（Distributed-Constant Circuit）という．

分布定数回路を取り扱う際には，図 2.2 に示したような等価回路を用いることが一般的である．線路を波長に比べて十分に小さい区間長 Δx の微小部分に区切り，これが線路に沿って空

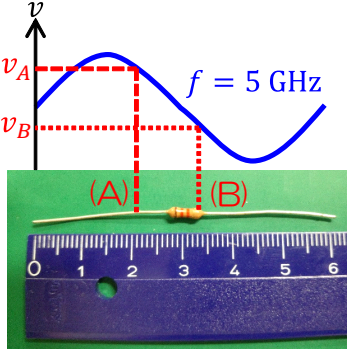


図 2.1 高周波回路における
波長と素子サイズの関係

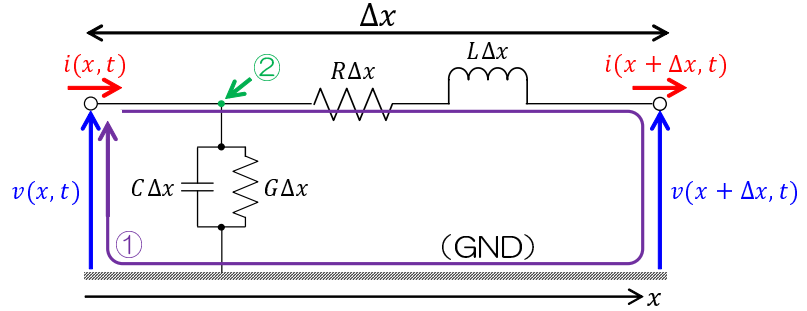


図 2.2 分布定数回路の微小部分の等価回路

間的に分布していると考える．線路の特性は単位長さあたりの抵抗 R ，インダクタンス L ，漏れコンダクタンス G ，キャパシタンス C で特徴付けられ，これらのパラメータを線路の一次定数という．

2.1.2 電信方程式 [10]

いま，図 2.2 にて ① で示したループにキルヒホッフの電圧則を適用すると，

$$-R\Delta x i(x + \Delta x, t) - L\Delta x \frac{\partial i(x + \Delta x, t)}{\partial t} - v(x + \Delta x, t) + v(x, t) = 0 \quad (2.1)$$

を得るが，これを変形して，

$$-\frac{v(x + \Delta x, t) - v(x, t)}{\Delta x} = Ri(x + \Delta x, t) + L \frac{\partial i(x + \Delta x, t)}{\partial t} \quad (2.2)$$

とし，さらに $\Delta x \rightarrow 0$ とすると，

$$-\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = Ri(x, t) + L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (2.3)$$

を得る．また，図 2.2 にて ② で示したノードにキルヒホッフの電流則を適用すると，

$$i(x, t) = i(x + \Delta x, t) + G\Delta x v(x, t) + C\Delta x \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (2.4)$$

を得るが，これを変形して，

$$-\frac{i(x + \Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} = Gv(x, t) + C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (2.5)$$

とし，さらに $\Delta x \rightarrow 0$ とすると，

$$-\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = Gv(x, t) + C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (2.6)$$

を得る．(2.3) 式および (2.6) 式の微分方程式の組は，伝送線路における線路電圧および電流の関係を示した基本式であり，電信方程式 (Telegrapher's Equation) とよばれている．

さて，(2.3) 式の両辺を x で偏微分すると，

$$-\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = R \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} + L \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad (2.7)$$

より，順序交換などを行って，

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = R \cdot -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} + L \frac{\partial}{\partial t} \cdot -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} \quad (2.8)$$

を得るが，ここに (2.6) 式を代入すると，

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = R \left(Gv(x,t) + C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right) + L \frac{\partial}{\partial t} \left(Gv(x,t) + C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right) \quad (2.9)$$

となり，整理すると，

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = (RC + LG) \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + RGv(x,t) \quad (2.10)$$

を得る．同様にして，(2.6) 式の両辺を x で偏微分し，(2.3) 式を代入して整理すると，

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2} = (RC + LG) \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + RGi(x,t) \quad (2.11)$$

を得る．(2.10) 式および (2.11) 式は波動方程式の形をしており，線路電圧および電流が波動として伝搬することを表している．特に，無損失線路 ($R = 0, G = 0$) の場合，(2.10) 式および (2.11) 式は，

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.13)$$

となり，線路電圧および電流が等しい伝搬速度 $1/\sqrt{LC}$ で伝搬することがわかる．

ここからは簡単化のため，時間軸において正弦波的に変化する信号を仮定し，正弦波定常状態解析を行うこととする．線路電圧 $v(x,t)$ のフェーザ表示を $V(x)$ ，線路電流 $i(x,t)$ のフェーザ表示を $I(x)$ と書くこととし，正弦波信号の角周波数が ω であるとき $\partial/\partial t$ が $j\omega$ に置き換えられることを踏まえると，(2.3) 式および (2.6) 式は次のように書き換えられる．

$$-\frac{dV(x)}{dx} = (R + j\omega L)I(x) \quad (2.14)$$

$$-\frac{dI(x)}{dx} = (G + j\omega C)V(x) \quad (2.15)$$

また、線路の単位長さあたりの直列インピーダンス $Z \equiv R + j\omega L$ および並列アドミタンス $Y \equiv G + j\omega C$ を用いると、(2.14) 式および (2.15) 式は、

$$-\frac{dV(x)}{dx} = ZI(x) \quad (2.16)$$

$$-\frac{dI(x)}{dx} = YV(x) \quad (2.17)$$

と整理でき、さらに行列表示を行うと、

$$-\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Z \\ Y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

とまとめて書くことができる。

さて、(2.16) 式の両辺を x で微分すると、

$$-\frac{d^2V(x)}{dx^2} = Z \frac{dI(x)}{dx} \quad (2.19)$$

となるが、(2.19) 式に (2.17) 式を代入すると、

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = ZY \frac{dV(x)}{dx} \quad (2.20)$$

を得、 $V(x)$ に関する 2 階の微分方程式とすることができる。(2.20) 式の線路電圧の一般解は、積分定数 C_1, C_2 を用いて、

$$V(x) = C_1 e^{-\sqrt{ZY}x} + C_2 e^{+\sqrt{ZY}x} \quad (2.21)$$

となる。さらに、(2.21) 式を (2.16) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(C_1 e^{-\sqrt{ZY}x} + C_2 e^{+\sqrt{ZY}x}) &= -ZI(x) \\ \therefore -\sqrt{ZY}C_1 e^{-\sqrt{ZY}x} + \sqrt{ZY}C_2 e^{+\sqrt{ZY}x} &= -ZI(x) \\ \therefore I(x) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{Z}{Y}}}(C_1 e^{-\sqrt{ZY}x} - C_2 e^{+\sqrt{ZY}x}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

となる。

(2.21), (2.22) 式の線路電圧、線路電流の一般解は二つの項の和、差でそれぞれ表されている。これらの項はそれぞれ、 $-\sqrt{ZY}$ の項は x が大きくなるにつれて位相が遅れることを示すので x 軸方向への進行波成分を表し、 $+\sqrt{ZY}$ の項は x が大きくなるにつれて位相が早まることを示すので x 軸方向への後退波成分を表す。つまり、線路電圧は進行波と後退波の和で、線

路電流は進行波と後退波の差で、それぞれ表される。この結果は、(2.17) 式の両辺を x で微分して、

$$-\frac{d^2 I(x)}{dx^2} = Y \frac{dV(x)}{dx} \quad (2.23)$$

とし、次に (2.23) 式に (2.16) 式を代入して、

$$\frac{d^2 I(x)}{dx^2} = YZ \frac{dI(x)}{dx} \quad (2.24)$$

として、 $I(x)$ に関する 2 階の微分方程式を先に解いても同様に得られる。

2.1.3 伝搬定数と特性インピーダンス [10]

線路電圧および電流の一般解の式には、線路の直列インピーダンス Z および並列アドミタンス Y の積および比の根が登場するが、これらについて、

$$\gamma \equiv \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \equiv \alpha + j\beta \quad (2.25)$$

$$Z_0 \equiv \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (2.26)$$

とおくこととする。これらは二次定数と呼ばれ、 γ を伝搬定数 (Propagation Constant)、 Z_0 を特性インピーダンス (Characteristic Impedance) とそれぞれいう。伝搬定数の実部 α は減衰定数、虚部 β は位相定数といい、それぞれ伝搬に伴う波の振幅、位相の変化の割合を示す量である。

また、無損失線路の場合は、二次定数はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(0 + j\omega L)(0 + j\omega C)} = \sqrt{-\omega^2 LC} = j\omega\sqrt{LC} \\ \therefore \quad \alpha &= 0, \quad \beta = \omega\sqrt{LC} \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{0 + j\omega L}{0 + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.28)$$

となる。同軸ケーブルのような一般の線路では、 $Z_0 = 50 \Omega$ となるように設計されている場合が多い。

図 2.3 は伝送線路をシンボリックに表現したものである。線路長 l 、伝搬定数 γ 、特性インピーダンス Z_0 であり、 $x = 0$ において内部インピーダンス Z_g をもつ電圧 E_g の電源に、また $x = l$ においてインピーダンス Z_l の負荷にそれぞれ接続している。

いま、 $x = l$ での端子条件を考えると、(2.21)、(2.22) 式より、

$$V(l) = C_1 e^{-\gamma l} + C_2 e^{+\gamma l} \quad (2.29)$$

$$I(l) = \frac{1}{Z_0} (C_1 e^{-\gamma l} - C_2 e^{+\gamma l}) \quad (2.30)$$

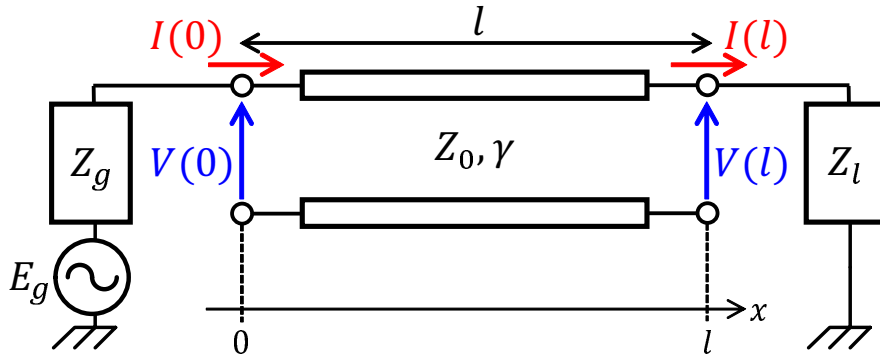


図 2.3 伝送線路のシンボル表示

である．ここで，

$$V(l) = Z_l I(l) \quad (2.31)$$

であるが，(2.31) 式に (2.29)，(2.30) 式を代入して整理すると，

$$\frac{C_2 e^{+\gamma l}}{C_1 e^{-\gamma l}} = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} \quad (2.32)$$

を得る． $C_1 e^{-\gamma l}$ は $x = l$ における電圧の進行波成分を， $C_2 e^{+\gamma l}$ は $x = l$ における電圧の後退波成分をそれぞれ表しているので，(2.32) 式の関係は $x = l$ における電圧の進行波に対する後退波の割合，すなわち負荷端における電圧の反射係数を示している．一般に反射係数といえは，この電圧反射係数のことを指し，

$$\Gamma = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} \quad (2.33)$$

と定義される．

(2.33) 式より， $Z_l = Z_0$ のとき $\Gamma = 0$ となるが，これは線路と負荷の接続部で反射が生じず，エネルギーがすべて負荷側に透過する状態（インピーダンス整合）を示している．このとき，(2.32) 式より，

$$C_2 = 0 \quad (2.34)$$

となるから，(2.34) 式を (2.21)，(2.22) 式に代入することで，(2.26) 式に注意して，

$$\frac{V(x)}{I(x)} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = Z_0 \quad (2.35)$$

の関係を得る．したがって，(2.35) 式より，特性インピーダンスは反射波がないときの電圧と電流の比を示す量であることがわかる．

2.1.4 縦続行列表示

図 2.3 のように表現された伝送線路において, $x = 0$ での端子条件について, (2.21), (2.22) 式より,

$$V(0) = C_1 + C_2 \quad (2.36)$$

$$I(0) = \frac{1}{Z_0}(C_1 - C_2) \quad (2.37)$$

である. ここで, (2.36), (2.37) 式の両辺の和および差をとることにより, 積分定数 C_1, C_2 を $x = 0$ における端子電圧および電流にて,

$$C_1 = \frac{V(0) + Z_0 I(0)}{2} \quad (2.38)$$

$$C_2 = \frac{V(0) - Z_0 I(0)}{2} \quad (2.39)$$

として, (2.29), (2.30) 式に代入すると,

$$\begin{aligned} V(l) &= \frac{V(0) + Z_0 I(0)}{2} e^{-\gamma l} + \frac{V(0) - Z_0 I(0)}{2} e^{+\gamma l} \\ &= V(0) \frac{e^{-\gamma l} + e^{+\gamma l}}{2} - Z_0 I(0) \frac{-e^{-\gamma l} + e^{+\gamma l}}{2} \\ &= V(0) \cosh \gamma l - Z_0 I(0) \sinh \gamma l \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} I(l) &= \frac{1}{Z_0} \left(\frac{V(0) + Z_0 I(0)}{2} e^{-\gamma l} - \frac{V(0) - Z_0 I(0)}{2} e^{+\gamma l} \right) \\ &= -\frac{1}{Z_0} V(0) \frac{-e^{-\gamma l} + e^{+\gamma l}}{2} + I(0) \frac{e^{-\gamma l} + e^{+\gamma l}}{2} \\ &= -\frac{1}{Z_0} V(0) \sinh \gamma l + I(0) \cosh \gamma l \end{aligned} \quad (2.41)$$

となる. (2.40), (2.41) 式を行列表示にてまとめて書くと,

$$\begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & -Z_0 \sinh \gamma l \\ -\frac{1}{Z_0} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

となるが, これを変形すると, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ に注意して,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} &= \frac{1}{\cosh^2 \gamma l - (-Z_0) \cdot \left(-\frac{1}{Z_0}\right) \sinh^2 \gamma l} \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & Z_0 \sinh \gamma l \\ \frac{1}{Z_0} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & Z_0 \sinh \gamma l \\ \frac{1}{Z_0} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.43)$$

を得る．(2.43) 式は縦続行列または **F** 行列 (**F** パラメータ) (Chain Matrix, Cascaded Matrix, Fundamental Matrix) による線路表示を与えている．

なお，無損失線路の場合は，伝搬定数 γ は純虚数 $j\beta$ となるので，

$$\begin{aligned} V(l) &= \frac{V(0) + Z_0 I(0)}{2} e^{-j\beta l} + \frac{V(0) - Z_0 I(0)}{2} e^{+j\beta l} \\ &= V(0) \frac{e^{-j\beta l} + e^{+j\beta l}}{2} - j Z_0 I(0) \frac{-e^{-j\beta l} + e^{+j\beta l}}{2j} \\ &= V(0) \cos \beta l - Z_0 I(0) \sin \beta l \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} I(l) &= \frac{1}{Z_0} \left(\frac{V(0) + Z_0 I(0)}{2} e^{-j\beta l} - \frac{V(0) - Z_0 I(0)}{2} e^{+j\beta l} \right) \\ &= -j \frac{1}{Z_0} V(0) \frac{-e^{-j\beta l} + e^{+j\beta l}}{2j} + I(0) \frac{e^{-j\beta l} + e^{+j\beta l}}{2} \\ &= -j \frac{1}{Z_0} V(0) \sin \beta l + I(0) \cos \beta l \end{aligned} \quad (2.45)$$

となり，(2.44)，(2.45) 式の行列表示

$$\begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta l & -j Z_0 \sin \beta l \\ -j \frac{1}{Z_0} \sin \beta l & \cos \beta l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

を $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ に注意して変形し，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} &= \frac{1}{\cos^2 \beta l - (-j Z_0) \cdot \left(-j \frac{1}{Z_0}\right) \sin^2 \beta l} \begin{bmatrix} \cos \beta l & j Z_0 \sin \beta l \\ j \frac{1}{Z_0} \sin \beta l & \cos \beta l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \beta l & j Z_0 \sin \beta l \\ j \frac{1}{Z_0} \sin \beta l & \cos \beta l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.47)$$

より縦続行列表示を得る．

2.2 多線条線路における伝送線路理論

2.1 節では単独線路について議論してきたが，信号線を 1 本だけ用いるのでは，伝送できる情報の量に限りがある．そこで，通信の高速化に伴って，複数本の線路を用いてパラレル伝送を行うことが多い．本節では，このような多線条線路 (Multiconductor Transmission Lines) の系における伝送線路理論を取り扱う．

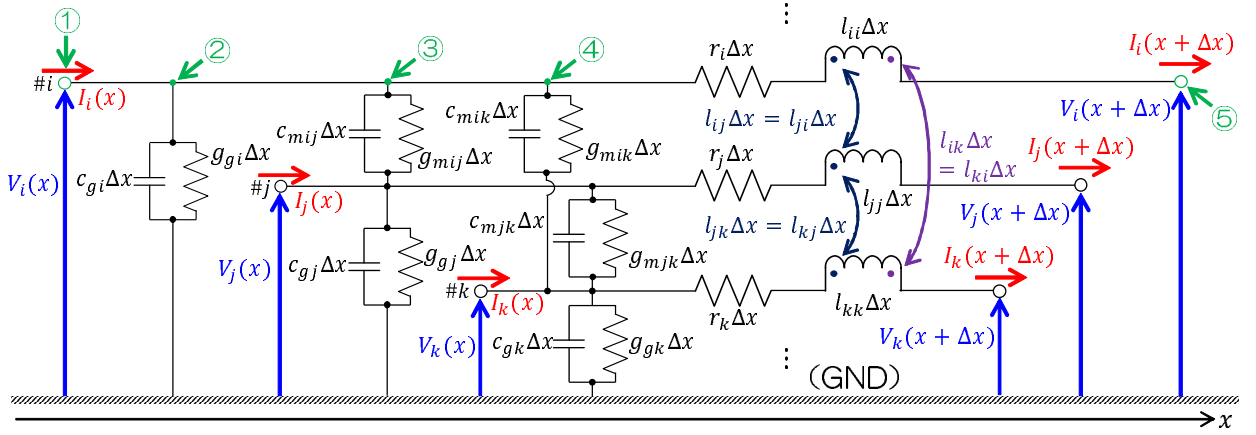


図 2.4 多線条伝送線路の微小部分の等価回路

2.2.1 多線条線路の電信方程式 [11]

図 2.4 に多線条線路の微小部分 Δx の等価回路を示す．ただし，線路は n 本あるうちの一部ののみを示しているものとし， $\#i, \#j, \#k (i, j, k = 1, 2, \dots, n, i \neq j \neq k)$ はそれぞれ，線路の番号を便宜的に表したものである．線路を特徴付ける一次定数は，単独線路の場合と同様に，単位長さあたりの線 $\#i$ の抵抗 r_i ，線 $\#i$ の自己インダクタンス l_{ii} ，線 $\#i$ と GND 間の漏れコンダクタンス g_i ，線 $\#i$ と GND 間の容量 c_{gi} が存在するほか，線間の結合（Coupling）を表す値として，線 $\#i$ と線 $\#j$ 間の相互インダクタンス l_{ij} ，線間の漏れコンダクタンス g_{mij} ，線間容量 c_{mij} がある．

さて，図 2.4 におけるループ：① → ② → ③ → ④ → ⑤ → GND → ① にキルヒホッフの電圧則を適用すると，

$$\begin{aligned} & -r_i \Delta x I_i(x + \Delta x) - j\omega l_{ii} \Delta x I_i(x + \Delta x) \\ & - (\dots + j\omega l_{ij} \Delta x I_j(x + \Delta x) + j\omega l_{ik} \Delta x I_k(x + \Delta x) + \dots) \\ & - V_i(x + \Delta x) + V_i(x) = 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

を得るが，これを変形して，

$$-\frac{V_i(x + \Delta x) - V_i(x)}{\Delta x} = (r_i + j\omega l_{ii}) I_i(x + \Delta x) + \sum_{l=1, l \neq i}^n j\omega l_{il} I_l(x + \Delta x) \quad (2.49)$$

とし，さらに $\Delta x \rightarrow 0$ とすると，

$$-\frac{dV_i(x)}{dx} = (r_i + j\omega l_{ii}) I_i(x) + \sum_{l=1, l \neq i}^n j\omega l_{il} I_l(x) \quad (2.50)$$

を得る。また、図 2.4 にて ②, ③, ④ で示したノードにそれぞれキルヒホッフの電流則を適用していくと,

$$\begin{aligned}
 I_i(x) = & g_{gi}\Delta x V_i(x) + j\omega c_{gi}\Delta x V_i(x) \\
 & \cdots + g_{mij}\Delta x(V_i(x) - V_j(x)) + j\omega c_{mij}\Delta x(V_i(x) - V_j(x)) \\
 & + g_{mik}\Delta x(V_i(x) - V_k(x)) + j\omega c_{mik}\Delta x(V_i(x) - V_k(x)) + \cdots \\
 & + I_i(x + \Delta x)
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

を得るが, これを変形して,

$$\begin{aligned}
 -\frac{I_i(x + \Delta x) - I_i(x)}{\Delta x} = & \left\{ \left(g_{gi} + \sum_{l=1, l \neq i}^n g_{mil} \right) + j\omega \left(c_{gi} + \sum_{l=1, l \neq i}^n c_{mil} \right) \right\} V_i(x) \\
 & - \sum_{l=1, l \neq i}^n (g_{mil} + j\omega c_{mil}) V_l(x)
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

とし, さらに $\Delta x \rightarrow 0$ とすると,

$$-\frac{dI_i(x)}{dx} = \left\{ \left(g_{gi} + \sum_{l=1, l \neq i}^n g_{mil} \right) + j\omega \left(c_{gi} + \sum_{l=1, l \neq i}^n c_{mil} \right) \right\} V_i(x) - \sum_{l=1, l \neq i}^n (g_{mil} + j\omega c_{mil}) V_l(x) \tag{2.53}$$

を得る。(2.50) 式および (2.53) 式を得る操作を同様に繰り返すことで, 多線路線路の電信方程式を次のように得る。このとき, 行列表示を用いると簡潔にまとめられる。

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} -\frac{dV_1(x)}{dx} \\ -\frac{dV_2(x)}{dx} \\ \vdots \\ -\frac{dV_n(x)}{dx} \\ -\frac{dI_1(x)}{dx} \\ -\frac{dI_2(x)}{dx} \\ \vdots \\ -\frac{dI_n(x)}{dx} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \left(g_{g1} + \sum_{l=1, l \neq 1}^n g_{m1l} \right) + j\omega \left(c_{g1} + \sum_{l=1, l \neq 1}^n c_{m1l} \right) & -(g_{m12} + j\omega c_{m12}) & \vdots & -(g_{m1n} + j\omega c_{m1n}) \\ -(g_{m21} + j\omega c_{m21}) & \left(g_{g2} + \sum_{l=1, l \neq 2}^n g_{m2l} \right) + j\omega \left(c_{g2} + \sum_{l=1, l \neq 2}^n c_{m2l} \right) & \vdots & -(g_{m2n} + j\omega c_{m2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(g_{mn1} + j\omega c_{mn1}) & \vdots & \vdots & -(g_{mn2} + j\omega c_{mn2}) \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 0 & r_1 + j\omega l_{11} & j\omega l_{12} & \cdots & j\omega l_{1n} \\ 0 & j\omega l_{21} & r_2 + j\omega l_{22} & \cdots & j\omega l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & j\omega l_{n1} & j\omega l_{n2} & \cdots & r_n + j\omega l_{nn} \\ -(g_{m1n} + j\omega c_{m1n}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -(g_{m2n} + j\omega c_{m2n}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(g_{gn} + \sum_{l=1, l \neq n}^n g_{mnl} \right) + j\omega \left(c_{gn} + \sum_{l=1, l \neq n}^n c_{mnl} \right) & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(x) \\ V_2(x) \\ \vdots \\ V_n(x) \\ I_1(x) \\ I_2(x) \\ \vdots \\ I_n(x) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

ここで、各線路の実線路電圧および実線路電流に関して、実線路電圧ベクトル $\mathbf{V}(x)$ および実線路電流ベクトル $\mathbf{I}(x)$ を次のように定義する。

$$\mathbf{V}(x) \equiv \begin{bmatrix} V_1(x) \\ V_2(x) \\ \vdots \\ V_n(x) \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$\mathbf{I}(x) \equiv \begin{bmatrix} I_1(x) \\ I_2(x) \\ \vdots \\ I_n(x) \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

また、 n 次正方零行列を \mathbf{O}_n で表すこととし、さらに \mathbf{R} , \mathbf{L} , \mathbf{G} , \mathbf{C} , \mathbf{Z} , \mathbf{Y} の各行列を次のように定義する。

$$\mathbf{R} \equiv \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{L} \equiv \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\mathbf{G} \equiv \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$\equiv \begin{bmatrix} g_{g1} + \sum_{l=1, l \neq 1}^n g_{m1l} & -g_{m12} & \cdots & -g_{m1n} \\ -g_{m21} & g_{g2} + \sum_{l=1, l \neq 2}^n g_{m2l} & \cdots & -g_{m2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -g_{mn1} & -g_{mn2} & \cdots & g_{gn} + \sum_{l=1, l \neq n}^n g_{mnl} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$\mathbf{C} \equiv \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$\equiv \begin{bmatrix} c_{g1} + \sum_{l=1, l \neq 1}^n c_{m1l} & -c_{m12} & \cdots & -c_{m1n} \\ -c_{m21} & c_{g2} + \sum_{l=1, l \neq 2}^n c_{m2l} & \cdots & -c_{m2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{mn1} & -c_{mn2} & \cdots & c_{gn} + \sum_{l=1, l \neq n}^n c_{mnl} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$\mathbf{Z} \equiv \mathbf{R} + j\omega\mathbf{L} \quad (2.63)$$

$$\mathbf{Y} \equiv \mathbf{G} + j\omega\mathbf{C} \quad (2.64)$$

これらを用いると、(2.54) 式は次のように簡潔にできる。

$$\begin{bmatrix} -\frac{d\mathbf{V}(x)}{dx} \\ -\frac{d\mathbf{I}(x)}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_n & \mathbf{R} + j\omega\mathbf{L} \\ \mathbf{G} + j\omega\mathbf{C} & \mathbf{O}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(x) \\ \mathbf{I}(x) \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$-\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(x) \\ \mathbf{I}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_n & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{O}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(x) \\ \mathbf{I}(x) \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

(2.66) 式は (2.18) 式と同じ形をしているが、 \mathbf{Z} および \mathbf{Y} に各線間の結合を表すパラメータを含んでいるため、このままでは単独線路のように微分方程式を解くことができない。しかし、行列表示を利用して、相似変換 (Similarity Transformation) をによる対角化を行って変数変換することにより、(2.43) 式のような縦続行列表示を多線条線路についても得ることができる。次項からはその手法について述べる。

2.2.2 状態変数法

(2.66) 式より得られる、行列表示の微分方程式の $2n \times 2n$ 表現行列

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O}_n & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{O}_n \end{bmatrix} \equiv \mathbf{M} \quad (2.67)$$

について、 \mathbf{M} が $2n \times 2n$ 正方行列 \mathbf{P} によって、

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_{V_{s1}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{V_{s2}} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{V_{sn}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{I_{s1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_{I_{s2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{I_{sn}} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{D} \quad (2.68)$$

と対角化できるとして、 $\mathbf{V}(x)$ と $\mathbf{I}(x)$ について、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_s(x) \\ \mathbf{I}_s(x) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} V_{s1}(x) \\ V_{s2}(x) \\ \vdots \\ V_{sn}(x) \\ I_{s1}(x) \\ I_{s2}(x) \\ \vdots \\ I_{sn}(x) \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} V_1(x) \\ V_2(x) \\ \vdots \\ V_n(x) \\ I_1(x) \\ I_2(x) \\ \vdots \\ I_n(x) \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(x) \\ \mathbf{I}(x) \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

で定められる $\mathbf{V}_s(x)$ と $\mathbf{I}_s(x)$ を考える。(2.69) 式より、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(x) \\ \mathbf{I}(x) \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s(x) \\ \mathbf{I}_s(x) \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

であることに注意すると、(2.66) 式の両辺に \mathbf{P}^{-1} をかけることで、

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(x) \\ \mathbf{I}(x) \end{bmatrix} &= \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_n & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{O}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(x) \\ \mathbf{I}(x) \end{bmatrix} \\ \therefore -\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s(x) \\ \mathbf{I}_s(x) \end{bmatrix} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s(x) \\ \mathbf{I}_s(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.71)$$

と変形できる．(2.71) 式を (2.68) 式と (2.69) 式を用いて書き直すと，

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_{s1}(x)}{dx} = -\lambda_{V_{s1}} V_{s1}(x) \\ \frac{dV_{s2}(x)}{dx} = -\lambda_{V_{s2}} V_{s2}(x) \\ \vdots \\ \frac{dV_{sn}(x)}{dx} = -\lambda_{V_{sn}} V_{sn}(x) \\ \frac{dI_{s1}(x)}{dx} = -\lambda_{I_{s1}} I_{s1}(x) \\ \frac{dI_{s2}(x)}{dx} = -\lambda_{I_{s2}} I_{s2}(x) \\ \vdots \\ \frac{dI_{sn}(x)}{dx} = -\lambda_{I_{sn}} I_{sn}(x) \end{array} \right. \quad (2.72)$$

として， $2n$ 本の 1 階の同次形微分方程式が得られる．これらの解は，

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{s1}(x) = V_{s1}(0)e^{-\lambda_{V_{s1}}x} \\ V_{s2}(x) = V_{s2}(0)e^{-\lambda_{V_{s2}}x} \\ \vdots \\ V_{sn}(x) = V_{sn}(0)e^{-\lambda_{V_{sn}}x} \\ I_{s1}(x) = I_{s1}(0)e^{-\lambda_{I_{s1}}x} \\ I_{s2}(x) = I_{s2}(0)e^{-\lambda_{I_{s2}}x} \\ \vdots \\ I_{sn}(x) = I_{sn}(0)e^{-\lambda_{I_{sn}}x} \end{array} \right. \quad (2.73)$$

であり，行列表示すると，

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} V_{s1}(x) \\ V_{s2}(x) \\ \vdots \\ V_{sn}(x) \\ I_{s1}(x) \\ I_{s2}(x) \\ \vdots \\ I_{sn}(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-\lambda_{V_{s1}}x} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_{V_{s2}}x} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-\lambda_{V_{sn}}x} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{-\lambda_{I_{s1}}x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & e^{-\lambda_{I_{s2}}x} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{-\lambda_{I_{sn}}x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{s1}(0) \\ V_{s2}(0) \\ \vdots \\ V_{sn}(0) \\ I_{s1}(0) \\ I_{s2}(0) \\ \vdots \\ I_{sn}(0) \end{bmatrix} \\
 &\equiv \mathbf{E}(x) \begin{bmatrix} V_{s1}(0) \\ V_{s2}(0) \\ \vdots \\ V_{sn}(0) \\ I_{s1}(0) \\ I_{s2}(0) \\ \vdots \\ I_{sn}(0) \end{bmatrix} \tag{2.74}
 \end{aligned}$$

となる [12]．これより，

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_s(0) \\ \mathbf{I}_s(0) \end{bmatrix} = \mathbf{E}^{-1}(x) \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s(x) \\ \mathbf{I}_s(x) \end{bmatrix} \tag{2.75}$$

を得るので，再び (2.69) 式および (2.70) 式を用い，さらに $x = l$ とすると，

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(0) \\ \mathbf{I}(0) \end{bmatrix} = \mathbf{P} \mathbf{E}^{-1}(l) \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(l) \\ \mathbf{I}(l) \end{bmatrix} \equiv \mathbf{F}(l) \begin{bmatrix} \mathbf{V}(l) \\ \mathbf{I}(l) \end{bmatrix} \tag{2.76}$$

として，多線条線路の縦続行列表示が得られる．

ところで，指数関数の Taylor 展開

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \tag{2.77}$$

において，実数 x を正方行列 \mathbf{X} に置き換えると，

$$e^{\mathbf{X}} = \mathbf{U} + \mathbf{X} + \frac{1}{2}\mathbf{X}^2 + \frac{1}{6}\mathbf{X}^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{X}^n \tag{2.78}$$

を得る．ただし \mathbf{U} は単位行列である．いま，(2.74) 式より，

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(x) &= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\lambda_{V_{s1}} x)^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\lambda_{V_{s2}} x)^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\lambda_{V_{sn}} x)^n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\lambda_{I_{s1}} x)^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\lambda_{I_{s2}} x)^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\lambda_{I_{sn}} x)^n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} -\lambda_{V_{s1}} x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_{V_{s2}} x & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{V_{sn}} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_{I_{s1}} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda_{I_{s2}} x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{I_{sn}} x \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-\lambda_{V_{s1}}x)^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(-\lambda_{V_{s2}}x)^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2}(-\lambda_{V_{sn}}x)^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2}(-\lambda_{I_{s1}}x)^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2}(-\lambda_{I_{s2}}x)^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2}(-\lambda_{I_{sn}}x)^2 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(-\lambda_{V_{s1}}x)^3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}(-\lambda_{V_{s2}}x)^3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{6}(-\lambda_{V_{sn}}x)^3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{6}(-\lambda_{I_{s1}}x)^3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{6}(-\lambda_{I_{s2}}x)^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{6}(-\lambda_{I_{sn}}x)^3 \end{bmatrix} \\
& + \cdots \tag{2.79} \\
& = \mathbf{U} + \begin{bmatrix} -\lambda_{V_{s1}}x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_{V_{s2}}x & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{V_{sn}}x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_{I_{s1}}x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda_{I_{s2}}x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{I_{sn}}x \end{bmatrix} \\
& + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\lambda_{V_{s1}}x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_{V_{s2}}x & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{V_{sn}}x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_{I_{s1}}x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda_{I_{s2}}x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{I_{sn}}x \end{bmatrix}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -\lambda_{V_{s1}}x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_{V_{s2}}x & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{V_{sn}}x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_{I_{s1}}x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda_{I_{s2}}x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{I_{sn}}x \end{bmatrix}^3 \\
& + \cdots \quad (2.80)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} -\lambda_{V_{s1}}x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_{V_{s2}}x & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{V_{sn}}x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_{I_{s1}}x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda_{I_{s2}}x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{I_{sn}}x \end{bmatrix}^n \quad (2.81)$$

であるから、結局、(2.78) 式より、

$$\exp \left(\begin{bmatrix} -\lambda_{V_{s1}}x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_{V_{s2}}x & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{V_{sn}}x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_{I_{s1}}x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda_{I_{s2}}x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{I_{sn}}x \end{bmatrix} \right) = e^{-Dx} \quad (2.82)$$

を求めれば、多線条線路の縦続行列を計算できることがわかる。(2.78) 式は行列指数 (Matrix Exponential) の定義式であり、この級数は任意の \mathbf{X} に対して収束することが知られている。

行列指数は MATLAB や Mathematica といった数値計算ソフトでは関数として組み込まれており、計算機の発達に伴って、簡単に計算を行えるようになってきた。これは主に、制御理論において逐次解を求めるために使用されており、このような手法を状態変数法 (State-Variable Method) という。

この状態変数法は、行列指数の数値計算を利用することで、どのような線路系に対しても数

学的に縦続行列表示を得ることができるのが特徴である。つまり、(2.68) 式より、

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1} \quad (2.83)$$

であることと、行列指数の性質 $e^{\mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1} l} = \mathbf{P} e^{\mathbf{D} l} \mathbf{P}^{-1}$ 、また逆行列に関する定理 $(\mathbf{A} \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$ を用いると、

$$\begin{aligned} (e^{-\mathbf{M} l})^{-1} &= (e^{-\mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1} l})^{-1} \\ &= \left\{ e^{-\mathbf{P} (\mathbf{D} l) \mathbf{P}^{-1}} \right\}^{-1} \\ &= (\mathbf{P} e^{-\mathbf{D} l} \mathbf{P}^{-1})^{-1} \\ &= \{ (\mathbf{P} e^{-\mathbf{D} l}) \mathbf{P}^{-1} \}^{-1} \\ &= \mathbf{P} (\mathbf{P} e^{-\mathbf{D} l})^{-1} \\ &= \mathbf{P} (e^{-\mathbf{D} l})^{-1} \mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P} e^{\mathbf{D} l} \mathbf{P}^{-1} \end{aligned} \quad (2.84)$$

となるから、(2.76) 式より、微分方程式の係数行列 \mathbf{M} から直接 $e^{-\mathbf{M} l}$ を計算しても縦続行列表示を求めることができるのである [11].

2.2.3 状態変数法の単独線路への適用および物理的意味についての考察

いま、(2.18) 式の単独線路の電信方程式の行列表示に状態変数法を適用することを考える。 2×2 表現行列 \mathbf{M} を

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & Z \\ Y & 0 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

とし、 \mathbf{M} を対角化することを考える。 \mathbf{M} の固有値を λ とし、固有値 λ に属する固有ベクトルを \mathbf{x} とすると、

$$\mathbf{M} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad (2.86)$$

が成り立つ。(2.86) 式を移項して整理すると、

$$(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{U}) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.87)$$

となるが、(2.87) 式が自明な解 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 以外に解をもつためには、 $(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{U})$ が逆行列をもたなければよいので、

$$\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{U}) = 0 \quad (2.88)$$

が成立すればよい。(2.88) 式を具体的に計算すると, (2.85) 式より,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & Z \\ Y & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - ZY = 0 \quad (2.89)$$

より,

$$\lambda = \pm\sqrt{ZY} \quad (2.90)$$

を得る.

ここで,

$$\lambda_1 = \sqrt{ZY} \quad (2.91)$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{ZY} \quad (2.92)$$

とすると, 固有値 λ_1 に属する固有ベクトル $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ について, (2.87) 式より,

$$\begin{bmatrix} -\lambda_1 & Z \\ Y & -\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

が成立する。(2.91) 式を代入して整理すると,

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{ZY} & Z \\ Y & -\sqrt{ZY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

となるので,

$$a_1 - \sqrt{\frac{Z}{Y}}b_1 = 0 \quad (2.95)$$

を得る. よって, 実数 $k_1 (\neq 0)$ を用いて,

$$\mathbf{x}_1 = k_1 \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{Z}{Y}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

となる. また, 固有値 λ_2 に属する固有ベクトル $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ について, (2.87) 式より,

$$\begin{bmatrix} -\lambda_2 & Z \\ Y & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

が成立する。(2.92) 式を代入して整理すると,

$$\begin{bmatrix} \sqrt{ZY} & Z \\ Y & \sqrt{ZY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

となるので,

$$a_2 + \sqrt{\frac{Z}{Y}} b_2 = 0 \quad (2.99)$$

を得る. よって, 実数 $k_2 (\neq 0)$ を用いて,

$$\mathbf{x}_2 = k_2 \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{Z}{Y}} \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

となる. したがって, (2.25), (2.26) 式に注意すると, 単独線路の電信方程式を行列表示したとき, 表現行列 \mathbf{M} の固有値は伝搬定数の正負であり, それぞれに属する固有ベクトルには特性インピーダンスが現れる.

さて, (2.96), (2.100) 式で $k_1 = k_2 = 1$ とすると, \mathbf{M} を対角化する 2×2 正方行列 \mathbf{P} は,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0 & Z_0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

となり, このとき,

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2Z_0} \begin{bmatrix} 1 & Z_0 \\ 1 & -Z_0 \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

となるから,

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

と対角化できる. いま, (2.18) 式の $V(x)$ と $I(x)$ について,

$$\begin{bmatrix} V_s(x) \\ I_s(x) \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{2Z_0} \begin{bmatrix} V(x) + Z_0 I(x) \\ V(x) - Z_0 I(x) \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

で定められる $V_s(x)$ と $I_s(x)$ を考え, (2.18) 式を (2.71) 式のように変形すると,

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V_s(x) \\ I_s(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s(x) \\ I_s(x) \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

となる. (2.105) 式を展開すると,

$$\begin{cases} \frac{dV_s(x)}{dx} = \gamma V_s(x) \\ \frac{dI_s(x)}{dx} = -\gamma I_s(x) \end{cases} \quad (2.106)$$

として, 2 本の 1 階の同次形微分方程式が得られる. これらの解は,

$$\begin{cases} V_s(x) = e^{\gamma x} V_s(0) \\ I_s(x) = e^{-\gamma x} I_s(0) \end{cases} \quad (2.107)$$

であり，行列表示すると，

$$\begin{bmatrix} V_s(x) \\ I_s(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\gamma x} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s(0) \\ I_s(0) \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

となる．これより，

$$\begin{bmatrix} V_s(0) \\ I_s(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\gamma x} & 0 \\ 0 & e^{\gamma x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s(x) \\ I_s(x) \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

を得るので，(2.109) 式で $x = l$ とし，さらに (2.104) 式より，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} & Z_0 \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} \\ \frac{1}{Z_0} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} & \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & Z_0 \sinh \gamma l \\ \frac{1}{Z_0} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.43)$$

として，単独線路の縦続行列による表示が得られる．

2.2.4 モード分解法

(2.66) 式を展開すると，

$$-\frac{d\mathbf{V}(x)}{dx} = \mathbf{Z}\mathbf{I}(x) \quad (2.110)$$

$$-\frac{d\mathbf{I}(x)}{dx} = \mathbf{Y}\mathbf{V}(x) \quad (2.111)$$

を得る．さて，(2.110) 式の両辺を x で微分すると，

$$-\frac{d^2\mathbf{V}(x)}{dx^2} = \mathbf{Z}\frac{d\mathbf{I}(x)}{dx} \quad (2.112)$$

となり，さらに (2.112) 式に (2.111) 式を代入すると，

$$\frac{d^2\mathbf{V}(x)}{dx^2} = \mathbf{Z}\mathbf{Y}\mathbf{V}(x) \quad (2.113)$$

を得るが，(2.113) 式の行列 $\mathbf{Z}\mathbf{Y}$ を $n \times n$ 正方行列 \mathbf{T}_v によって，

$$\mathbf{T}_v^{-1}(\mathbf{Z}\mathbf{Y})\mathbf{T}_v = \begin{bmatrix} \gamma_{V_{m1}}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_{V_{m2}}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{V_{mn}}^2 \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

と対角化することを考える、また、一方で、(2.111) 式の両辺を x で微分すると、

$$-\frac{d^2 \mathbf{I}(x)}{dx^2} = \mathbf{Y} \frac{d\mathbf{V}(x)}{dx} \quad (2.115)$$

となり、さらに (2.115) 式に (2.110) 式を代入すると、

$$\frac{d^2 \mathbf{I}(x)}{dx^2} = \mathbf{Y} \mathbf{Z} \mathbf{V}(x) \quad (2.116)$$

を得るが、(2.116) 式の行列 $\mathbf{Y} \mathbf{Z}$ を $n \times n$ 正方行列 \mathbf{T}_i によって、

$$\mathbf{T}_i^{-1}(\mathbf{Y} \mathbf{Z}) \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \gamma_{I_{m1}}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_{I_{m2}}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{I_{mn}}^2 \end{bmatrix} \quad (2.117)$$

と対角化することを考える。一般に、行列の積については可換性が成立しないから、 $\mathbf{Z} \mathbf{Y} \neq \mathbf{Y} \mathbf{Z}$ である。しかし、いま、(2.57) ～ (2.64) 式より、 \mathbf{Z} 、 \mathbf{Y} はともに対称行列である。ゆえに、転置行列に関する定理 $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t \mathbf{A}^t$ を用いると、

$$\mathbf{Z} \mathbf{Y} = \mathbf{Z}^t \mathbf{Y}^t = (\mathbf{Y} \mathbf{Z})^t \quad (2.118)$$

$$\mathbf{Y} \mathbf{Z} = \mathbf{Y}^t \mathbf{Z}^t = (\mathbf{Z} \mathbf{Y})^t \quad (2.119)$$

となり、 $\mathbf{Z} \mathbf{Y}$ と $\mathbf{Y} \mathbf{Z}$ が互いに転置行列の関係にあることがわかる。よって、互いに転置行列の関係にある二つの行列の固有値は等しいので、

$$\begin{bmatrix} \gamma_{V_{m1}}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_{V_{m2}}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{V_{mn}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{I_{m1}}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_{I_{m2}}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{I_{mn}}^2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \gamma_{m1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_{m2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{mn}^2 \end{bmatrix} \equiv \gamma_m^2 \quad (2.120)$$

とすることができる。ここで、

$$\mathbf{T}_v^{-1}(\mathbf{Z} \mathbf{Y}) \mathbf{T}_v = \mathbf{T}_v^t (\mathbf{Z} \mathbf{Y})^t (\mathbf{T}_v^{-1})^t = \mathbf{T}_i^{-1}(\mathbf{Y} \mathbf{Z}) \mathbf{T}_i \quad (2.121)$$

より、 \mathbf{T}_v と \mathbf{T}_i の間には、

$$\mathbf{T}_v \mathbf{T}_i^t = \mathbf{T}_i \mathbf{T}_v^t = \mathbf{U} \quad (2.122)$$

の関係が成立する [13]。このような \mathbf{T}_v をモード電圧変換行列、 \mathbf{T}_i をモード電流変換行列とそれぞれ呼ぶことにする。

さて, \mathbf{T}_v を用いて,

$$\mathbf{V}_m(x) \equiv \begin{bmatrix} V_{m1}(x) \\ V_{m2}(x) \\ \vdots \\ V_{mn}(x) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_v^{-1} \begin{bmatrix} V_1(x) \\ V_2(x) \\ \vdots \\ V_n(x) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{V}(x) \quad (2.123)$$

で定められるモード電圧ベクトル $\mathbf{V}_m(x)$ と, \mathbf{T}_i を用いて,

$$\mathbf{I}_m(x) \equiv \begin{bmatrix} I_{m1}(x) \\ I_{m2}(x) \\ \vdots \\ I_{mn}(x) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_i^{-1} \begin{bmatrix} I_1(x) \\ I_2(x) \\ \vdots \\ I_n(x) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{I}(x) \quad (2.124)$$

で定められるモード電流ベクトル $\mathbf{I}_m(x)$ を考える. (2.123) 式より,

$$\mathbf{V}(x) = \mathbf{T}_v \mathbf{V}_m(x) \quad (2.125)$$

であることと, (2.124) 式より,

$$\mathbf{I}(x) = \mathbf{T}_i \mathbf{I}_m(x) \quad (2.126)$$

であることに注意すると, (2.120) 式より, (2.113) 式は,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{V}(x) &= \mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{Y} \mathbf{V}(x) \\ \therefore \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{V}_m(x) &= \mathbf{T}_v^{-1} (\mathbf{Z} \mathbf{Y}) \mathbf{T}_v \mathbf{V}_m(x) = \boldsymbol{\gamma}_m^2 \mathbf{V}_m(x) \end{aligned} \quad (2.127)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \begin{bmatrix} V_{m1}(x) \\ V_{m2}(x) \\ \vdots \\ V_{mn}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{m1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_{m2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{mn}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{m1}(x) \\ V_{m2}(x) \\ \vdots \\ V_{mn}(x) \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

と変形でき, (2.116) 式は,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{I}(x) &= \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{Z} \mathbf{I}(x) \\ \therefore \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{I}_m(x) &= \mathbf{T}_i^{-1} (\mathbf{Y} \mathbf{Z}) \mathbf{T}_i \mathbf{I}_m(x) = \boldsymbol{\gamma}_m^2 \mathbf{I}_m(x) \end{aligned} \quad (2.129)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \begin{bmatrix} I_{m1}(x) \\ I_{m2}(x) \\ \vdots \\ I_{mn}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{m1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_{m2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{mn}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1}(x) \\ I_{m2}(x) \\ \vdots \\ I_{mn}(x) \end{bmatrix} \quad (2.130)$$

と変形できる. (2.128) 式および (2.130) 式は, $n \times 1$ 列ベクトル $\mathbf{V}_m(x)$ の i 番目の成分 $V_{mi}(x)$ および $n \times 1$ 列ベクトル $\mathbf{I}_m(x)$ の i 番目の成分 $I_{mi}(x)$ が, とともに $n \times n$ 行列 $\boldsymbol{\gamma}_m^2$ の i 番

目の主対角成分 γ_{mi} の平方根を伝搬定数とする波動として伝搬すること、つまり、各線間での結合の影響を受ける実線路電圧および電流に対して、 \mathbf{T}_v および \mathbf{T}_i を用いて互いに独立・直交なモード電圧および電流の組に分解すれば、それらに対して単独線路の電信方程式を拡張して適用できることを示唆している [14]。このような手法をモード分解法 (Mode-Decomposition Method) という。

さて、2.1.3 節の単独線路の場合と同様に扱うため、各モードに対して、モード伝搬定数行列 γ_m とモード特性インピーダンス行列 \mathbf{Z}_{0m} を、それぞれ $n \times n$ 行列にて次のように定義する。

$$\gamma_m \equiv \begin{bmatrix} \gamma_{m1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_{m2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{\gamma_{m1}^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{\gamma_{m2}^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pm\sqrt{\gamma_{mn}^2} \end{bmatrix} \quad (2.131)$$

$$\mathbf{Z}_{0m} \equiv \begin{bmatrix} Z_{0m1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_{0m2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Z_{0mn} \end{bmatrix} = \gamma_m^{-1} \mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{T}_i = \mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{T}_i \gamma_m \quad (2.132)$$

ただし、(2.131) 式において γ_m の各主対角成分の符号は、(2.132) 式で求める \mathbf{Z}_{0m} の各主対角成分の実部が正となるように定めるものとする。 i モードの伝搬方向は、 $+\sqrt{\gamma_{mi}^2}$ をとったとき図 2.4 の x 軸正方向、 $-\sqrt{\gamma_{mi}^2}$ をとったとき x 軸負方向であると考える。

これらを用いると、対角行列の積の可換性および逆行列に関する性質に注意して、2.1.4 節の単独線路の場合を拡張し、各モードの組に対して縦続行列表示を次のように得られる [15]。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_m(0) \\ \mathbf{I}_m(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma_m l & \mathbf{Z}_{0m} \sinh \gamma_m l \\ \mathbf{Z}_{0m}^{-1} \sinh \gamma_m l & \cosh \gamma_m l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_m(l) \\ \mathbf{I}_m(l) \end{bmatrix} \quad (2.133)$$

$$\equiv \mathbf{F}_m(l) \begin{bmatrix} \mathbf{V}_m(l) \\ \mathbf{I}_m(l) \end{bmatrix} \quad (2.134)$$

ただし、(2.78) 式を用いて、

$$\cosh \mathbf{X} \equiv \frac{e^{\mathbf{X}} + e^{-\mathbf{X}}}{2} \quad (2.135)$$

$$\sinh \mathbf{X} \equiv \frac{e^{\mathbf{X}} - e^{-\mathbf{X}}}{2} \quad (2.136)$$

とする。

ここで、モード変換行列 \mathbf{T} を、

$$\mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{T}_v & \mathbf{O}_n \\ \mathbf{O}_n & \mathbf{T}_i \end{bmatrix} \quad (2.137)$$

と定めることにすれば,

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_v^{-1} & \mathbf{O}_n \\ \mathbf{O}_n & \mathbf{T}_i^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.138)$$

であり, (2.123), (2.124), (2.125), (2.126) の各式より,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(0) \\ \mathbf{I}(0) \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{F}_m(l) \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(l) \\ \mathbf{I}(l) \end{bmatrix} \equiv \mathbf{F}(l) \begin{bmatrix} \mathbf{V}(l) \\ \mathbf{I}(l) \end{bmatrix} \quad (2.139)$$

として, 多線路線路の縦続行列表示が得られる.

2.2.5 モード分解法の対称2本線路への適用および奇モード・偶モードとディファレンシャルモード・コモンモード

モード分解法は, 数学的には各モードの伝搬定数を固有値問題として求めることに帰着される. しかし, 実際の現象上においては, 独立直交なモードを見つけ出し, 線路電圧および電流を設定することは難しい. そこで本節では, そのようなモードを設定できる特別な場合として対称2本線路を取り上げ, 具体的に議論する.

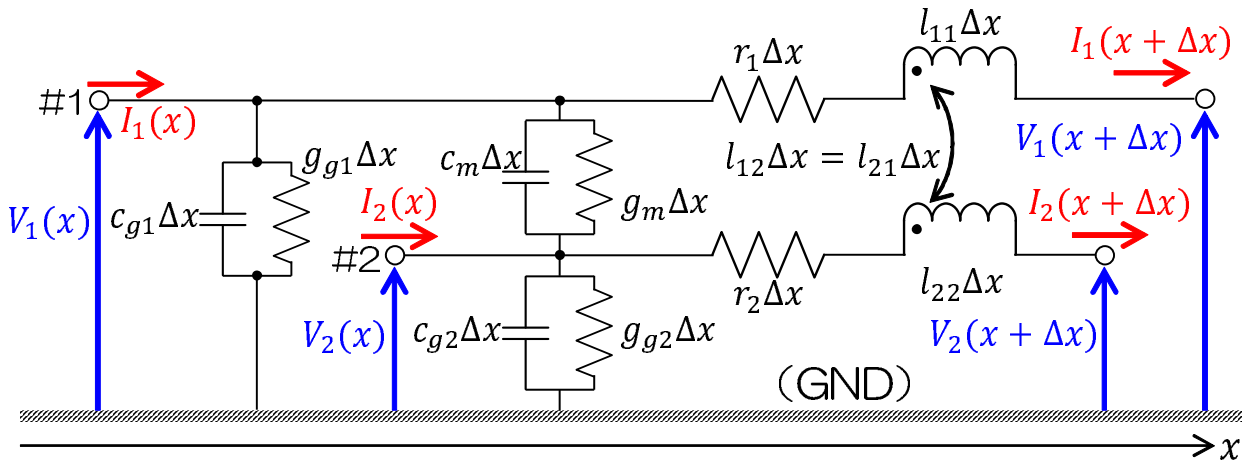


図 2.5 2 本線路の微小部分の等価回路

まず, 図 2.5 に 2 本線路の微小部分 Δx の等価回路を示す. この 2 本線路系の電信方程式を立てるにあたり, 実線路電圧ベクトルは (2.55) 式より $\mathbf{V}(x) = \begin{bmatrix} V_1(x) \\ V_2(x) \end{bmatrix}$ であり, また実線路

電流ベクトルは (2.56) 式より $\mathbf{I}(x) = \begin{bmatrix} I_1(x) \\ I_2(x) \end{bmatrix}$ である. さらに, 線路の一次定数を成分にも

つ \mathbf{R} , \mathbf{L} , \mathbf{G} , \mathbf{C} の各行列は, (2.57) ~ (2.62) の各式より,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \quad (2.141)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{g1} + g_m & -g_m \\ -g_m & g_{g2} + g_m \end{bmatrix} \quad (2.142)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{g1} + c_m & -c_m \\ -c_m & c_{g2} + c_m \end{bmatrix} \quad (2.143)$$

となる.

ここで, 2 本の線路が対称であるとき, 各線の抵抗および自己インダクタンスは等しく, また GND 間との漏れコンダクタンスおよび容量も等しい. よって, (2.63) 式および (2.64) 式より, \mathbf{Z} および \mathbf{Y} の各行列は, 対角成分と非対角成分がそれぞれ等しくなるので,

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} z_s & z_m \\ z_m & z_s \end{bmatrix} \quad (2.144)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} y_s & y_m \\ y_m & y_s \end{bmatrix} \quad (2.145)$$

とおくことができる. このとき,

$$\mathbf{ZY} = \begin{bmatrix} z_s & z_m \\ z_m & z_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_s & y_m \\ y_m & y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_s y_s + z_m y_m & z_s y_m + z_m y_s \\ z_m y_s + z_s y_m & z_m y_m + z_s y_s \end{bmatrix} \quad (2.146)$$

$$\mathbf{YZ} = \begin{bmatrix} y_s & y_m \\ y_m & y_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_s & z_m \\ z_m & z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_s z_s + y_m z_m & y_s z_m + y_m z_s \\ y_m z_s + y_s z_m & y_m z_m + y_s z_s \end{bmatrix} \quad (2.147)$$

より, $\mathbf{ZY} = \mathbf{YZ} \equiv \mathbf{Q}$ であることに注意する.

いま, 2 次正方行列 \mathbf{Q} を対角化することを考える. \mathbf{Q} の固有値を χ とし, 固有値 χ に属する固有ベクトルを \mathbf{x} とすると,

$$\mathbf{Q}\mathbf{x} = \chi\mathbf{x} \quad (2.148)$$

が成り立つ. (2.148) 式を移項して整理すると,

$$(\mathbf{Q} - \chi\mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.149)$$

となるが, (2.149) 式が自明な解 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 以外に解をもつためには, $(\mathbf{Q} - \chi\mathbf{U})$ が逆行列をもたなければよいので,

$$\det(\mathbf{Q} - \chi\mathbf{U}) = 0 \quad (2.150)$$

が成立すればよい。(2.150) 式を具体的に計算すると, (2.146), (2.147) 式より,

$$\begin{vmatrix} z_s y_s + z_m y_m - \chi & z_s y_m + z_m y_s \\ z_m y_s + z_s y_m & z_m y_m + z_s y_s - \chi \end{vmatrix} = (z_s y_s + z_m y_m - \chi)^2 - (z_s y_m + z_m y_s)^2 = 0 \quad (2.151)$$

整理すると,

$$\chi^2 - 2(z_s y_s + z_m y_m)\chi + (z_s^2 y_s^2 + z_m^2 y_m^2 - z_s^2 y_m^2 - z_m^2 y_s^2) = 0 \quad (2.152)$$

よって, (2.152) 式に 2 次方程式の解の公式を適用すると,

$$\chi = (z_s y_s + z_m y_m) \pm (z_s y_m + z_m y_s) \quad (2.153)$$

を得る.

ここで,

$$\chi_1 = (z_s y_s + z_m y_m) - (z_s y_m + z_m y_s) \quad (2.154)$$

$$\chi_2 = (z_s y_s + z_m y_m) + (z_s y_m + z_m y_s) \quad (2.155)$$

とすると, 固有値 χ_1 に属する固有ベクトル $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ について, (2.149) 式より,

$$\begin{bmatrix} z_s y_s + z_m y_m - \chi_1 & z_s y_m + z_m y_s \\ z_m y_s + z_s y_m & z_m y_m + z_s y_s - \chi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.156)$$

が成立する。(2.154) 式を代入して整理すると,

$$\begin{bmatrix} z_s y_m + z_m y_s & z_s y_m + z_m y_s \\ z_s y_m + z_m y_s & z_s y_m + z_m y_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.157)$$

となるので,

$$a_1 + b_1 = 0 \quad (2.158)$$

を得る. よって, 実数 $k_1 (\neq 0)$ を用いて,

$$\mathbf{x}_1 = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.159)$$

となる. また, 固有値 χ_2 に属する固有ベクトル $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ について, (2.149) 式より,

$$\begin{bmatrix} z_s y_s + z_m y_m - \chi_2 & z_s y_m + z_m y_s \\ z_m y_s + z_s y_m & z_m y_m + z_s y_s - \chi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

が成立する．(2.155) 式を代入して整理すると，

$$\begin{bmatrix} -(z_s y_m + z_m y_s) & z_s y_m + z_m y_s \\ z_s y_m + z_m y_s & -(z_s y_m + z_m y_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.161)$$

となるので，

$$a_2 - b_2 = 0 \quad (2.162)$$

を得る．よって，実数 $k_2 (\neq 0)$ を用いて，

$$\mathbf{x}_2 = k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.163)$$

となる．

奇モードと偶モード

$\mathbf{Q} = \mathbf{Z}\mathbf{Y}$ を対角化するために，(2.159) 式において実数 $k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，(2.163) 式において実数 $k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ をそれぞれ選ぶと，モード電圧変換行列は，

$$\mathbf{T}_v = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.164)$$

となる．また， $\mathbf{Q} = \mathbf{Y}\mathbf{Z}$ を対角化するために，(2.159) 式において実数 $k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，(2.163) 式において実数 $k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ をそれぞれ選ぶと，モード電流変換行列は，

$$\mathbf{T}_i = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.165)$$

となる．このようなモードの組において，モード伝搬定数行列とモード特性インピーダンス行列は，(2.127) または (2.129)，(2.131)，(2.132) 式より，

$$\boldsymbol{\gamma}_m = \begin{bmatrix} \sqrt{(z_s - z_m)(y_s - y_m)} & 0 \\ 0 & \sqrt{(z_s + z_m)(y_s + y_m)} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \gamma_o & 0 \\ 0 & \gamma_e \end{bmatrix} \quad (2.166)$$

$$\mathbf{Z}_{0m} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{z_s - z_m}{y_s - y_m}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{z_s + z_m}{y_s + y_m}} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} Z_{0o} & 0 \\ 0 & Z_{0e} \end{bmatrix} \quad (2.167)$$

となり、また、各モードの電圧および電流と、実線路電圧および電流の関係は、(2.123) 式および (2.124) 式より、

$$\mathbf{V}_m(x) = \begin{bmatrix} V_{m1}(x) \\ V_{m2}(x) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_v^{-1} \begin{bmatrix} V_1(x) \\ V_2(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(x) \\ V_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(V_1(x) - V_2(x)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(V_1(x) + V_2(x)) \end{bmatrix} \quad (2.168)$$

$$\mathbf{I}_m(x) = \begin{bmatrix} I_{m1}(x) \\ I_{m2}(x) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_i^{-1} \begin{bmatrix} I_1(x) \\ I_2(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(x) \\ I_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(I_1(x) - I_2(x)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(I_1(x) + I_2(x)) \end{bmatrix} \quad (2.169)$$

となる．このように規定されたモードの組合せは、モード $m1$ が奇モード (Odd Mode)、モード $m2$ が偶モード (Even Mode) と呼ばれ、マイクロ波の分野でよく用いられている．これは、線路間の結合がないとき、すなわち (2.144), (2.145) 式における $z_m = y_m = 0$ であるとき、(2.167) 式の奇モード特性インピーダンス Z_{0o} および偶モード特性インピーダンス Z_{0e} が、ともに

$$Z_{0o} = Z_{0e} = \sqrt{\frac{z_s}{y_s}} \quad (2.170)$$

となり、対称 2 本線路系をなす各線の特性インピーダンスと等しくなるため、理論的な取り扱いが簡単になるためである．しかし、(2.168), (2.169) 式からわかるように、モード電圧・電流に無理数が含まれるため、実用上は厳密に取り扱うことが難しい [16]．

ディファレンシャルモードとコモンモード

$\mathbf{Q} = \mathbf{Z}\mathbf{Y}$ を対角化するために、(2.159) 式において実数 $k_1 = \frac{1}{2}$ 、(2.163) 式において実数 $k_2 = 1$ をそれぞれ選ぶと、モード電圧変換行列は、

$$\mathbf{T}_v = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.171)$$

となる．また、 $\mathbf{Q} = \mathbf{Y}\mathbf{Z}$ を対角化するために、(2.159) 式において実数 $k_1 = 1$ 、(2.163) 式において実数 $k_2 = \frac{1}{2}$ をそれぞれ選ぶと、モード電流変換行列は、

$$\mathbf{T}_i = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.172)$$

となる．このようなモードの組において，モード伝搬定数行列とモード特性インピーダンス行列は，(2.127) または (2.129)，(2.131)，(2.132) 式より，

$$\gamma_m = \begin{bmatrix} \sqrt{(z_s - z_m)(y_s - y_m)} & 0 \\ 0 & \sqrt{(z_s + z_m)(y_s + y_m)} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \gamma_{dm} & 0 \\ 0 & \gamma_{cm} \end{bmatrix} \quad (2.173)$$

$$\mathbf{Z}_{0m} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{\frac{z_s - z_m}{y_s - y_m}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z_s + z_m}{y_s + y_m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Z_{0o} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}Z_{0e} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} Z_{0dm} & 0 \\ 0 & Z_{0cm} \end{bmatrix} \quad (2.174)$$

となり，また，各モードの電圧および電流と，実線路電圧および電流の関係は，(2.123) 式および (2.124) 式より，

$$\mathbf{V}_m(x) = \begin{bmatrix} V_{m1}(x) \\ V_{m2}(x) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_v^{-1} \begin{bmatrix} V_1(x) \\ V_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(x) \\ V_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(x) - V_2(x) \\ \frac{1}{2}(V_1(x) + V_2(x)) \end{bmatrix} \quad (2.175)$$

$$\mathbf{I}_m(x) = \begin{bmatrix} I_{m1}(x) \\ I_{m2}(x) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_i^{-1} \begin{bmatrix} I_1(x) \\ I_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(x) \\ I_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(I_1(x) - I_2(x)) \\ I_1(x) + I_2(x) \end{bmatrix} \quad (2.176)$$

となる．このように規定されたモードの組合せは，モード $m1$ がディファレンシャルモード (Differential Mode : DM)，モード $m2$ がコモンモード (Common Mode : CM) と呼ばれ，EMC の分野でよく用いられている [13]．これは，(2.175) 式および (2.176) 式からわかるように，各線の実線路電圧・電流の和と差によってモード電圧・電流を規定できるため，実用上の取り扱いが簡単であるためである．

このことから，DM と CM の組合せは差動伝送のような実システムにて利用されている．(2.175) 式および (2.176) 式を書き換えると，ディファレンシャルモード電圧 $V_{dm}(x)$ およびディファレンシャルモード電流 $I_{dm}(x)$ ，また，コモンモード電圧 $V_{cm}(x)$ およびコモンモード電流 $I_{cm}(x)$ について，

$$V_1(x) = \frac{1}{2}V_{dm}(x), \quad V_2(x) = -\frac{1}{2}V_{dm}(x) \quad (2.177)$$

$$I_1(x) = I_{dm}(x), \quad I_2(x) = -I_{dm}(x) \quad (2.178)$$

$$V_1(x) = V_{cm}(x), \quad V_2(x) = V_{cm}(x) \quad (2.179)$$

$$I_1(x) = \frac{1}{2}I_{cm}(x), \quad I_2(x) = \frac{1}{2}I_{cm}(x) \quad (2.180)$$

となるから，図 2.6 にて概念的に示すように各線を励振することで実現できる．ただし，(2.174) 式より，各モードの特性インピーダンスは，線路間の結合を踏まえる必要があること

に注意しなければならない。

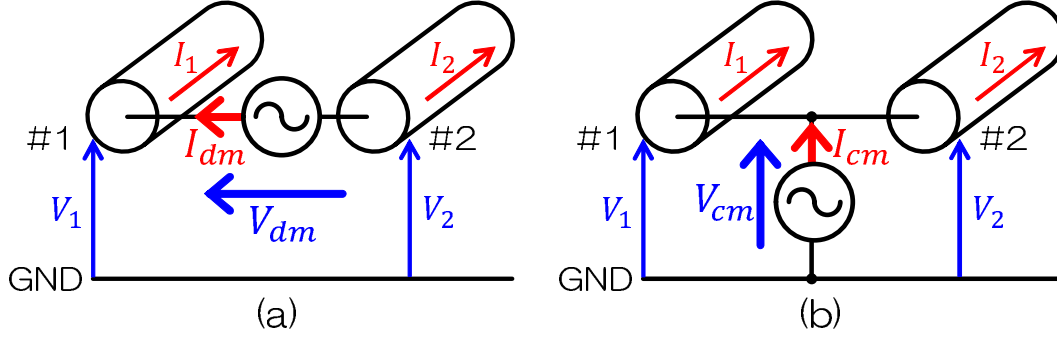


図 2.6 (a) ディファレンシャルモードと (b) コモンモードの電圧及び電流の規定

さて, (2.173), (2.174) 式の各パラメータを用いると, (2.133) 式は以下のように展開して書ける.

$$\begin{bmatrix} V_{dm}(0) \\ V_{cm}(0) \\ I_{dm}(0) \\ I_{cm}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma_{dm} l & 0 & Z_{0dm} \sinh \gamma_{dm} l & 0 \\ 0 & \cosh \gamma_{cm} l & 0 & Z_{0cm} \sinh \gamma_{cm} l \\ Z_{0dm}^{-1} \sinh \gamma_{dm} l & 0 & \cosh \gamma_{dm} l & 0 \\ 0 & Z_{0cm}^{-1} \sinh \gamma_{cm} l & 0 & \cosh \gamma_{cm} l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{dm}(l) \\ V_{cm}(l) \\ I_{dm}(l) \\ I_{cm}(l) \end{bmatrix} \quad (2.181)$$

これを DM, CM の縦続行列表示として,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_m(0) \\ \mathbf{I}_m(0) \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{dmcm}(l) \begin{bmatrix} \mathbf{V}_m(l) \\ \mathbf{I}_m(l) \end{bmatrix} \quad (2.182)$$

と書けば, モード変換行列

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_v & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{T}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.183)$$

に対して,

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_v^{-1} & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{T}_i^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.184)$$

であり, (2.123), (2.125), (2.124), (2.126) の各式より,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(0) \\ \mathbf{I}(0) \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{F}_{dmcm}(l) \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(l) \\ \mathbf{I}(l) \end{bmatrix} = \mathbf{F}(l) \begin{bmatrix} \mathbf{V}(l) \\ \mathbf{I}(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(l) & \mathbf{B}(l) \\ \mathbf{C}(l) & \mathbf{D}(l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(l) \\ \mathbf{I}(l) \end{bmatrix} \quad (2.185)$$

として, 対称 2 本線路において, 実線路電圧および電流についての縦続行列表示を得ることができる. ただし, (2.185) 式の各小行列は次のようになる.

$$\mathbf{A}(l) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cosh \gamma_{dm} l + \cosh \gamma_{cm} l & -\cosh \gamma_{dm} l + \cosh \gamma_{cm} l \\ -\cosh \gamma_{dm} l + \cosh \gamma_{cm} l & \cosh \gamma_{dm} l + \cosh \gamma_{cm} l \end{bmatrix} = \mathbf{D}(l) \quad (2.186)$$

$$\mathbf{B}(l) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{Z_{0dm}}{2} \sinh \gamma_{dm} l + 2Z_{0cm} \sinh \gamma_{cm} l & -\frac{Z_{0dm}}{2} \sinh \gamma_{dm} l + 2Z_{0cm} \sinh \gamma_{cm} l \\ -\frac{Z_{0dm}}{2} \sinh \gamma_{dm} l + 2Z_{0cm} \sinh \gamma_{cm} l & \frac{Z_{0dm}}{2} \sinh \gamma_{dm} l + 2Z_{0cm} \sinh \gamma_{cm} l \end{bmatrix} \quad (2.187)$$

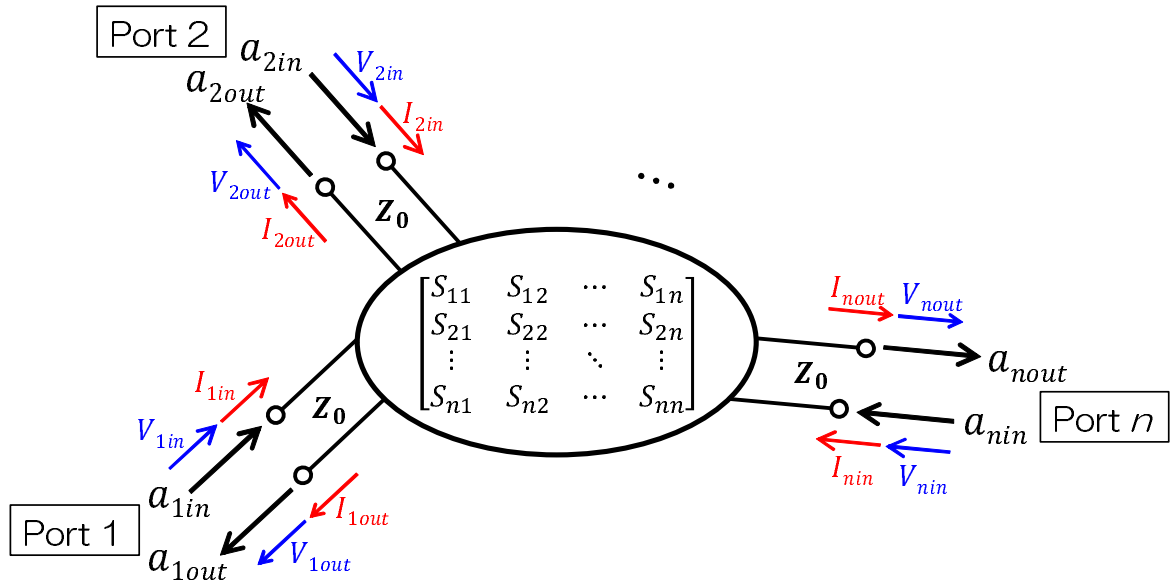
$$\mathbf{C}(l) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2Z_{0dm}^{-1} \sinh \gamma_{dm} l + \frac{Z_{0cm}^{-1}}{2} \sinh \gamma_{cm} l & -2Z_{0dm}^{-1} \sinh \gamma_{dm} l + \frac{Z_{0cm}^{-1}}{2} \sinh \gamma_{cm} l \\ -2Z_{0dm}^{-1} \sinh \gamma_{dm} l + \frac{Z_{0cm}^{-1}}{2} \sinh \gamma_{cm} l & 2Z_{0dm}^{-1} \sinh \gamma_{dm} l + \frac{Z_{0cm}^{-1}}{2} \sinh \gamma_{cm} l \end{bmatrix} \quad (2.188)$$

2.3 S パラメータ

前節まででは, 線路上の各点における線路電圧と線路電流を考えて議論してきたが, 高周波回路ではこれらを測定することは難しい. そのため, 各端子について回路に入る電力と回路から出てくる電力の関係から, 回路の透過及び反射特性を規定する散乱行列, または **S** 行列 (Scattering Matrix) を用いて特性を評価することが多い. **S** 行列の各要素を **S** パラメータという.

2.3.1 S パラメータの定義 [17]

図 2.7 に示す n ポート回路を考える. (2.21) 式および (2.22) 式より, 各ポートにおける電圧および電流は, 進行波成分 (回路に入る波) と後退波成分 (回路から出る波) の和および差で表される. そこで, i 番目のポートにおいて, 電圧および電流の回路に入る波の成分を $V_{i_{in}}$ および $I_{i_{in}}$, また回路から出る波の成分を $V_{i_{out}}$ および $I_{i_{out}}$ とし, さらに各ポートの特性イン

図 2.7 n ポート回路における S 行列

ピーダンスを Z_0 として、パラメータ $a_{i_{in}}$, $a_{i_{out}}$ を次のように定義する.

$$\begin{cases} a_{i_{in}} \equiv \frac{V_{i_{in}}}{\sqrt{Z_0}} = I_{i_{in}} \sqrt{Z_0} \\ a_{i_{out}} \equiv \frac{V_{i_{out}}}{\sqrt{Z_0}} = I_{i_{out}} \sqrt{Z_0} \end{cases} \quad (2.189)$$

(2.189) 式の両辺を二乗すると,

$$\begin{cases} |a_{i_{in}}|^2 = \frac{|V_{i_{in}}|^2}{Z_0} = |I_{i_{in}}|^2 Z_0 \\ |a_{i_{out}}|^2 = \frac{|V_{i_{out}}|^2}{Z_0} = |I_{i_{out}}|^2 Z_0 \end{cases} \quad (2.190)$$

となる. ここで (2.190) 式の各値は電力の次元をもっているので, $|a_{i_{in}}|^2$ は i 番目のポートにおける入力電力を, $|a_{i_{out}}|^2$ は出力電力をそれぞれ表している. よって, i 番目のポートにおいて回路に入る電力 P_i は,

$$P_i = |a_{i_{in}}|^2 - |a_{i_{out}}|^2 \quad (2.191)$$

と表される.

このことから, $a_{i_{in}}$ は i 番目のポートにおける入力電力波を, $a_{i_{out}}$ は出力電力波をそれぞれ表しており, また複素量で大きさと位相をもっていることがわかる. この $a_{i_{in}}$ と $a_{i_{out}}$ の関係を定義したものが S 行列である.

$$\begin{bmatrix} a_{1out} \\ a_{2out} \\ \vdots \\ a_{nout} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1in} \\ a_{2in} \\ \vdots \\ a_{nin} \end{bmatrix} \quad (2.192)$$

ただし、(2.192) 式における各 S パラメータは、

$$S_{ji} \equiv \left. \frac{a_{jout}}{a_{iin}} \right|_{a_{1in}=a_{2in}=\cdots=a_{i-1in}=a_{i+1in}=\cdots=a_{nin}=0} \quad (2.193)$$

である。

(2.193) 式はポート i に入った電力波がポート j から出てくる割合、すなわちポート間の通過係数を表している。また、特に $i = j$ の場合は、ポート i に入った電力波がポート i から出てくる割合、すなわちポートの反射係数を表している。

(2.189) 式からわかる通り、 S パラメータは各ポートの特性インピーダンス Z_0 を使って定義されている。そのため、測定系の Z_0 が変われば、 S パラメータの値も変わることには注意しなければならない。

2.4 各種行列の変換

2.4.1 縦続行列から散乱行列への変換 [17]

n 本線路系の縦続行列が、 $2n \times 2n$ 行列

$$F(l) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2.194)$$

で与えられるとき、

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix} \quad (2.195)$$

の関係が成り立つ。ただし (2.194) 式の各部分行列はそれぞれ $n \times n$ の正方行列である。このとき、縦続行列をまず Z 行列に変換することを考える。

図 2.8 に示すような電圧及び電流の規定方向に注意し、 $x = l$ での電流のみ向きを逆にすると、

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ C & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(l) \\ -I(l) \end{bmatrix} \quad (2.196)$$

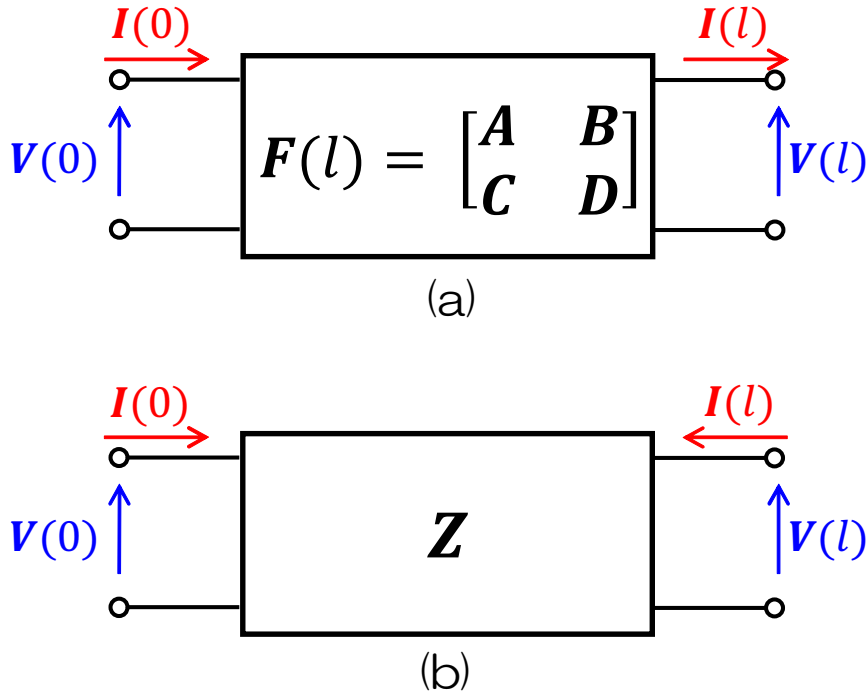


図 2.8 (a) F 行列と (b) Z 行列の電圧及び電流の規定方向

となるが, (2.196) 式を変形すると,

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ V(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC^{-1} & AC^{-1}D - B \\ C^{-1} & C^{-1}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(0) \\ -I(l) \end{bmatrix} \quad (2.197)$$

を得る. (2.197) 式は Z 行列の定義式の形をしているので,

$$Z = \begin{bmatrix} AC^{-1} & AC^{-1}D - B \\ C^{-1} & C^{-1}D \end{bmatrix} \quad (2.198)$$

となる.

次に, 得られた Z 行列を散乱行列に変換することを考える. いま, n 本線路系の i 番目の線について, 端子条件 $x=0$ を i 番目のポートに, 端子条件 $x=l$ を $i+n$ 番目のポートにそれぞれ対応させることにする. このとき, システムは $2n$ ポート回路となり, 散乱行列は $2n \times 2n$ の正方行列となる.

2.3.1 節の議論より, 各ポートにおける電圧は回路に入る波と回路から出る波それぞれの成

分の和で表されるから、(2.189) 式より、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(0) \\ \mathbf{V}(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(0) \\ V_2(0) \\ \vdots \\ V_n(0) \\ V_1(l) \\ V_2(l) \\ \vdots \\ V_n(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1_{in}} + V_{1_{out}} \\ V_{2_{in}} + V_{2_{out}} \\ \vdots \\ V_{n_{in}} + V_{n_{out}} \\ V_{(1+n)_{in}} + V_{(1+n)_{out}} \\ V_{(2+n)_{in}} + V_{(2+n)_{out}} \\ \vdots \\ V_{2n_{in}} + V_{2n_{out}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{Z_0}(a_{1_{in}} + a_{1_{out}}) \\ \sqrt{Z_0}(a_{2_{in}} + a_{2_{out}}) \\ \vdots \\ \sqrt{Z_0}(a_{n_{in}} + a_{n_{out}}) \\ \sqrt{Z_0}(a_{(1+n)_{in}} + a_{(1+n)_{out}}) \\ \sqrt{Z_0}(a_{(2+n)_{in}} + a_{(2+n)_{out}}) \\ \vdots \\ \sqrt{Z_0}(a_{2n_{in}} + a_{2n_{out}}) \end{bmatrix} \quad (2.199)$$

である。また、各ポートにおける電流は回路に入る波と回路から出る波それぞれの成分の差で表されるから、(2.189) 式より、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}(0) \\ -\mathbf{I}(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(0) \\ I_2(0) \\ \vdots \\ I_n(0) \\ -I_1(l) \\ -I_2(l) \\ \vdots \\ -I_n(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1_{in}} - I_{1_{out}} \\ I_{2_{in}} - I_{2_{out}} \\ \vdots \\ I_{n_{in}} - I_{n_{out}} \\ I_{(1+n)_{in}} - I_{(1+n)_{out}} \\ I_{(2+n)_{in}} - I_{(2+n)_{out}} \\ \vdots \\ I_{2n_{in}} - I_{2n_{out}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{Z_0}}(a_{1_{in}} - a_{1_{out}}) \\ \frac{1}{\sqrt{Z_0}}(a_{2_{in}} - a_{2_{out}}) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{Z_0}}(a_{n_{in}} - a_{n_{out}}) \\ \frac{1}{\sqrt{Z_0}}(a_{(1+n)_{in}} - a_{(1+n)_{out}}) \\ \frac{1}{\sqrt{Z_0}}(a_{(2+n)_{in}} - a_{(2+n)_{out}}) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{Z_0}}(a_{2n_{in}} - a_{2n_{out}}) \end{bmatrix} \quad (2.200)$$

である。(2.197), (2.198), (2.199), (2.200) 式より,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sqrt{Z_0}(a_{1_{in}} + a_{1_{out}}) \\ \vdots \\ \sqrt{Z_0}(a_{2n_{in}} + a_{2n_{out}}) \end{bmatrix} &= \mathbf{Z} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{Z_0}}(a_{1_{in}} - a_{1_{out}}) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{Z_0}}(a_{2n_{in}} - a_{2n_{out}}) \end{bmatrix} \\
 \sqrt{Z_0} \begin{bmatrix} a_{1_{in}} + a_{1_{out}} \\ \vdots \\ a_{2n_{in}} + a_{2n_{out}} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{Z_0}} \mathbf{Z} \begin{bmatrix} a_{1_{in}} - a_{1_{out}} \\ \vdots \\ a_{2n_{in}} - a_{2n_{out}} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} a_{1_{in}} \\ \vdots \\ a_{2n_{in}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1_{out}} \\ \vdots \\ a_{2n_{out}} \end{bmatrix} &= \frac{1}{Z_0} \mathbf{Z} \left(\begin{bmatrix} a_{1_{in}} \\ \vdots \\ a_{2n_{in}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{1_{out}} \\ \vdots \\ a_{2n_{out}} \end{bmatrix} \right) \\
 \frac{1}{Z_0} \mathbf{Z} \begin{bmatrix} a_{1_{out}} \\ \vdots \\ a_{2n_{out}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1_{out}} \\ \vdots \\ a_{2n_{out}} \end{bmatrix} &= \frac{1}{Z_0} \mathbf{Z} \begin{bmatrix} a_{1_{in}} \\ \vdots \\ a_{2n_{in}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{1_{in}} \\ \vdots \\ a_{2n_{in}} \end{bmatrix} \\
 \left(\frac{1}{Z_0} \mathbf{Z} + \mathbf{U} \right) \begin{bmatrix} a_{1_{out}} \\ \vdots \\ a_{2n_{out}} \end{bmatrix} &= \left(\frac{1}{Z_0} \mathbf{Z} - \mathbf{U} \right) \begin{bmatrix} a_{1_{in}} \\ \vdots \\ a_{2n_{in}} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} a_{1_{out}} \\ \vdots \\ a_{2n_{out}} \end{bmatrix} &= \left(\frac{1}{Z_0} \mathbf{Z} + \mathbf{U} \right)^{-1} \left(\frac{1}{Z_0} \mathbf{Z} - \mathbf{U} \right) \begin{bmatrix} a_{1_{in}} \\ \vdots \\ a_{2n_{in}} \end{bmatrix} \quad (2.201)
 \end{aligned}$$

を得る。(2.201) 式は散乱行列の定義式の形をしているので,

$$\mathbf{S} = \left(\frac{1}{Z_0} \mathbf{Z} + \mathbf{U} \right)^{-1} \left(\frac{1}{Z_0} \mathbf{Z} - \mathbf{U} \right) \quad (2.202)$$

となる。

2.4.2 S 行列と T 行列の変換 [18]

T 行列は, S 行列で表された回路の縦続を, F 行列のように縦続行列で表すための行列である。図 2.9 に示すような 2 ポート回路では, ポート 1 をシステムの入力ポート, ポート 2 を出力ポートにそれぞれ設定すると, 次のように定義される。

$$\begin{bmatrix} a_{1_{out}} \\ a_{1_{in}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2_{in}} \\ a_{2_{out}} \end{bmatrix} \quad (2.203)$$

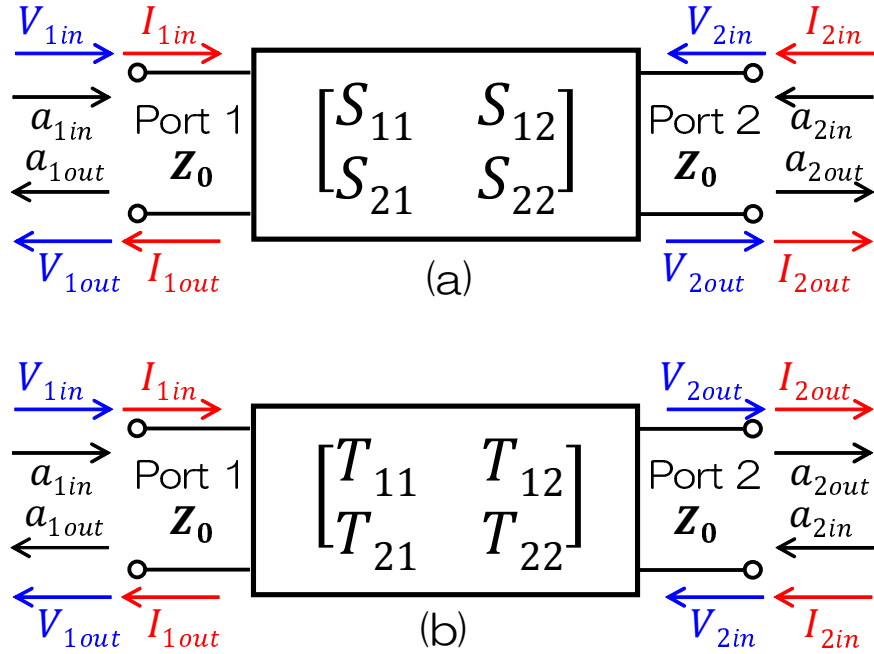


図 2.9 2 ポート回路における (a) S 行列と (b) T 行列の比較

この T 行列に対して, (2.193) 式で定義された S 行列との相互変換式は次のようになる.

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{12} - S_{11}S_{21}^{-1}S_{22} & S_{11}S_{21}^{-1} \\ -S_{21}^{-1}S_{22} & S_{21}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.204)$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{12}T_{22}^{-1} & T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21} \\ T_{22}^{-1} & -T_{22}^{-1}T_{21} \end{bmatrix} \quad (2.205)$$

また, 多線条線路系による複数の入出力ポートをもつ回路の場合の変換式は, S 行列を小行列 S_a, S_b, S_c, S_d に, T 行列を T_a, T_b, T_c, T_d にそれぞれ区切ることによって,

$$\begin{bmatrix} T_a & T_b \\ T_c & T_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_b - S_aS_c^{-1}S_d & S_aS_c^{-1} \\ -S_c^{-1}S_d & S_c^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.206)$$

$$\begin{bmatrix} S_a & S_b \\ S_c & S_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_bT_d^{-1} & T_a - T_bT_d^{-1}T_c \\ T_d^{-1} & -T_d^{-1}T_c \end{bmatrix} \quad (2.207)$$

とすることができる. ただし各小行列は正方行列となるように区切るものとする.

第 3 章

提案手法

3.1 縦続行列による回路網モデル化

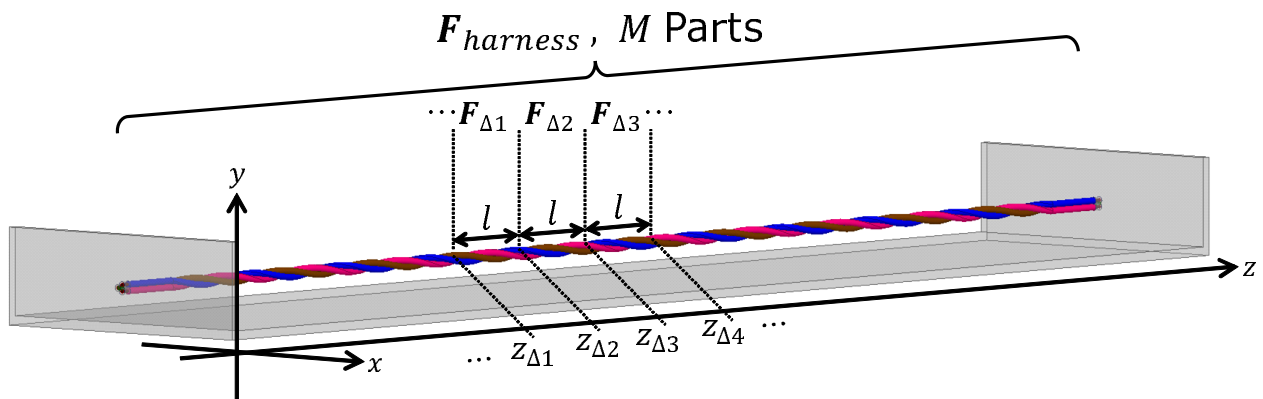


図 3.1 縦続行列による回路網モデル化の概要

本提案手法では，グラウンド（GND）である金属平板上に配線された， n 本の絶縁体被覆電線を束ねたワイヤーハーネスに対してモデル化を行う．ただし，第 2 章では線路の伝搬方向を x 軸として述べたが，以降本論文では，原則として伝搬方向を z 軸として述べる．モデル化の対象とする線路系の概要について， $n = 3$ とした場合を一例として図 3.1 に示す．

被膜の影響により誘電率は一様でないが，被覆線路系の近傍において準 TEM モードの電磁界が存在していると仮定する．このとき，準 TEM 波の波長に比べて十分に短い長さ l の区間に分割すれば，線路系の一次定数を一様とみなして，図 2.4 のような等価回路として表せる．この各区間の等価回路に関して成り立つ電信方程式 (2.66) を解くと，(2.76) 式あるいは

(2.139) 式より,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(z_{\Delta k}) \\ \mathbf{I}(z_{\Delta k}) \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{\Delta k} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(z_{\Delta k+1}) \\ \mathbf{I}(z_{\Delta k+1}) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

として、各区間に関する縦続行列表示を得られる。(3.1) 式を繰り返し用いることにより、ハーネス全体を M 区間に分割したとき,

$$\mathbf{F}_{\text{harness}} = \prod_{k=1}^M \mathbf{F}_{\Delta k} \quad (3.2)$$

として、ハーネスを回路網モデルとして表現することができる。

3.2 一次定数の近似導出式

図 3.1 からわかるように、ワイヤーハーネスにおける現象は、三次元の電磁界を考えることで定式化される。しかし、本提案手法では、準 TEM モードの仮定により、線路系のトランスヴァース面（図 3.1 における xy 平面に平行な面）における二次元の静電磁界を考えることで等価回路モデル化する。図 3.2(a) は、等価回路が図 2.4 で与えられる区間の、線路系の断面モデルである。ただし、 a_i , t_i , h_i はそれぞれ線 # i の内導体部半径、絶縁体被膜厚さ、GND 面からの配線高であり、また各区間において、線路系の断面形状は一樣であるものとする。

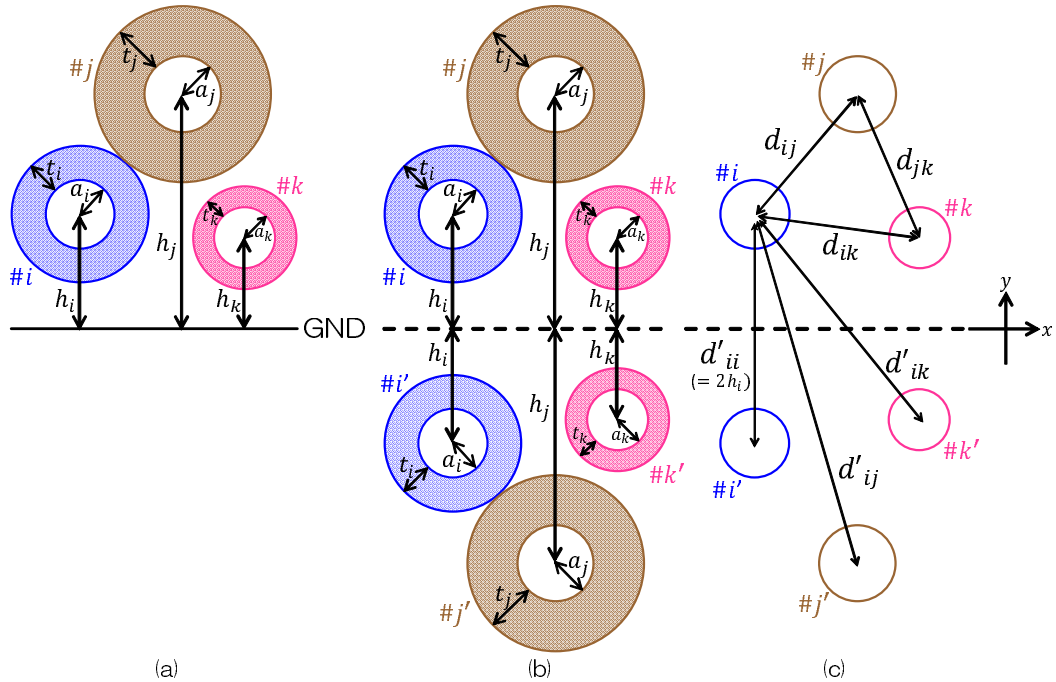


図 3.2 多線路系線路系の断面モデル

被膜により誘電率が一樣でないため、各区間の等価回路化に必要な一次定数は、解析解として与えることができない。そこで本手法では、(2.57)～(2.62)式の各パラメータを近似的に導出する式を提案する。提案式は、図3.2(a)の断面上における電磁界が、電気映像法による映像を考慮した図3.2(b)の場合と等しくなることを利用して、図3.2(b)、およびそこから被膜を除去して導体のみとした図3.2(c)から検討する。ただし、 $d_{ij} = d_{ji}$ は線# i と線# j の線心間距離、 $d'_{ij} = d'_{ji}$ は線# i と線# j の映像および線# i の映像と線# j の線心間距離である。また、自動車用の被覆電線では、曲げることができるように、内導体として細い素線を複数撚り合わせたものが用いられることが一般的であるが、本手法においては、後述する直流抵抗の検討を除き、導体部の断面を円として扱っている。

以下に述べる各量は、特に断りのない限り、単位長さあたりの量である。

3.2.1 R 行列

抵抗については、被膜は絶縁体と考え、図3.2(c)の導体のみの系で検討する。平行2線の断面における平面電磁界の解析式を基に、文献[19]の(12-53)式右辺第1項を主要項として考え、線# i の抵抗 r_i を、

$$r_i = r_{0i} \cdot C_{si} \cdot \left(\prod_{j=1, j \neq i}^n C_{pij} \right) \cdot \left(\prod_{j=1}^n C'_{pij} \right) \quad (3.3)$$

とする。ただし、 μ_0 を真空の透磁率、 μ_r を導体の比透磁率、 σ を導体の導電率として、

$$r_{0i} = \frac{1}{\sigma S_{ci}} \quad (3.4)$$

$$C_{si} = \frac{a_i}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu_r \sigma}{2}} \quad (3.5)$$

$$C_{pij} = \frac{d_{ij}^2 - (a_i - a_j)^2 + D}{d_{ij}^2 - (a_i + a_j)^2 + D} \quad (3.6)$$

$$\left(\text{ただし } D = \sqrt{d_{ij}^4 + a_i^4 + a_j^4 - 2a_i^2 a_j^2 - 2a_i^2 d_{ij}^2 - 2a_j^2 d_{ij}^2} \right) \quad (3.7)$$

$$C'_{pij} = \frac{d'_{ij}{}^2 - (a_i - a_j)^2 + D'}{d'_{ij}{}^2 - (a_i + a_j)^2 + D'} \quad (3.8)$$

$$\left(\text{ただし } D' = \sqrt{d'_{ij}{}^4 + a_i^4 + a_j^4 - 2a_i^2 a_j^2 - 2a_i^2 d'_{ij}{}^2 - 2a_j^2 d'_{ij}{}^2} \right) \quad (3.9)$$

である。

ここで r_{0i} は直流抵抗であり、導線の計算（公称）断面積 S_{ci} より求める。計算（公称）断面積は、内導体を構成する細い素線の断面積を合計したものであり、電線のデータシートに掲

載されている値である．

また C_{si} は表皮効果（Skin Effect）による抵抗の増加を表した係数である．表皮効果とは，導体を流れる電流の周波数が高くなると，交流電流の変化を妨げようとする作用により，電流の分布が導体の表面に集中する現象である．表皮効果の影響によって電流の流れる面積が減少することで，高周波電流では導体損失が大きくなることが知られている．

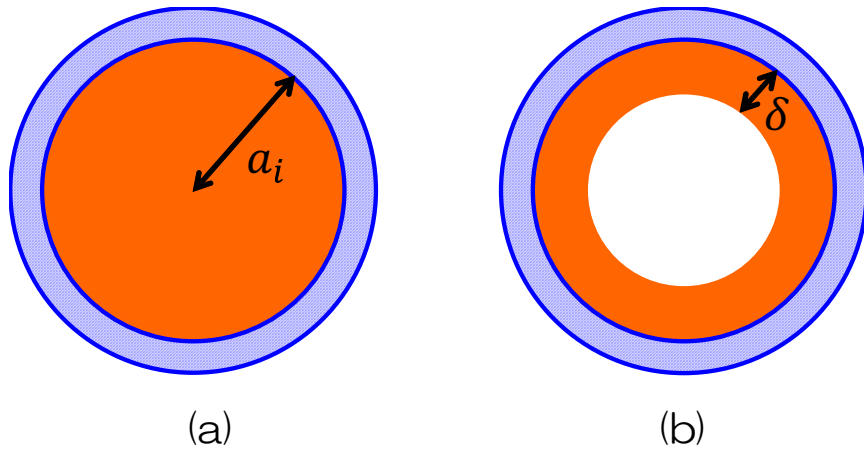


図 3.3 円筒導体断面における電流分布 (a) 低周波の場合 (b) 高周波の場合

円筒導体の場合には，断面における電流が図 3.3 のオレンジ色の領域に分布していると考えられる．まず，周波数が低い場合には導体部の全面に電流が分布し，その面積 S_{lf} は，

$$S_{lf} = \pi a_i^2 \quad (3.10)$$

となる．また，周波数が高くなると，図 3.3(b) のリング状の部分のみに電流が分布するととして，その面積 S_{hf} は，

$$S_{hf} = 2\pi a_i \delta \quad (3.11)$$

と考えられる [11]．ここで 3.11 式における δ は表皮厚さ（Skin Depth）であり，電流密度が導体表面に対して $1/e$ となるような導体表面からの距離を，

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_r \mu_0 \sigma}} \quad (3.12)$$

で表した量である．以上より，表皮効果の影響で導体の内側に電流が分布しなくなることによる抵抗の増加を，電流が分布する領域の面積の比をとることで，(3.10) ～ (3.12) 式より，

$$\frac{S_{lf}}{S_{hf}} = \frac{a_i}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu_r \sigma}{2}} \equiv C_{si} \quad (3.5)$$

として表現する．ただし， $C_{si} < 1$ となる周波数においては，図 3.3(a) の電流分布と考えることができるので， $C_{si} = 1$ とする．

さらに C_{pij} , C'_{pij} は近接効果（Proximity Effect）による抵抗の増加を表した係数である．近接効果とは，表皮効果と同様の作用が近くに存在する導体を流れる電流にはたらくことにより，両導体に異なる方向の電流が流れているときは導体の互いに近い側に電流分布が集中し，同じ方向の電流が流れているときは遠い側に電流分布が集中する現象である．近接効果も表皮効果同様，電流の流れる面積を減少させるため，導体損失増加の要因となる．

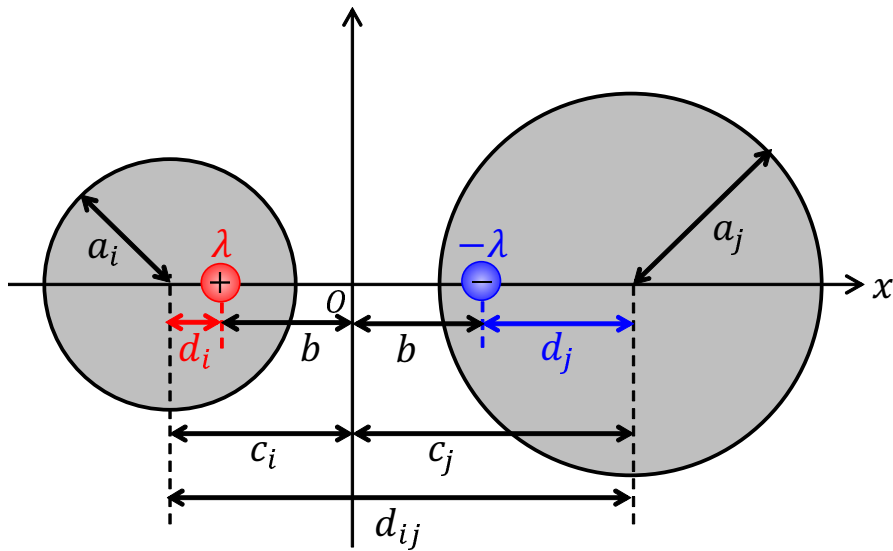


図 3.4 近接する 2 円形導体における電荷分布の偏り

ここでは，特に逆向きに流れる電流による近接効果を考える．二次元の静電磁界問題として考えると，図 3.4 のように，2 円形導体に等量異符号の電荷 $\pm\lambda$ をそれぞれ与えることを考えれば，電流を電荷におきかえて考えることができる．もし 2 導体が十分離れていれば，2 電荷はそれぞれ円の中心に分布する．しかし，2 導体が近接に配置している場合は，図 3.4 における y 軸がゼロ電位（電気壁）となり，かつ 2 円周上の点が導体の境界条件として全て等電位となる，すなわち 2 円がともに等電位線となるために，電荷分布は図 3.4 のように円の中心からそれぞれ互いに近づくように偏る．このとき，

$$b^2 = c_i^2 - a_i^2 = c_j^2 - a_j^2 \quad (3.13)$$

であり， $c_i + c_j = d_{ij}$ であるから，

$$c_i = \frac{d_{ij}^2 + a_i^2 - a_j^2}{2d_{ij}}, \quad c_j = \frac{d_{ij}^2 + a_j^2 - a_i^2}{2d_{ij}} \quad (3.14)$$

である [20]. よって, (3.14) 式を (3.13) 式に代入すると,

$$b = \frac{\sqrt{d_{ij}^4 + a_i^4 + a_j^4 - 2a_i^2 a_j^2 - 2a_i^2 d_{ij}^2 - 2a_j^2 d_{ij}^2}}{2d_{ij}} \quad (3.15)$$

を得るので,

$$d_i = c_i - b = \frac{d_{ij}^2 + a_i^2 - a_j^2 - \sqrt{d_{ij}^4 + a_i^4 + a_j^4 - 2a_i^2 a_j^2 - 2a_i^2 d_{ij}^2 - 2a_j^2 d_{ij}^2}}{2d_{ij}} \quad (3.16)$$

$$d_j = c_j - b = \frac{d_{ij}^2 + a_j^2 - a_i^2 - \sqrt{d_{ij}^4 + a_i^4 + a_j^4 - 2a_i^2 a_j^2 - 2a_i^2 d_{ij}^2 - 2a_j^2 d_{ij}^2}}{2d_{ij}} \quad (3.17)$$

となる [21].

これらについて, 文献 [22] の (20) 式および (21) 式と比べることで, 近接効果の影響による抵抗の増加を, 電流分布の偏りから,

$$\frac{\frac{a_i a_j}{d_i d_j} + 1}{\frac{a_i a_j}{d_i d_j} - 1} \quad (3.18)$$

を用いて表現する. これを各導体間, また導体と影像間についてそれぞれ計算すると, (3.6) ~ (3.9) 式が得られる.

3.2.2 L 行列

自己インダクタンス l_{ii} は, 以下の内部インダクタンスと外部インダクタンスの和として,

$$l_{ii} = l_{int_i} + l_{ext_i} \quad (3.19)$$

より求める.

内部インダクタンス [11]

線 # i の内部インダクタンス l_{int_i} は, 表皮インダクタンスを考えることにより,

$$l_{int_i} = \frac{r_i}{\omega} \quad (3.20)$$

とする. ただし, $l_{int_i} > \frac{\mu_0}{8\pi}$ となるときは $l_{int_i} = \frac{\mu_0}{8\pi}$ とする.

外部インダクタンス

外部インダクタンスが被膜の有無に依らない [11] ことを利用して、図 3.2 (c) の導体のみの系で考える。

$$l_{ext_i} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cosh^{-1} \left(\frac{h_i}{a_i} \right) \quad (3.21)$$

$$l_{ij} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{d'_{ij}}{d_{ij}} \right) \quad (3.22)$$

とする [23],[24].

3.2.3 C 行列

まず, l_{ext_i} を主対角成分に, l_{ij} を非対角成分にそれぞれもつ外部インダクタンス行列 \mathbf{L}_{ext} を,

$$\mathbf{L}_{ext} = \begin{bmatrix} l_{ext_1} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{ext_2} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{ext_n} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

とする. このとき, 真空中の光速を v_0 とすると, 図 3.2 (c) の導体のみの系の C 行列 \mathbf{C}_0 は,

$$\mathbf{C}_0 = \frac{1}{v_0} \mathbf{L}_{ext}^{-1} \quad (3.24)$$

となる [11].

次に, 図 3.2 (c) における, 導体のみの場合の各線と GND 間の容量 c_{0gi} および各線間容量 c_{mij} を考える. \mathbf{C}_0 の主対角要素 c_{0ii} および非対角要素 c_{0ij} との関係は,

$$c_{0gi} = c_{0ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n c_{0ij} \quad (3.25)$$

$$c_{0mij} = -c_{0ij} \quad (3.26)$$

である.

ここで, 図 3.2 (c) の系にて, 線*#i*に厚さ t_i , 比誘電率 ε_r の被膜を追加 [25] することで図 3.2 (b) の系とすることを考える. 各容量の被膜による増加分は, 各線と GND 間の容量に関

する係数 C_{gi}^+ および各線間容量に関する係数 C_{mij}^+ によって,

$$C_{gi}^+ = \frac{\varepsilon_r a_i \ln \left(\frac{a_i + t_i}{a_i} \right) - t_i}{t_i + \varepsilon_r a_i \cosh^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{h_i^2 + (a_i + t_i)^2}{2(a_i + t_i)^2}} \right\}} \quad (3.27)$$

$$C_{mij}^+ = \frac{\varepsilon_r a_i a_j \cosh^{-1} \left\{ 2 \left(\frac{a_i + t_i}{a_i} \cdot \frac{a_j + t_j}{a_j} \right) - 1 \right\} - 2(a_i t_j + a_j t_i)}{2(a_i t_j + a_j t_i) + \varepsilon_r a_i a_j \cosh^{-1} \left\{ \frac{d_{ij}^2}{4(a_i + t_i)(a_j + t_j)} \right\}} \quad (3.28)$$

として表現する. (3.27) 式および (3.28) 式を用いて, 各線と GND 間の容量 c_{gi} および各線間容量 c_{mij} を,

$$c_{gi} = c_{0gi} + C_{gi}^+ \cdot c_{0gi} \quad (3.29)$$

$$c_{mij} = c_{0mij} + C_{mij}^+ \cdot c_{0mij} \quad (3.30)$$

とする.

3.2.4 G 行列

図 3.2 (c) の導体のみの系においては, 各漏れコンダクタンスはゼロである. 3.2.3 節と同様に考えて, 誘電正接 $\tan \delta$ の被膜を追加することによる漏れコンダクタンスの増加を考えることで, (3.27), (3.28) 式より,

$$g_{gi} = \omega \tan \delta \cdot C_{gi}^+ c_{0gi} \quad (3.31)$$

$$g_{mij} = \omega \tan \delta \cdot C_{mij}^+ c_{0mij} \quad (3.32)$$

とする.

次章からは, 提案手法の有効性について, (3.2) 式で得られるハーネス全体の縦続行列を 2.4.1 節の方法によって $Z_0 = 50 \, \Omega$ 系の散乱行列に変換した理論計算値を, 実測や電磁界シミュレーションによる値と比較することで検証する. 理論計算には MathWorks 社の数値解析ソフト MATLAB 2014a を使用しており, また, 測定は Agilent 社のベクトル・ネットワーク・アナライザ (Vector Network Analyzer : VNA) E5071B を用いて行っている. 特に断りのない限り, それぞれの結果は周波数 300 kHz~1 GHz の範囲にて, 対数軸で 354 点のデータをとったものである.

第 4 章

ツイストペアケーブルのモデル化

4.1 検討モデル

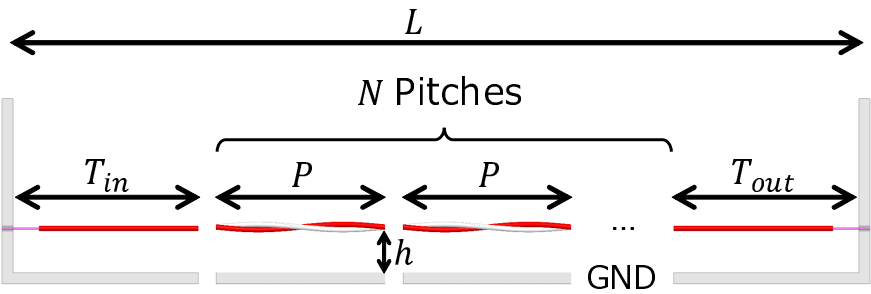


図 4.1 ツイストペアケーブルのモデル化の概要

本章では，2 本の同一電線からなるツイストペアケーブル（Twisted Pair Cable, Twisted Wire Pair：TWP）に対して提案手法を適用する．図 4.1 にモデル化の概要を示す．ここでは，撚りピッチ P ，ケーブルの全長 L ，GND からの配線高 h のケーブルをモデル化し，各パラメータを表 4.1 に示すように変化させて検討を行う．

表 4.1 ツイストペアケーブルの各パラメータ

	撚りピッチ P	ケーブル長 L	配線高 h
[A]	45 mm	50 cm	12 mm
[B]	25 mm	50 cm	12 mm
[C]	45 mm	100 cm	12 mm
[D]	45 mm	50 cm	1.4 mm

4.1.1 実験

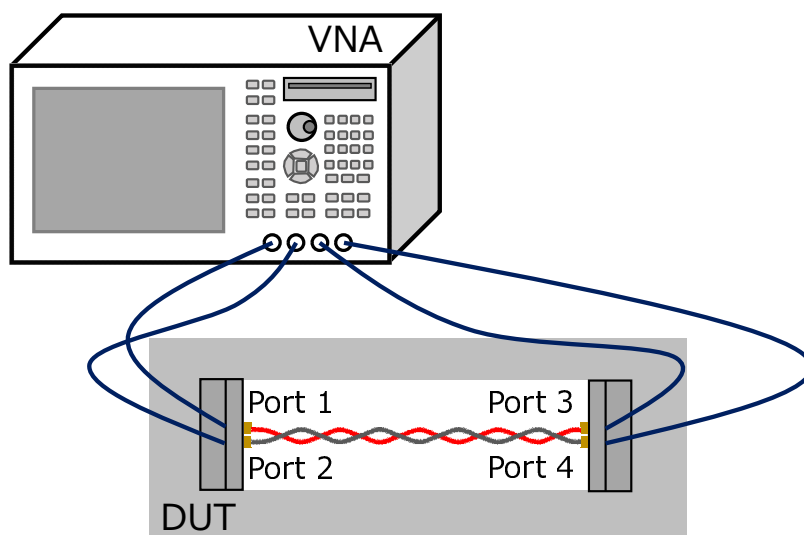


図 4.2 測定系の概要

図 4.2 に測定系の概要を示す．撚り対線の一方の線の両端を Port 1, 3 に，他方の線の両端を Port 2, 4 に，それぞれ接続した．

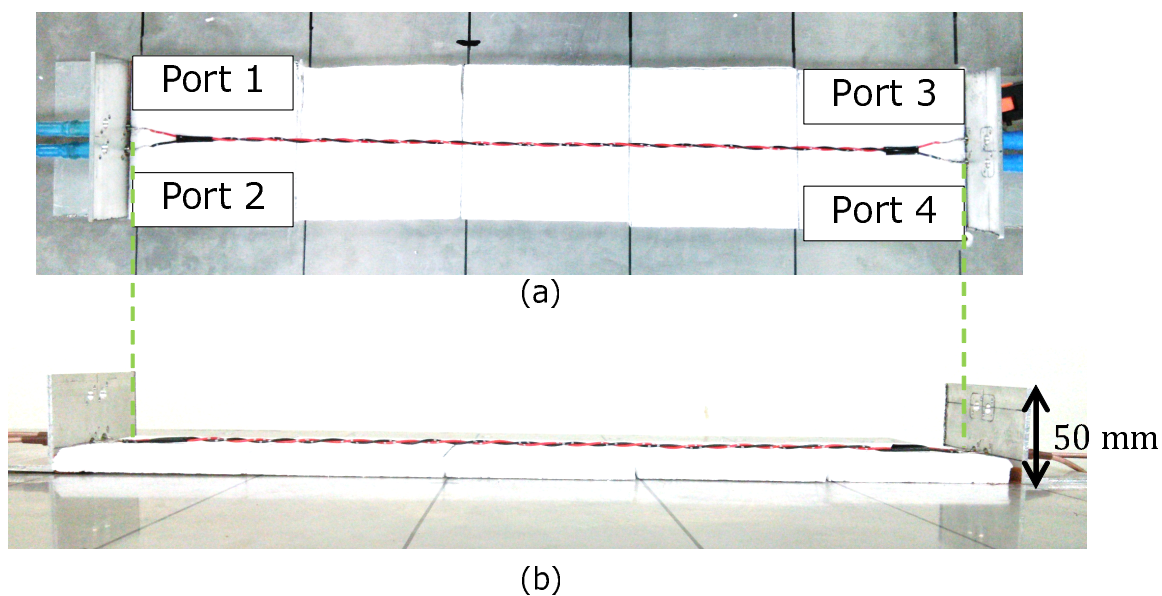


図 4.3 ツイストペアケーブルの DUT (a) 上から見た図 (b) 横から見た図

図 4.3 に DUT (Device Under Test) を示す．本検討では，矢崎総業製の CAVS 電線 0.3sq (内導体 (銅) 半径 $a = 0.35$ mm, 絶縁体 (PVC) 被膜厚さ $t = 0.35$ mm, 公称断面積 $S_c = 0.3716$ mm²) を 2 本用いてケーブルを製作した．また，GND として厚さ 3 mm のアルミニウム板を使用し，ケーブルの終端は，高さ 50 mm の L アングル状アルミ板に穴を空け，SMA コネクタをネジで固定して，電線をはんだで取り付けた．コネクタのサイズの都合上，終端部では 2 本の電線間の距離が開いているが，本検討ではこの部分がケーブルの全長に対して短いことからその影響を無視し，終端部でも 2 本の電線が接触しているものとして扱った．

4.1.2 提案手法による理論計算

本検討では，図 4.1 に示したように，ケーブルのツイスト部が同一な長さ P の撚りピッチが N 回繰り返されたものと考え，1 ピッチ分の縦続行列表示を得られれば十分であるとした．そこで，1 ピッチを m 区間に分割して m 通りの断面形状に対し等価回路化を行い，各区間長を $l = P/m$ として縦続行列 $\mathbf{F}_{\Delta 1}, \dots, \mathbf{F}_{\Delta m}$ を計算した．

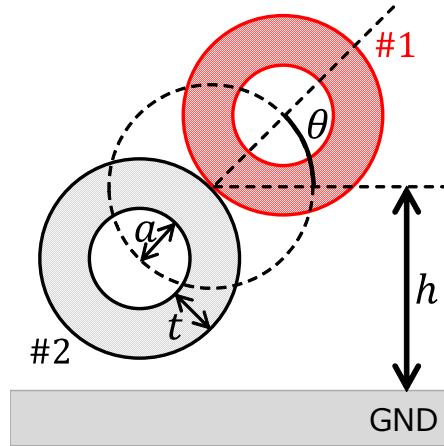


図 4.4 ツイストペアケーブルの断面のモデル

図 4.4 にツイストペアケーブルの断面モデルを示す．2 線の接点を原点とする xy 座標系をとり，線 $\#i$ の線心位置 (x_i, y_i) を，それぞれ

$$\begin{cases} x_1 &= (a+t) \cos \theta &= 0.7 \cos \theta \text{ [mm]} \\ y_1 &= (a+t) \sin \theta &= 0.7 \sin \theta \text{ [mm]} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} x_2 &= -(a+t) \cos \theta &= -0.7 \cos \theta \text{ [mm]} \\ y_2 &= -(a+t) \sin \theta &= -0.7 \sin \theta \text{ [mm]} \end{cases} \quad (4.2)$$

と表す． $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の区間を $m + 1$ 分割して， m 個の θ に対してそれぞれ等価回路化した．ただし，銅の比透磁率を $\mu_r = 0.999991$ ，導電率を $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m，PVC の比誘電率を周波数によらず $\varepsilon_r = 3.5$ ，誘電正接を $\tan \delta = 0.008$ とした．

また，ケーブルの終端部は， $\theta = 0$ の断面形状から等価回路化し，各端の区間長を $T_{in} = T_{out} = \frac{L - P \times N}{2}$ として縦続行列 \mathbf{F}_{in} ， \mathbf{F}_{out} を求めた．

これらから，ケーブル全体の縦続行列表示 \mathbf{F}_{TWP} を，

$$\mathbf{F}_{TWP} = \mathbf{F}_{in} \times (\mathbf{F}_{\Delta 1} \times \cdots \mathbf{F}_{\Delta m})^N \times \mathbf{F}_{out} \quad (4.3)$$

として求めた．

4.1.3 シミュレーション

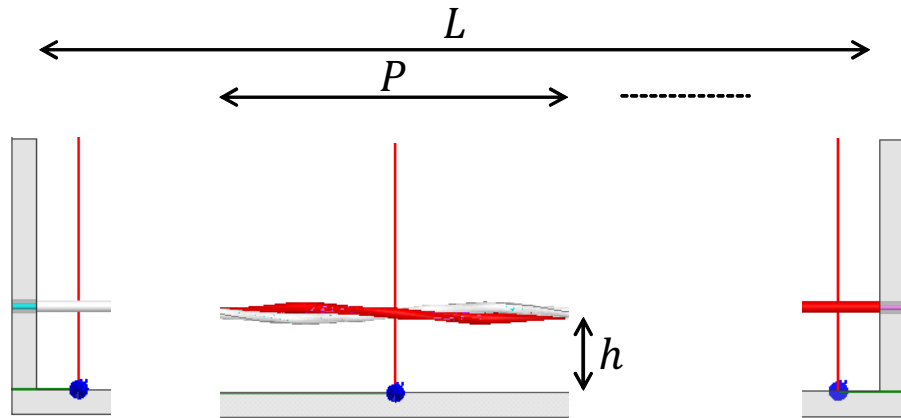


図 4.5 シミュレーションモデル

計算時間短縮のため，図 4.1.3 に示すようなケーブルの終端部及び 1 ツイスト分のみを解析した．その上で，まず得られた各部位の S 行列を (2.206) 式により一度 T 行列に変換し，縦続行列を計算してケーブル全体の T 行列を得た．次にそれを (2.207) 式により S 行列に変換し，ケーブル全体の S 行列を得ることにより検討を行った．電磁界シミュレーションには，Ansys 社の 3 次元フルウェーブシミュレータ HFSS を用いた．

4.2 計算手法を変えた場合

本節では，

- シミュレーション

- 実測
- 有限要素法で求めた一次定数で等価回路化し、状態変数法によって理論計算
- 有限要素法で求めた一次定数で等価回路化し、モード分解法によって理論計算
- 提案近似式で求めた一次定数で等価回路化し、状態変数法によって理論計算
- 提案近似式で求めた一次定数で等価回路化し、モード分解法によって理論計算

の各結果について比較検討する．理論計算については，1 ピッチの分割数は $m = 80$ とした．また，有限要素法による一次定数の抽出は，Ansys 社の Q3D Extractor の二次元電磁界ソルバ 2D Extractor で行った．

4.2.1 結果

[A] $P = 45 \text{ mm}$, $L = 50 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ mm}$ のとき

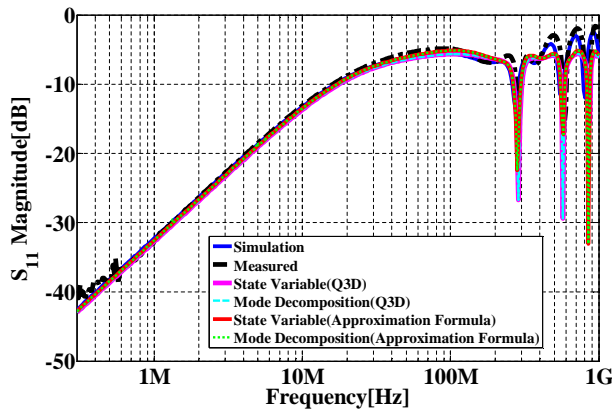


図 4.6 反射係数 S_{11} の振幅特性

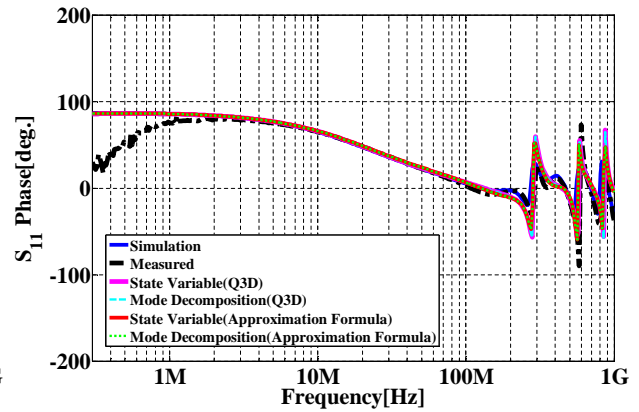


図 4.7 反射係数 S_{11} の位相特性

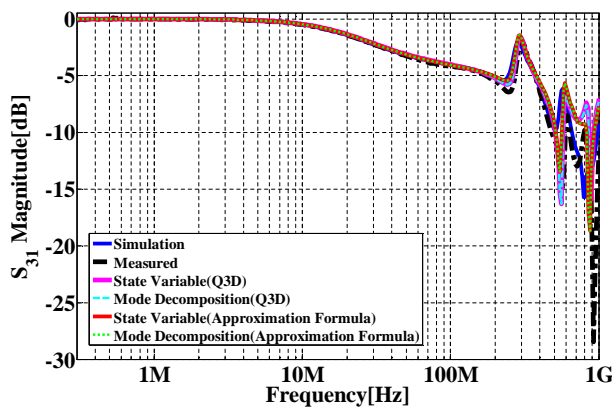


図 4.8 通過係数 S_{31} の振幅特性

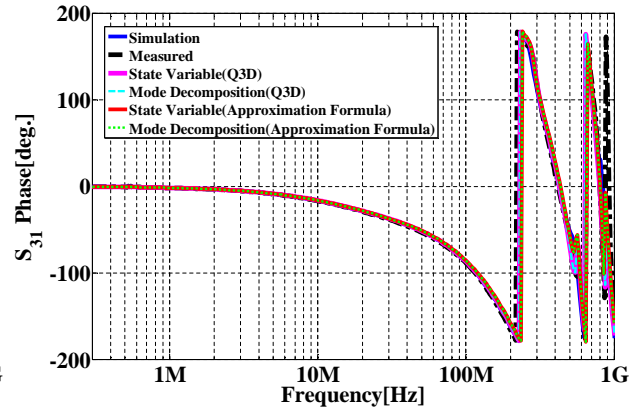
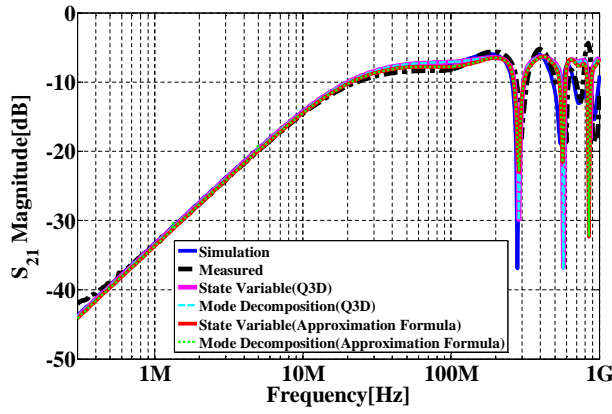
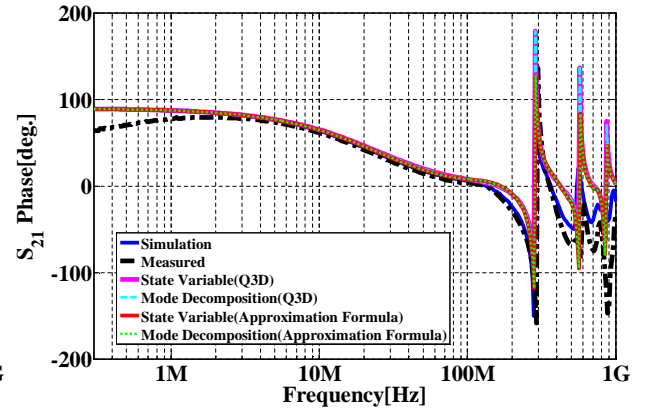
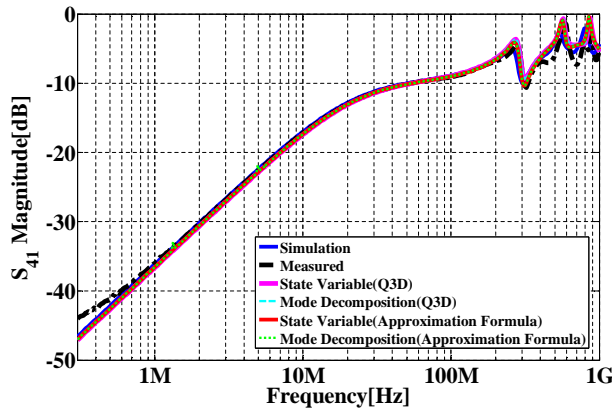
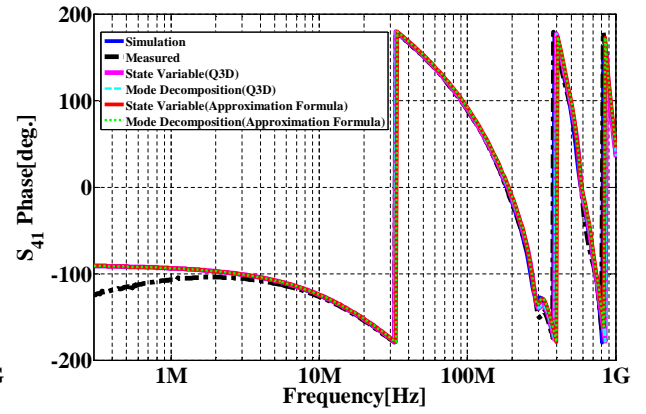
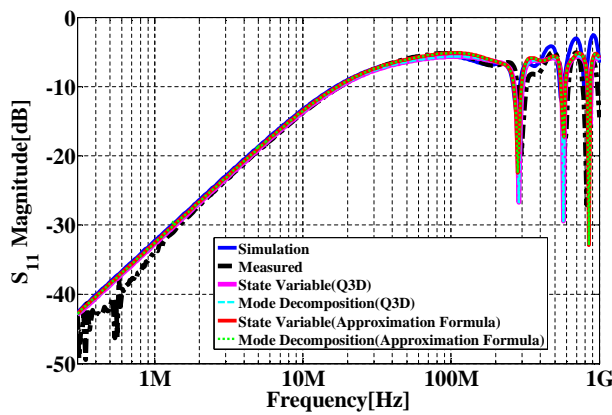
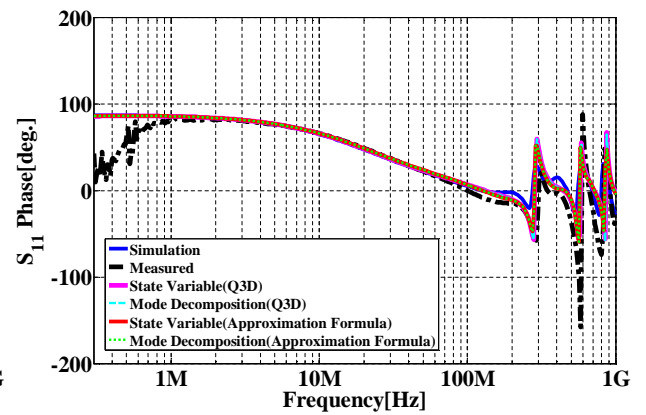
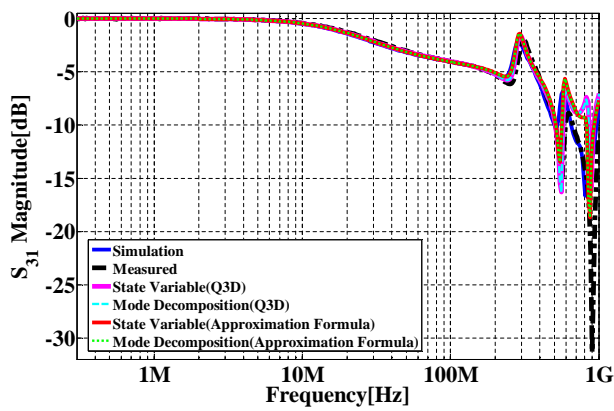
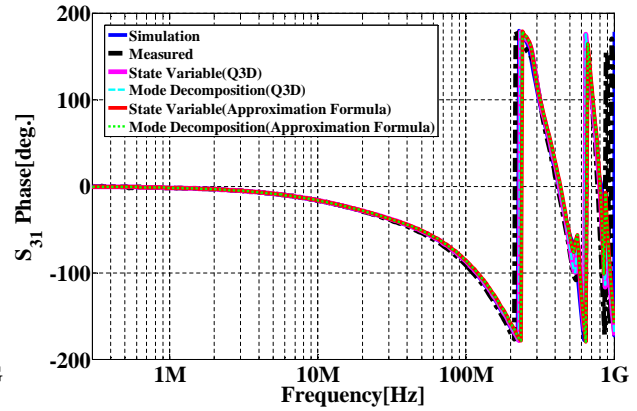
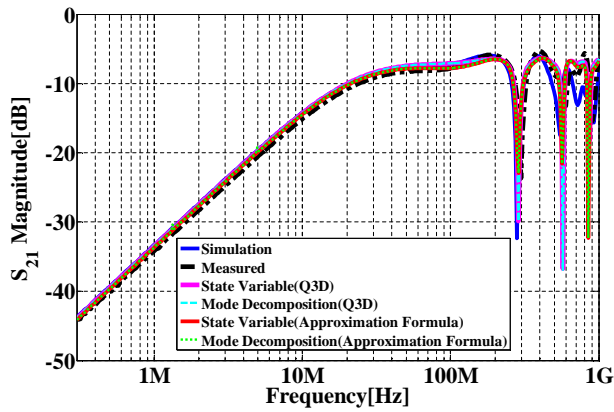
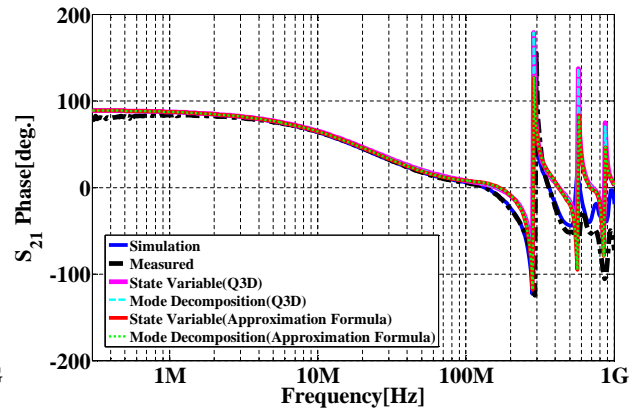
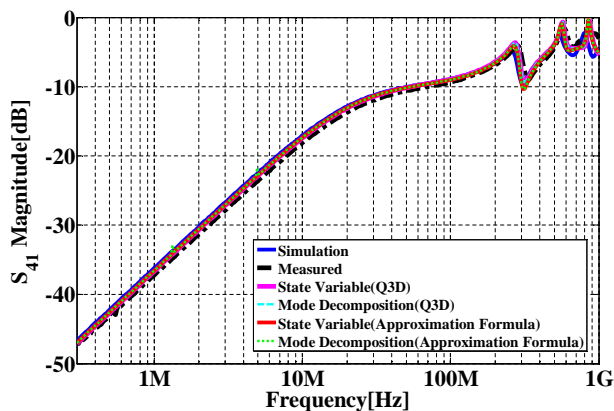
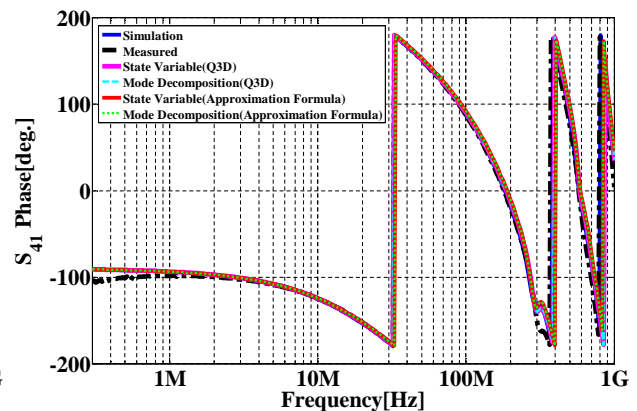


図 4.9 通過係数 S_{31} の位相特性

図 4.10 近端結合 S_{21} の振幅特性図 4.11 近端結合 S_{21} の位相特性図 4.12 遠端結合 S_{41} の振幅特性図 4.13 遠端結合 S_{41} の位相特性

[B] $P = 25 \text{ mm}$, $L = 50 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ mm}$ のとき

図 4.14 反射係数 S_{11} の振幅特性図 4.15 反射係数 S_{11} の位相特性

図 4.16 通過係数 S_{31} の振幅特性図 4.17 通過係数 S_{31} の位相特性図 4.18 近端結合 S_{21} の振幅特性図 4.19 近端結合 S_{21} の位相特性図 4.20 遠端結合 S_{41} の振幅特性図 4.21 遠端結合 S_{41} の位相特性

[C] $P = 45 \text{ mm}$, $L = 100 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ mm}$ のとき

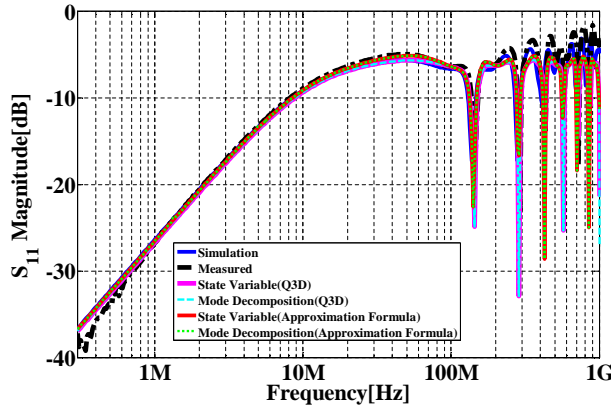


図 4.22 反射係数 S_{11} の振幅特性

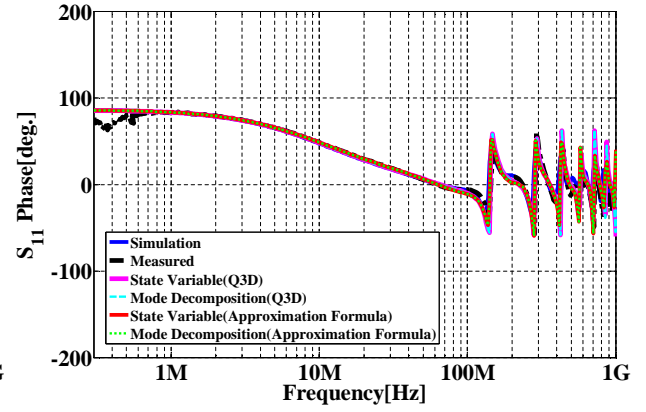


図 4.23 反射係数 S_{11} の位相特性

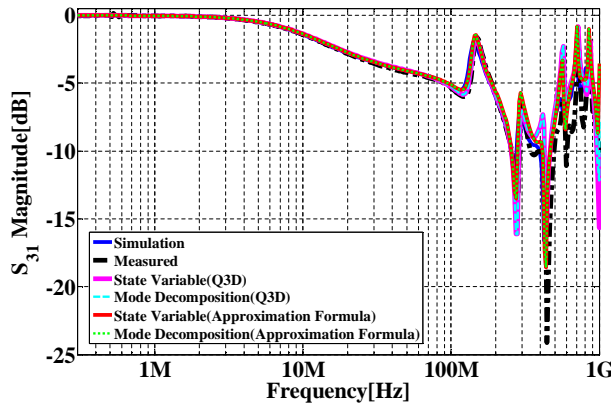


図 4.24 通過係数 S_{31} の振幅特性

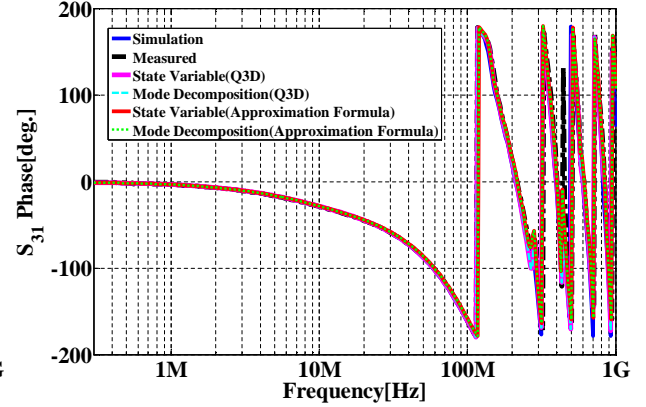


図 4.25 通過係数 S_{31} の位相特性

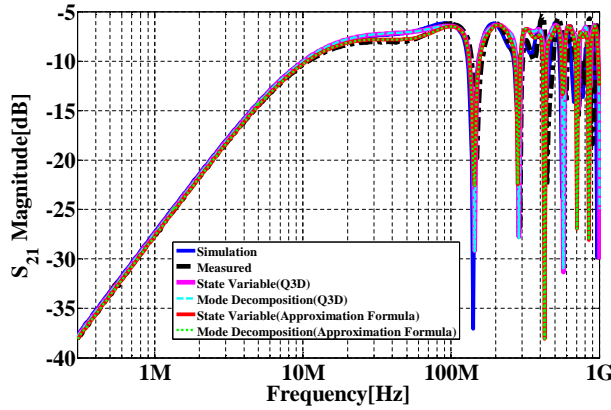


図 4.26 近端結合 S_{21} の振幅特性

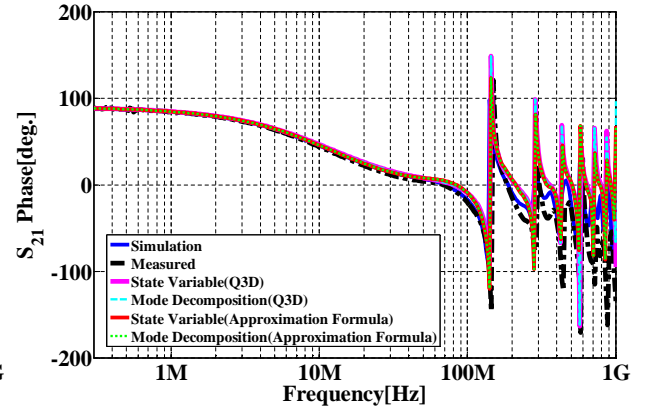
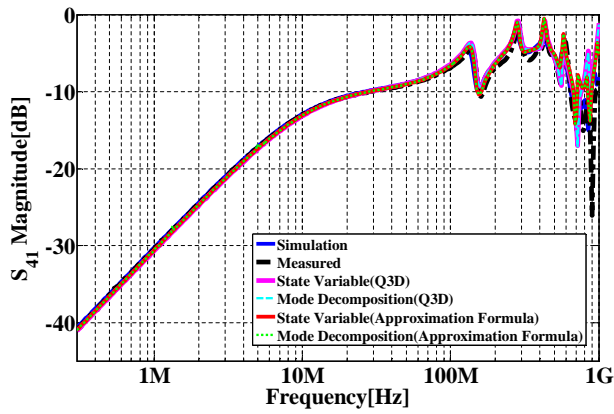
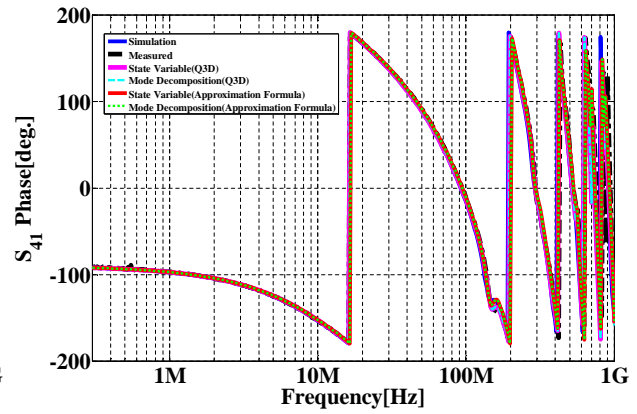
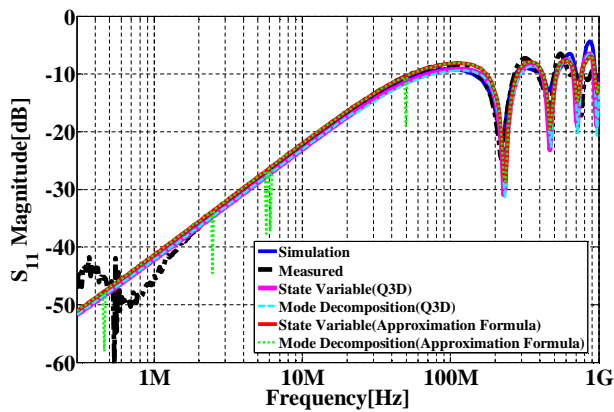
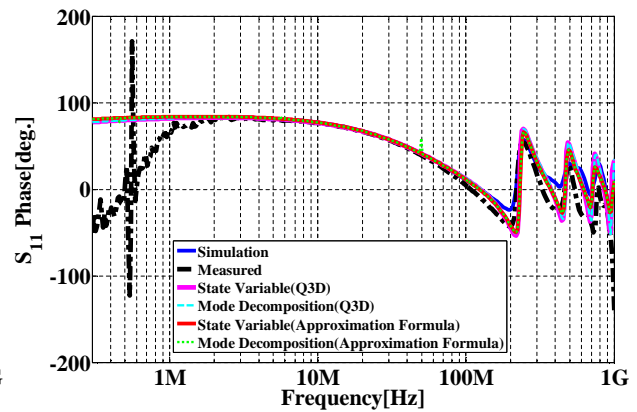
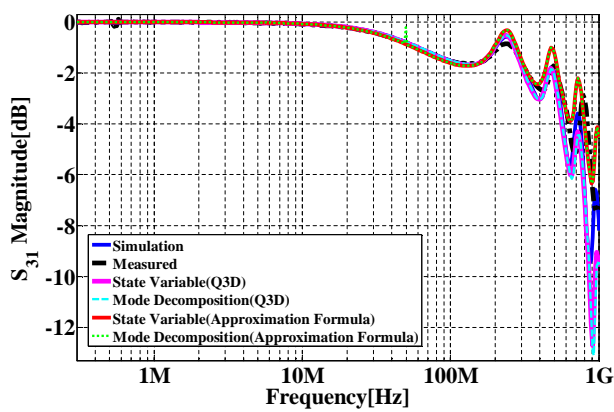
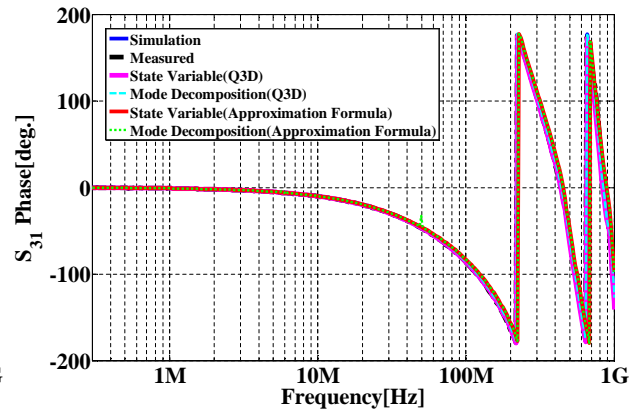
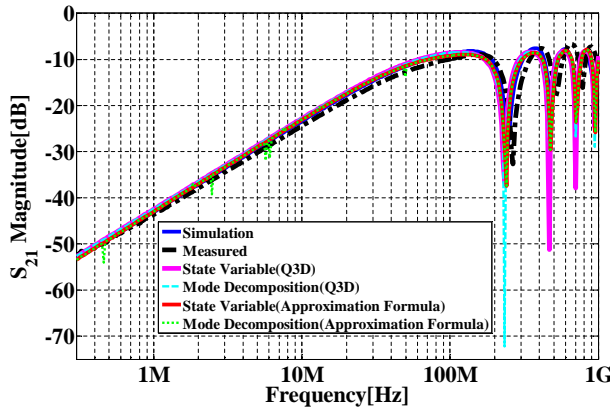
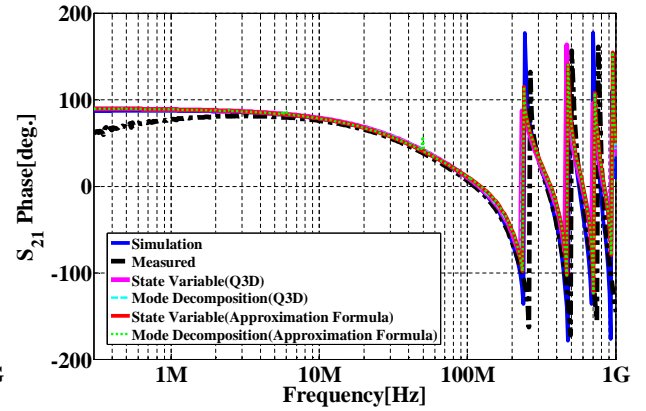
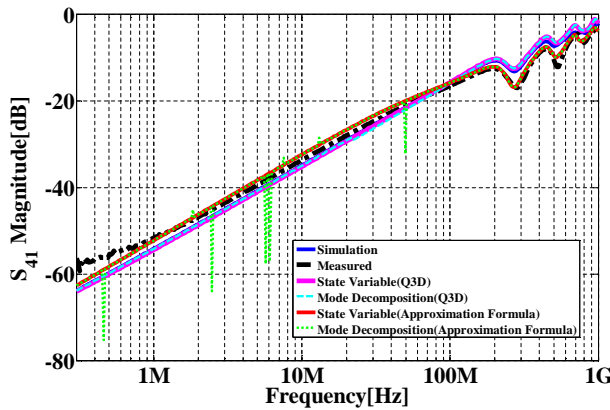
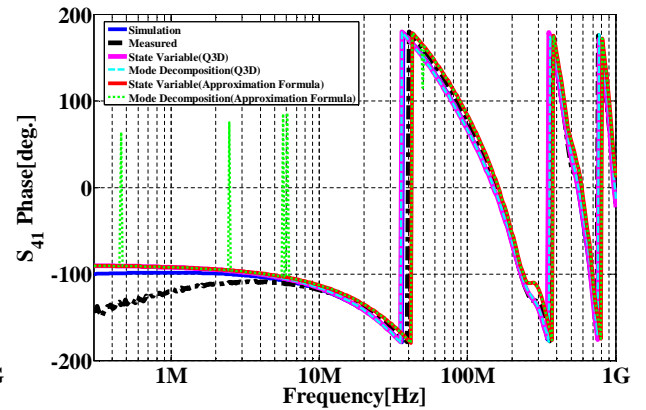


図 4.27 近端結合 S_{21} の位相特性

図 4.28 遠端結合 S_{41} の振幅特性図 4.29 遠端結合 S_{41} の位相特性

[D] $P = 45 \text{ mm}$, $L = 50 \text{ cm}$, $h = 1.4 \text{ mm}$ のとき

図 4.30 反射係数 S_{11} の振幅特性図 4.31 反射係数 S_{11} の位相特性図 4.32 通過係数 S_{31} の振幅特性図 4.33 通過係数 S_{31} の位相特性

図 4.34 近端結合 S_{21} の振幅特性図 4.35 近端結合 S_{21} の位相特性図 4.36 遠端結合 S_{41} の振幅特性図 4.37 遠端結合 S_{41} の位相特性

4.2.2 考察

いずれも理論値は実測値・シミュレーション値と概ねよく一致しており、提案手法の有効性を確認できた。特に、一次定数を有限要素法で求めた場合と提案近似式で求めた場合の結果にほとんど差はなく、提案近似式によって良い等価回路化が行えているといえる。また、状態変数法を用いた場合とモード分解法を用いた場合の比較では、いずれもグラフがほぼ重なっており差はないが、モード分解法では図 4.30 や図 4.37 の 2.5 MHz 付近、6 MHz 付近、50 MHz 付近などでスパイク状の特性が見られる。これは断面形状が対称構造となるときに、(2.132) 式から求めるモード特性インピーダンス行列が、計算の際に対角行列になっていないためである。なお、計算にかかる合計時間は、状態変数法では平均 8 秒程度、モード分解法では平均 38 秒程度であった。したがって、ツイストペアケーブルの伝送特性を計算するためならば、状態変数法により数学的に電信方程式を解けばよいといえる。

4.3 1ピッチあたりの分割数を変えた場合

本節では、

- シミュレーション
- 実測
- 1ピッチを $m = 4$ 分割したときの理論計算
- 1ピッチを $m = 10$ 分割したときの理論計算
- 1ピッチを $m = 20$ 分割したときの理論計算
- 1ピッチを $m = 80$ 分割したときの理論計算

の各結果について比較検討する．理論計算については、それぞれ提案近似式を用いて等価回路化し、状態変数法によって各分割区間の縦続行列を求めている．

4.3.1 結果

[A] $P = 45 \text{ mm}$, $L = 50 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ mm}$ のとき

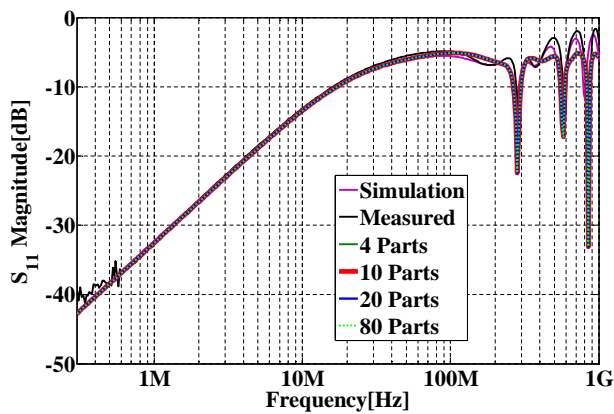


図 4.38 反射係数 S_{11} の振幅特性

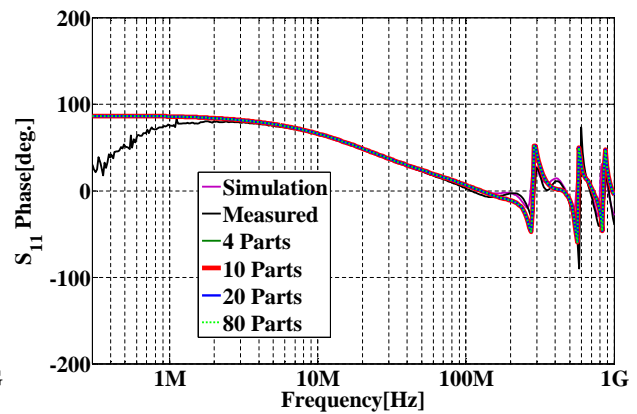
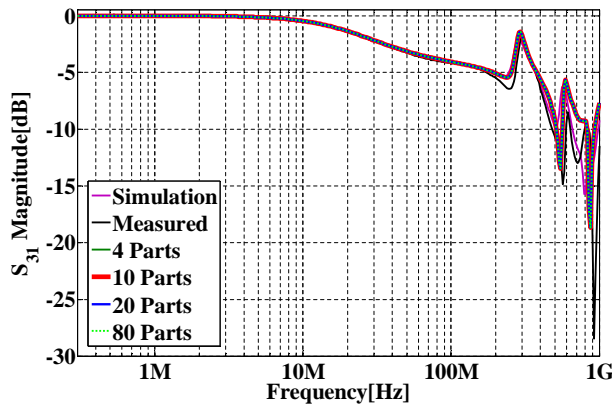
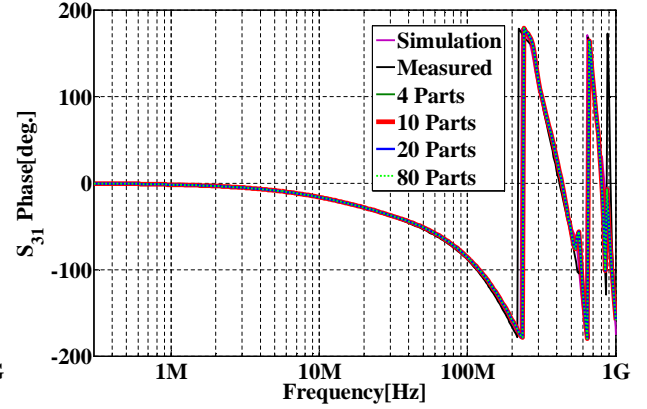
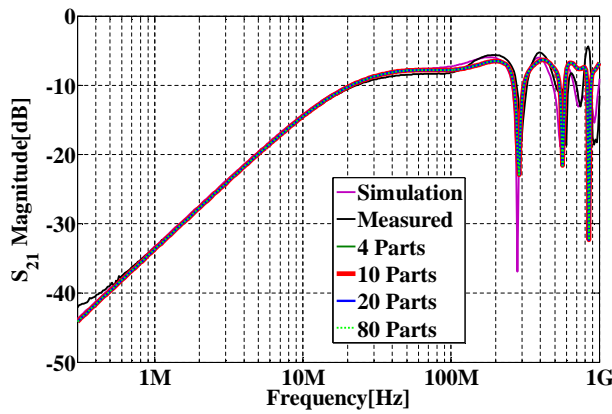
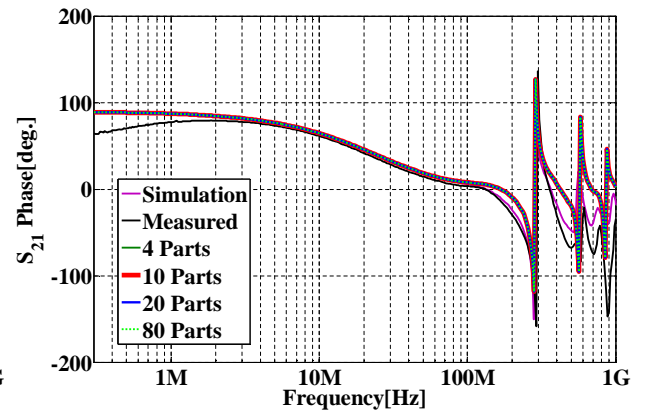
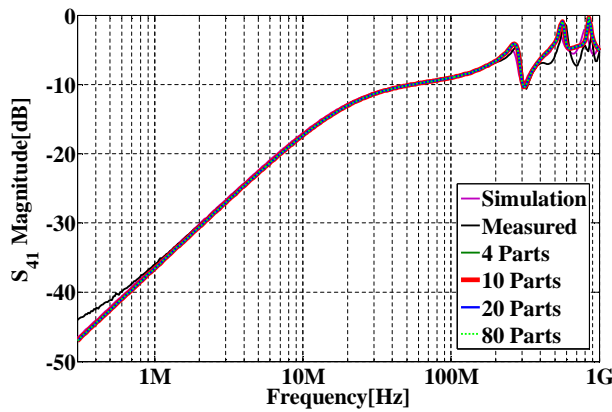
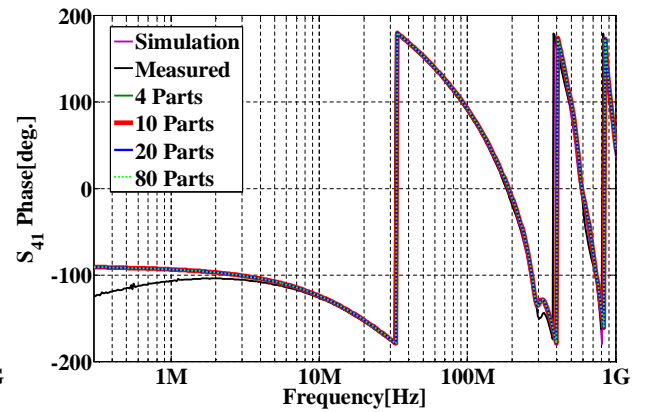


図 4.39 反射係数 S_{11} の位相特性

図 4.40 通過係数 S_{31} の振幅特性図 4.41 通過係数 S_{31} の位相特性図 4.42 近端結合 S_{21} の振幅特性図 4.43 近端結合 S_{21} の位相特性図 4.44 遠端結合 S_{41} の振幅特性図 4.45 遠端結合 S_{41} の位相特性

[B] $P = 25 \text{ mm}$, $L = 50 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ mm}$ のとき

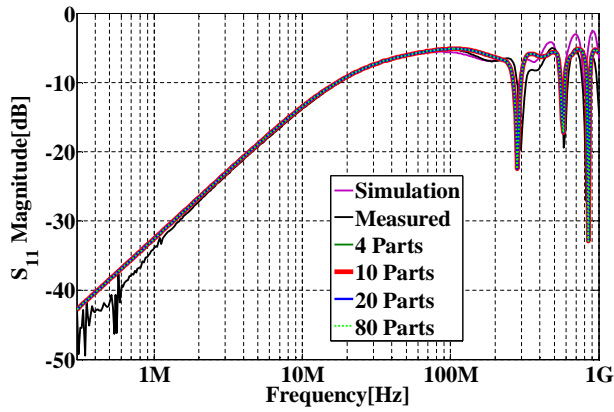


図 4.46 反射係数 S_{11} の振幅特性

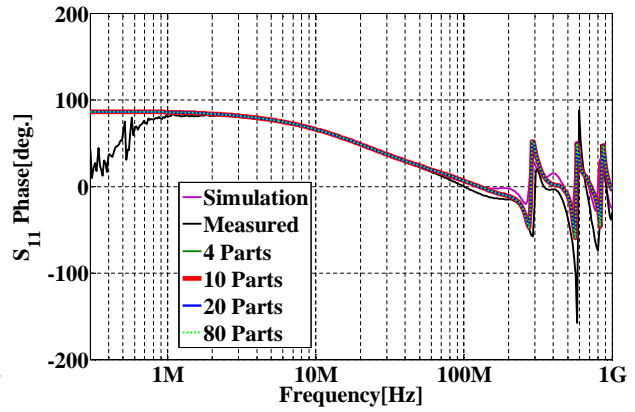


図 4.47 反射係数 S_{11} の位相特性

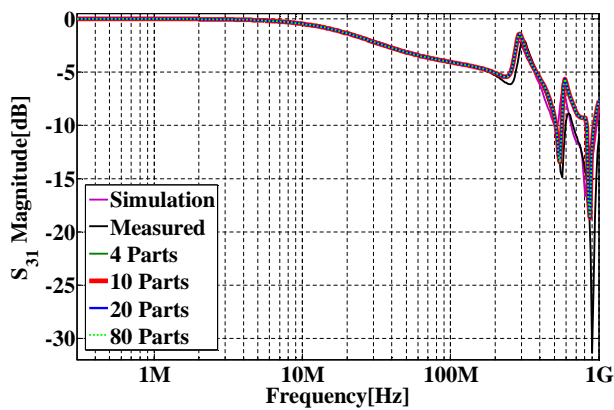


図 4.48 通過係数 S_{31} の振幅特性

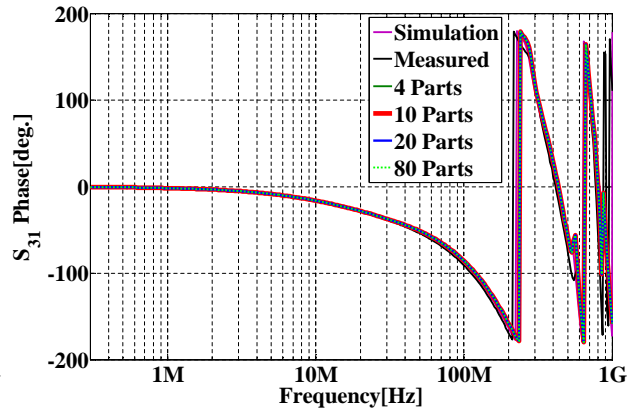


図 4.49 通過係数 S_{31} の位相特性

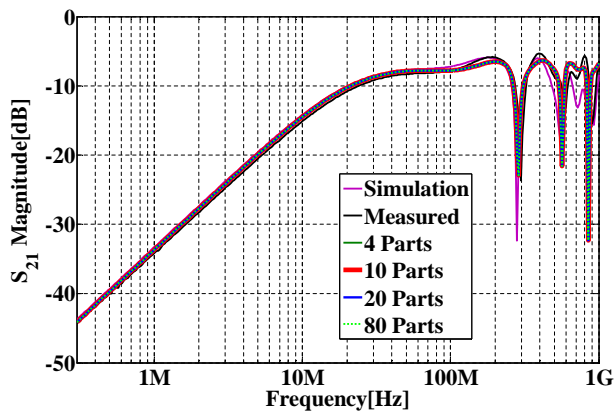


図 4.50 近端結合 S_{21} の振幅特性

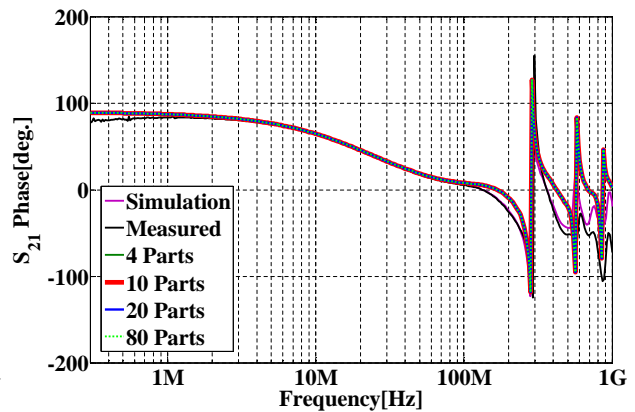
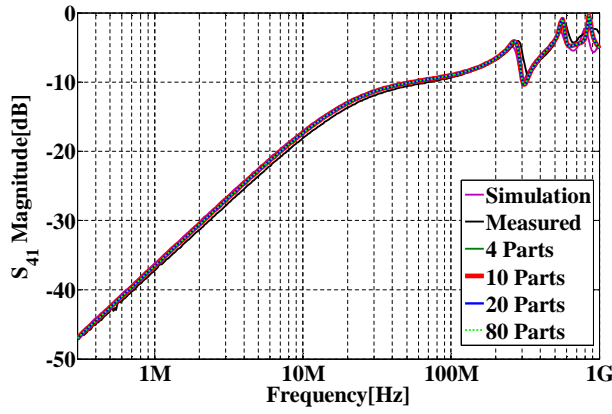
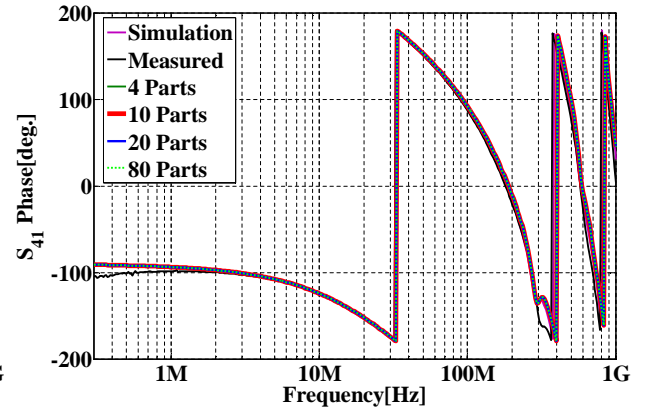
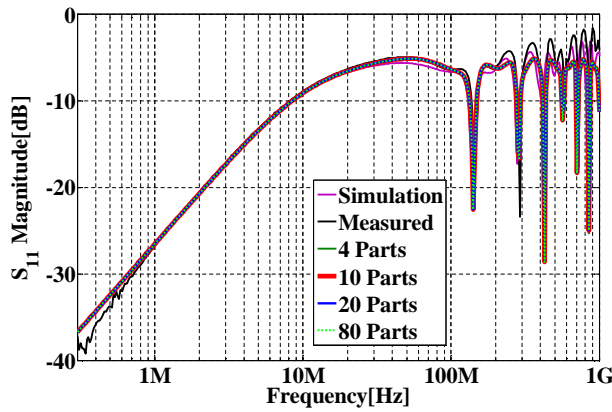
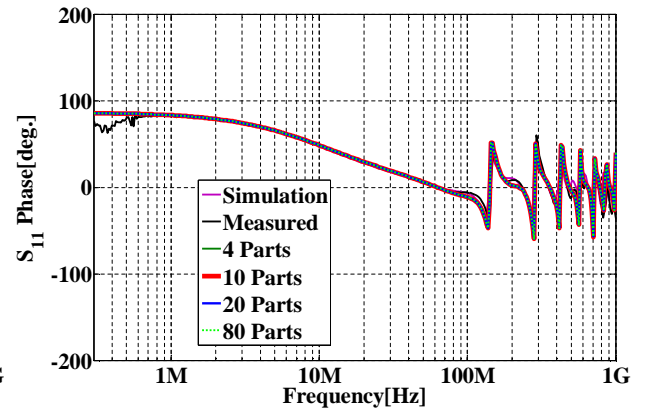
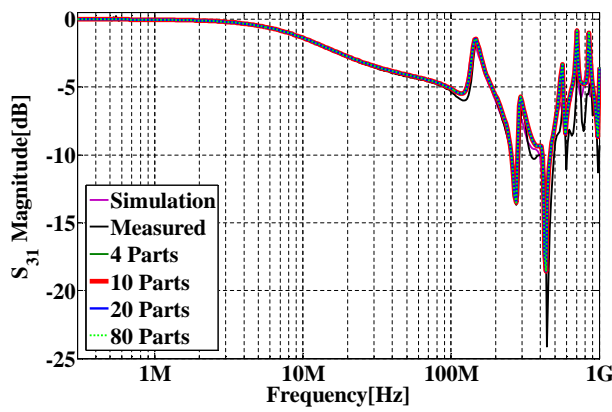
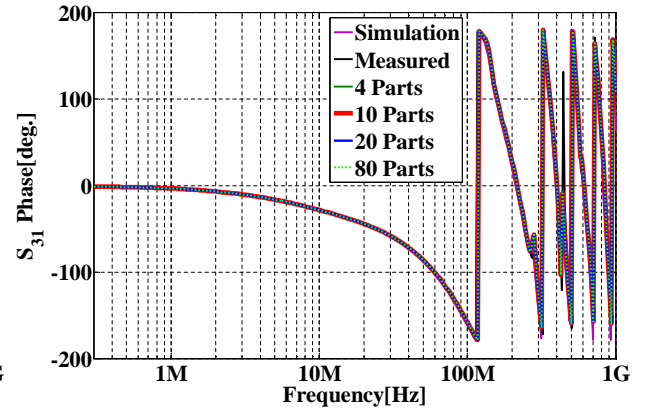
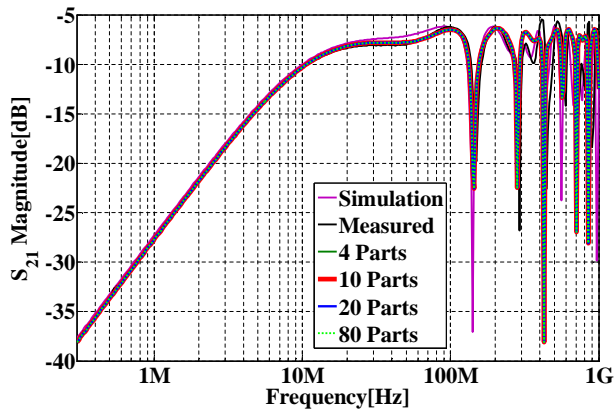
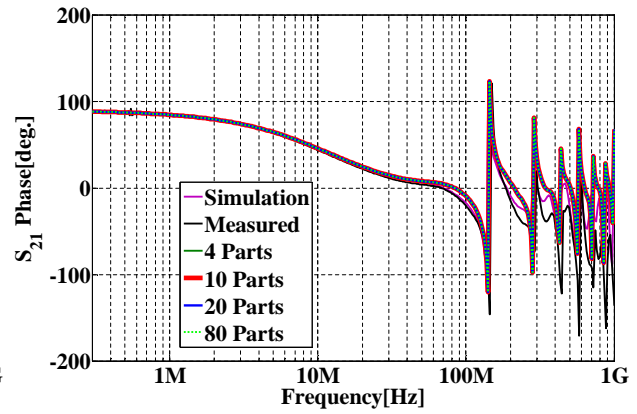
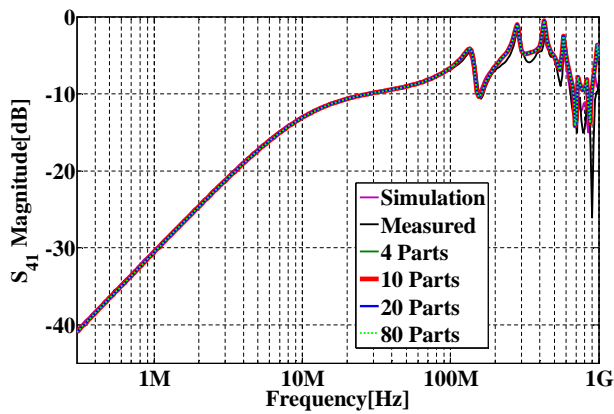
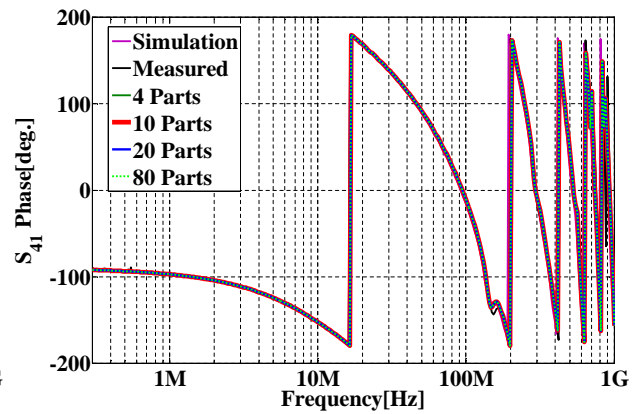


図 4.51 近端結合 S_{21} の位相特性

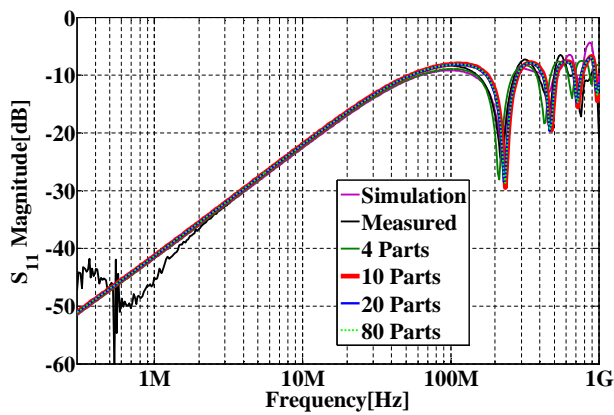
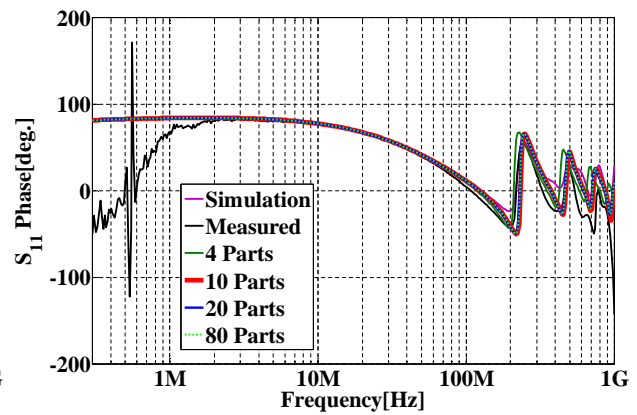
図 4.52 遠端結合 S_{41} の振幅特性図 4.53 遠端結合 S_{41} の位相特性

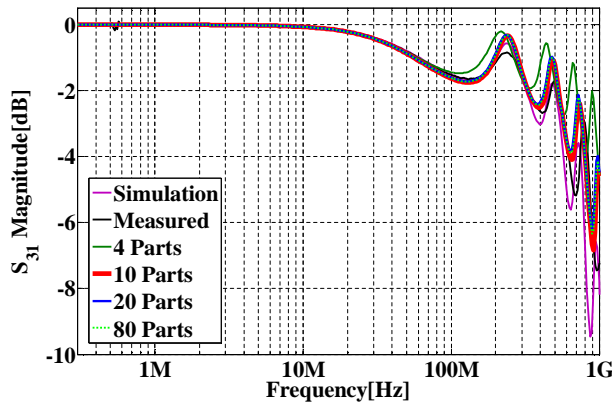
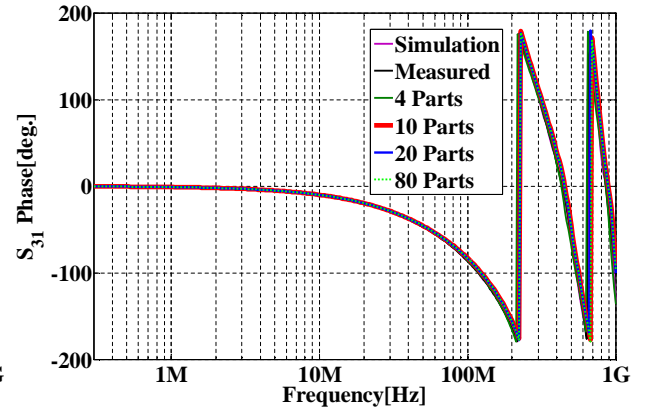
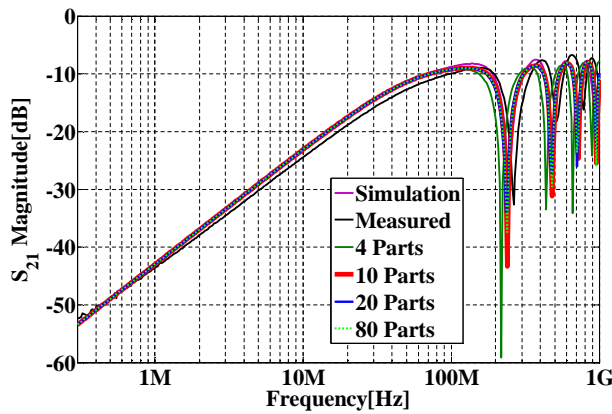
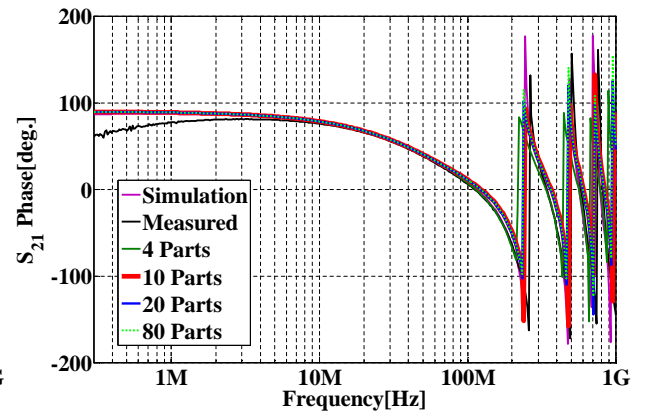
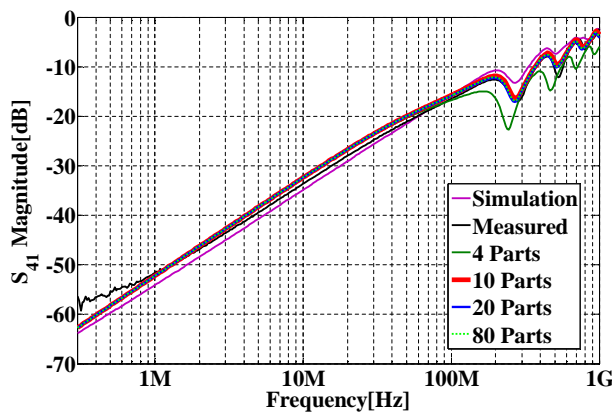
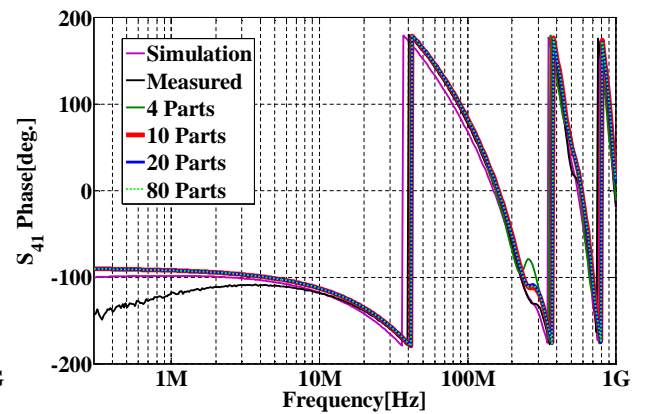
[C] $P = 45 \text{ mm}$, $L = 100 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ mm}$ のとき

図 4.54 反射係数 S_{11} の振幅特性図 4.55 反射係数 S_{11} の位相特性図 4.56 通過係数 S_{31} の振幅特性図 4.57 通過係数 S_{31} の位相特性

図 4.58 近端結合 S_{21} の振幅特性図 4.59 近端結合 S_{21} の位相特性図 4.60 遠端結合 S_{41} の振幅特性図 4.61 遠端結合 S_{41} の位相特性

[D] $P = 45 \text{ mm}$, $L = 50 \text{ cm}$, $h = 1.4 \text{ mm}$ のとき

図 4.62 反射係数 S_{11} の振幅特性図 4.63 反射係数 S_{11} の位相特性

図 4.64 通過係数 S_{31} の振幅特性図 4.65 通過係数 S_{31} の位相特性図 4.66 近端結合 S_{21} の振幅特性図 4.67 近端結合 S_{21} の位相特性図 4.68 遠端結合 S_{41} の振幅特性図 4.69 遠端結合 S_{41} の位相特性

4.3.2 考察

[A]～[C] のモデルについては、1 ピッチあたりの分割数を変えたことによる伝送特性の変化は特に見られなかった。一方、[D] のモデル、すなわち GND に接するようにケーブルを配線した場合は、分割数の増加に伴って理論値が実測値・シミュレーション値に近付いていく傾向が見られた。しかしこの場合も、1 ピッチを 10 分割した場合、20 分割した場合、80 分割した場合の結果にほとんど差はなかった。このとき、計算の合計時間は、 $m = 10$ の場合に約 1.3 秒、 $m = 20$ の場合に約 2.3 秒、 $m = 80$ の場合に約 8 秒と、分割数にほぼ比例した。したがって、あらゆる配線状況に対応させるためには、提案手法にて 1 ピッチあたり 10～20 区間程度に分割すればよいと考えられる。

第 5 章

種々のケーブルのモデル化

本章では，周期的構造をもつ種々のケーブルに対して提案手法を適用する．前章の検討を踏まえ，1 周期を 16 分割し，各区間を提案近似式で求めた一次定数によって等価回路化する．

5.1 太さの異なる 2 本線路系

5.1.1 実験系

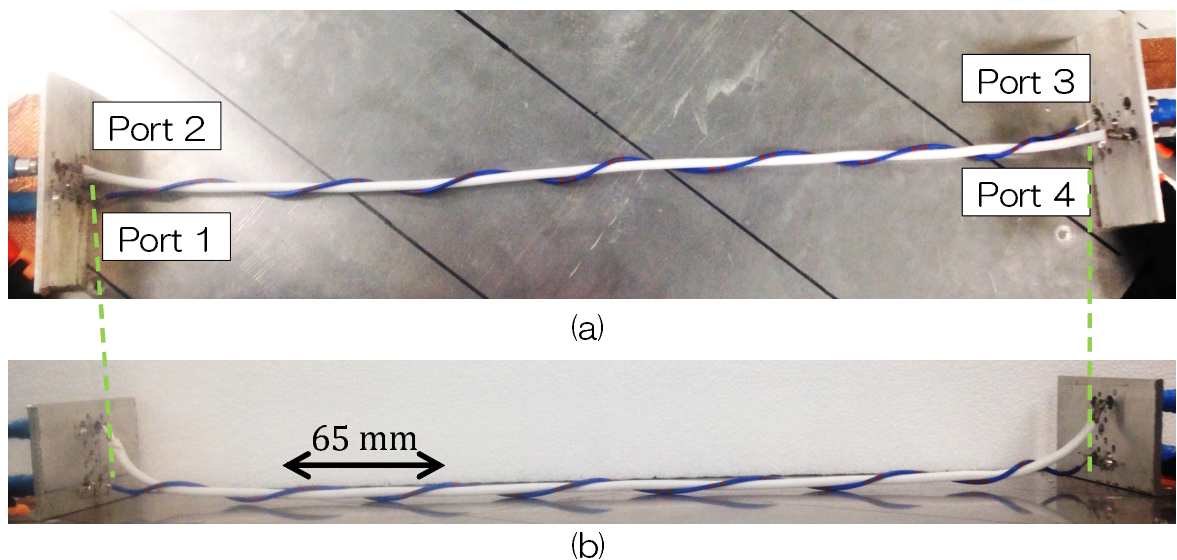


図 5.1 太さの異なる 2 本線路系の DUT (a) 上から見た図 (b) 横から見た図

図 5.1 は，矢崎総業製の AVS 電線 0.85sq (内導体 (銅) 半径 $a_1 = 0.6$ mm, 絶縁体 (PVC) 被膜厚さ $t_1 = 0.5$ mm, 計算断面積 $S_{c1} = 0.8494$ mm²) と 5sq (内導体 (銅) 半径 $a_2 = 1.5$

5.1.2 理論計算

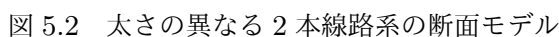

$$\begin{cases} x_1 &= (a_1 + a_2 + t_1 + t_2) \cos \theta &= 3.3 \cos \theta \text{ [mm]} \\ y_1 &= (a_1 + a_2 + t_1 + t_2) \sin \theta &= 3.3 \sin \theta \text{ [mm]} \end{cases} \quad (5.1)$$

図 5.1 からわかるように，実際のケーブルにおいては，機器との接続の都合などで構造が大きく変化することが考えられる．そこで本章では，ケーブルの終端部についてもモデル化を行う．本検討では，各ポートのコネクタ位置 (x_{port_i}, y_{port_i}) と周期構造部の各端位置を結ぶ

線分を考え、それぞれの線分を m_t 等分したとき、各内分点を各線心とするようにモデル化する．ここでは、各ポートのコネクタ位置を、それぞれ

$$\begin{cases} x_{port1} = 6 \text{ mm} \\ y_{port1} = 7.6 \text{ mm} \end{cases} \quad (5.3) \quad \begin{cases} x_{port2} = -6 \text{ mm} \\ y_{port2} = 33.6 \text{ mm} \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} x_{port3} = -6 \text{ mm} \\ y_{port3} = 7.6 \text{ mm} \end{cases} \quad (5.5) \quad \begin{cases} x_{port4} = 6 \text{ mm} \\ y_{port4} = 33.6 \text{ mm} \end{cases} \quad (5.6)$$

としている．また、Port 1 および 2 側の周期構造部端は $\theta = 0$ の断面形状とし、その位置 (x_{1in}, y_{1in}) および (x_{2in}, y_{2in}) は、それぞれ

$$\begin{cases} x_{1in} = 3.3 \text{ mm} \\ y_{1in} = 0 \text{ mm} \end{cases} \quad (5.7) \quad \begin{cases} x_{2in} = 0 \text{ mm} \\ y_{2in} = 0 \text{ mm} \end{cases} \quad (5.8)$$

であり、Port 3 および 4 側の周期構造部端は $\theta = \pi$ の断面形状とし、その位置 (x_{1out}, y_{1out}) および (x_{2out}, y_{2out}) は、それぞれ

$$\begin{cases} x_{1out} = -3.3 \text{ mm} \\ y_{1out} = 0 \text{ mm} \end{cases} \quad (5.9) \quad \begin{cases} x_{2out} = 0 \text{ mm} \\ y_{2out} = 0 \text{ mm} \end{cases} \quad (5.10)$$

である．それぞれの終端部では $m_t = 2$ 等分している．

5.1.3 結果

実測値と、状態変数法およびモード分解法で計算した理論値について、それぞれ次図に示す．

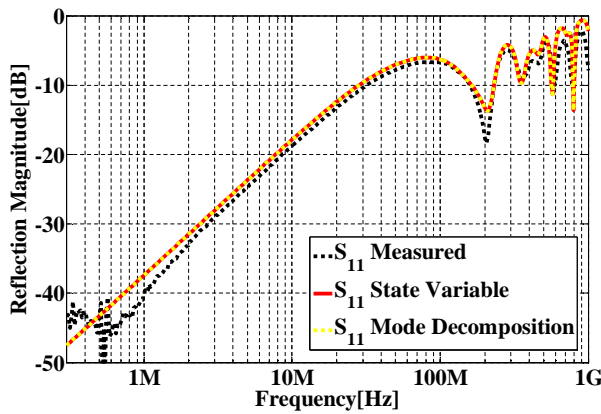


図 5.3 反射係数（細い線）の振幅特性

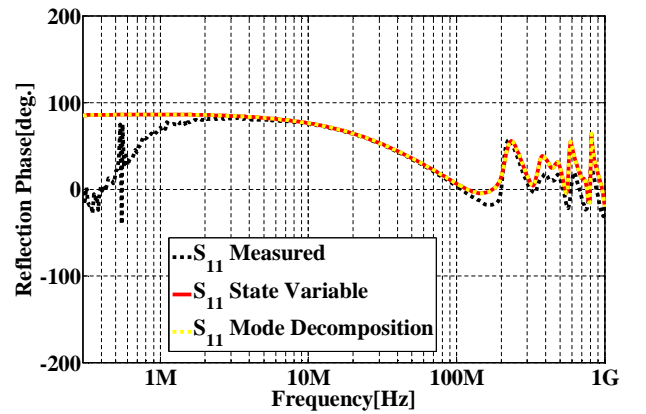


図 5.4 反射係数（細い線）の位相特性

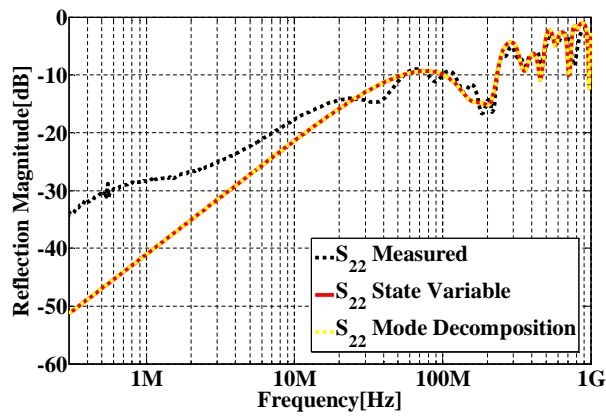


図 5.5 反射係数（太い線）の振幅特性

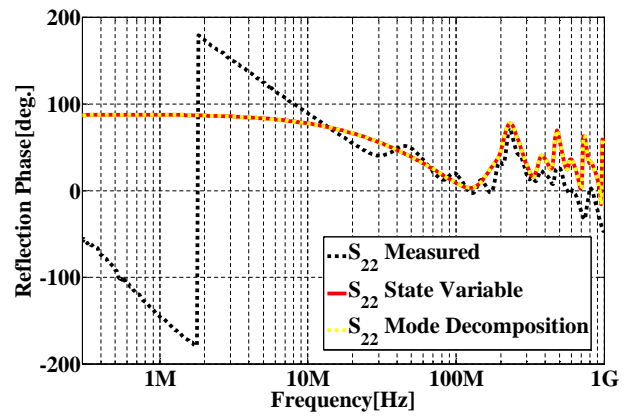


図 5.6 反射係数（太い線）の位相特性

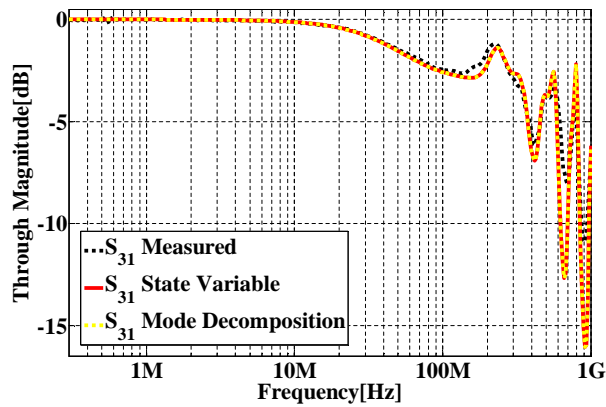


図 5.7 通過係数（細い線）の振幅特性

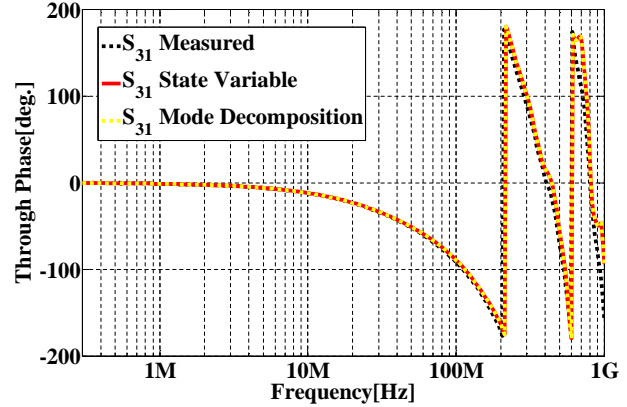


図 5.8 通過係数（細い線）の位相特性

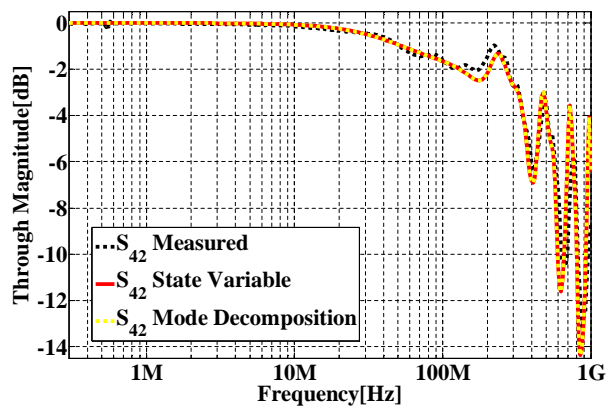


図 5.9 通過係数（太い線）の振幅特性

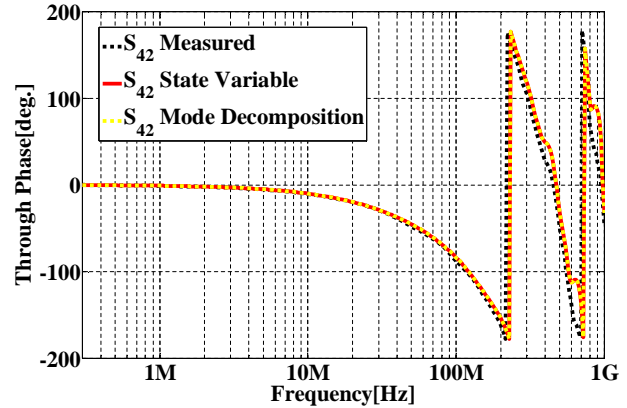


図 5.10 通過係数（太い線）の位相特性

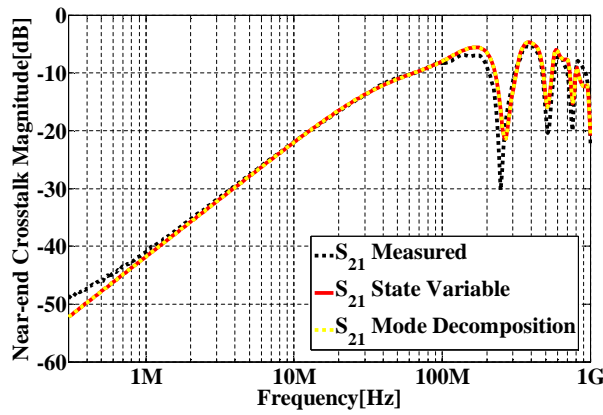


図 5.11 近端結合の振幅特性

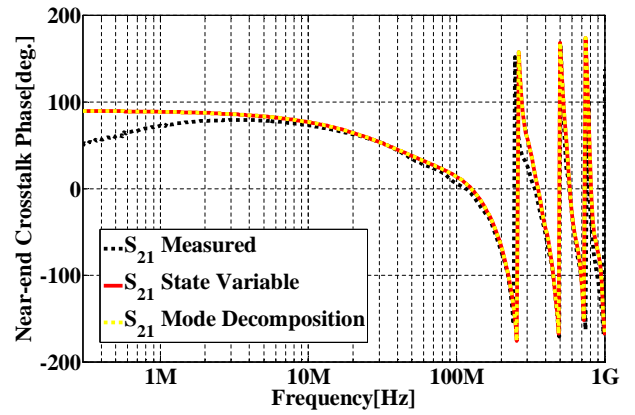


図 5.12 近端結合の位相特性

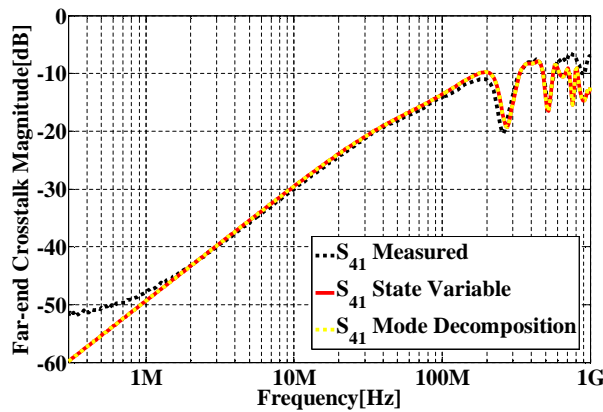


図 5.13 遠端結合の振幅特性

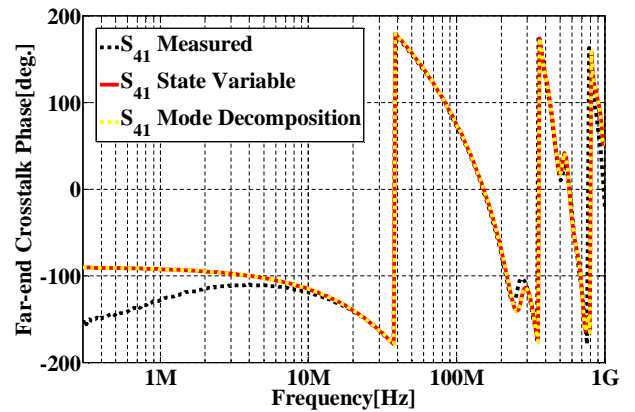


図 5.14 遠端結合の位相特性

5.1.4 考察

いずれも理論値は実測値と概ねよく一致しており、太さの異なる線路系における提案近似式の有効性を確認できた。図 5.5, 5.6 では低い周波数において理論値と実測値に大きなズレが見られるが、これは実際の電線 (AVS 5sq) の内導体が 65 本の素線で構成されているために、SMA コネクタとの接続部において全ての素線を均等にはんだ付けすることが困難であるためである。

モード分解法による各伝搬モードについて

2本線路系にモード分解法を適用すると、2つの独立直交な伝搬モードに分解することになる。この各伝搬モードについて、それぞれのモード伝搬定数およびモード特性インピーダンスを(2.131)式および(2.132)式で与えることを考える。以下の図に、300 kHz～1 GHzの各周波数における、各断面モデルでの角 θ によるモード伝搬定数とモード特性インピーダンスの変化を、各伝搬モードについてそれぞれ示す。

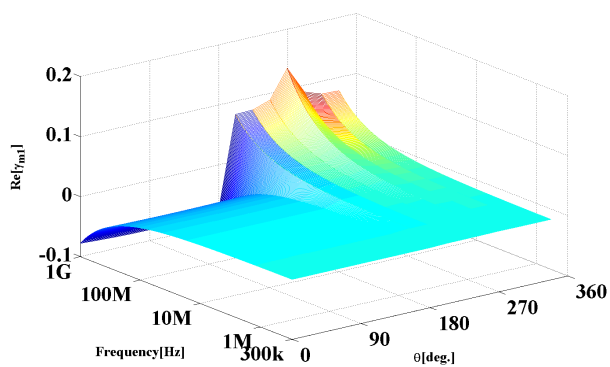


図 5.15 第1モードのモード伝搬定数 γ_{m1} の実部

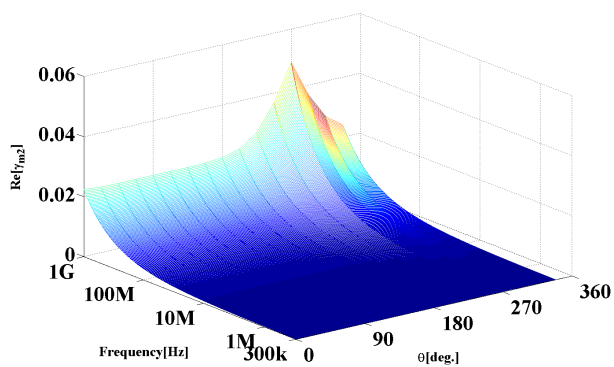


図 5.16 第2モードのモード伝搬定数 γ_{m2} の実部

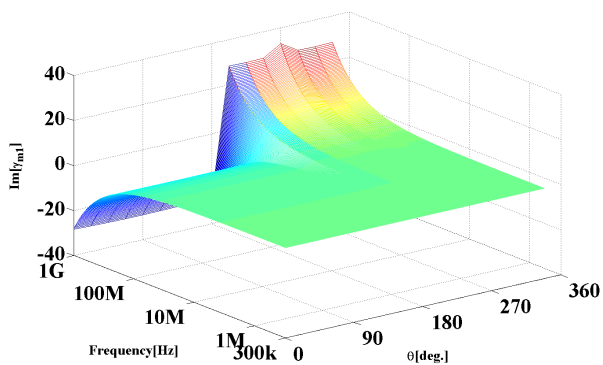


図 5.17 第1モードのモード伝搬定数 γ_{m1} の虚部

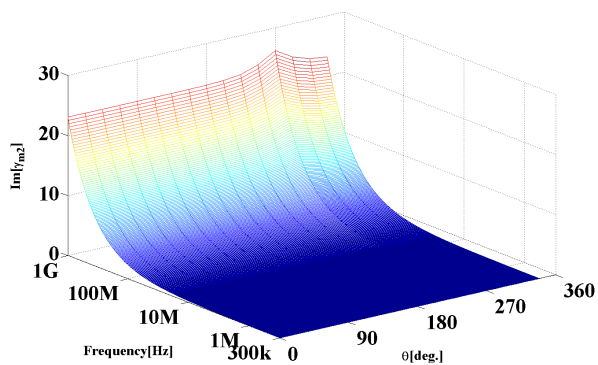


図 5.18 第2モードのモード伝搬定数 γ_{m2} の虚部

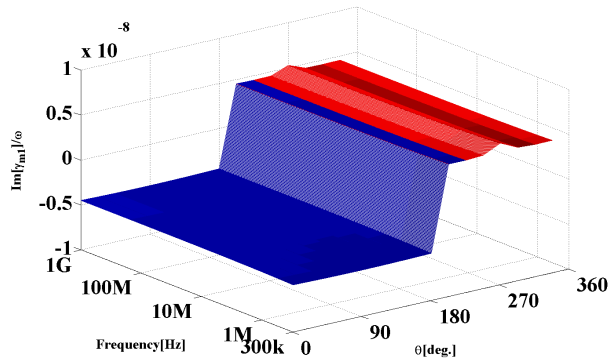


図 5.19 角周波数で正規化した第 1 モードのモード伝搬定数 γ_{m1} の虚部

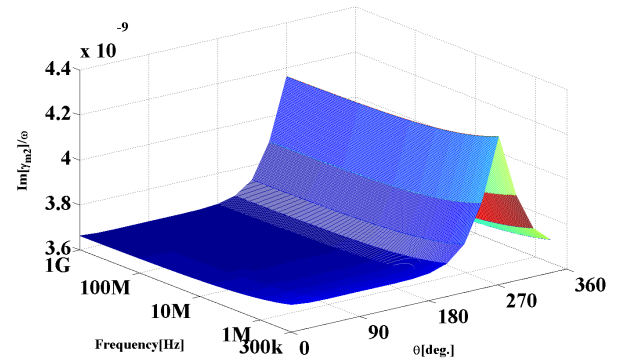


図 5.20 角周波数で正規化した第 2 モードのモード伝搬定数 γ_{m2} の虚部

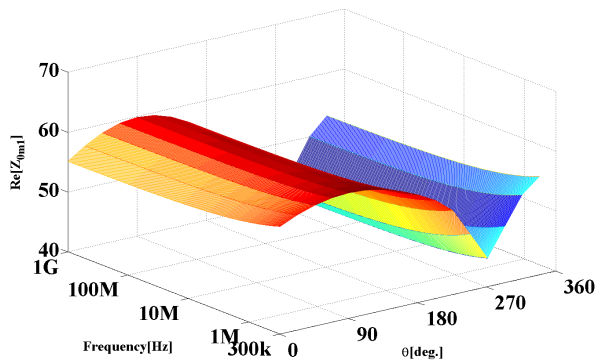


図 5.21 第 1 モードのモード特性インピーダンス Z_{0m1} の実部

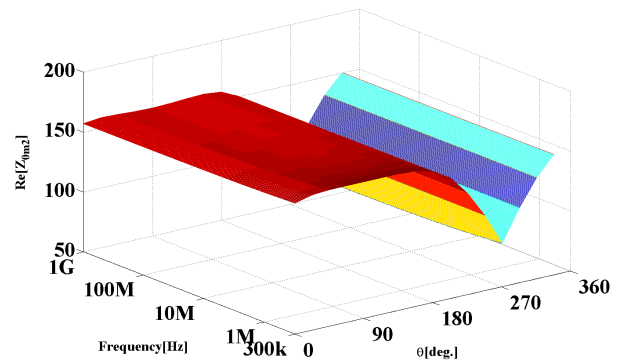


図 5.22 第 2 モードのモード特性インピーダンス Z_{0m2} の実部

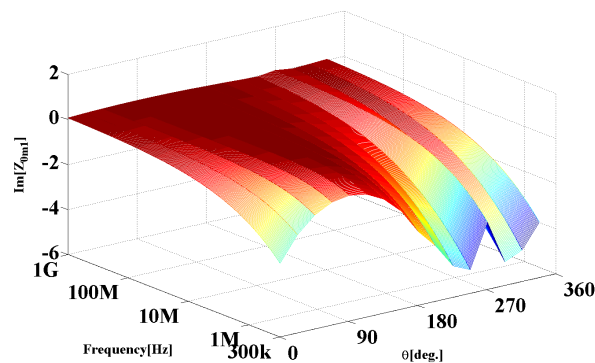


図 5.23 第 1 モードのモード特性インピーダンス Z_{0m1} の虚部

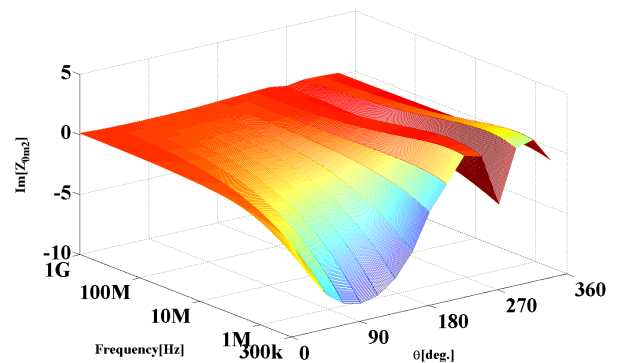


図 5.24 第 2 モードのモード特性インピーダンス Z_{0m2} の虚部

図 5.15, 5.16 より, 各モード伝搬定数の実部は周波数が高くなると絶対値が大きくなっている. これは各モードの減衰定数に相当しているためと考えられる. また, 図 5.21, 5.22 より, 各モード特性インピーダンスの実部はつねに正であるが, これを満たすために第 1 モードの伝搬定数は負となっており, 逆方向に伝搬するモードが存在しうると考えられる.

5.2 配線高の変化する3本線路系

5.2.1 実験系

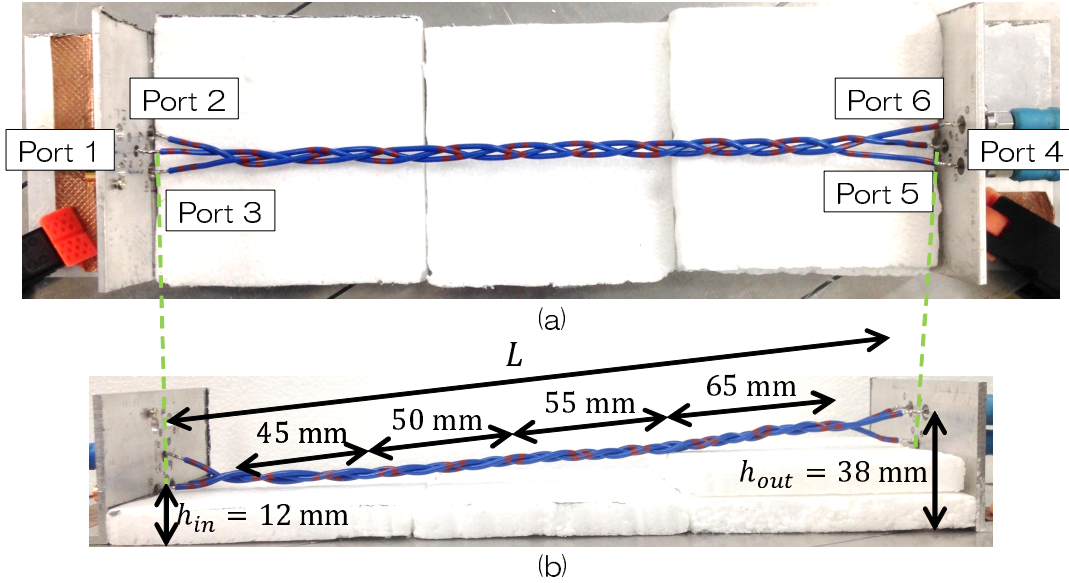


図 5.25 配線高の変化する3本線路系の DUT (a) 上から見た図 (b) 横から見た図

図 5.25 は、3 本の 0.85sq をそれぞれ 30 cm ずつ用いて、三つ編み状に編み上げ、GND からの高さが $h_{in} = 12 \text{ mm}$ から $h_{out} = 38 \text{ mm}$ まで連続的に変化するように配線した線路系である。ただし、Port 1 と 3、また、2 と 5、3 と 6 がそれぞれ同じ線の両端となるように設定している。ケーブルの製作上、各周期構造部のピッチは等しくなっていない。

5.2.2 理論計算

図 5.26 に線路系の断面モデルを示す。図 5.26 中に点線で示した円の中心を原点とする xy 座標系をとり、線 # i の線心位置 (x_i, y_i) を、それぞれ

$$\begin{cases} x_1 &= R \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) [\text{mm}] \\ y_1 &= R \sin \left\{ 2 \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right\} [\text{mm}] \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} x_2 &= R \cos \left(\theta + \frac{7}{6}\pi \right) [\text{mm}] \\ y_2 &= R \sin \left\{ 2 \left(\theta + \frac{7}{6}\pi \right) \right\} [\text{mm}] \end{cases} \quad (5.12)$$

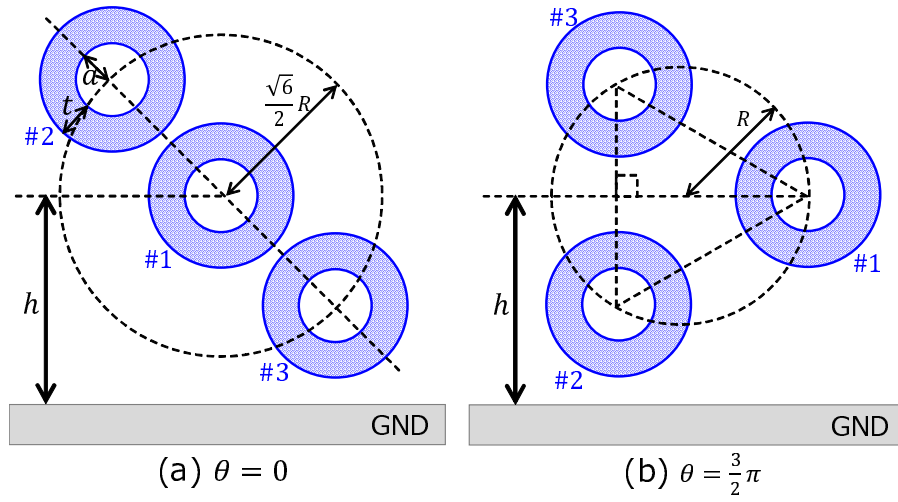


図 5.26 配線高の変化する 3 本線路系の断面モデル

$$\begin{cases} x_3 = R \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) [\text{mm}] \\ y_3 = R \sin \left\{ 2 \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right\} [\text{mm}] \end{cases} \quad (5.13)$$

と表す．ここで， R は図 5.26 のように 3 線心が正三角形の各頂点に位置するとき，3 頂点を通る円の半径である．いま，線心間距離が最も近づくときを考えると，たとえば線#2 と線#3 の線心間距離 d_{23} は

$$d_{23} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \quad (5.14)$$

として求められるが，(5.14) 式に (5.12)，(5.13) 式を代入して整理すると， d_{23} の最小値について，

$$d_{23min} = \frac{\sqrt{21}}{4} R \left(\theta = \sin^{-1} \left(\pm \frac{\sqrt{6}}{4} \right) + \frac{\pi}{2} \text{ のとき} \right) \quad (5.15)$$

となる．対称性より，これが 2 線が接しているときの線心間距離となればよいので，

$$\begin{aligned} 2(a + t) &= \frac{\sqrt{21}}{4} R \\ \therefore R &= \frac{8(a + t)}{\sqrt{21}} = \frac{8.8}{\sqrt{21}} \text{ mm} \end{aligned} \quad (5.16)$$

とする．

配線高の変化のモデル化

ケーブルの全長 L に対する両端での配線高の変化 $h_{out} - h_{in}$ の比を考慮することで、ケーブルに沿って ΔL 移動したときの配線高の変化 Δh を、

$$\Delta h = \frac{h_{out} - h_{in}}{L} \times \Delta L \quad (5.17)$$

としてモデル化する。

5.2.3 結果

実測値と、状態変数法およびモード分解法で計算した理論値について、それぞれ次図に示す。

反射係数

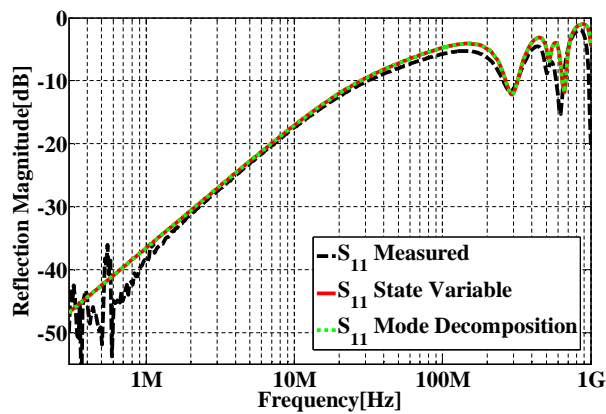


図 5.27 S_{11} の振幅特性

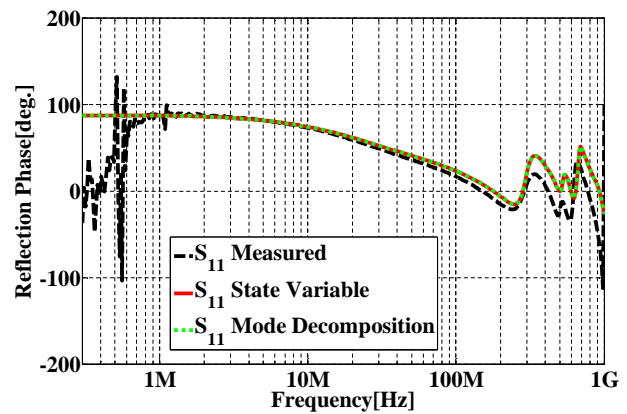


図 5.28 S_{11} の位相特性

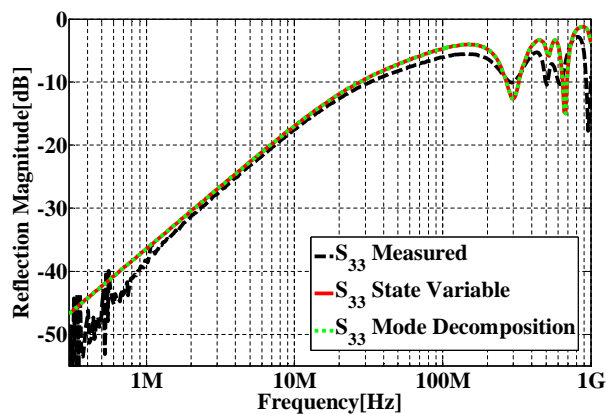


図 5.29 S_{33} の振幅特性

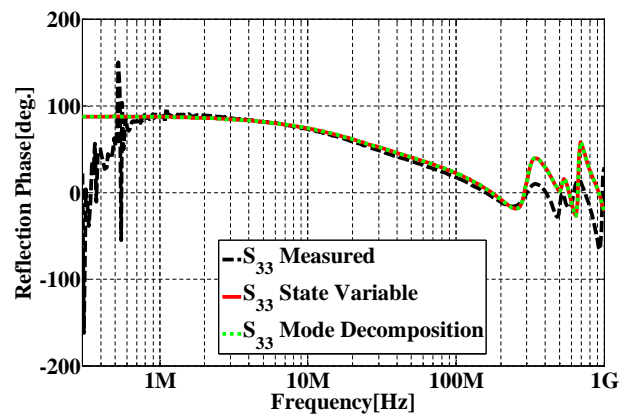
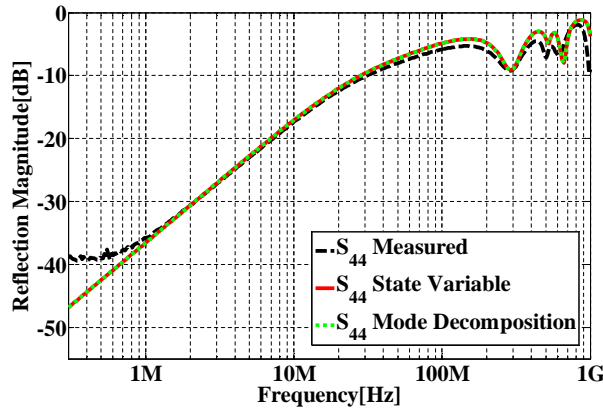
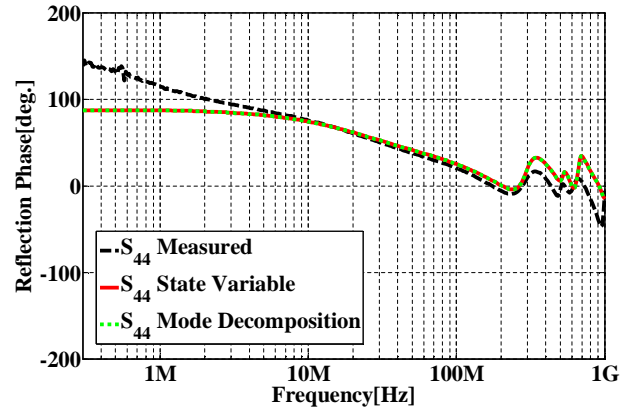
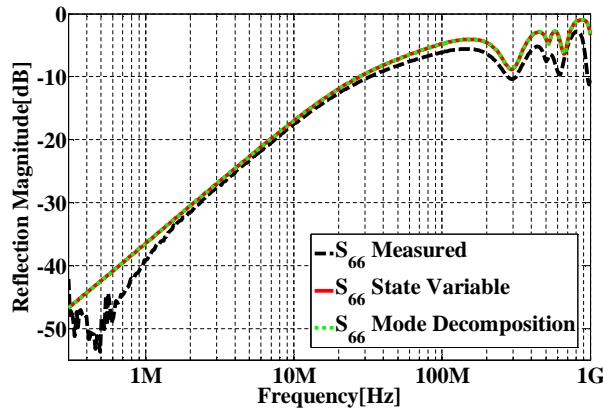
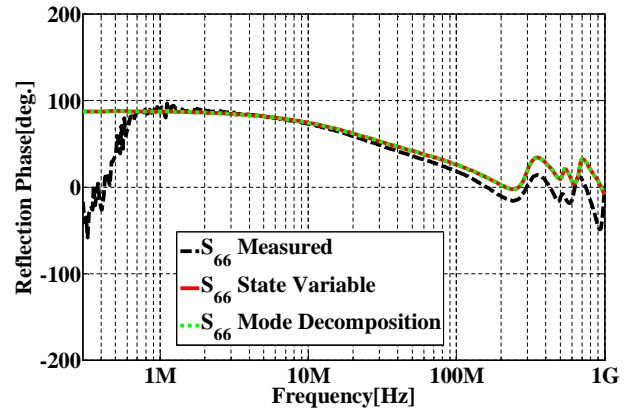
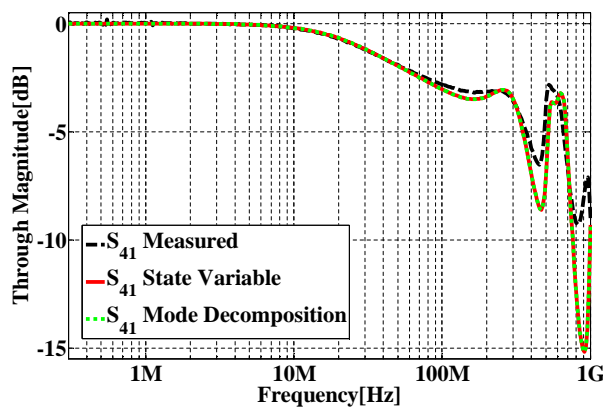
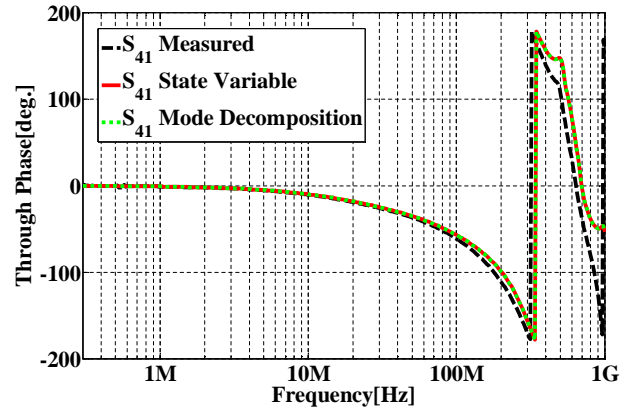
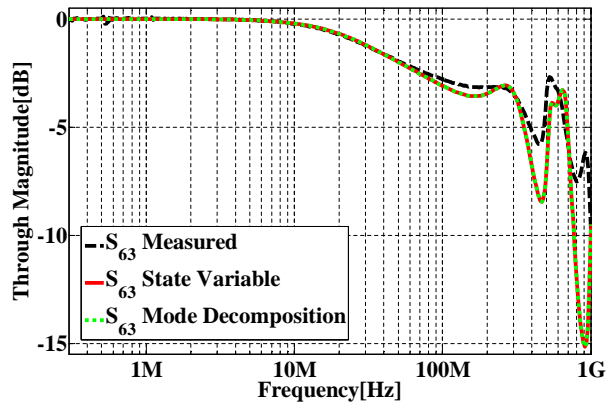
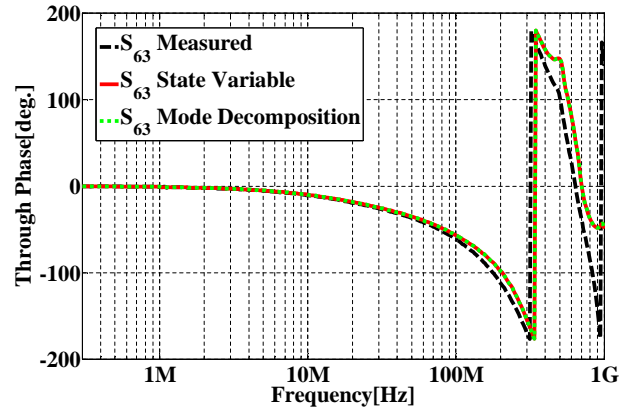
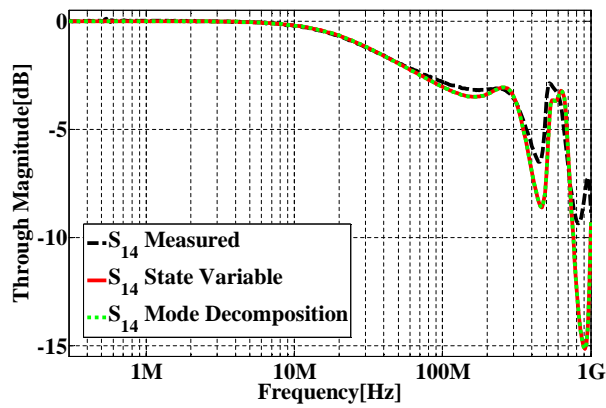
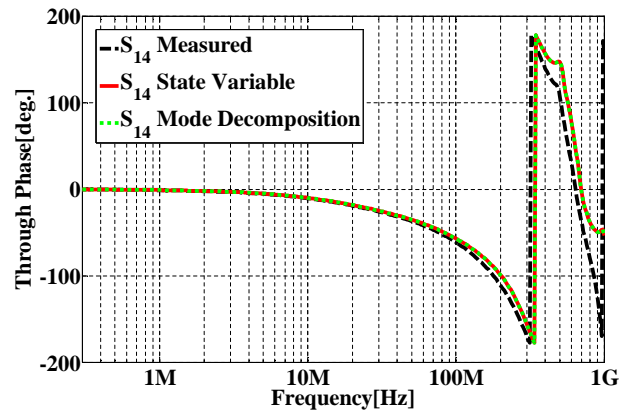
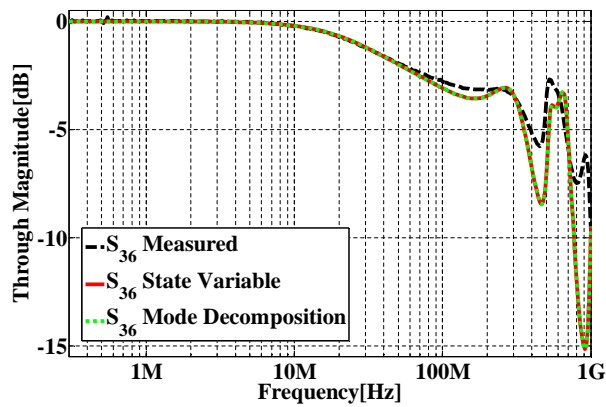
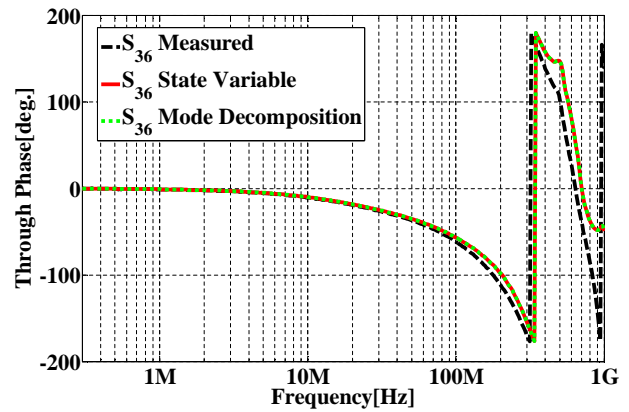


図 5.30 S_{33} の位相特性

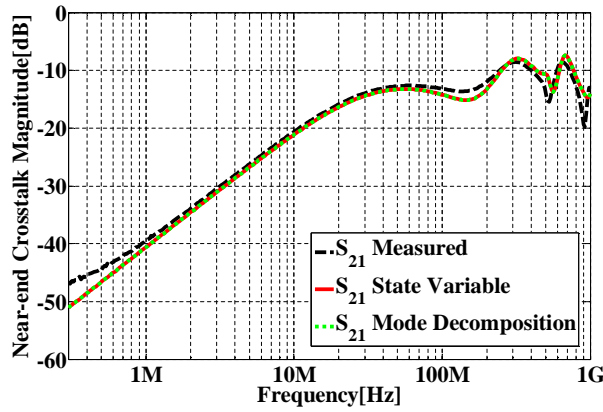
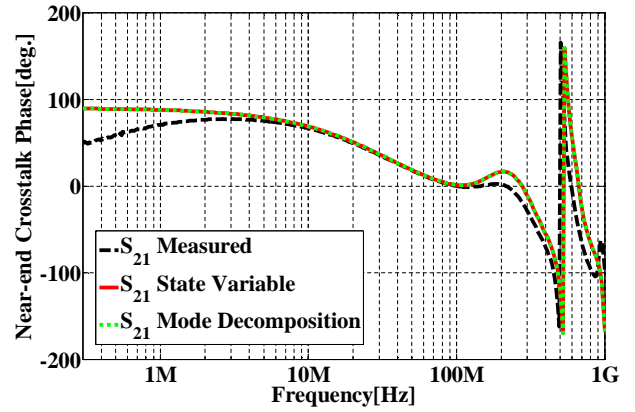
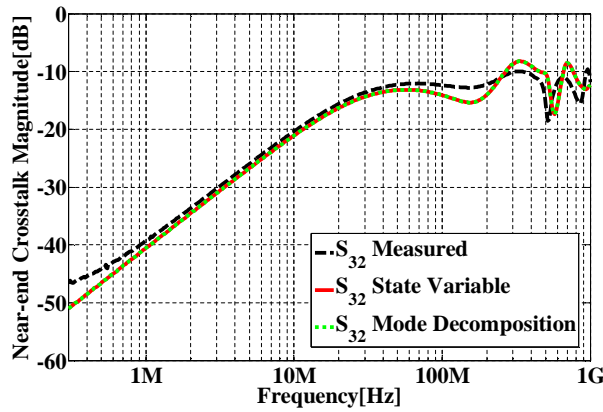
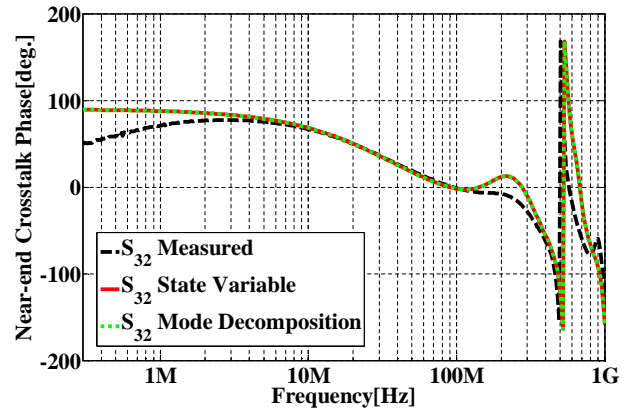
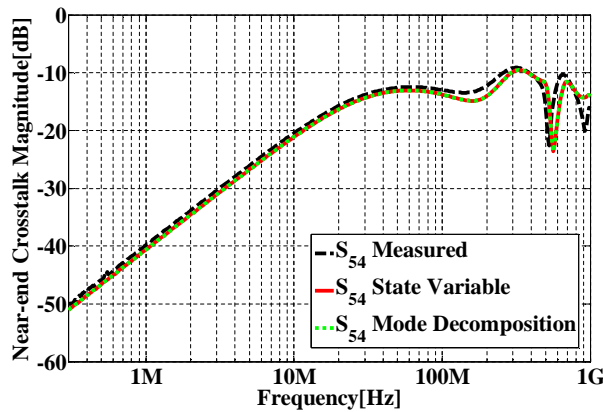
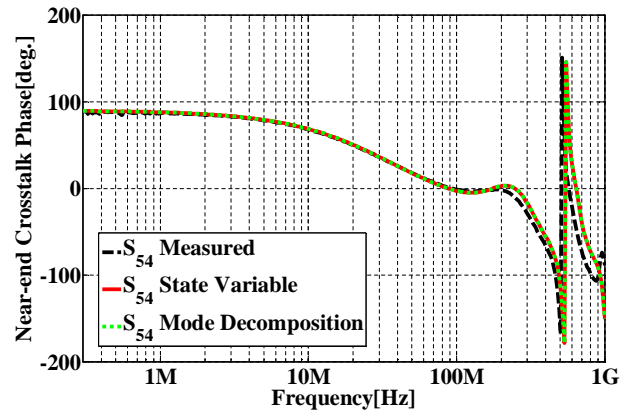
図 5.31 S_{44} の振幅特性図 5.32 S_{44} の位相特性図 5.33 S_{66} の振幅特性図 5.34 S_{66} の位相特性

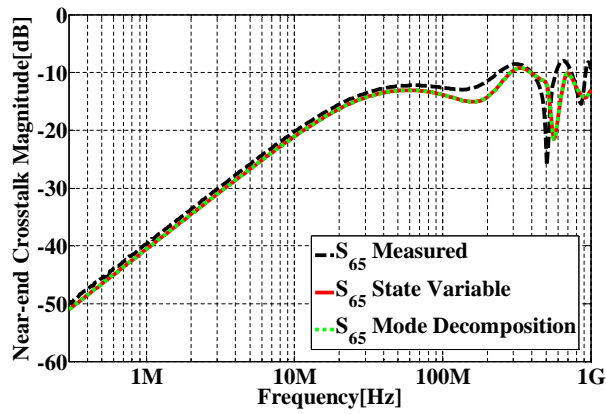
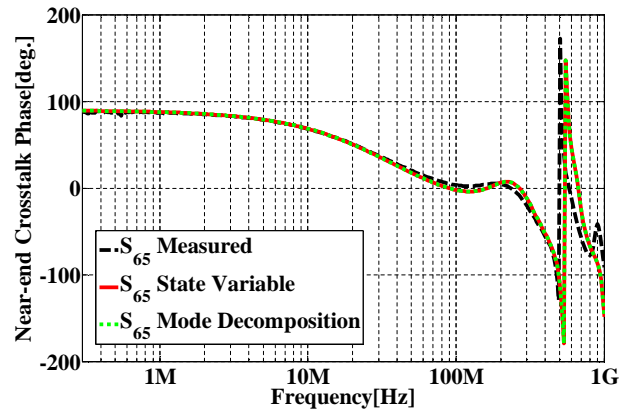
通過係数

図 5.35 S_{41} の振幅特性図 5.36 S_{41} の位相特性

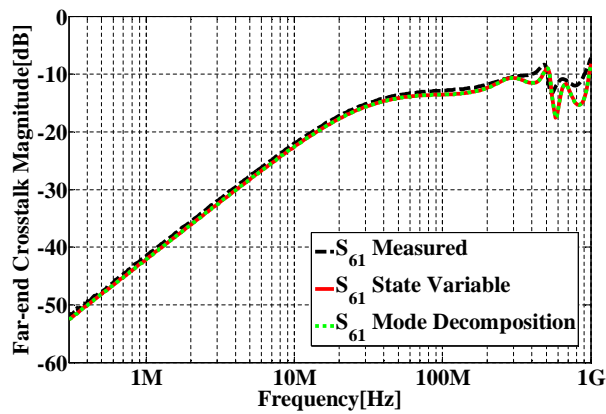
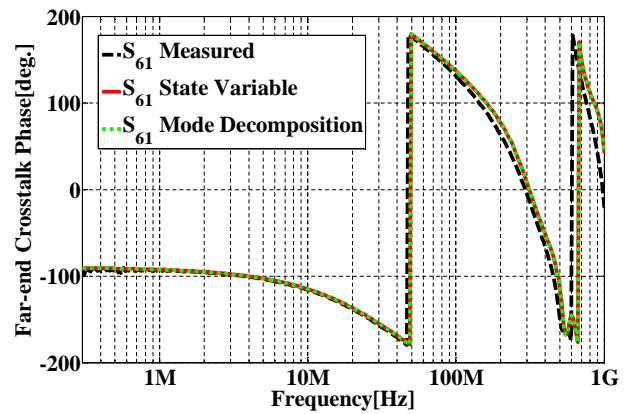
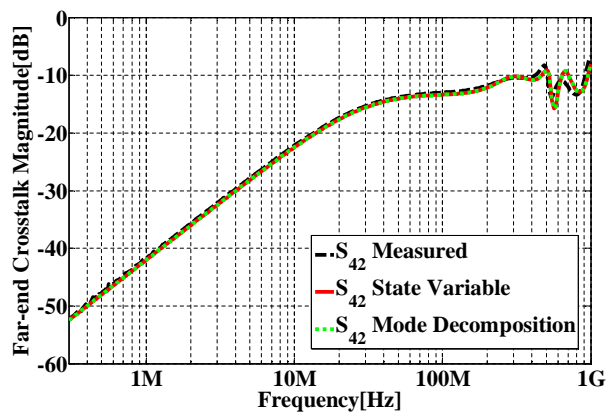
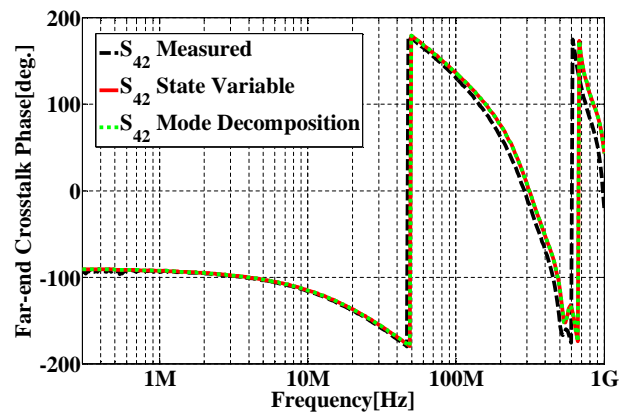
図 5.37 S_{63} の振幅特性図 5.38 S_{63} の位相特性図 5.39 S_{14} の振幅特性図 5.40 S_{14} の位相特性図 5.41 S_{36} の振幅特性図 5.42 S_{36} の位相特性

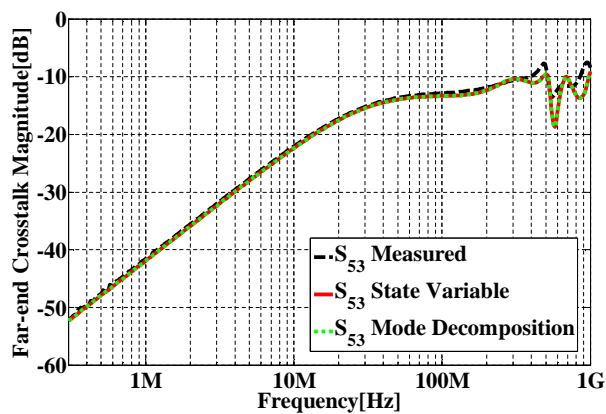
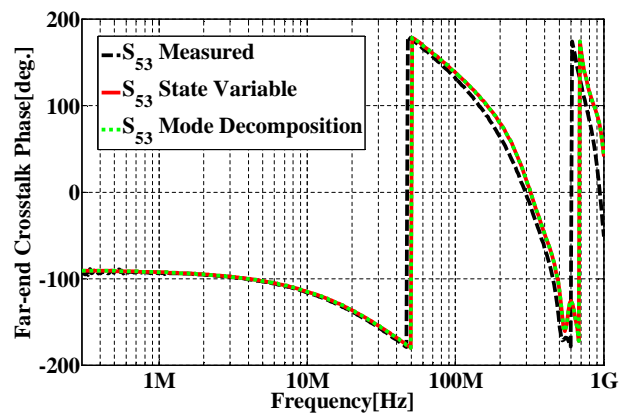
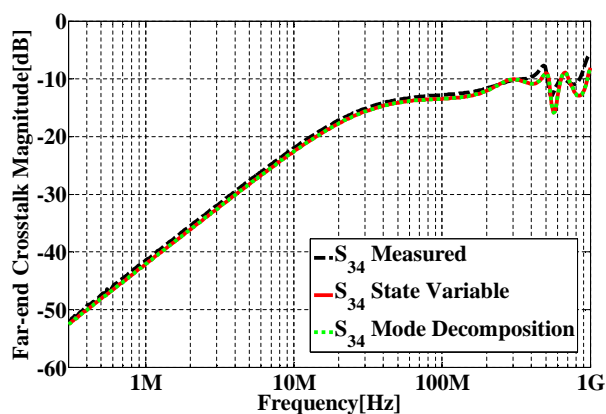
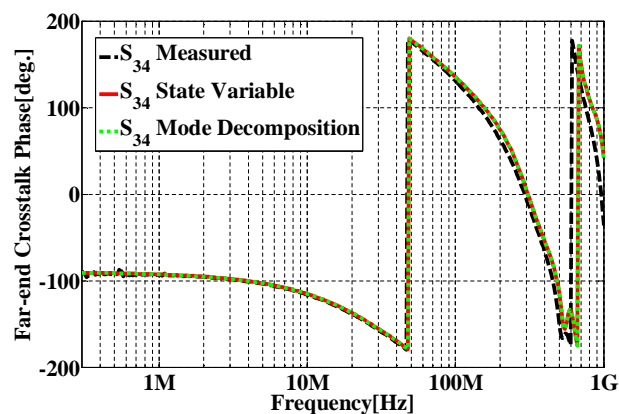
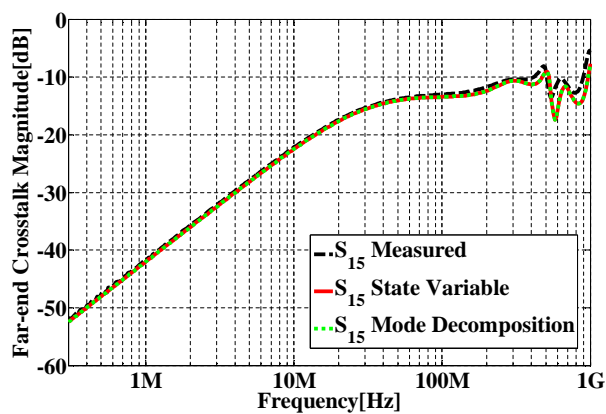
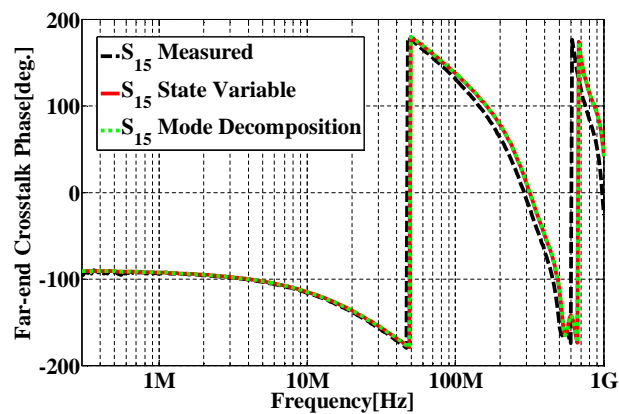
近端結合

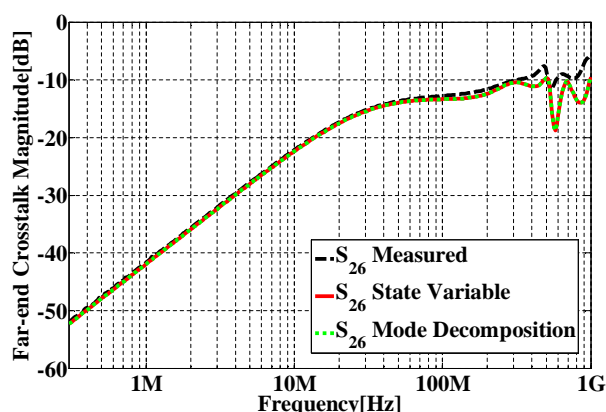
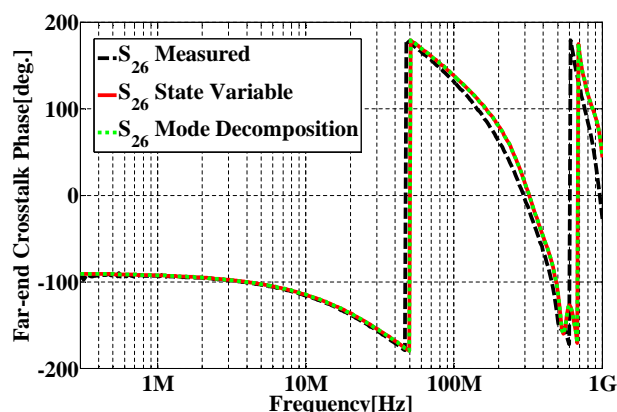
図 5.43 S_{21} の振幅特性図 5.44 S_{21} の位相特性図 5.45 S_{32} の振幅特性図 5.46 S_{32} の位相特性図 5.47 S_{54} の振幅特性図 5.48 S_{54} の位相特性

図 5.49 S_{65} の振幅特性図 5.50 S_{65} の位相特性

遠端結合

図 5.51 S_{61} の振幅特性図 5.52 S_{61} の位相特性図 5.53 S_{42} の振幅特性図 5.54 S_{42} の位相特性

図 5.55 S_{53} の振幅特性図 5.56 S_{53} の位相特性図 5.57 S_{34} の振幅特性図 5.58 S_{34} の位相特性図 5.59 S_{15} の振幅特性図 5.60 S_{15} の位相特性

図 5.61 S_{26} の振幅特性図 5.62 S_{26} の位相特性

5.2.4 考察

いずれも理論値は実測値と概ねよく一致しており、3本線路系における提案手法の有効性を確認できた。

ポート位置の違いによる伝送特性の差異

検討モデルでは、Port 1～3はPort 4～6に比べて低い位置にある。この位置の違いによる伝送特性の差異は反射特性においてよく確認できる。振幅特性の300 MHz付近および600～700 MHzにあるヌル点について、図5.27, 5.29ではいずれも-10 dBを下回っている結果が理論値・実測値ともに見られる一方、図5.31, 5.33ではいずれも-10 dBを上回る傾向が見られる。また、近端結合においても、振幅特性の傾向は似ているものの、レベルに差異があることが観察される。提案手法では、このような違いについても、実験と同様の傾向を計算で求められている。なお、通過係数については、対称性より $S_{41} = S_{14}$, $S_{63} = S_{36}$ となっている。

また、検討モデルは各ポートが二等辺三角形の頂点にあり、Port 1, 4は頂角、Port 2, 3, 5, 6は底角にそれぞれ位置している。この位置の違いによる伝送特性の差異は、遠端結合において若干確認できる。図5.51, 5.53, 5.57, 5.59（頂角ポート入力→底角ポート出力、あるいは底角ポート入力→頂角ポート出力）と、図5.55, 5.61（底角ポート入力→底角ポート出力）を比較すると、580 MHz付近のヌル点において、前者より後者のレベルが低くなっていることがわかる。しかし、このほかに差異はほとんど見られないため、このモデルにおいては、ケーブルの一方の端子部におけるポート位置の違いは、伝送特性に影響を与えないものとして扱ってよいと考えられる。

各伝搬モードのモード伝搬定数およびモード特性インピーダンス

3 本線路系の 3 つの独立直交な伝搬モードについて，それぞれのモード伝搬定数およびモード特性インピーダンスを考える．300 kHz～1 GHz の各周波数において，ケーブルの Port 1～3 側終端からの位置による変化を次図に示す．

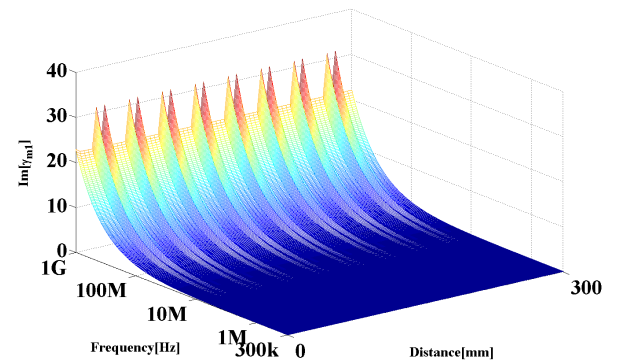
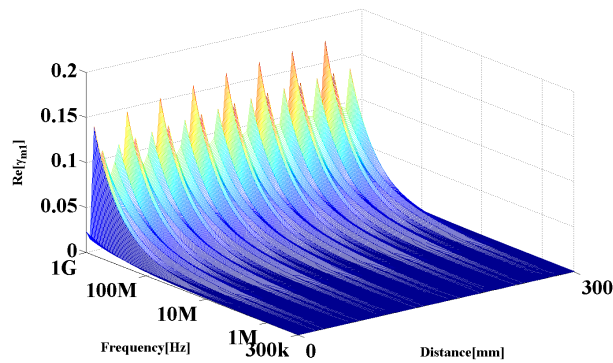


図 5.63 第 1 モードのモード伝搬定数 γ_{m1} の実部

図 5.64 第 1 モードのモード伝搬定数 γ_{m1} の虚部

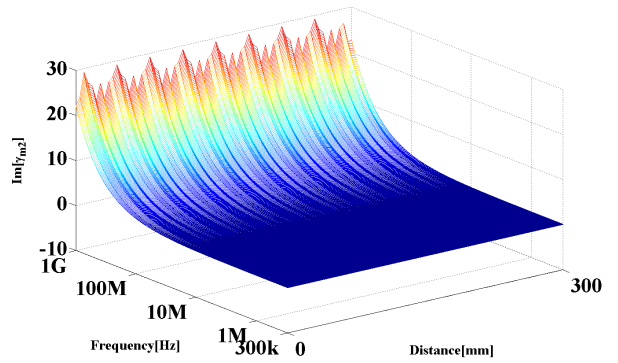
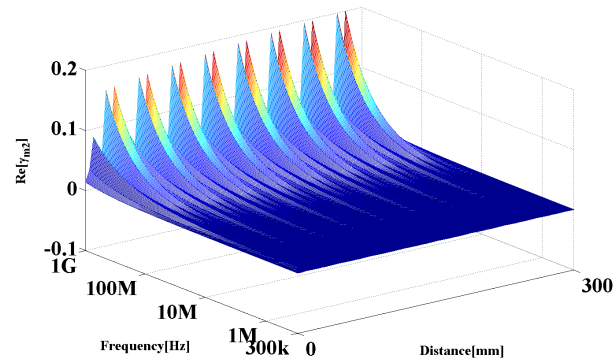


図 5.65 第 2 モードのモード伝搬定数 γ_{m2} の実部

図 5.66 第 2 モードのモード伝搬定数 γ_{m2} の虚部

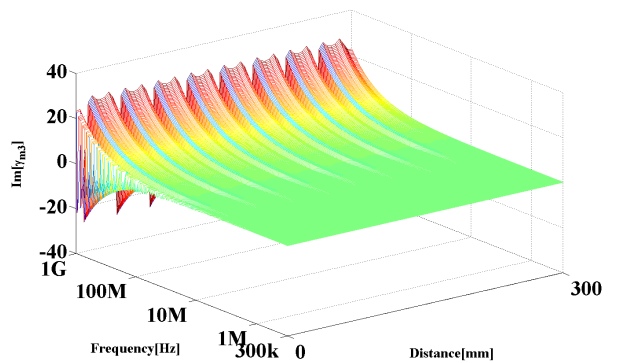
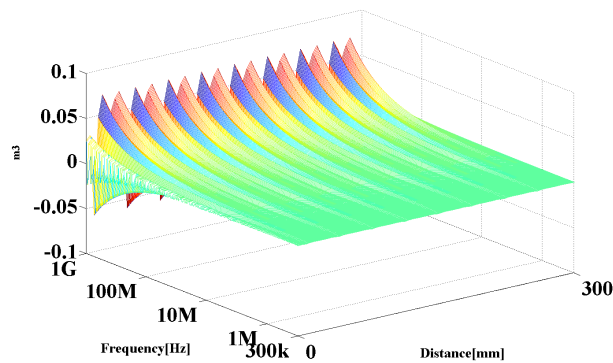


図 5.67 第 3 モードのモード伝搬定数 γ_{m3} の実部

図 5.68 第 3 モードのモード伝搬定数 γ_{m3} の虚部

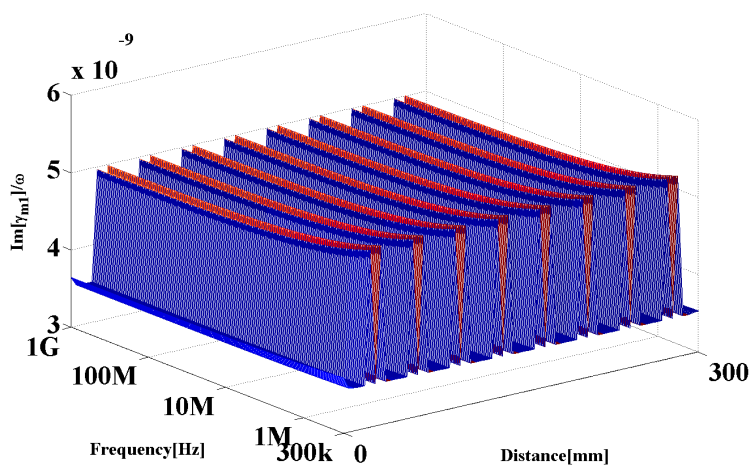


図 5.69 角周波数で正規化した第 1 モードのモード伝搬定数 γ_{m1} の虚部

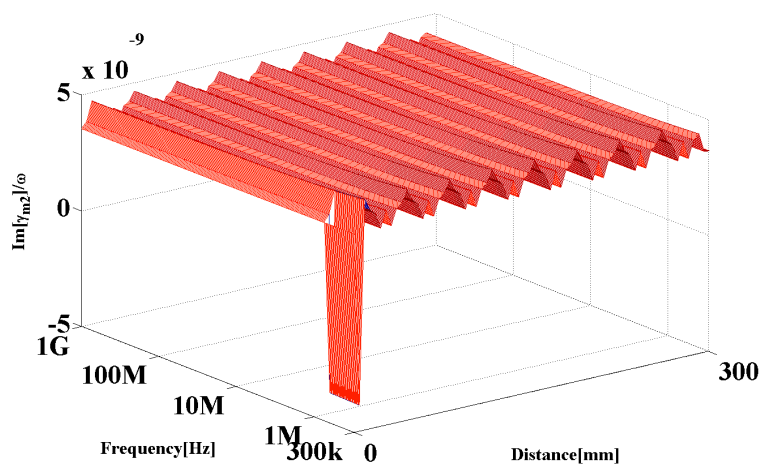


図 5.70 角周波数で正規化した第 2 モードのモード伝搬定数 γ_{m2} の虚部

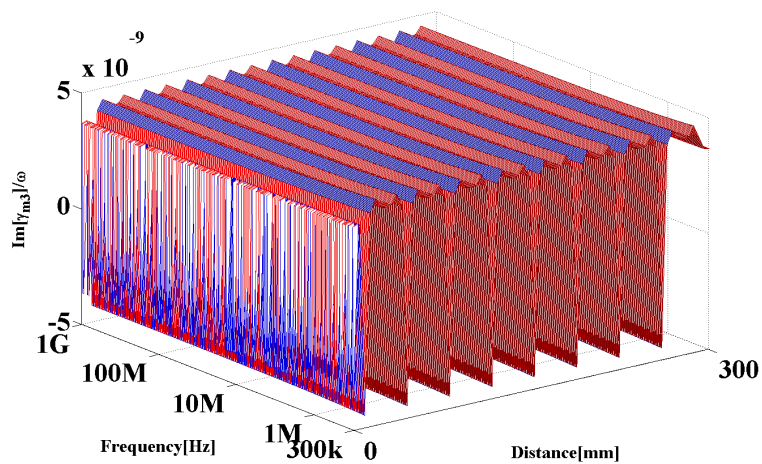


図 5.71 角周波数で正規化した第 3 モードのモード伝搬定数 γ_{m3} の虚部

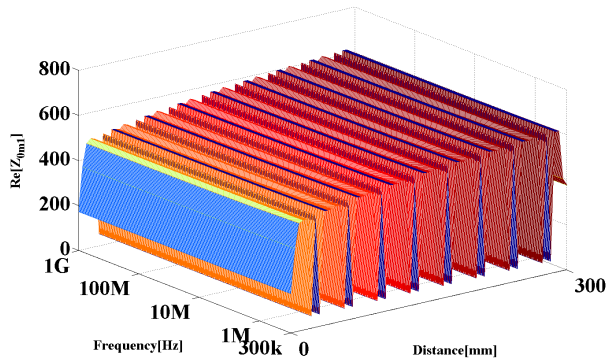


図 5.72 第 1 モードのモード特性インピーダンス Z_{0m1} の実部

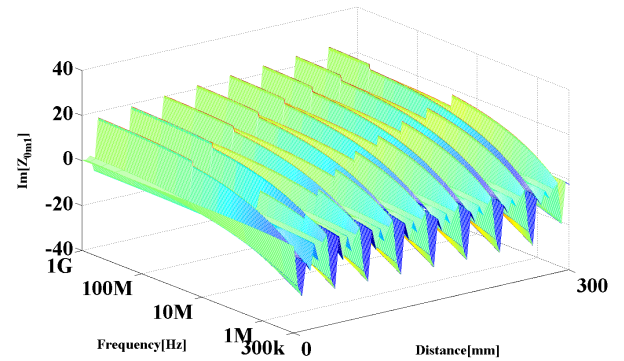


図 5.73 第 1 モードのモード特性インピーダンス Z_{0m1} の虚部

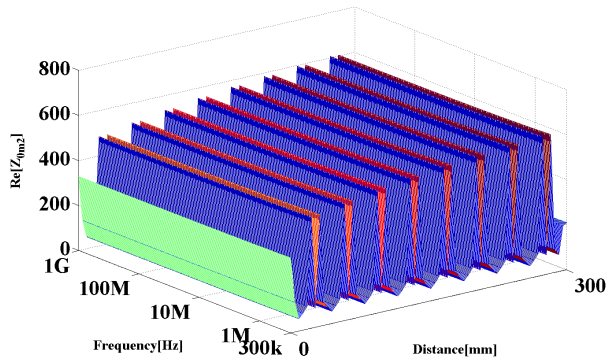


図 5.74 第 2 モードのモード特性インピーダンス Z_{0m2} の実部

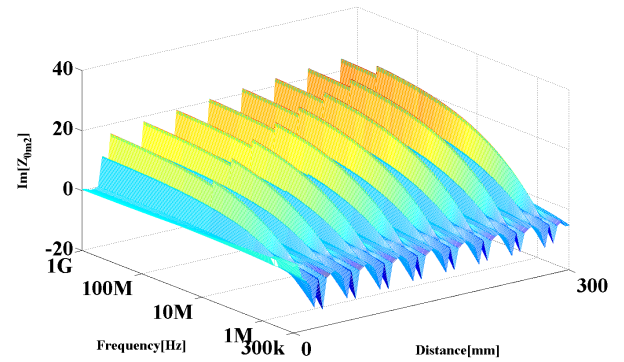


図 5.75 第 2 モードのモード特性インピーダンス Z_{0m2} の虚部

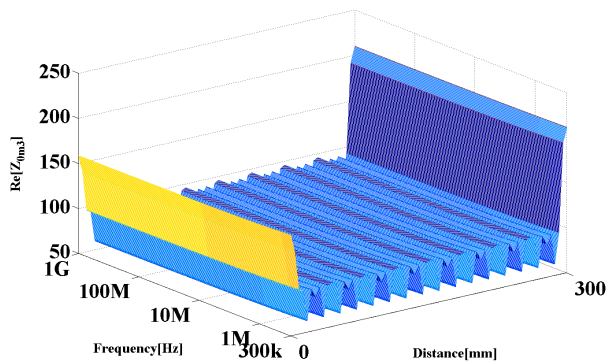


図 5.76 第 3 モードのモード特性インピーダンス Z_{0m3} の実部

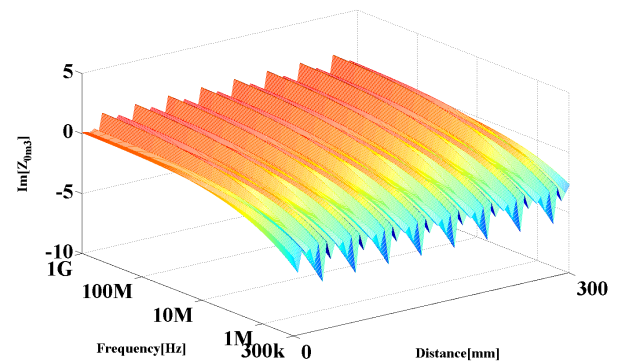


図 5.77 第 3 モードのモード特性インピーダンス Z_{0m3} の虚部

第 1 モードと第 2 モードは伝搬特性が似ている一方で、第 3 モードはモード伝搬定数が負となることがあるなど、異なる特性を示した。また、モード特性インピーダンスは、配線高の変化への依存性を示した一方、特に実部において周波数依存性が見られなかった。

第 6 章

提案モデルの応用

6.1 途中に分岐を含む線路系への適用

実際のワイヤーハーネス配線設計においては，一つの機器や ECU を，異なる位置にある複数のそれらに接続することが考えられる．そこで本節では，途中に分岐を含む線路系に提案モデルを適用し，線路の結合本数が変化する場合の伝送特性について評価を行う．

6.1.1 モデルの概要

図 6.1 (a) に検討モデルの実験系を示す．3 種類の電線からなる 5 本線路系であり，途中で 3 本線路系と 2 本線路系に分岐する．また，Port 1～5 を入力ポート，Port 6～8 を出力ポート 1，Port 9, 10 を出力ポート 2 とそれぞれみる．各線の番号と種類，入出力ポートの関係は次の表 6.1 にまとめる．

表 6.1 電線とポート番号

線	電線の種類	色	入力	出力
#1	AVS 0.85sq	茶	Port 1	Port 6
#2	AVS 0.85sq	青	Port 2	Port 7
#3	AVS 5sq	白	Port 3	Port 8
#4	CAVS 0.3sq	赤	Port 4	Port 9
#5	CAVS 0.3sq	黒	Port 5	Port 10

回路網モデル化は図 6.1 (b) のように行う．分岐前の 5 本線路系の縦続行列 \mathbf{F}_1 ，分岐後の

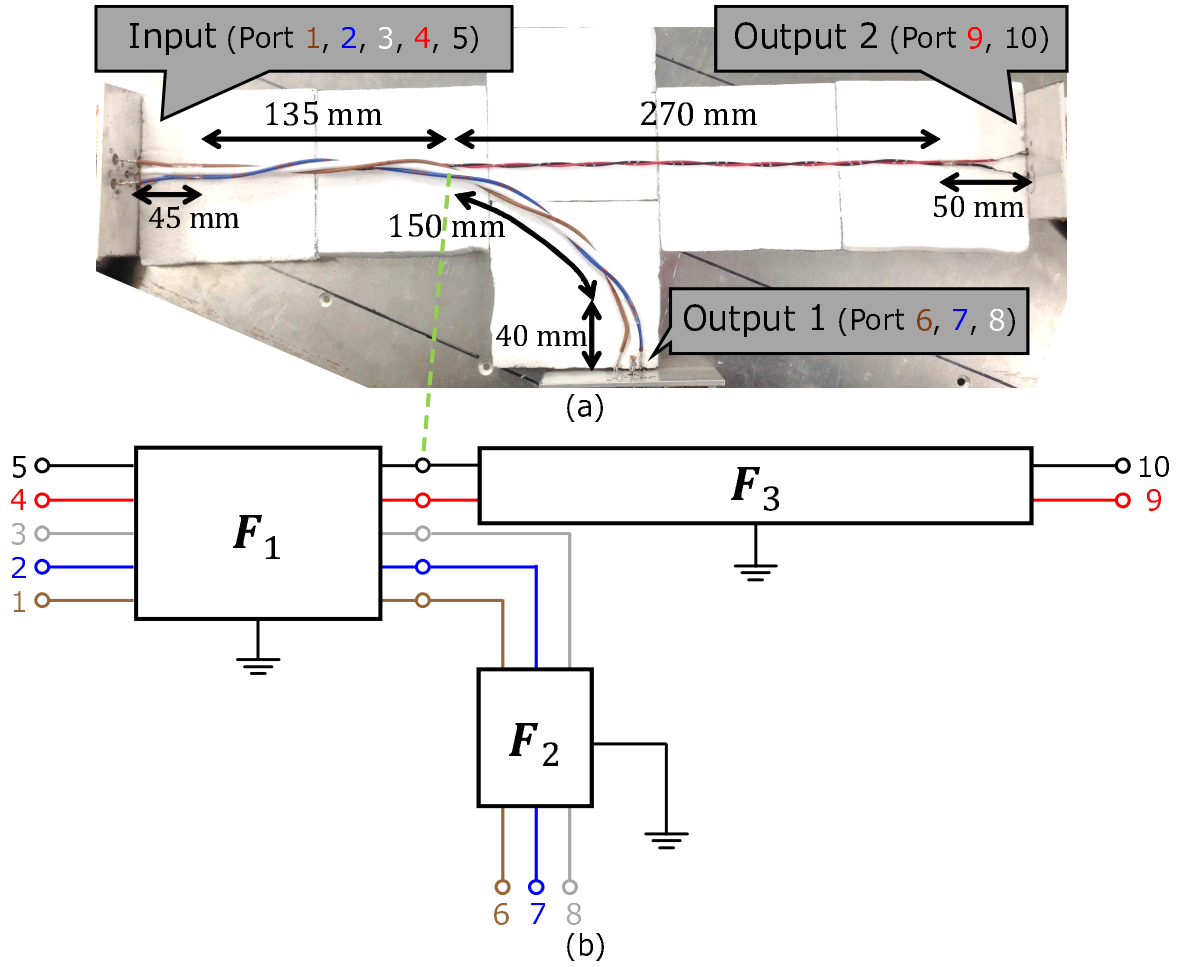


図 6.1 途中に分岐を含む線路系の (a) DUT と (b) 縦続行列による表現

3 本線路系の縦続行列 F_2 , 2 本線路系の縦続行列 F_3 を, それぞれ

$$F_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} A_{111} & A_{121} & A_{131} & A_{141} & A_{151} & B_{111} & B_{121} & B_{131} & B_{141} & B_{151} \\ A_{211} & A_{221} & A_{231} & A_{241} & A_{251} & B_{211} & B_{221} & B_{231} & B_{241} & B_{251} \\ A_{311} & A_{321} & A_{331} & A_{341} & A_{351} & B_{311} & B_{321} & B_{331} & B_{341} & B_{351} \\ A_{411} & A_{421} & A_{431} & A_{441} & A_{451} & B_{411} & B_{421} & B_{431} & B_{441} & B_{451} \\ A_{511} & A_{521} & A_{531} & A_{541} & A_{551} & B_{511} & B_{521} & B_{531} & B_{541} & B_{551} \\ \hline C_{111} & C_{121} & C_{131} & C_{141} & C_{151} & D_{111} & D_{121} & D_{131} & D_{141} & D_{151} \\ C_{211} & C_{221} & C_{231} & C_{241} & C_{251} & D_{211} & D_{221} & D_{231} & D_{241} & D_{251} \\ C_{311} & C_{321} & C_{331} & C_{341} & C_{351} & D_{311} & D_{321} & D_{331} & D_{341} & D_{351} \\ C_{411} & C_{421} & C_{431} & C_{441} & C_{451} & D_{411} & D_{421} & D_{431} & D_{441} & D_{451} \\ C_{511} & C_{521} & C_{531} & C_{541} & C_{551} & D_{511} & D_{521} & D_{531} & D_{541} & D_{551} \end{array} \right] \quad (6.1)$$

$$\mathbf{F}_2 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{112} & A_{122} & A_{132} & B_{112} & B_{122} & B_{132} \\ A_{212} & A_{222} & A_{232} & B_{212} & B_{222} & B_{232} \\ A_{312} & A_{322} & A_{332} & B_{312} & B_{322} & B_{332} \\ \hline C_{112} & C_{122} & C_{132} & D_{112} & D_{122} & D_{132} \\ C_{212} & C_{222} & C_{232} & D_{212} & D_{222} & D_{232} \\ C_{312} & C_{322} & C_{332} & D_{312} & D_{322} & D_{332} \end{array} \right] \quad (6.2)$$

$$\mathbf{F}_3 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 \\ \hline \mathbf{C}_3 & \mathbf{D}_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} A_{113} & A_{123} & B_{113} & B_{123} \\ A_{213} & A_{223} & B_{213} & B_{223} \\ \hline C_{113} & C_{123} & D_{113} & D_{123} \\ C_{213} & C_{223} & D_{213} & D_{223} \end{array} \right] \quad (6.3)$$

とする．また，入力ポートにおける電圧ベクトル \mathbf{V}_{in} および電流ベクトル \mathbf{I}_{in} を，それぞれ

$$\mathbf{V}_{in} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{in} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

とし，また，出力ポート 1 における電圧ベクトル \mathbf{V}_{out1} および電流ベクトル \mathbf{I}_{out1} ，出力ポート 2 における電圧ベクトル \mathbf{V}_{out2} および電流ベクトル \mathbf{I}_{out2} を，それぞれ

$$\mathbf{V}_{out1} = \begin{bmatrix} V_6 \\ V_7 \\ V_8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{out1} = \begin{bmatrix} I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_{out2} = \begin{bmatrix} V_9 \\ V_{10} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{out2} = \begin{bmatrix} I_9 \\ I_{10} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

とする。このとき、(6.1) ～ (6.5) 式についての関係は、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{111} & A_{121} & A_{131} & A_{141} & A_{151} & B_{111} & B_{121} & B_{131} & B_{141} & B_{151} \\ A_{211} & A_{221} & A_{231} & A_{241} & A_{251} & B_{211} & B_{221} & B_{231} & B_{241} & B_{251} \\ A_{311} & A_{321} & A_{331} & A_{341} & A_{351} & B_{311} & B_{321} & B_{331} & B_{341} & B_{351} \\ A_{411} & A_{421} & A_{431} & A_{441} & A_{451} & B_{411} & B_{421} & B_{431} & B_{441} & B_{451} \\ A_{511} & A_{521} & A_{531} & A_{541} & A_{551} & B_{511} & B_{521} & B_{531} & B_{541} & B_{551} \\ C_{111} & C_{121} & C_{131} & C_{141} & C_{151} & D_{111} & D_{121} & D_{131} & D_{141} & D_{151} \\ C_{211} & C_{221} & C_{231} & C_{241} & C_{251} & D_{211} & D_{221} & D_{231} & D_{241} & D_{251} \\ C_{311} & C_{321} & C_{331} & C_{341} & C_{351} & D_{311} & D_{321} & D_{331} & D_{341} & D_{351} \\ C_{411} & C_{421} & C_{431} & C_{441} & C_{451} & D_{411} & D_{421} & D_{431} & D_{441} & D_{451} \\ C_{511} & C_{521} & C_{531} & C_{541} & C_{551} & D_{511} & D_{521} & D_{531} & D_{541} & D_{551} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_{112} & A_{122} & A_{132} & 0 & 0 & B_{112} & B_{122} & B_{132} & 0 & 0 \\ A_{212} & A_{222} & A_{232} & 0 & 0 & B_{212} & B_{222} & B_{232} & 0 & 0 \\ A_{312} & A_{322} & A_{332} & 0 & 0 & B_{312} & B_{322} & B_{332} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{113} & A_{123} & 0 & 0 & 0 & B_{113} & B_{123} \\ 0 & 0 & 0 & A_{213} & A_{223} & 0 & 0 & 0 & B_{213} & B_{223} \\ C_{112} & C_{122} & C_{132} & 0 & 0 & D_{112} & D_{122} & D_{132} & 0 & 0 \\ C_{212} & C_{222} & C_{232} & 0 & 0 & D_{212} & D_{222} & D_{232} & 0 & 0 \\ C_{312} & C_{322} & C_{332} & 0 & 0 & D_{312} & D_{322} & D_{332} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{113} & C_{123} & 0 & 0 & 0 & D_{113} & D_{123} \\ 0 & 0 & 0 & C_{213} & C_{223} & 0 & 0 & 0 & D_{213} & D_{223} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \\ V_{10} \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

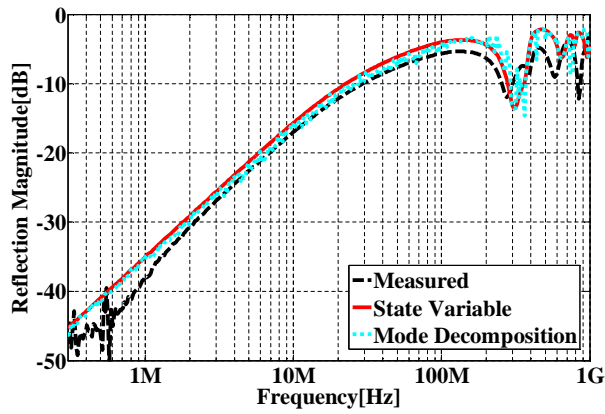
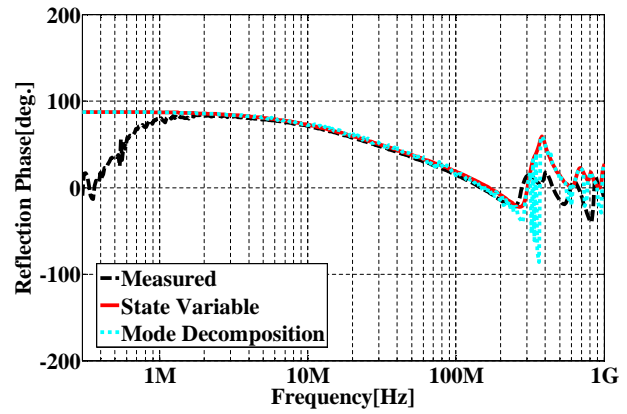
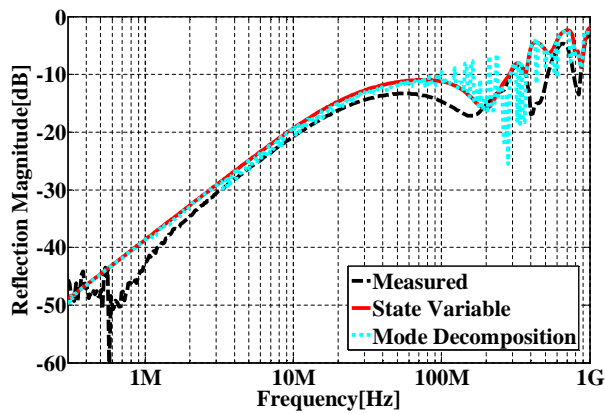
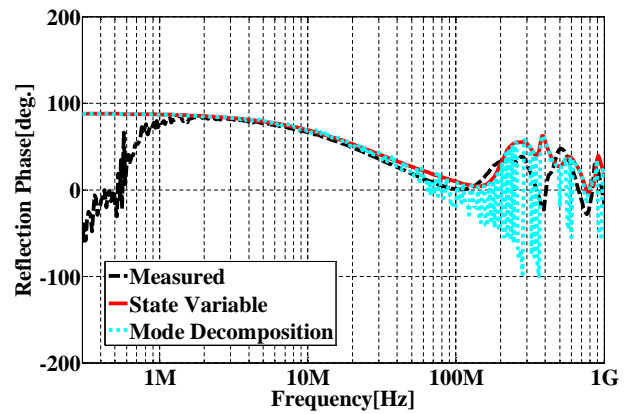
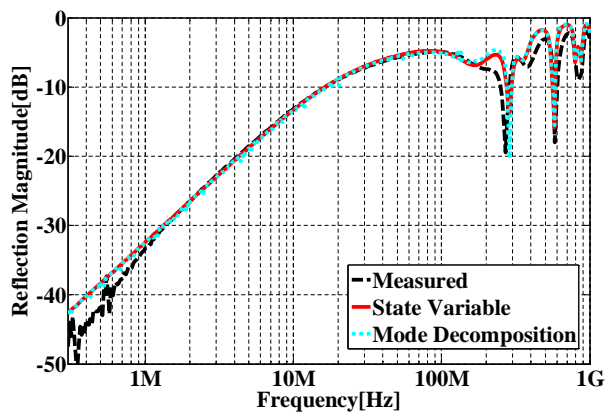
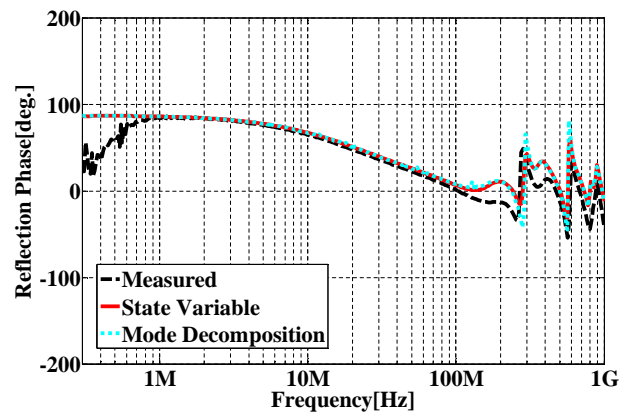
として表すことができ、ベクトル・行列でまとめて書くと、

$$\begin{bmatrix} V_{in} \\ I_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cc} A_2 & O_{3 \times 2} & B_2 & O_{3 \times 2} \\ O_{2 \times 3} & A_3 & O_{2 \times 3} & B_3 \\ \hline C_2 & O_{3 \times 2} & D_2 & O_{3 \times 2} \\ O_{2 \times 3} & C_3 & O_{2 \times 3} & D_3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} V_{out1} \\ V_{out2} \\ I_{out1} \\ I_{out2} \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{23} & B_{23} \\ C_{23} & D_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{out} \\ I_{out} \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} A_1 A_{23} + B_1 C_{23} & A_1 B_{23} + B_1 D_{23} \\ C_1 A_{23} + D_1 C_{23} & C_1 B_{23} + D_1 D_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{out} \\ I_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{all} & B_{all} \\ C_{all} & D_{all} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{out} \\ I_{out} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

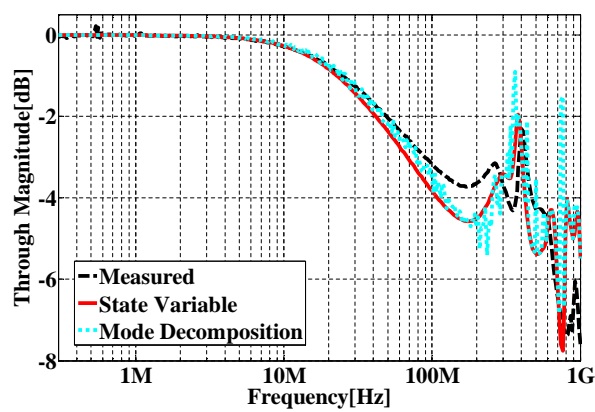
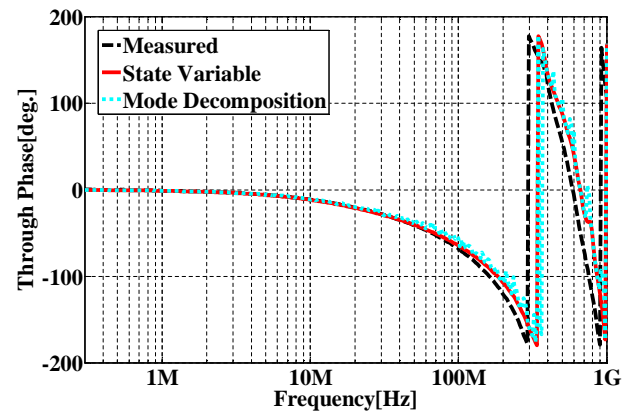
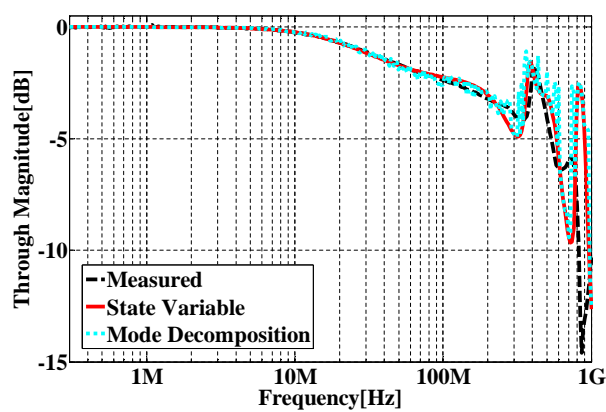
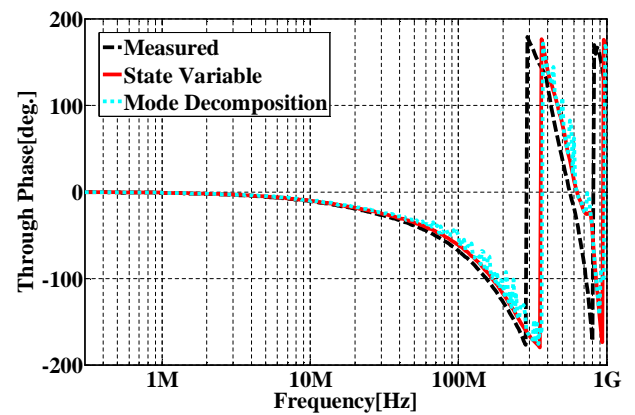
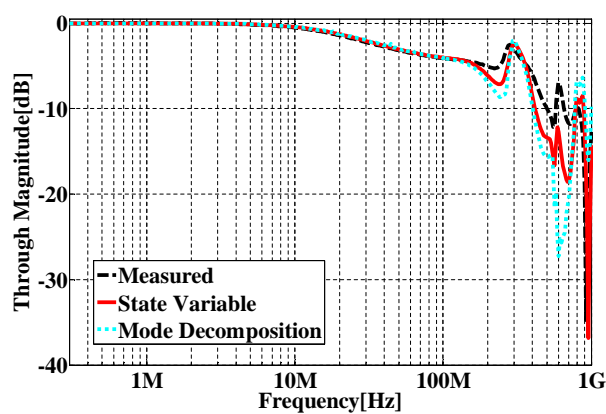
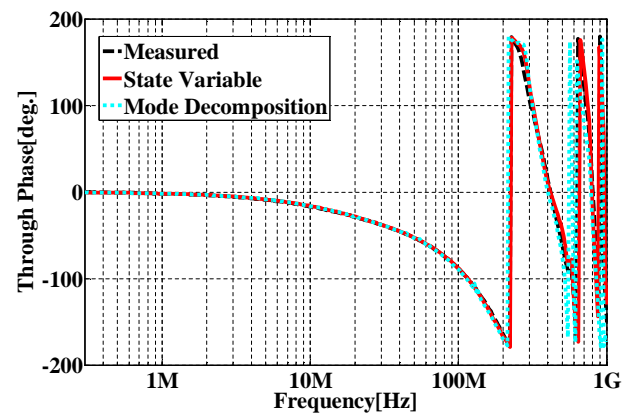
と表すことができる。本検討では、まず分岐前の 5 本線路系と分岐後の 3 本および 2 本線路系についてそれぞれ分けて縦続行列 $\mathbf{F}_1 \sim \mathbf{F}_3$ を求め、次に (6.6) 式の関係から線路系全体を回路網モデル化する。ただし、分岐後の 3 本線路系と 2 本線路系の結合は無視する。

6.1.2 結果

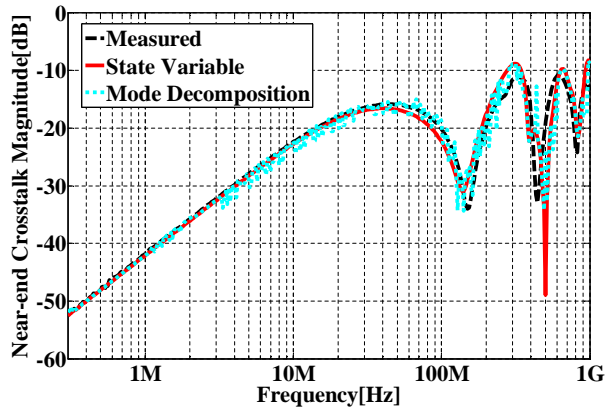
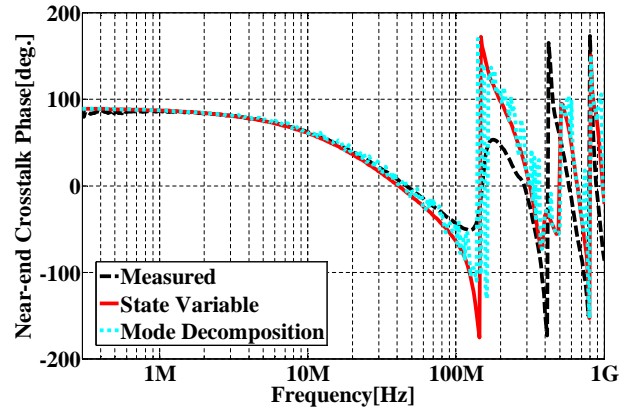
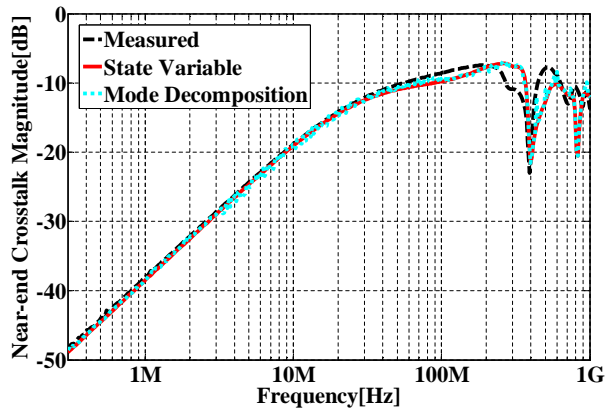
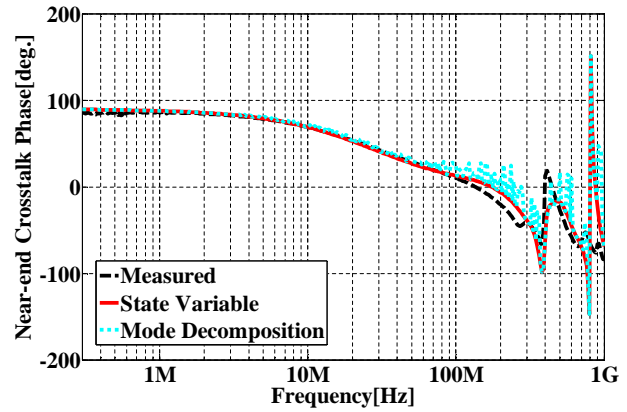
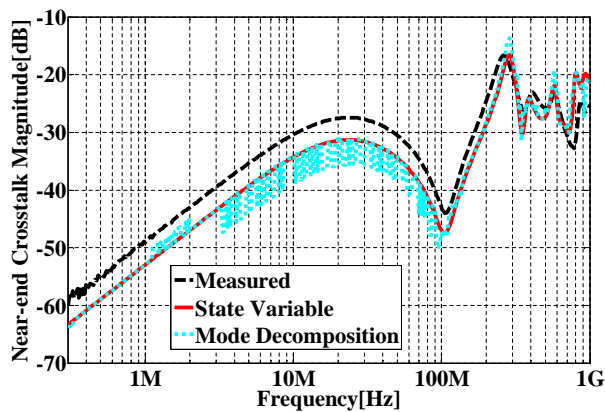
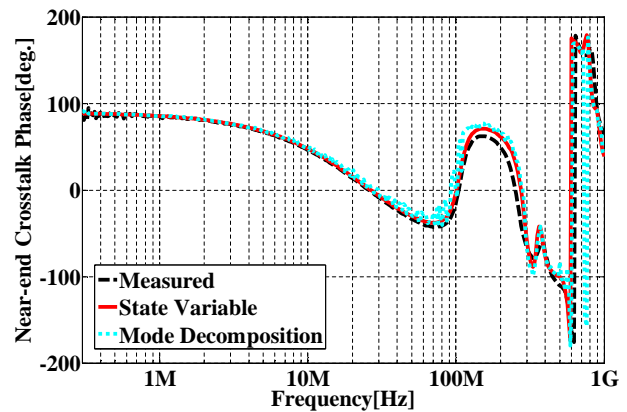
反射係数

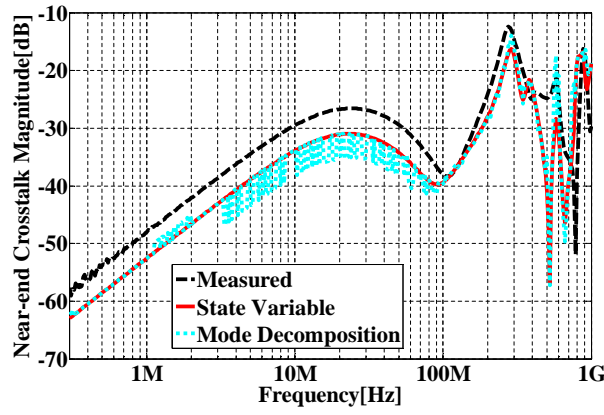
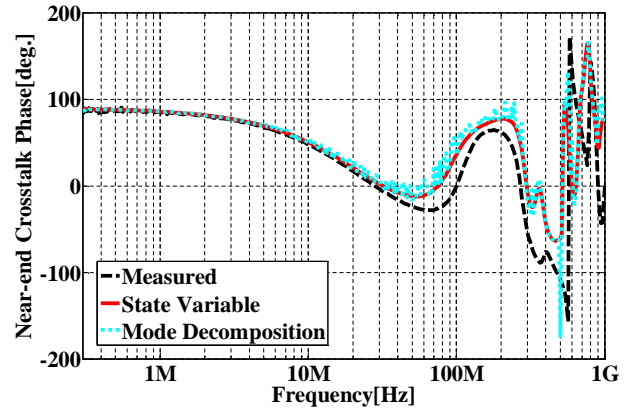
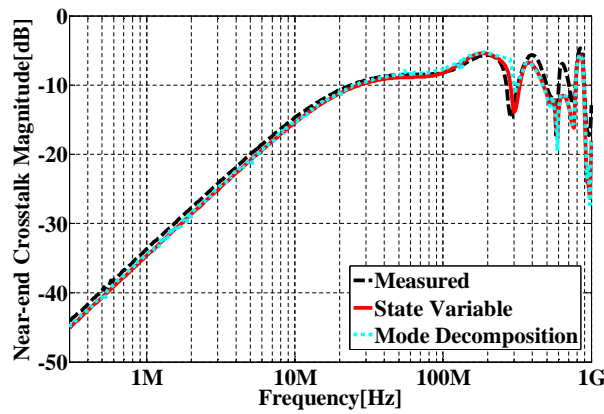
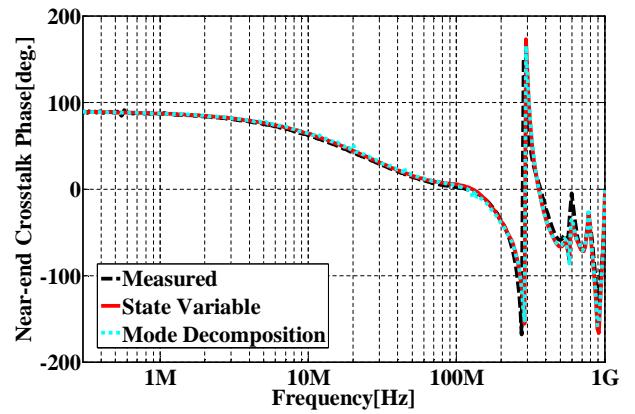
図 6.2 S_{11} の振幅特性図 6.3 S_{11} の位相特性図 6.4 S_{33} の振幅特性図 6.5 S_{33} の位相特性図 6.6 S_{44} の振幅特性図 6.7 S_{44} の位相特性

通過係数

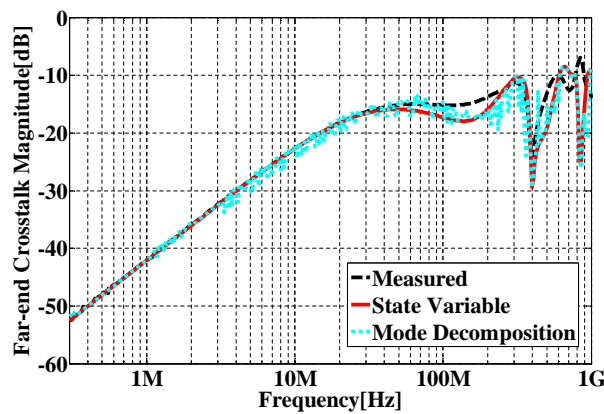
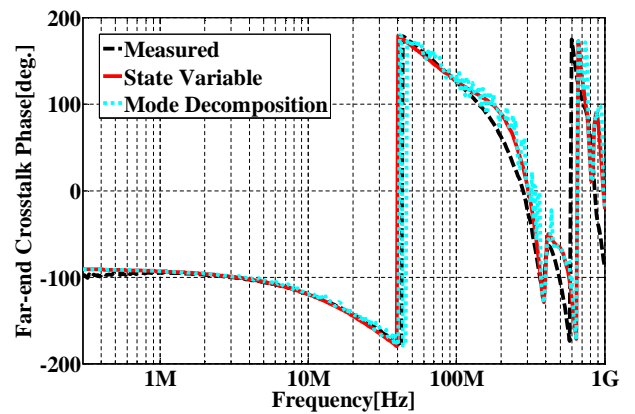
図 6.8 S_{61} の振幅特性図 6.9 S_{61} の位相特性図 6.10 S_{83} の振幅特性図 6.11 S_{83} の位相特性図 6.12 S_{94} の振幅特性図 6.13 S_{94} の位相特性

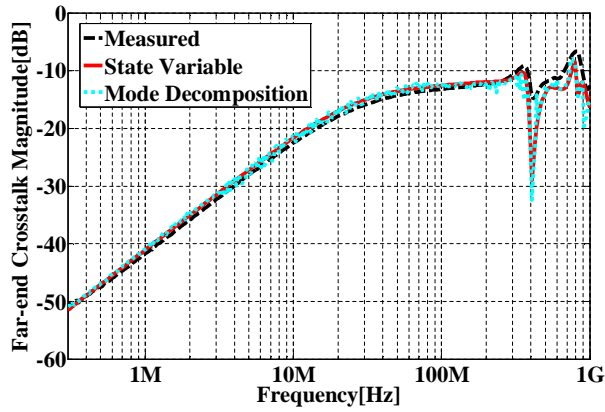
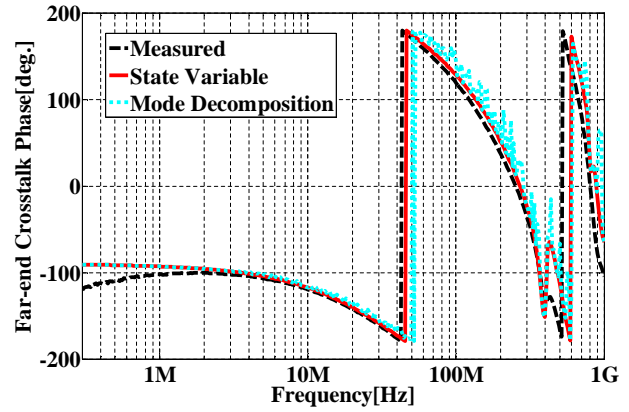
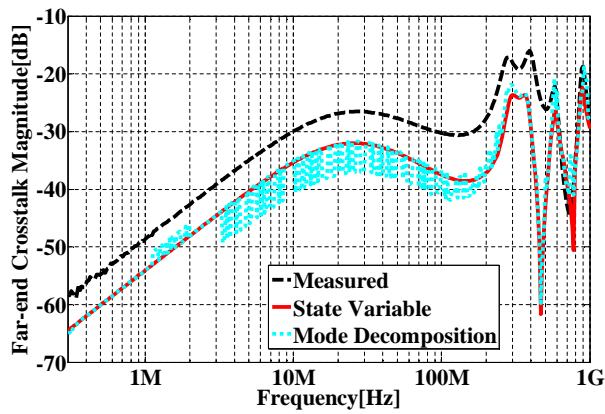
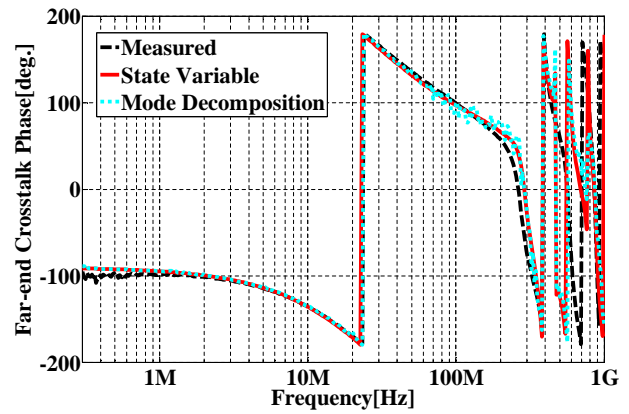
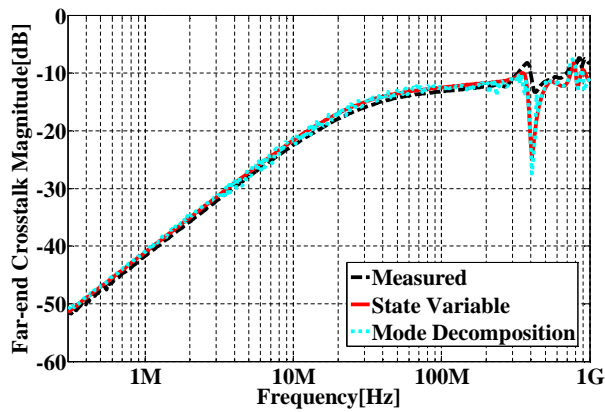
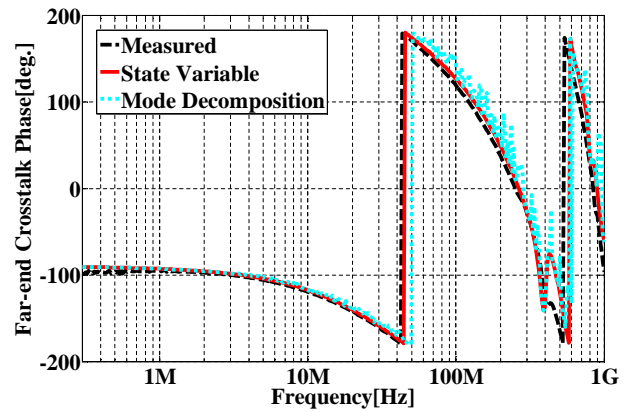
近端結合

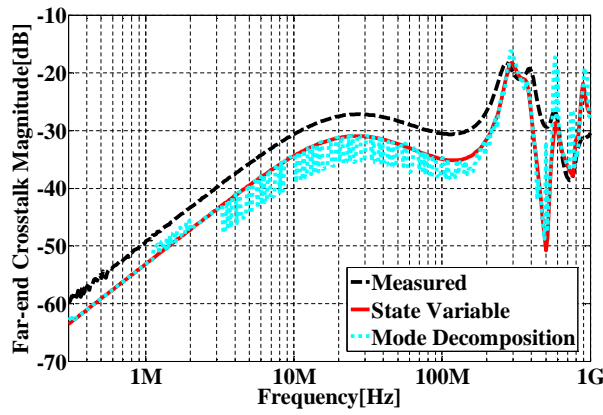
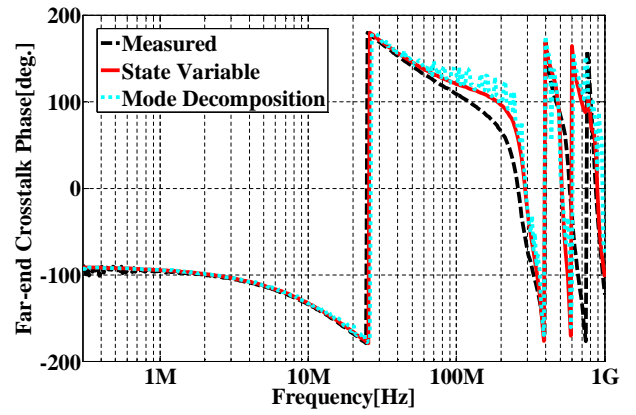
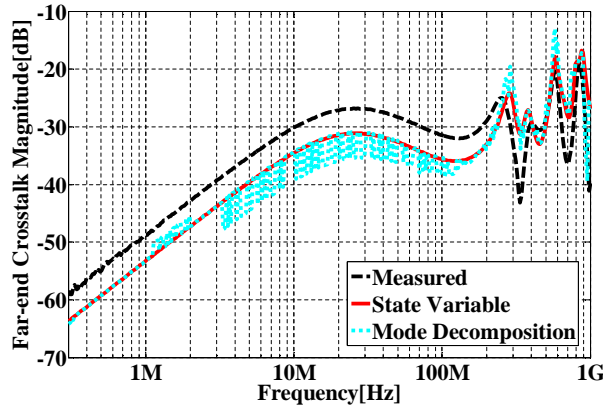
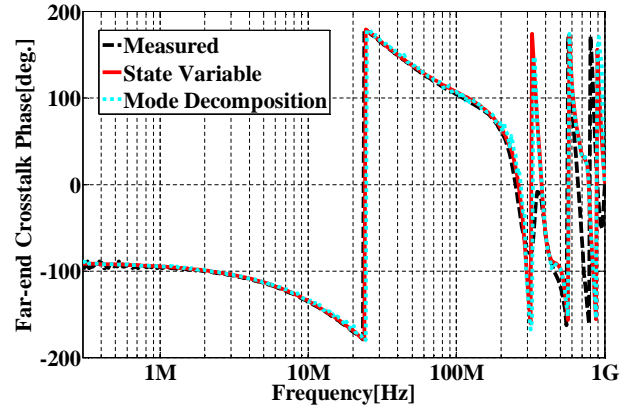
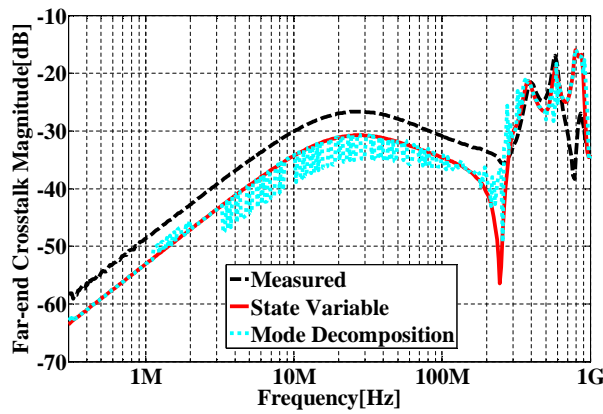
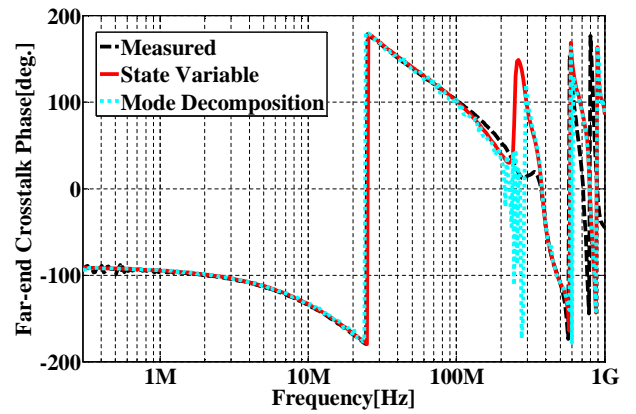
図 6.14 S_{21} の振幅特性図 6.15 S_{21} の位相特性図 6.16 S_{31} の振幅特性図 6.17 S_{31} の位相特性図 6.18 S_{42} の振幅特性図 6.19 S_{42} の位相特性

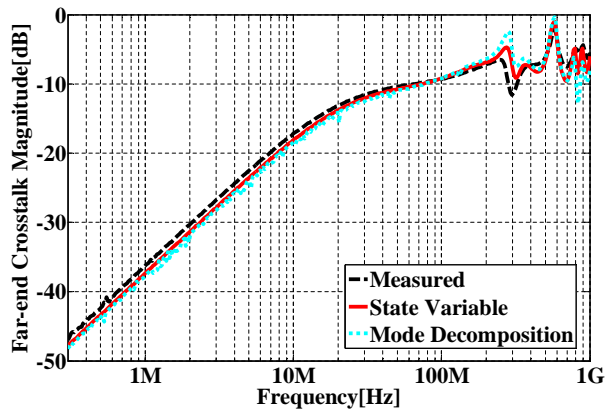
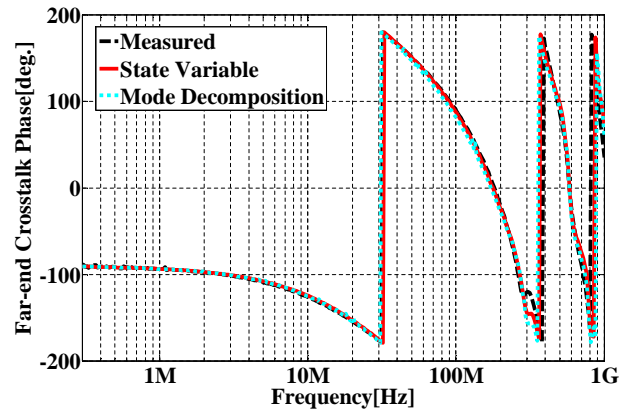
図 6.20 S_{43} の振幅特性図 6.21 S_{43} の位相特性図 6.22 S_{54} の振幅特性図 6.23 S_{54} の位相特性

遠端結合

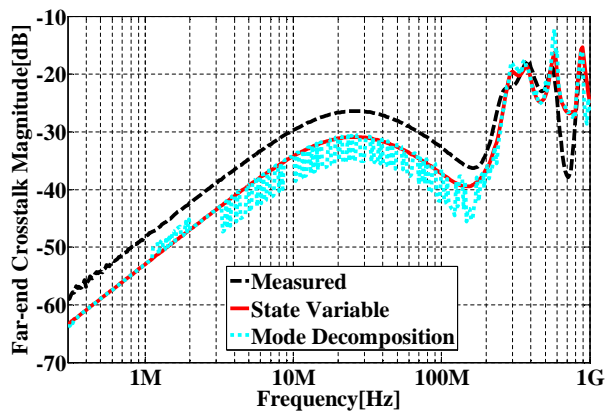
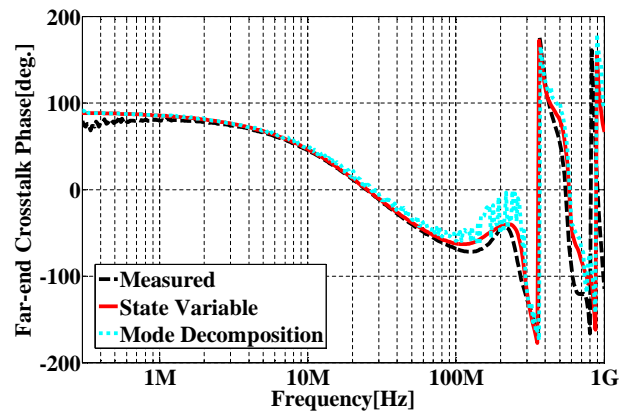
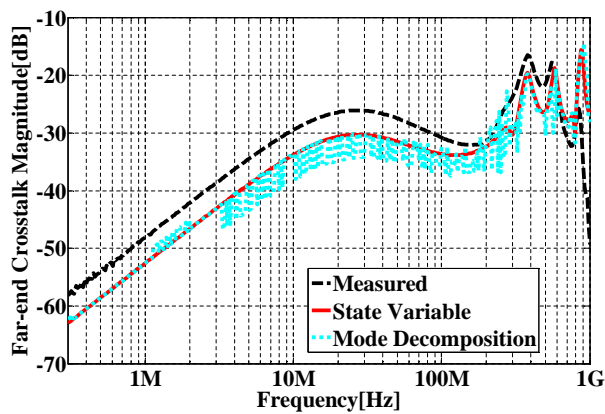
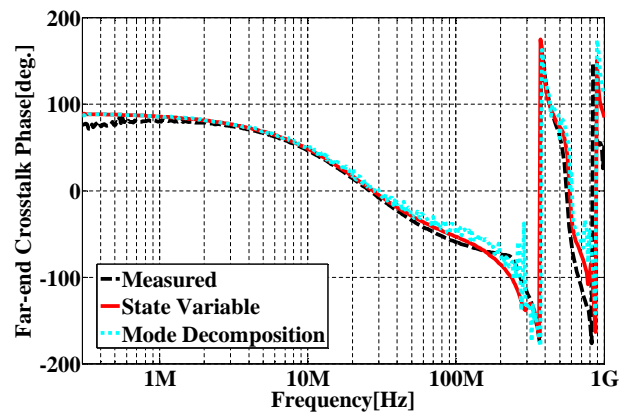
図 6.24 S_{71} の振幅特性図 6.25 S_{71} の位相特性

図 6.26 S_{81} の振幅特性図 6.27 S_{81} の位相特性図 6.28 S_{101} の振幅特性図 6.29 S_{101} の位相特性図 6.30 S_{63} の振幅特性図 6.31 S_{63} の位相特性

図 6.32 S_{103} の振幅特性図 6.33 S_{103} の位相特性図 6.34 S_{74} の振幅特性図 6.35 S_{74} の位相特性図 6.36 S_{84} の振幅特性図 6.37 S_{84} の位相特性

図 6.38 S_{104} の振幅特性図 6.39 S_{104} の位相特性

出力各ポート間での遠端結合

図 6.40 S_{97} の振幅特性図 6.41 S_{97} の位相特性図 6.42 S_{98} の振幅特性図 6.43 S_{98} の位相特性

6.1.3 考察

提案手法による計算により，ヌル点の特性など実測値と同じ傾向が得られており，伝送特性の評価を行うことができた．図 6.18 などでは，特に低い周波数において理論値と実測値が一致していないが，これは線路間の結合量が非常に小さいため，VNA での測定精度に限界があるためと考えられる．しかし，このような場合においても，図 6.19 のように位相特性は一致していることから，線路系全体の特性評価は行えているものとした．

また，線路の結合本数を増やしたところ，モード分解法による理論値に細かな変動が見られるようになった．4.2.2 節でも述べたような対角化のエラーは，分岐前の 5 本線路部分において約 275 MHz 以上の周波数で発生していた．しかし，このときの断面形状は対称性があるものではなく，さらに，それ以外の周波数においても変動は確認できる．このことから，線路の結合本数が増加したときには，モード分解法による複数の伝搬モードそれぞれが物理的に意味を為し得るか，特に検討する必要がある．

6.2 コモンモード電流の計算

図 6.1 (b) で 4×4 縦続行列 \mathbf{F}_3 にて表される部分はツイストペアケーブルである．ツイストペアケーブルは構造上，外部から電磁界が注入された場合に 2 本の線が互いにその影響を打ち消し合うため，ノイズ耐性があるといわれている．このため 2 本の線によって差動伝送を行う場合によく用いられており，また各線を流れる逆相信号の相互作用により，外部への放射ノイズを抑えることができると知られている．

しかし，2.2.5 節で述べた通り，ディファレンシャルモードとコモンモードの組が独立直交なモードの組となるのは，2 本の線路が完全に対称な場合のみである．そのため，特に GND の近傍に差動信号線が配線されている場合などは，線路の対称性が崩れるためにコモンモード電流が生じ，放射ノイズ源として作用する可能性が理論上は存在する．本節では，このツイストペアケーブルの部分的不平衡構造に起因するコモンモード電流について，提案モデルを用いて評価する．

6.2.1 理論

図 6.44 は図 6.1 のモデルにおいて，入力ポートに内部抵抗を含む電源を，各出力ポートに負荷抵抗を，それぞれ接続した系である（線 #1～#3 の電圧源は省略して書いている）．ここ

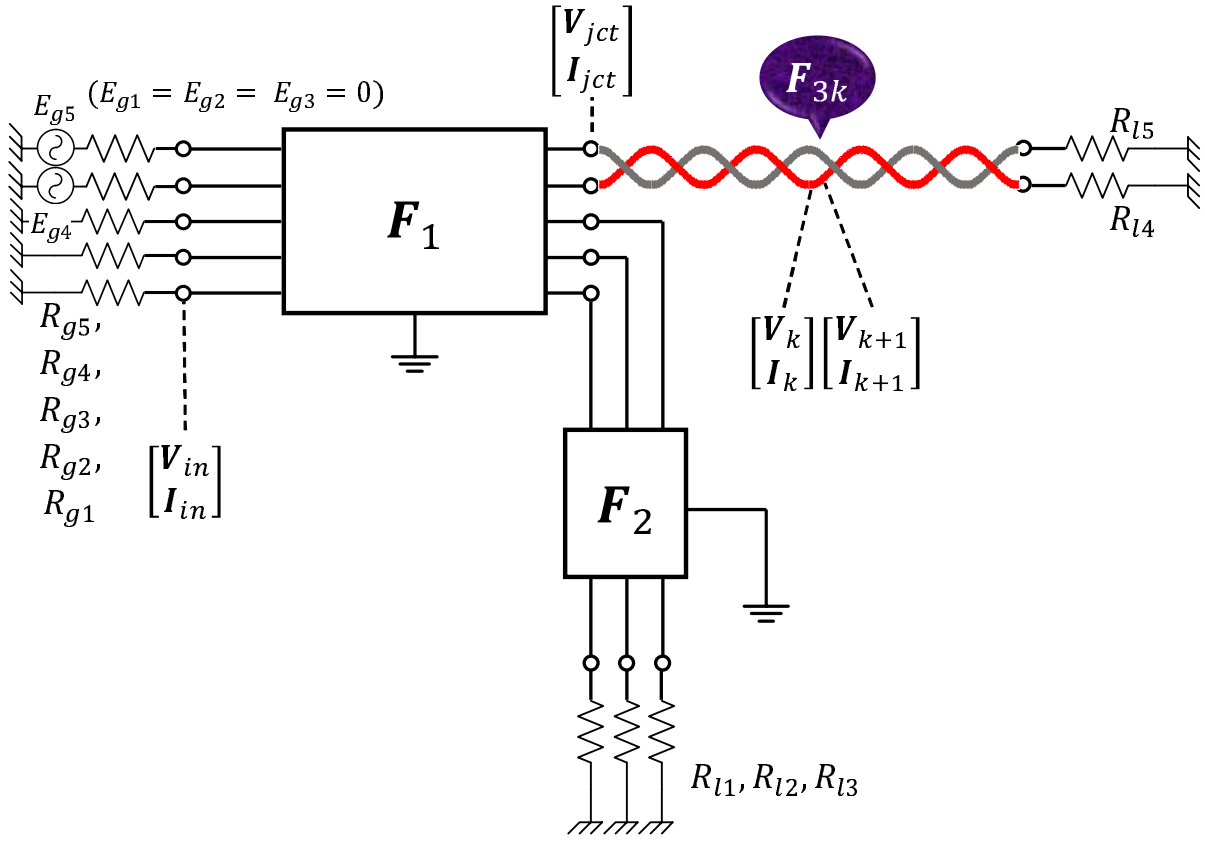


図 6.44 検討系

で、電源電圧ベクトル \mathbf{E}_g 、電源の内部抵抗行列 \mathbf{R}_g 、負荷抵抗行列 \mathbf{R}_l についてそれぞれ、

$$\mathbf{E}_g = \begin{bmatrix} E_{g1} \\ E_{g2} \\ E_{g3} \\ E_{g4} \\ E_{g5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_g = \begin{bmatrix} R_{g1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{g2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{g3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{g4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{g5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_l = \begin{bmatrix} R_{l1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{l2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{l3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{l4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{l5} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

とすると、入力ポートにおける端子条件

$$\mathbf{V}_{in} = \mathbf{E}_g - \mathbf{R}_g \mathbf{I}_{in} \quad (6.9)$$

と、出力ポートにおける端子条件

$$\mathbf{V}_{out} = \mathbf{R}_l \mathbf{I}_{out} \quad (6.10)$$

が成り立つ．いま，線路系全体の入出力の関係を (6.7) 式で表現できるとき，(6.9)，(6.10) 式を代入して整理すると，出力端子電流と電圧は，それぞれ

$$\mathbf{I}_{out} = \{\mathbf{R}_g(\mathbf{C}_{all}\mathbf{R}_l + \mathbf{D}_{all}) + (\mathbf{A}_{all}\mathbf{R}_l + \mathbf{B}_{all})\}^{-1} \mathbf{E}_g \quad (6.11)$$

$$\mathbf{V}_{out} = \mathbf{R}_l \{\mathbf{R}_g(\mathbf{C}_{all}\mathbf{R}_l + \mathbf{D}_{all}) + (\mathbf{A}_{all}\mathbf{R}_l + \mathbf{B}_{all})\}^{-1} \mathbf{E}_g \quad (6.12)$$

として得られ，また入力端子電流と電圧は，それぞれ

$$\mathbf{I}_{in} = (\mathbf{C}_{all}\mathbf{R}_l + \mathbf{D}_{all}) \{\mathbf{R}_g(\mathbf{C}_{all}\mathbf{R}_l + \mathbf{D}_{all}) + (\mathbf{A}_{all}\mathbf{R}_l + \mathbf{B}_{all})\}^{-1} \mathbf{E}_g \quad (6.13)$$

$$\mathbf{V}_{in} = \mathbf{E}_g - \mathbf{R}_g(\mathbf{C}_{all}\mathbf{R}_l + \mathbf{D}_{all}) \{\mathbf{R}_g(\mathbf{C}_{all}\mathbf{R}_l + \mathbf{D}_{all}) + (\mathbf{A}_{all}\mathbf{R}_l + \mathbf{B}_{all})\}^{-1} \mathbf{E}_g \quad (6.14)$$

として得られる [26]．

ここで，分岐点における電圧ベクトル \mathbf{V}_{jct} および電流ベクトル \mathbf{I}_{jct} は，

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{in} \\ \mathbf{I}_{in} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{jct} \\ \mathbf{I}_{jct} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

の関係から求めることができる． \mathbf{V}_{jct} ， \mathbf{I}_{jct} それぞれの第 4,5 行目を取り出し，ツイストペアケーブル部分を分割したときの k 番目の区間において成り立つ，縦続行列 \mathbf{F}_{3k} で表される関係式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{k+1} \\ \mathbf{I}_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{3k}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_k \\ \mathbf{I}_k \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

に代入することで，ツイストペアケーブル上 k 番目の部分における電圧 $\mathbf{V}_k = \begin{bmatrix} V_{4k} \\ V_{5k} \end{bmatrix}$ および

電流 $\mathbf{I}_k = \begin{bmatrix} I_{4k} \\ I_{5k} \end{bmatrix}$ が順次求められる．(2.176) 式より，コモンモードの電流は 2 線の電流それぞれの和として規定されるから，ツイストペアケーブル上 k 番目の部分におけるコモンモード電流 I_{CMk} は，

$$I_{CMk} = I_{4k} + I_{5k} \quad (6.17)$$

として求められる．

6.2.2 結果

本検討では，ISO11898 にて規定された High-Speed CAN の規格 [5] を参考に，各線の電源の内部抵抗および負荷抵抗をすべて $R_{gi} = R_{li} = 60 \, \Omega$ とした．また，電源電圧を $E_{g1} = E_{g2} = E_{g3} = 0 \, \text{V}$ ， $E_{g4} = 1 \, \text{V}$ ， $E_{g5} = -1 \, \text{V}$ として，ツイストペアケーブルをディ

ファレンシャルモード励振する差動伝送系を模した。この条件で、ツイストペアケーブル上におけるコモンモード電流の分布を、提案モデルを用いて計算した結果を次図に示す。図 6.45 はツイストの撚りピッチが $P = 45$ mm の場合であり、図 6.46 は $P = 27$ mm の場合である。また、それぞれ図中における距離は、分岐点を基準とした出力ポート 2 の方向への距離である。計算は 300 kHz～100 MHz の範囲にて対数軸で 250 点をとって行った。

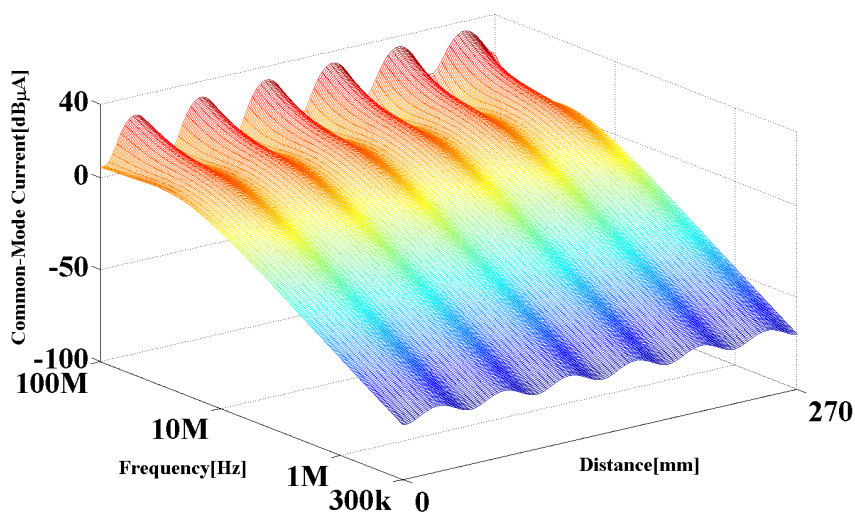


図 6.45 $P = 45$ mm の場合のケーブル上におけるコモンモード電流分布

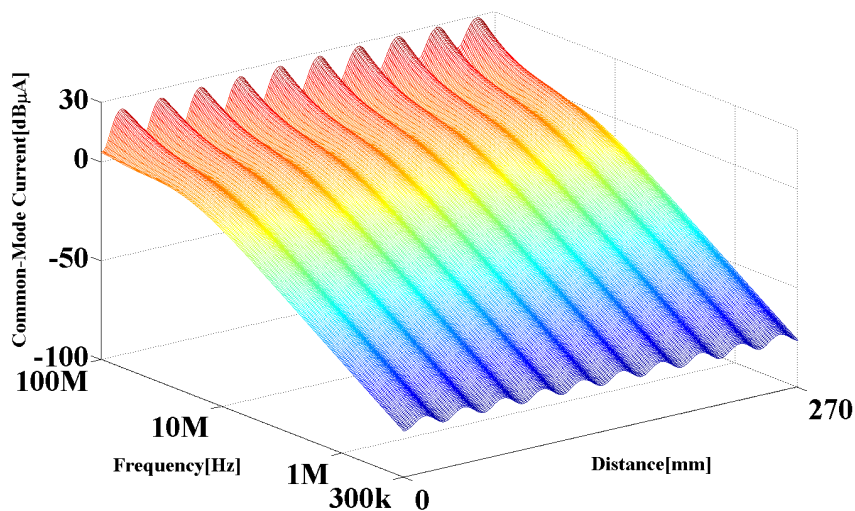


図 6.46 $P = 27$ mm の場合のケーブル上におけるコモンモード電流分布

6.2.3 考察

提案手法により，ツイストペアケーブルの部分的な不平衡によって生じるコモンモード電流を計算によって得ることができた．また，ツイストの撚りピッチを小さくすることで，コモンモード電流を小さくできる傾向が見られた．自動車の場合は重量をできるだけ軽くすることが求められるので，ケーブルをシールドして放射を抑えるといった手段は避けるのが望ましく，ECU や機器類の設置に注意して配線設計を行うといった対策が考えられる．その際，本モデルの応用可能性があると考えている．

第 7 章

まとめ

本論文では、車載ワイヤーハーネスを多線条伝送線路として扱い、自動車の EMC 問題に関する特性の評価を簡易な計算で行う手法として、線路系の縦続行列表現による回路網モデル化と、等価回路化に必要な一次定数の近似導出式を提案した。提案手法を用いて、配線条件を変化させたツイストペアケーブル、太さの異なる 2 本線路系、配線高の連続的に変化する 3 本線路系をモデル化したところ、300 kHz～1 GHz の周波数範囲において、いずれも回路網モデルの有効性が実測値やシミュレーション値との比較から確認できた。また、より実際のハーネスに近い系への応用として、途中に分岐を含む系の伝送特性と、配線上の不平衡によるコモンモード電流の評価を行い、ハーネスの配線設計における提案手法の適用可能性を示した。

今後の研究課題としては、より自動車の実システムに近い系に本モデル化手法を適用し、評価を行うことがある。例としては、電流プローブを用いてワイヤーハーネスに磁界を印加する BCI (Bulk Current Injection) 試験系の現象モデル化において、ハーネス部分に本モデルを用いることが挙げられる。あるいは、車体 (GND) との位置関係が垂直に近いようなハーネスの配線についても、(5.17) 式右辺における分数の分子の値を大きくするだけで対応できるか、といったことが、検討課題として考えられる。

また、状態変数法における電圧・電流の数学的な変数変換がもつ物理的な意味を考察したり、モード分解法における各伝搬モードについて物理現象として実験的に検証したりすることも、多線条線路理論を考える上で興味深い課題である。特に今回の検討では、ハーネスを高周波回路網としてモデル化したために散乱行列にて検証を行っているが、実際の自動車に用いられているシステムは 50 Ω 系で設計されていないものも多く、ネットワークアナライザによる測定にはあまり適していない。そのため、各伝搬モードの特性を物理的に捉えることは重要であると考えている。

参考文献

- [1] 前田登, 平山雅人, 石坂宗徳, 今井孝志, “車両ワイヤハーネスにおけるノイズ伝搬スペクトルの算出ー多導体伝送線路モデルによるー,” 電子情報通信学会技術報告, vol.104, no.499, EMCJ2004-116, pp.83–88, December 2004.
- [2] デンソーカーエレクトロニクス研究会, 図解カーエレクトロニクス [下] 要素技術編, 増補版, 加藤光治 (監修), 日経 BP 社, 東京, 2014.
- [3] 中村克己, “車載電気電子機器の EMC,” 電子情報通信学会技術報告, vol.112, no.468, EMCJ2012-134, pp.97–100, March 2013.
- [4] 西野信, 杉本英樹, わかりやすい組込みシステム構築技法ーハードウェア編ー, 永井正武 (監修), 共立出版, 東京, 2007.
- [5] “CAN 入門書,” ルネサスエレクトロニクス (株) アプリケーションノート,
http://documentation.renesas.com/doc/products/mpumcu/apn/rjj05b0937_canap.pdf,
January 2006.
- [6] A. Shoory, M. Rubinstein, A. Rubinstein, C. Romero, N. Mora and F. Rachidi, “Application of the cascaded transmission line theory of Paul and McKnight to the evaluation of NEXT and FEXT in twisted wire pair bundles,” *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol.55, no.4, pp.648–656, August 2013.
- [7] 濱田清司, 牧昌弘, 下塩義文, 徳田正満, 桑原伸夫, “平衡度を考慮した解析法によるツイストペアケーブル放射電磁界特性,” 電子情報通信学会論文誌 B, vol.J86-B, no.4, pp.703–713, April 2003.
- [8] 桑原伸夫, 内田敏哉, “グラウンド面上にある 3 導体 VVF ケーブルの回路網モデルに関する基礎検討,” 電子情報通信学会技術報告, vol.113, no.125, EMCJ2013-46, pp.37–42, July 2013.
- [9] 鎌倉友男, 上芳夫, 渡辺好章, 電気回路, 培風館, 東京, 1989.
- [10] 村野公俊, 基礎 電磁波工学, 小塚洋司 (編), 数理工学社, 東京, 2013.

- [11] C.R. Paul, *Analysis of Multiconductor Transmission Lines*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2008.
- [12] 小寺平治, なっとくする微分方程式, 講談社, 東京, 2000.
- [13] 上芳夫, “EMC における伝送回路理論とその展開,” 電子情報通信学会論文誌 B, vol.J90-B, no.11, pp.1070–1082, November 2007.
- [14] 雨谷昭弘, 分布定数回路論, 関根泰次 (監修), コロナ社, 東京, 1990.
- [15] J.A.B. Faria, *Multiconductor Transmission-Line Structures Modal Analysis Techniques*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.
- [16] 藤代義和, “S パラメータ活用術,” TDK EMC TECHNOLOGY 基礎編,
https://product.tdk.com/ja/products/emc/guidebook/jemc_basic_03.pdf.
- [17] K. Kurokawa, “Power waves and the scattering matrix,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol.13, no.2, pp.194–202, March 1965.
- [18] J. Frei, X.D. Cai and S. Muller, “Multiport S-Parameter and T-Parameter conversion with symmetry extension,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol.56, no.11, pp.2493–2504, November 2008.
- [19] P.C. Magnusson, G.C. Alexander, V.K. Tripathi and A. Weisshaar, *Transmission Lines and Wave Propagation*, Fourth Edition, CRC Press LLC, Boca Raton, Florida, 2001.
- [20] D.K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Boston, 1989.
- [21] 後藤憲一, 山崎修一郎, 詳解電磁気学演習, 共立出版, 東京, 1970.
- [22] A.C. Sim, “New high-frequency proximity-effect formula,” *Wireless Engineering*, vol.30, no.8, pp.204–207, August 1953.
- [23] C.R. Paul, *Inductance : Loop and Partial*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2010.
- [24] F.M. Tesche, M.V. Ianoz and T. Karlsson, *EMC Analysis Methods and Computational Models*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997.
- [25] 舟橋憲治, 演習 電気磁気学, 東京電機大学出版局, 東京, 1967.
- [26] 上芳夫, 肖鳳超, 村野公俊, “電力配線網における EMC 問題を考えるための伝送線路論的手法,” 電子情報通信学会技術報告, vol.108, no.401, EMCJ2008-117, pp.29–34, Jan. 2009.

謝辞

まず初めに，本研究を進めるにあたり，非常に熱心にご指導いただいた肖鳳超教授，上芳夫特任教授，東海大学 村野公俊准教授に深く感謝致します．先生方の的確なコメントやアドバイスのおかげで，工学的・理学的な両面から本研究を深化することができ，また私自身の研究へのアプローチや，電磁波工学・伝送工学といった EMC 関連の学問分野への理解を深めることができたと感じております．

次に，日頃の議論を通して様々なご意見をくださった，肖研究室の学生の皆様に感謝致します．また，私の研究活動において様々な面でサポートしていただいた，I 専攻をはじめとする事務の皆様・電気通信大学生生活協同組合の皆様や，様々な視点から本研究を捉えるヒントを与えてくださった，I 専攻を中心とする先生方にも，この場を借りて感謝致します．

そして，最後になりますが，私の研究生生活を温かく支え，激励してくださった家族・友人に，この場を借りて厚く御礼申し上げます．