

直接的分岐アルゴリズムによる
決定性プッシュダウン変換器の等価性判定

清野 和司

電気通信大学

2008年3月

直接的分岐アルゴリズムによる
決定性プッシュダウン変換器の等価性判定

清野 和司

電気通信大学大学院電気通信学研究科
博士（工学）の学位申請論文

2008年3月

直接的分岐アルゴリズムによる
決定性プッシュダウン変換器の等価性判定

博士論文審査委員会

主査	富田	悦次	教授
委員	高橋	治久	教授
委員	尾関	和彦	教授
委員	西野	哲朗	教授
委員	小林	聡	教授

著作権所有者

清野 和司

2008

Direct Branching Algorithms for Checking Equivalence of Some Classes of Deterministic Pushdown Transducers

Kazushi Seino

Abstract

Recently, the equivalence problem of arbitrary deterministic pushdown automata (dpda's) has been proved to be solvable by Sénizergues (Theoretical Computer Science, vol.251, pp.1-166, 2001). This is a breakthrough in formal language theory. For this distinguished paper, he won the 2002's Gödel Prize, which is one of the most prestigious prizes in theoretical computer science. The period from paper publication to receive the prize was unprecedentedly short. This is indicative of the importance of the equivalence problem of dpda's. We know that the equivalence checking algorithm plays an important role in learning systems that are formulated as automata and formal grammars. In the future, in the field of theoretical computer science, analyzing the learning possibility and establishing adaptive learning functions will become important even further. In this regard, establishing simple and efficient algorithms for checking the equivalence is very important.

However, the efficiency of most algorithms proposed thus far is not satisfactory enough, and the proofs of correctness are extremely complicated. Here, the research group of UEC including the author has proposed a technique called "direct branching algorithm" for checking the equivalence of a pair of some subclasses of dpda's, over many years. As compared to other algorithms, our direct branching algorithms for checking the equivalence of dpda's are very simple and direct, and the proofs of correctness are very clear. Further, they have a good potential in analysis for their applicability and time complexity of various other dpda problems. As a concrete result, such an approach has been successfully applied to a pair of dpda's, one of which is real-time strict. Furthermore, we have shown a certain sufficient condition for checking the equivalence of dpda's that have ε -transitions. In addition, as research results

regarding the time complexity using our direct branching algorithm, polynomial-time algorithms for checking the equivalence of simple dpda's and real-time strict deterministic restricted one-counter automata (droca's) have been given. The former has just one state, and the latter has just one stack symbol.

On the other hand, in conjunction with research about the equivalence problem of dpda's, some results about the equivalence problem of deterministic pushdown transducers (dpdt's) which are obtained by attaching the output function to dpda's have also been proposed. In practical use, a dpdt is more important than a dpda, which only judges the acceptance, but the equivalence problem of dpdt's is extremely complicated. However, by using our direct branching algorithms, the equivalence problems of dpdt's are solvable with almost the same complexity level as that of dpda's. Our paper, which present a solution for checking the equivalence of dpdt's, one of which is real-time strict, is referred by the above Gödel Prize winning paper as one of the most important results. Most results about the equivalence problem of dpdt's except ours cannot show a practical execution for simple samples, and they also cannot provide a concrete evaluation of the time complexity. It is important to research about efficient algorithms for checking the equivalence of dpdt's. In 2007, a polynomial-time algorithm for checking the equivalence of simple deterministic languages with output was published by Bastien *et al.*

In such a background, the following two results are given in this paper. First, a further extended direct branching algorithm for checking the equivalence of a certain pair of non-real-time deterministic pushdown transducers is shown. Such a class of dpdt's includes a pair of dpdt's, one of which is real-time strict. This result is considered to be very significant in the further class extension in the equivalence problem of dpdt's that have ε -transitions. Second, as an improvement in the maximum time complexity, a polynomial-time algorithm for checking the equivalence of real-time strict deterministic restricted one-counter transducers (droct's) is shown. This is a typical result that is indicative of the effectiveness of direct branching algorithms. Furthermore, this result is incomparable to the above Bastien *et al.*'s result.

直接的分岐アルゴリズムによる 決定性プッシュダウン変換器の等価性判定

清野 和司

概要

決定性プッシュダウンオートマトン (dpda) の等価性判定問題は、任意のクラスに対して可解であることが、Sénizergues により、Theoretical Computer Science 誌 (vol.251, pp.1-166, 2001 年) において発表された。これは、言語理論の分野において非常に大きな成果であり、2002 年に、この発表論文に対して、理論計算機科学の分野における最も栄誉ある賞のひとつとして知られるゲーデル賞が与えられている。論文発表から受賞までの期間も異例の早さであり、このことから dpda の等価性判定問題の重要性を認識することができる。例えば、dpda の等価性判定は、オートマトンや形式文法を基礎とするシステムにおける学習過程において主要な役割を果たすことができる。今後の理論計算機科学の分野において、学習可能性の検討や、適応的学習機能の実現は、更に重要性を増して行くことが予想される。従って、単純化され改善しやすく、かつ、単純で効率の良い dpda の等価性判定アルゴリズムの実現は非常に重要である。

しかしながら、発表されている dpda の等価性判定アルゴリズムの多くは、非常に複雑な方式であり、その可解性の証明も非常に難解なものとなっている。そこで、筆者を含めた電通大の研究グループは、長年にわたり、直接的分岐アルゴリズムと名付けた等価性判定手法を提唱してきた。この直接的分岐アルゴリズムによる dpda の等価性判定手法は、他の方式と比較して、非常に直接的かつ単純で、その正当性の証明も明解である。また、時間計算量に関する検討なども直接的に見通しが良く、更に、dpda に関連する他の各種問題に対する適用可能性にも優れている。具体的な成果として、直接的分岐アルゴリズムを用いることにより、一方が実時間空スタック受理式である、任意の dpda 対に対する等価性判定が可解であることが証明されている。更に、その拡張として、筆者らは、双方に ε -推移を許した dpda 対に対する等価性判定を直接的分岐アルゴリズムにより解決するための十分条件の緩和として、Weak Segmental Property と名付けた性質を持つ dpda 対

の等価性判定の可解性などを示してきた。また、直接的分岐アルゴリズムの手法による時間計算量に対する研究成果としては、状態が単一という制限を持つ、単純決定性プッシュダウンオートマトン同士、あるいは、スタック記号が単一という制限を持つ、決定性限定ワンカウンターオートマトン同士について、その等価性判定を多項式時間で解決するアルゴリズムが得られている。

一方、dpda に更に出力機構を付与した決定性プッシュダウン変換器 (dpdt) に対する等価性判定問題についても、dpda の等価性判定問題の研究に並行して、幾つかの結果が得られている。dpdt は、受理・非受理のみを判定する dpda に比較して、より実用的な意味を持ち重要であるが、その等価性判定は一般に非常に複雑となる。しかし、筆者らの直接的分岐アルゴリズムを用いた手法では、その拡張の容易性の効果により、dpda の等価性判定とほぼ同レベルの複雑さで dpdt の等価性判定を行うことができる。特に、一方が実時間空スタック受理式である任意の dpda に対して出力機構を付与した dpdt に対する等価性判定の可解性を示した筆者らの論文は、先に紹介した、任意の dpda に対する等価性判定の可解性を示したゲーデル賞受賞論文においても、主要な成果のひとつとして参照されている。また、これまで、筆者ら以外による dpdt の等価性判定の可解性に関する結果の殆どは、いわば原理的な可解性の証明を達成しているという段階であり、極く簡単な問題に対してさえ、その可解性を示す具体的例題を与える、あるいは、何らかの具体的計算量評価を与えることも困難な状況であった。但し、2007 年に、Bastien らにより、出力を付与した単純決定性言語同士の多項式時間等価性判定の可解性が示されている。今後は、このような dpdt の等価性判定アルゴリズムの効率向上に関する研究が注目されてくるものと考えられる。

このような背景のもと、本論文では、これまで筆者らが提唱してきた直接的分岐アルゴリズムによる dpdt の等価性判定手法の更なる改善について、以下の 2 つの面から検討を行った。ひとつは、本手法を用いた dpdt の等価性判定を可解とする十分条件の緩和に関する検討であり、もうひとつは、最大時間計算量の改善に関する検討である。

前者の成果としては、前述の Weak Segmental Property と名付けた性質を持つ ε -推移を許した dpda 対に、ある条件のもとで出力機構を付与した dpdt 対に対しても等価性判定が可解であることを示している。この出力条件は、片方の dpdt における任意の ε -推移に対する出力長が、ある有限の定数以下であることを保証するもので、つまり、入力無

しで出力が無限に出続けることを抑制するものである。従って、dpdt の動作として極めて自然な条件と考えられる。なお、ここで対象とする dpdt 対は、一方が実時間空スタック受理式である任意の dpdt 対を含んでいる。この結果により、直接的分岐アルゴリズムによる dpdt の等価性判定を可解とする十分条件を従来より大きく緩和した。現時点において、ここで提唱する dpdt 対を真に包含する等価性判定可能なクラス対は存在しない。この結果は、今後の ε -推移を許した dpdt の等価性判定問題における、更なるクラス拡張において有効に活用できるものとする。具体的なアルゴリズムは、先に紹介した一方が実時間空スタック受理式である任意の dpdt 対に対する等価性判定の可解性を示した論文のアルゴリズムを基礎として、 ε -推移に対する対応として、前述の Weak Segmental Property を持つ dpda 対に対する等価性判定アルゴリズムの手法の一部を応用している。

また、後者の成果については、スタック記号が単一で、かつ、 ε -推移を許さない、実時間空スタック受理式決定性限定ワンカウンターオートマトン同士に対して出力機構を付与した、実時間空スタック受理式決定性限定ワンカウンター変換器同士の等価性判定が多項式時間で解決できることを示した。これは、直接的分岐アルゴリズムの有効性を示すひとつの典型的な成果と言える。そのアルゴリズムとしては、前者と同様のアルゴリズムを、対象 dpdt に特化して単純化したものであるが、具体的に、詳細な計算量解析とその証明を行っている。この結果は、先に紹介した Bastien らによる出力を付与した単純決定性言語同士の多項式時間等価性判定に関する結果とも比較不能であり、現時点において、これを真に包含する結果は存在しない。そして、今後の多項式時間等価性判定が可解である dpdt クラスの検討における基礎となり得るものとする。

目次

第 1 章	序章	1
1.1	背景	1
1.2	本論文の概要	5
第 2 章	事前準備	7
2.1	本論文の各章共通の定義と表記法	7
第 3 章	D P D T の等価性判定を可解とするある十分条件	12
3.1	概説	12
3.2	定義と表記法	14
3.3	前提と基本命題	17
3.4	等価性判定アルゴリズム	25
3.4.1	分岐	25
3.4.2	跳越し	26
3.4.3	中断	32
3.4.4	アルゴリズム	33
3.4.5	基本例題	35
3.5	正当性と終端性	41
3.6	定理	48
第 4 章	D P D T の等価性判定問題における多項式時間アルゴリズム	49
4.1	概説	49
4.2	定義と表記法	51

4.3	前提と基本命題	52
4.4	等価性判定アルゴリズム	61
4.4.1	分岐	62
4.4.2	跳越し	62
4.4.3	基本例題	66
4.5	正当性と終端性	69
4.5.1	$T_1 \equiv T_2$ が真である場合	69
4.5.2	$T_1 \neq T_2$ が真である場合	82
4.6	定理	87
第 5 章	結論	88
謝辞		91
参考文献		92
関連論文の印刷公表方法と時期		97

目次

3.1	アルゴリズム	34
3.2	推移図	36
3.3	判定木 $T(T_1 : T_2)$	37
3.4	判定木 $T(T_1 : T_2)$ (つづき)	38
3.5	判定木 $T(T_1 : T_2)$ (つづき)	39
3.6	判定木 $T(T_1 : T_2)$ (つづき)	40
4.1	命題 4.3.2(ii) の参考図	55
4.2	droct-SE 推移対の性質	60
4.3	推移図	67
4.4	判定木 $T(T_1 : T_2)$	68
4.5	基本単位 U_j の性質	73
4.6	カテゴリ C_k の性質	77
4.7	判定木中の節点左辺スタック高さの上限	81

第 1 章

序章

1.1 背景

現在の計算機の原理を理解するためには，オートマトン理論の知識が必須である．更に，計算機に対する実行を指令するためには，形式言語理論が重要な役割を果たす．つまり，オートマトンと形式言語は計算機を扱う上で最も基本的な概念である．オートマトンは形式言語を受理するもので，計算機システムのモデルを考える上で，常にこの両者は双対で扱われる．例えば，形式言語のサブクラスである正則言語を受理するオートマトンのクラスは有限オートマトンであり，決定性文脈自由言語を受理するオートマトンが決定性プッシュダウンオートマトンである．また，オートマトンは，将来の人工知能の実現などに向けた基礎研究におけるシステムのモデルとしても重要な役割を担う．従って，オートマトンの基本的な性質の把握や，これを扱う各種手法の検討は重要である．これまでにも，いろいろなオートマトンや形式言語の有意なサブクラスが提唱され（[GG66], [KH66], [De71], [VP75], [HY79], [CK86], [TomSei95] 等），更に，例えば，状態数の最適化や標準形への変換（[Ch59], [Kn65], [St67] 等），2つのオートマトン同士が同じか否かを判定する等価性判定（[Va73], [Va74], [KTE75], [TK76], [OP77], [OH78], [HHY79], [OHI80], [OIH81], [Tom82], [Tom83], [Sek85], [Oy87], [Sen01] 等），2つのオートマトンの一方の受理言語が他方のそれを包含しているか否かを判定する包含性判定（[Fr76], [WT92], [WT93], [HTW95] 等）など，多くの研究がなされてきた．

このような背景において，決定性プッシュダウンオートマトン（dpda）の等価性判定問

題は, Sénizergues により, 任意のクラスに対して可解であることが証明された ([Sen01], [Sen02]). これは, 言語理論の分野において非常に大きな成果であり, 2002 年に, 文献 [Sen01] に対して, 理論計算機科学の分野における最も栄誉ある賞のひとつとして知られるゲーデル賞が与えられている. 論文発表から受賞までの期間も異例の速さであり, このことから dpda の等価性判定問題の重要性を認識することができる. 例えば, dpda の等価性判定は, オートマトンや形式文法を基礎とするシステムにおける学習過程において主要な役割を果たすことができる ([TTWT04] 等). 今後の理論計算機科学の分野において, 学習可能性の検討や, 適応的学習機能の実現は, 更に重要性を増してくることが予想される. 従って, 単純化され改善し易く, かつ, 単純で効率の良い dpda の等価性判定アルゴリズムの実現は非常に重要である.

しかしながら, 文献 [Sen01] をはじめ, 発表されている dpda の等価性判定アルゴリズムの多くは, 非常に複雑な方式であり, その可解性の証明もかなり難解なものとなっている. そこで, 筆者を含めた電通大の研究グループは, 長年にわたり, 直接的分岐アルゴリズムと名付けた等価性判定手法を提唱してきた ([Tom82], [Tom84], [TomSei85], [SeiT94], [TomSei95] 等). この直接的分岐アルゴリズムによる dpda の等価性判定手法は, 他の方式と比較して, 非常に直接的かつ単純で, その正当性の証明も明解である. また, 時間計算量に関する検討なども直接的に見通しが良く, dpda に関連する他の各種問題に対する適用可能性にも優れている.

ここで, 直接的分岐アルゴリズムによる dpda の等価性判定に関する主な成果を紹介する. まず, 等価性判定可能なクラスの対象範囲に関しては, 文献 [Tom82] において, 一方が実時間空スタック受理式である任意の dpda 対に対して, 直接的分岐アルゴリズムによる等価性判定が可解であることが示されている. また, 文献 [Tom82] の結果を真に包含する文献 [Tom84] では, 双方に ε -推移を許した dpda 対に対する等価性判定を直接的分岐アルゴリズムにより解決するための, ある十分条件が示されている. 更に, これらを真に包含する結果として, 筆者らは, 文献 [TomSei85] において, Weak Segmental Property と名付けた性質を持つ ε -推移を許した dpda 対の等価性判定の可解性を示した. また, 上記の十分条件 (Weak Segmental Property) が dpda の対に対するものであったのに対して, 筆者らは, 文献 [SeiTS83b], [SeiTS85b], [SeiT94], [TomSei95] において, これを一方の dpda の内部の条件とすることに成功し, 従って, 任意の dpda との等価性

判定が可能な dpda の新しい部分クラスを示した。この結果は、現時点では、クラスの包含関係において、前記の文献 [Sen01] に真に包含される結果となっているが、そのアルゴリズムの明解さにおいては優れており、今後の拡張性が高く、現時点で報告されている任意の dpda との等価性判定が可能な dpda クラスの中でも、文献 [Sen01] の結果以外には、同クラスを真に包含するような結果は存在しない。また、直接的分岐アルゴリズムの手法による時間計算量に対する研究成果としては、状態が単一という制限を持つ単純決定性プッシュダウンオートマトン同士、あるいは、スタック記号が単一という制限を持つ決定性限定ワンカウンターオートマトン同士について、その等価性判定を多項式時間で解決するアルゴリズムが得られている ([WT89], [WT91], [HTW95])。

一方、dpda に出力機構を付与した決定性プッシュダウン変換器 (dpdt) に対する等価性判定問題についても、dpda の等価性判定問題の研究と並行して長年研究が進められ、筆者らの直接的分岐アルゴリズムによる結果を含め、幾つかの結果が得られている ([Tom79], [IR81], [Co83], [SeiTS83a], [SeiT83], [SeiT85a], [CK86], [TomSei89], [Sen01], [Ba07] 等)。最近の主な成果としては、次の2つの結果があげられる。ひとつは、ゲーデル賞受賞論文として先に紹介した文献 [Sen01] である。この論文は、任意の dpda に対する等価性判定の可解性を示すと同時に、任意の dpda に対して、出力記号列集合がアーベル群に属するという条件のもとで出力を付与した dpdt に対する等価性判定の可解性が示されている。もう一つは、文献 [Ba07] である。ここでは、出力を付与した単純決定性言語同士の多項式時間等価性判定の可解性が示されている。

dpdt は、受理・非受理のみを判定する dpda に比較して、より実用的な意味を持ち重要であるが、その等価性判定は一般に非常に複雑となる。しかし、この問題に関しても、直接的分岐アルゴリズムを用いた手法では、その拡張の容易性の効果により、dpda の等価性判定とほぼ同レベルの複雑さで dpdt の等価性判定を行うことができる。直接的分岐アルゴリズムを用いた、筆者らの dpdt の等価性判定に関する成果としては、文献 [TomSei89] があげられる。これは、文献 [Tom82] で対象とした一方が実時間空スタック受理式である dpda 対に、任意に出力機構を付与した dpdt 対に対する等価性判定の可解性を示している。文献 [TomSei89] は、単純かつ直接的で、拡張性に富む dpdt の等価性判定アルゴリズムを提示すると共に、文献 [Sen01] とも比較不能な解を与えており、文献 [Sen01] の中でも明示的にこの文献 [TomSei89] を参照している。更に、文献 [TomSei89] の結果は、

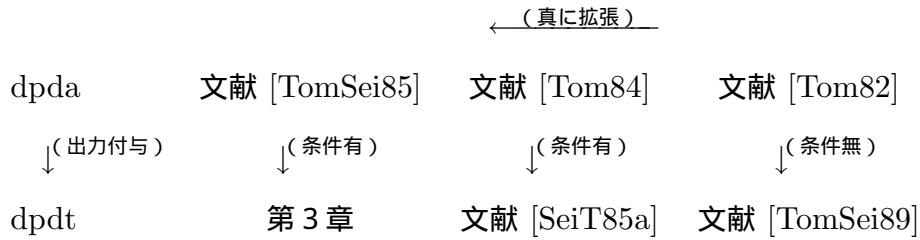
文献 [Le90] においても，文脈自由言語における主要な成果のひとつとして紹介されている．そして更に，筆者らは，この文献 [TomSei89] の結果を真に包含する拡張として，文献 [SeiT85a] を発表している．文献 [SeiT85a] は，文献 [Tom84] で対象とした ε -推移を許した dpda 対に，ある条件のもとで出力機構を付与した dpdt 対に対しても，等価性判定が可解であることを示している．なお，この文献 [SeiT85a] の結果は，後述する本論文の第 3 章の内容である文献 [SeiTW07a] を発表するまで，これを真に包含する結果は発表されていなかったものである．

また，これまで，筆者らの成果を除く殆どの dpdt の等価性判定に関する結果は，いわば原理的な可解性の証明を達成しているという段階であり，極く簡単な問題に対してさえ，その可解性を示す具体的例題を与える，あるいは，何らかの具体的計算量評価を与えることも困難な状況であった．唯一，2007 年に発表された前述の文献 [Ba07] の結果は，簡単化されたアルゴリズムによるもので，具体的な例題も示している．今後は，このような dpdt の等価性判定アルゴリズムの効率向上に関する研究も注目されてくるものと考えられる．なお，文献 [Ba07] の方式については，まず，出力部分の扱いはにおいて，筆者らが文献 [TomSei89] において発表している手法と基本的に非常に類似した手法によるものである．また，文献 [Ba07] における出力を無視した単純決定性言語同士の（同文献と同様の定義による）多項式時間の等価性判定の可解性は，文献 [WT91] において，文献 [Ba07] の方式に類似した直接的分岐アルゴリズムの一手法により，既に得られている．ここで，文献 [TomSei89] は，前述のように，文献 [Le90] やゲーデル賞受賞論文 [Sen01] などにおいても紹介されており，文献 [WT91] も，その結果は文献 [TT00]，[TTWT04] において明確に参照されているにも関わらず，文献 [Ba07] では，文献 [TomSei89] や文献 [WT91] を一切引用していない．しかしながら，筆者らが開発してきた文献 [TomSei89] などの直接的分岐アルゴリズムの手法に非常に類似した方式を用いるこの文献 [Ba07] の出版は，直接的分岐アルゴリズムの汎用性を示す証の一つとも言える．

1.2 本論文の概要

本論文は、5つの章で構成されている。第1章は序章であり、研究の背景、位置づけ、目的、従来の研究状況、本研究の基礎的概念、および、本論文の章構成について述べている。第2章では、本論文で共通的に使用する、用語の定義、および、記法について述べている。そして、第3章と第4章が本論文の主要な内容となる。本論文では、これまで筆者らが提唱してきた直接的分岐アルゴリズムによる dpdt の等価性判定手法の更なる改善について、以下の2つの面から検討を行った。ひとつは、本手法を用いた dpdt の等価性判定を可解とする十分条件の緩和に関する検討であり、もうひとつは、最大時間計算量の改善に関する検討である。この2つの検討に対する成果を、各々第3章と第4章で詳細に紹介する。最後の第5章では、本論文の成果を総括し、今後の展望を述べている。以下、本節では、第3章と第4章の概要を説明する。

まず、第3章では、dpdt の等価性判定を可解とする十分条件の緩和に関する検討の成果として、文献 [TomSei85] で対象とした Weak Segmental Property と名付けた性質を持つ ε -推移を許した dpda 対に、ある条件のもとで出力機構を付与した dpdt 対に対しても等価性判定が可解であることを示している。この出力条件は、片方の dpdt における任意の ε -推移に対する出力長が、ある有限の定数以下であることを保証するもので、つまり、入力無しで出力が無限に出続けることを抑制するものである。従って、dpdt の動作として極めて自然な条件と考えられる。この結果は、文献 [SeiT85a], [TomSei89] の結果を真に包含する拡張であり、直接的分岐アルゴリズムによる dpdt の等価性判定を可解とする十分条件を従来より大きく緩和した。現時点において、ここで提唱する dpdt 対を真に包含する等価性判定可能なクラス対は存在しない。また、この結果は、今後の ε -推移を許した dpdt の等価性判定問題における、更なるクラス拡張において有効に活用できるものとする。具体的なアルゴリズムは、[TomSei89] のアルゴリズムを基礎として、 ε -推移に対する対策として、前述の Weak Segmental Property なる性質を持つ dpda 対に対する文献 [TomSei85] の手法を応用している。ここで、直接的分岐アルゴリズムによる dpda と dpdt に対する等価性判定問題に関する各論文の関係をまとめると、以下のようになる。



なお，第 3 章の内容は，文献 [SeiTW06], [SeiTW07a] として発表している．

次に，第 4 章では，最大時間計算量の改善に関する検討の成果として，dpdt のある部分クラスである，実時間空スタック受理式決定性限定ワンカウンター変換器について，その等価性判定が多項式時間で解決できることを証明する．この dpdt クラスは，スタック記号が単一で，かつ， ε -推移を許さない，実時間空スタック受理式決定性限定ワンカウンターオートマトンに対して出力機構を付与したものである．そのアルゴリズムは，文献 [TomSei89], [SeiTW07a] のアルゴリズムを本対象 dpdt に特化して単純化したものであるが，具体的に，詳細な計算量解析とその証明を行っている．この結果は，直接的分岐アルゴリズムの有効性を示す，ひとつの典型的な成果であり，今後の多項式時間等価性判定が可解である dpdt クラスの検討における基礎となり得るものと考えられる．なお，この結果は，先に紹介した，出力を付与した単純決定性言語同士の多項式時間等価性判定に関する文献 [Ba07] の結果とも比較不能であり，現時点において，これを真に包含する結果は存在しない．

なお，上記第 3 章，第 4 章ともに，その等価性判定アルゴリズムの単純さや効率性を直感的に理解し易くするために，実際の dpdt に対する等価性判定の基本例題を示した．前述したように，他の多くの方式ではこのような具体的例題を示すこと自体が非常に困難な状況である．

第 2 章

事前準備

2.1 本論文の各章共通の定義と表記法

本論文で使用する定義と表記法は、文献 [Tom82], [Tom84], [TomSei85], [TomSei89] を基礎としている。具体的には、dpda に関しては、文献 [Tom82] の Definition 2.1. ~ 2.7. , 文献 [Tom84] の Definition 2.1. ~ 2.8. , および、文献 [TomSei85] の Definition 2.1. ~ 2.3. を、また、dpdt に関しては、文献 [TomSei89] の Definition 2.1. ~ 2.5. を、そのまま使用する。

定義 2.1.1 (文献 [Tom84], p.88, Definition 2.1., 文献 [TomSei89], p.40, Definition 2.1. 参照) dpdt T を次のように表記する。

$$T = (Q, \Gamma, \Sigma, \Delta, \mu, q_0, Z_0, \phi).$$

ここで、 Q は状態集合、 Γ はスタック記号集合、 Σ は入力記号集合、 Δ は出力記号集合、 μ は推移規則の集合、 q_0 は初期状態、 Z_0 は初期スタック記号、 ϕ は空スタック受理式を表す。更に、 μ の要素は、 $p, q \in Q, A \in \Gamma, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, z \in \Delta^*, \theta \in \Gamma^*$ に対して、 $(p, A) \xrightarrow{a/z} (q, \theta)$ の様な形式をとる。ここで、 z, q, θ の各々は p, A, a の組に対して一意に定められる。また、 $a = \varepsilon$ である場合、この規則を ε -規則と呼び、このとき、いかなる $a' \in \Sigma, z' \in \Delta^*, (q', \theta') \in Q \times \Gamma^*$ に対しても、 μ の要素に $(p, A) \xrightarrow{a'/z'} (q', \theta')$ なる規則は含まない。更に、次の dpda M を、dpdt T の随伴 dpda と呼ぶ。

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \phi).$$

ここで, δ は次のような推移規則の集合である.

$$\delta = \{(p, A) \xrightarrow{a} (q, \theta) \mid (p, A) \xrightarrow{a/z} (q, \theta) \in \mu\}.$$

なお, 推移規則の集合に ε -規則を一切含まない場合, その dpda, dpdt は実時間であると言う.

定義 2.1.2 (文献 [Tom84], p.89, Definition 2.2., 2.3., 文献 [TomSei89], p.40, Definition 2.2. 参照) dpdt T の計算状況を $(p, \alpha) \in Q \times \Gamma^*$ と表記する. ここで, 記号列 α の左端をスタックの先頭とする. また, $\alpha = A\alpha'', A \in \Gamma$ としたとき, 計算状況 $(p, A\alpha'')$ に, ある推移規則 $(p, A) \xrightarrow{a/z} (q, \theta) \in \mu$ が適用されて dpdt T が1ステップ推移する状況を次のように表記する.

$$(p, A\alpha'') \xrightarrow[T]{a/z} (q, \theta\alpha'').$$

同じく, その随伴 dpda M に関して次のように表記する.

$$(p, A\alpha'') \xrightarrow[M]{a} (q, \theta\alpha'').$$

なお, この計算状況に適用可能な推移規則の中に $(p, A) \xrightarrow{a/z} (q, \theta) \in \mu, (|\theta| \geq 1)$ のような規則が含まれる場合, 計算状況 (p, α) は非減少モードであるという.

次に, ある $p_i \in Q, \alpha_i \in \Gamma^+, a_i \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, z_i \in \Delta^*, 1 \leq i \leq m, p_{m+1} \in Q, \alpha_{m+1} \in \Gamma^*$ に対して, 次のような m 回連続した1ステップ推移の系列を考える.

$$\begin{aligned} & (p_1, \alpha_1) \xrightarrow[T]{a_1/z_1} (p_2, \alpha_2), (p_2, \alpha_2) \xrightarrow[T]{a_2/z_2} (p_3, \alpha_3), \\ & \dots, (p_m, \alpha_m) \xrightarrow[T]{a_m/z_m} (p_{m+1}, \alpha_{m+1}). \end{aligned}$$

この状況を次のように表記する.

$$(p_1, \alpha_1) \xrightarrow[T]{x/z}^{(m)} (p_{m+1}, \alpha_{m+1})$$

ただし, $x = a_1 a_2 \dots a_m, z = z_1 z_2 \dots z_m$.

同じく, その随伴 dpda M に関して次のように表記する.

$$(p_1, \alpha_1) \xrightarrow[M]{x}^{(m)} (p_{m+1}, \alpha_{m+1}).$$

更に, ある $\alpha'' \in \Gamma^*$ が存在して, 各ステップにおいて $\alpha_i = \alpha'_i \alpha''$, $\alpha'_i \in \Gamma^+$, $1 \leq i \leq m+1$ である場合, $| \notin \Gamma$ なる記号を用いて, 次のように表記する.

$$(p_1, \alpha'_1 | \alpha'') \xrightarrow[T]{x/z}^{(m)} (p_{m+1}, \alpha'_{m+1} | \alpha'').$$

同じく, その随伴 dpda M に関して次のように表記する.

$$(p_1, \alpha'_1 | \alpha'') \xrightarrow[M]{x}^{(m)} (p_{m+1}, \alpha'_{m+1} | \alpha'').$$

なお, 上記の各 “ (m) ” は省略することもある.

定義 2.1.3 (文献 [Tom84], p.89, Definition 2.3. 参照) dpdt T の計算状況 $(p, \alpha), (q, \beta) \in Q \times \Gamma^*$ において, ある $x \in \Sigma^*, y \in \Delta^*$ が存在し,

$$(p, \alpha) \xrightarrow[T]{x/y} (q, \beta)$$

であるとき, いかなる $(r, \gamma) \in Q \times \Gamma^*$ に対しても,

$$(q, \beta) \xrightarrow[T]{\varepsilon/\varepsilon} (r, \gamma), (q, \beta) \neq (r, \gamma)$$

なる推移が存在しない場合, 次のように表記する.

$$(p, \alpha) \xrightarrow[T]{x/y} \dashrightarrow (q, \beta).$$

また, いかなる $(r, \gamma) \in Q \times \Gamma^*$ に対しても,

$$(p, \alpha) \xrightarrow[T]{x/y} (r, \gamma)$$

$$(r, \gamma) \xrightarrow[T]{\varepsilon/\varepsilon} (q, \beta), (q, \beta) \neq (r, \gamma)$$

なる推移が存在しない場合, 次のように表記する.

$$(p, \alpha) \xrightarrow[T]{x/y} \dashrightarrow | (q, \beta).$$

なお, その随伴 dpda M に関して, 上記定義の出力部分を除いた定義に対して, 各々次のように表記する.

$$(p, \alpha) \xrightarrow[M]{x} \dashrightarrow (q, \beta), (p, \alpha) \xrightarrow[M]{x} \dashrightarrow | (q, \beta).$$

定義 2.1.4 (文献 [TomSei89], p.41, Definition 2.4 参照) 出力記号列 $w, h, t \in \Delta^*$ について, $w = ht$ である場合, $h^{-1}w = t$, あるいは, $wt^{-1} = h$ と表記する. また, 出力記号集合 Δ に関して, Δ^{-*} および $\Delta^{\pm*}$ を次のような集合と定義する.

$$\Delta^{-*} = \{h^{-1} \mid h \in \Delta^*\}, \quad \Delta^{\pm*} = \Delta^* \cup \Delta^{-*}.$$

なお, Δ^{-*} に空記号列を含まない場合は, Δ^{-+} と表記する. 更に, 改めて, $h \in \Delta^{\pm*}$, および, $k^{-1} \in \Delta^{-*}$, $k \in \Delta^*$ として, 以下のような記号列長を定義する.

$$\|h\| = \begin{cases} |h|, & (h \in \Delta^*) \\ |k|, & (h = k^{-1} \in \Delta^{-*}) \end{cases}$$

$$|k^{-1}| = -|k|.$$

定義 2.1.5 (文献 [Tom84], p.90, Definition 2.4., 2.5., 2.6., 2.7., 文献 [TomSei89], p.41, Definition 2.3. 参照) dpdt T の計算状況 $(p, \alpha) \in Q \times \Gamma^*$ に対して以下を定義する. なお, 随伴 dpda を M とする.

$$\text{EMP}(p, \alpha) =$$

$$\{q \in Q \mid (p, \alpha) \xrightarrow[M]{x} (q, \varepsilon) \text{ for some } x \in \Sigma^*\}$$

$$L(p, \alpha) =$$

$$\{x \in \Sigma^* \mid (p, \alpha) \xrightarrow[M]{x} (q, \varepsilon) \text{ for some } q \in Q\}$$

$$\text{TRANS}(p, \alpha) = \{x/y \in \Sigma^* \times \Delta^* \mid$$

$$(p, \alpha) \xrightarrow[T]{x/y} (q, \varepsilon) \text{ for some } q \in Q\}$$

$$L(M) = L(q_0, Z_0)$$

$$\text{TRANS}(T) = \text{TRANS}(q_0, Z_0).$$

更に, ある $p' \in Q$, $\alpha' \in \Gamma^*$ に対して, $(p, \alpha) \xrightarrow[M]{\varepsilon} (p', \alpha')$, であるとして, 以下を定義する.

$$\text{FIRST}(p, \alpha) =$$

$$\begin{cases} \{a \in \Sigma \mid (p', A) \xrightarrow{a} (q, \theta) \in \delta, \alpha' = A\alpha'' \\ \text{for some } A \in \Gamma, \alpha'' \in \Gamma^*, \\ q \in Q, \theta \in \Gamma^*\}, (\alpha' \neq \varepsilon) \\ \{\varepsilon\}, (\alpha' = \varepsilon). \end{cases}$$

定義 2.1.6 (文献 [TomSei89], p.41, Definition 2.5. 参照) dpdt T_1, T_2 の計算状況を, 各々 $(p, \alpha), (\bar{p}, \beta)$ とする. また, その随伴 dpda を M_1, M_2 とする. ここで, $L(p, \alpha) = L(\bar{p}, \beta)$ であることを, $(p, \alpha) \equiv (\bar{p}, \beta)$ なる等価式で表記する. ここで, この両計算状況が初期計算状況のとき, 両 dpda は等価であると言い, $M_1 \equiv M_2$ と表記する. さもなくば, 非等価であると言い, $M_1 \not\equiv M_2$ と表記する. 更に, $h \in \Delta^{\pm*}$ に対して,

$$\begin{aligned} \text{TRANS}(p, \alpha) &= h \text{TRANS}(\bar{p}, \beta) \\ &= \{x/hv \mid x/v \in \text{TRANS}(\bar{p}, \beta)\} \end{aligned}$$

であることを, 次のような等価式で表記する.

$$(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta).$$

ここで, ある $k \in \Delta^*$ について $h = k^{-1}$ である場合, この等価式は,

$$\{x/ku \mid x/u \in \text{TRANS}(p, \alpha)\} = \text{TRANS}(\bar{p}, \beta)$$

であることを意味し, 次のようにも表記する.

$$k(p, \alpha) \equiv (\bar{p}, \beta).$$

ここで, この両計算状況が初期計算状況で, 且つ, $h = \varepsilon$ のとき, 両 dpdt は等価であると言い, $T_1 \equiv T_2$ と表記する. さもなくば, 非等価であると言い, $T_1 \not\equiv T_2$ と表記する. なお, 上記の等価式における $h, k \in \Delta^{\pm*}$ は, 等価式両辺の計算状況の出力のズレを調整する働きをする意味をもつことから, 出力調整部分と呼ぶ.

定義 2.1.7 (文献 [Tom84], p.91, Definition 2.8. 参照) 記号列 $x (\in \Sigma^*, \in \Gamma^*$ など) と非負定数 m について, 次の表記を定義する.

$$\begin{aligned} {}^{(m)}x &= \begin{cases} x', & (|x| > m, x = x'x'', |x'| = m) \\ x, & (|x| \leq m) \end{cases} \\ x^{(m)} &= \begin{cases} x'', & (|x| > m, x = x'x'', |x''| = m) \\ x, & (|x| \leq m). \end{cases} \end{aligned}$$

第 3 章

DPDT の等価性判定を可解とする ある十分条件

3.1 概説

最近の dpdt の等価性判定に関する特筆すべき成果としては、Sénizergues による文献 [Sen01] があげられる。これは、任意の dpda に対する等価性判定の可解性を示すと同時に、それに、出力記号列集合がアーベル群に属するという条件のもとで出力を付与した dpdt に対する等価性判定の可解性も示している。一方、筆者らの直接的分岐アルゴリズムを用いた dpdt に対する等価性判定に関しては、文献 [TomSei89] において、文献 [Tom82] で対象とした一方が実時間空スタック受理式である dpda 対に、任意に出力機構を付与した dpdt 対に対する等価性判定の可解性を示している。そして、この結果は、文献 [Sen01] の結果とは比較不能である。更に、文献 [TomSei89] の結果を真に包含する拡張として、文献 [SeiT85a] では、文献 [Tom84] で対象とした ε -推移を許した dpda 対に、ある条件のもとで出力機構を付与した dpdt 対に対しても、等価性判定が可解であることを示している。この出力条件は、本章 3 節の条件 2 に詳細を記述するが、片方の dpdt における任意の ε -推移に対する出力長が、ある有限の定数以下であることを保証するもので、つまり、入力無しで出力が無限に出続けることを抑制するものである。従って、dpdt の動作としてごく自然な条件と考えられる。

このような背景のもと、本章では、直接的分岐アルゴリズムによる dpdt の等価性判定

を可解とする十分条件の更なる緩和に関する検討を行い，文献 [SeiT85a] の真の拡張となる結果を得た．具体的には，文献 [Tom84] の真の拡張である文献 [TomSei85] で対象とした ε -推移を許した dpda 対に対して，文献 [SeiT85a] と同じ条件下で出力機構を設けた dpdt 対に対しても，その等価性判定が可解であることを示す．これにより，直接的分岐アルゴリズムの手法を用いて等価性判定を解決できる dpdt のクラス対が真に拡張される．そして，現時点において，ここで提唱する dpdt 対を真に包含する等価性判定可能なクラス対は存在しない．

本章の内容は，関連論文 (3) (文献 [SeiTW07a]) に準じている．

3.2 定義と表記法

以下に、本章で使用する定義と表記法を記す。

定義 3.2.1 (文献 [Tom84], p.91, Definition 3.2. 参照)

dpdt T の計算状況 $(p, \alpha\beta\gamma) \in Q \times \Gamma^*$ において、全ての $q \in \text{EMP}(p, \alpha)$ に対して、各々ある $r \in Q$ が存在し、 $(q, \beta) \xrightarrow[T]{\varepsilon/\varepsilon} (r, \varepsilon)$ 、すなわち、 $\text{EMP}(q, \beta) = \{r\}$ であるとき、 β を $(p, \alpha\beta\gamma)$ 中の入出力 ε -セグメントと呼ぶ。さもなくば、入出力セグメントと呼ぶ。更に、その随伴 dpda M に関して同様に、全ての $q \in \text{EMP}(p, \alpha)$ に対して、各々ある $r \in Q$ が存在し、 $(q, \beta) \xrightarrow[M]{\varepsilon} (r, \varepsilon)$ 、すなわち、 $\text{EMP}(q, \beta) = \{r\}$ であるとき、 β を入力 ε -セグメント (あるいは、単に ε -セグメント) と呼ぶ。さもなくば、入力セグメントと呼ぶ。また、入出力セグメント $\beta \in \Gamma^+$ が、入出力 ε -セグメントであるような部分記号列 $\beta_2 \in \Gamma^+ (\beta = \beta_1\beta_2\beta_3, \beta_1, \beta_3 \in \Gamma^*)$ を含まない、極大長の記号列であるとき、 β は正準入出力セグメントであるという。

定義 3.2.2 (文献 [Tom84], p.91, Definition 3.2., p.94, Definition 3.7., p.95, Remark 3.8. 参照)

dpdt T の計算状況 $(p, \beta) \in Q \times \Gamma^*$ において、 $\beta = \lambda_0\beta_1\lambda_1\beta_2\lambda_2 \cdots \beta_l\lambda_l$ 、但し、 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ は、 (p, β) 中の入出力 ε -セグメント、 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ は正準入出力セグメントであるとき、次のように表記する。

$$\text{RW-Seg}(p, \beta) = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_l.$$

更に、ある計算状況 $(p, \gamma) \in Q \times \Gamma^*$ において、 $\gamma = \nu_0\beta_1\nu_1\beta_2\nu_2 \cdots \beta_l\nu_l$ 、 $\text{RW-Seg}(p, \gamma) = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_l$ 、且つ、 $\text{EMP}(p, \lambda_0) = \text{EMP}(p, \nu_0)$ であるとする。ここで、 $\text{EMP}(p, \lambda_0\beta_1\lambda_1\beta_2\lambda_2 \cdots \beta_i) = \text{EMP}(p, \nu_0\beta_1\nu_1\beta_2\nu_2 \cdots \beta_i)$ 、 $(i = 1, 2, \dots, l)$ が成り立ち、且つ、全ての $q \in \text{EMP}(p, \lambda_0\beta_1\lambda_1\beta_2\lambda_2 \cdots \beta_i)$ について、各々ある $r \in Q$ が存在し、 $(q, \lambda_i) \xrightarrow[T]{\varepsilon/\varepsilon} (r, \varepsilon)$ 、且つ、 $(q, \nu_i) \xrightarrow[T]{\varepsilon/\varepsilon} (r, \varepsilon)$ 、すなわち、 $\text{EMP}(q, \lambda_i) = \text{EMP}(q, \nu_i) = \{r\}$ 、であるとき、次のように表記する。

$$(p, \beta) \cong (p, \gamma).$$

また, ある \mathcal{H} について, $\beta = \beta'\beta'', \beta'' = \beta^{(\mathcal{H})}, \gamma = \gamma'\gamma'', \gamma'' = \gamma^{(\mathcal{H})}$, であるとき, $(p, \beta') \cong (p, \gamma')$, 且つ $\beta'' = \gamma''$ であるならば, 次のように表記する.

$$(p, \beta) \stackrel{\mathcal{H}}{\cong} (p, \gamma).$$

定義 3.2.3 (文献 [TomSei85], p.223, Definition 2.1. 参照)

dpdt T の計算状況 $(p, \alpha) \in Q \times \Gamma^+$ において, ある $x \in \Sigma^+, y \in \Delta^*, r \in Q, \gamma \in \Gamma^*$ が存在して, $(p, \alpha) \xrightarrow[T]{x/y} (r, \gamma)$ であるとする. 更に, $\alpha' \in \Gamma^+$ を $(p, \alpha') \xrightarrow[T]{x/y} (r, \gamma')$, $\alpha = \alpha'\alpha'', \gamma = \gamma'\alpha''$ を満たす, α の最短の接頭辞であるとする. ここで,

$$\begin{aligned} (p, \alpha') &\xrightarrow[T]{\varepsilon/\varepsilon} (p_1, B_1\beta_1) \xrightarrow[T]{x_1/y_1} (q_1, \beta_1) \xrightarrow[T]{\varepsilon/\varepsilon} \\ (p_2, B_2\beta_2) &\xrightarrow[T]{x_2/y_2} (q_2, \beta_2) \dots \xrightarrow[T]{\varepsilon/\varepsilon} \\ (p_m, B_m\beta_m) &\xrightarrow[T]{x_m/y_m} (q_m, \beta_m) \xrightarrow[T]{\varepsilon/\varepsilon} \\ (p_{m+1}, B_{m+1}) &\xrightarrow[T]{x''/y''} (r, \gamma'), \quad m \geq 0 \end{aligned}$$

但し, $x = x_1x_2 \dots x_mx''$, $y = y_1y_2 \dots y_my''$,

$$B_i \in \Gamma, \beta_i \in \Gamma^+, p_i, q_i \in Q,$$

$$x_i \neq \varepsilon \text{ or } y_i \neq \varepsilon, 1 \leq i \leq m, p_{m+1} \in Q,$$

$$\text{更に, } B_{m+1} \in \Gamma, \gamma' \neq \varepsilon, \text{ あるいは, } B_{m+1} = \varepsilon$$

であるとき, 次のように表記する.

$$\text{RW-Seg} \left[(p, \alpha) \xrightarrow[T]{x/y} (r, \gamma) \right] = B_1B_2 \dots B_mB_{m+1}$$

$$\text{RW-Pop} \left[(p, \alpha) \xrightarrow[T]{x/y} (r, \gamma) \right] =$$

$$\begin{cases} (p_1, B_1)q_1(p_2, B_2)q_2 \\ \dots (p_m, B_m)q_m(p_{m+1}, B_{m+1}), \\ \hspace{15em} (B_{m+1} \in \Gamma) \\ (p_1, B_1)q_1(p_2, B_2)q_2 \dots (p_m, B_m), \\ \hspace{15em} (B_{m+1} = \varepsilon). \end{cases}$$

更に, 上記定義を随伴 dpda M について考え,

$$(p, \alpha') \xrightarrow[M]{\varepsilon} (p_1, B_1\beta_1) \xrightarrow[M]{x_1} (q_1, \beta_1) \xrightarrow[M]{\varepsilon}$$

$$(p_2, B_2\beta_2) \xrightarrow[M]{x_2} (q_2, \beta_2) \dots \xrightarrow[M]{\varepsilon}$$

$$(p_m, B_m\beta_m) \xrightarrow[M]{x_m} (q_m, \beta_m) \xrightarrow[M]{\varepsilon}$$

$$(p_{m+1}, B_{m+1}) \xrightarrow[M]{x''} (r, \gamma'), \quad m \geq 0$$

但し, $x = x_1x_2 \dots x_mx''$,

$$B_i \in \Gamma, \beta_i \in \Gamma^+, p_i, q_i \in Q,$$

$$x_i \neq \varepsilon, 1 \leq i \leq m, p_{m+1} \in Q,$$

更に, $B_{m+1} \in \Gamma, \gamma' \neq \varepsilon$, あるいは, $B_{m+1} = \varepsilon$

であるとき, 次のように表記する.

$$\begin{aligned} \text{Reading-Seg} \left[(p, \alpha) \xrightarrow[M]{x} (r, \gamma) \right] \\ = B_1B_2 \dots B_mB_{m+1}. \end{aligned}$$

定義 3.2.4 (文献 [TomSei85], p.225, Definition 2.3. 参照)

dpdt T の計算状況 $(p, \alpha), (p, \beta) \in Q \times \Gamma^*$ について, ある $x \in \Sigma^+, y \in \Delta^*, r \in Q, \gamma \in \Gamma^*$ が存在して, $(p, \alpha) \xrightarrow[T]{x/y} (r, \gamma)$, 且つ, $\left| \text{RW-Seg} \left[(p, \alpha) \xrightarrow[T]{x/y} (r, \gamma) \right] \right| \leq n$ であったとする. このとき常に, $(p, \beta) \xrightarrow[T]{x/y} (r', \gamma')$, 且つ, $(r, {}^{(1)}\gamma) = (r', {}^{(1)}\gamma')$ が成り立ち, また, $(p, \alpha), (p, \beta)$ が逆の場合にも同関係が成立する場合, 次のように表記する.

$$(p, \alpha) \stackrel{n}{\simeq} (p, \beta).$$

3.3 前提と基本命題

等価性判定を行うべき dpdt 対を $T_1 = (Q_1, \Gamma_1, \Sigma, \Delta, \mu_1, q_{01}, Z_{01}, \phi)$, $T_2 = (Q_2, \Gamma_2, \Sigma, \Delta, \mu_2, q_{02}, Z_{02}, \phi)$ とし, 各々から出力機構を取り除いた dpda (随伴 dpda) を M_1, M_2 とする. ここで, dpdt T_1, T_2 は, 後述の条件 1, 2 を満足することを前提とする. 特に, 条件 1 は, 随伴 dpda M_1, M_2 が文献 [TomSei85], p.224, Definition 2.2. で定義される Weak Segmental Property と呼ばれる性質を満足するというもので, 同文献の結果より, M_1, M_2 の等価性判定は可解であることが証明されている. 従って, 以降, $M_1 \equiv M_2$ を前提とする. 更に, 一般性を失うことなく, 文献 [Tom82], p.194, (A1), (A2) の成立を前提とする. (A1): 任意の推移規則 $(p, A) \xrightarrow{a} (q, \theta) \in \delta$ に対して $|\theta| \leq 2$. (A2): ある $x \in \Sigma^*$, $(q, \omega) \in Q_i \times \Gamma_i^+$ に対して, $(q_{0i}, Z_{0i}) \xrightarrow[M_i]{x} (q, \omega)$ であるとき, 必ず $L(q, \omega) \neq \phi$.

条件 1 (Weak Segmental Property の成立性)

dpdt T_1, T_2 において, その随伴 dpda M_1, M_2 が等価である場合, この dpda 対に依存する, 以下の条件を満足する定数 $\mathcal{R} \geq 1$ が存在する.

$$(q_{01}, Z_{01}) \xrightarrow[M_1]{w} (p, A|\alpha'') \xrightarrow[M_1]{x} (q, \varepsilon|\alpha'') \quad (3.3.1)$$

$$(q_{02}, Z_{02}) \xrightarrow[M_2]{w} (\bar{p}, \beta) \xrightarrow[M_2]{x} (\bar{q}, \gamma) \quad (3.3.2)$$

但し, $w, x \in \Sigma^*$, $p, q \in Q_1$, $A \in \Gamma_1$, $\alpha'' \in \Gamma_1^*$,

$\bar{p}, \bar{q} \in Q_2$, $\beta, \gamma \in \Gamma_2^*$

なる任意の推移に対して, 以下が成立する.

$$\left| \text{Reading-Seg} \left[(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[M_2]{x} (\bar{q}, \gamma) \right] \right| \leq \mathcal{R}.$$

(この条件は, 上記 x に対する推移において, β に含まれるスタック記号のうち, ε -推移以外でポップアップされるものが高々 \mathcal{R} であることを意味する.) □

条件 2 (ε -推移に対する出力長の有限性)

dpdt T_2 について, 以下の条件を満足する, 非負定数 \mathcal{O} が存在する.

$$(q_{02}, Z_{02}) \xrightarrow[T_2]{x_0/v_0} (\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{\varepsilon/v} (\bar{q}, \gamma)$$

但し, $x_0 \in \Sigma^*$, $v_0, v \in \Delta^*$, $\bar{p}, \bar{q} \in Q_2$, $\beta, \gamma \in \Gamma_2^*$

なる任意の推移に対して, $|v| \leq \mathcal{O}$ が成立する。(この条件は, 入力記号を読み込むことなく出力が限りなく長く続くような不自然さを排除する。) □

補題 3.3.1 dpdt T_1, T_2 が前記条件 1, 2 を満足する場合, 次の (i), (ii) が成立する.

(i) 随伴 dpda において, $M_1 \equiv M_2$ である場合, 式 (3.3.1), (3.3.2) の推移について, それに対応する dpdt の推移において,

$$\left| \text{RW-Seg} \left[(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x/u} (\bar{q}, \gamma) \right] \right| \leq \mathcal{R}_T$$

但し, $\mathcal{R}_T = (1 + \mathcal{O})\mathcal{R}$. \mathcal{R} は条件 1 の定数.

(ii) T_2 における到達可能な計算状況から $y \in \Sigma^*$ による推移が可能で, そのときの出力が $v \in \Delta^*$ であるとき, τ_2 を推移規則集合 μ_2 に含まれる規則中の出力長の最大値とすると, 以下が成立する.

$$|v| \leq \mathcal{T}(|y|) \quad \text{但し, } \mathcal{T}(|y|) = (\tau_2 + \mathcal{O})|y|.$$

(証明) まず, (i) について考える. 補題中の $\left| \text{RW-Seg} \left[(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x/u} (\bar{q}, \gamma) \right] \right|$ の値は, 条件 1 の $\left| \text{Reading-Seg} \left[(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[M_2]{x} (\bar{q}, \gamma) \right] \right|$ に比較して, β 中のスタックの中で, 出力が空でない ε -推移でポップアップするものの数だけ大きい値をとる. ここで, 条件 2 により, 出力が空でない ε -推移は高々 \mathcal{O} 回しか続かないことを加味すれば, この値は $(1 + \mathcal{O})\mathcal{R}$ 以下となる. 次に, (ii) について考える. まず, $y = a_1 a_2 \dots a_n$, $a_i \in \Sigma$, $(1 \leq i \leq n)$ とする. ここで, 条件 2 より, 各々の $a_i \in \Sigma$ による推移に伴う ε -推移による出力長は高々 \mathcal{O} であり, 従って, y による推移の中で ε -推移による出力長の総和は高々 $\mathcal{O} \times n = \mathcal{O} \times |y|$ となる. また, y による推移の中で ε -推移以外の推移の出力長の総和は, 高々 $\tau_2 \times n = \tau_2 \times |y|$ である. 従って, $|v| \leq (\tau_2 + \mathcal{O})|y|$. □

さて, 本章の等価性判定法は, 文献 [Tom82], [Tom84], [TomSei85], [TomSei89] を基礎とし, 分岐アルゴリズムによる判定木展開を用いる. 以下に, 本アルゴリズムの基礎となる基本命題を示すが, 以降の論理展開は, 主として文献 [TomSei85], [TomSei89] に準じている. 命題 3.3.1 は, 文献 [TomSei89], p.42, Proposition 3.1. の拡張で, 分岐

(branching) 操作の正当性の基本となる．また，命題 3.3.2, 3.3.3 は，分岐操作のみでは無限に拡張され得る判定木に対し，それを有限に抑えるための跳越し (skipping) 操作が，ある有限の範囲で必ず適用されることを保証する．具体的に，命題 3.3.2 は，スタック長に対する有限性に関与し，命題 3.3.3 は，文献 [TomSei89], p.43, Proposition 3.2. の拡張で，出力に対する有限性に関与する．

命題 3.3.1 $T_1 \equiv T_2$ であるとき，次の (i), (ii) が成立する．

(i) 前記の式 (3.3.1), (3.3.2) の前半の推移に対応する dpdt T_1 および T_2 の推移，

$$(q_{01}, Z_{01}) \xrightarrow[T_1]{w/w_1} (p, \alpha) \quad (3.3.3)$$

$$(q_{02}, Z_{02}) \xrightarrow[T_2]{w/w_2} (\bar{p}, \beta) \quad (3.3.4)$$

但し $w_1, w_2 \in \Delta^*$, $\alpha = A\alpha''$, $\beta = \beta'\beta''$.

に対して， $w_1 h = w_2$ なる，ある $h \in \Delta^{\pm*}$ が存在し，以下が成立する．

$$(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta). \quad (3.3.5)$$

(ii) ある $w' \in \Sigma^*$, $w'_1, w'_2 \in \Delta^*$ に対して，

$$(q_{01}, Z_{01}) \xrightarrow[T_1]{w'/w'_1} (p, \alpha) \quad \text{且つ，}$$

$$(q_{02}, Z_{02}) \xrightarrow[T_2]{w'/w'_2} (\bar{p}, \bar{\beta})$$

但し $\bar{\beta} \in \Gamma_2^*$, $w'_1 h' = w'_2$, $h' \in \Delta^{\pm*}$

であり， $(\bar{p}, \beta) \cong (\bar{p}, \bar{\beta})$ ならば， $h = h'$ が成立する．

(証明) まず，(i) について考える．式 (3.3.5) が不成立ならば，その等価式の定義 (定義 2.1.6) から，直ちに， $T_1 \not\equiv T_2$ となる．従って，その対偶として，式 (3.3.5) の成立が保証される．次に，(ii) について考える． $T_1 \equiv T_2$ の仮定から， $\text{TRANS}(p, \alpha) = h \text{TRANS}(\bar{p}, \beta) = h' \text{TRANS}(\bar{p}, \bar{\beta})$ である．更に，同値式 \cong の定義 (定義 3.2.2) から， $\text{TRANS}(\bar{p}, \beta) = \text{TRANS}(\bar{p}, \bar{\beta})$ である．従って， $h = h'$ が成立する．□

命題 3.3.2 dpdt T_2 の全ての入出力モードの計算状況に対して, $\overset{\mathcal{R}_T}{\simeq}$ ($\mathcal{R}_T \geq 1$) による同値類の数は次の定数以下である .

$$A(\mathcal{R}_T) = (|Q_2||\Gamma_2| + 1)^{(1+|Q_2|)\mathcal{R}_T-1}$$

但し, $\mathcal{R}_T = (1 + \mathcal{O})\mathcal{R}$.

(証明) 基本的に, 文献 [TomSei85], p.226, Lemma 2.5. と同様の証明になるが, 以下に詳細を記述する. まず, 次のような集合を考える .

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(p, \alpha) = & \left\{ \text{RW-Pop} \left[(p, \alpha) \xrightarrow[T_2]{x/y} (r, \gamma) \right] \mid \right. \\ & \left. \left| \text{RW-Seg} \left[(p, \alpha) \xrightarrow[T_2]{x/y} (r, \gamma) \right] \right| \leq \mathcal{R}_T, \right. \\ & \left. \text{for some } x \in \Sigma^*, y \in \Delta^*, (r, \gamma) \in Q_2 \times \Gamma_2^* \right\} \\ \mathcal{D} = & \{ \mathcal{D}(p, \alpha) \mid (p, \alpha) \in Q_2 \times \Gamma_2^+ \} \end{aligned}$$

定義 3.2.2, 3.2.3 から, 上記同値類の数は $|\mathcal{D}|$ に等しい. 更に, $\mathcal{R}_T = 1, 2, 3, \dots$ の各々の場合, $|\mathcal{D}(p, \alpha)|$ の上限は $1, |Q_2|, |Q_2|^2, \dots$ となる. ここで, 定義 3.2.3 の状況を考える. まず, $\mathcal{R}_T = 1$ の場合, $|\mathcal{D}|$ は $(p, \alpha) \xrightarrow[T_2]{\varepsilon/\varepsilon} (p_1, B_1\beta_1), (p_1, B_1) \in Q_2 \times \Gamma_2, \beta_1 \in \Gamma_2^*$ のような全ての (p_1, B_1) の組合せ数となり, $|Q_2||\Gamma_2|$ 以下となる. 次に, $\mathcal{R}_T = 2$ の場合, 上記に加えて, 全ての $q_1 \in \text{EMP}(p_1, B_1)$ に対して, $(q_1, \beta_1) \xrightarrow[T_2]{\varepsilon/\varepsilon} (p_2, B_2\beta_2), (p_2, B_2) \in Q_2 \times (\Gamma_2 \cup \{\varepsilon\}), \beta_2 \in \Gamma_2^*$ のような状況を考えれば, $|\mathcal{D}(p, \alpha)|$ の上限が $|Q_2|$ であること, 且つ, (p_2, B_2) の全ての組合せを考慮して, $|\mathcal{D}|$ は高々 $(|Q_2||\Gamma_2|)(|Q_2||\Gamma_2| + 1)^{|Q_2|}$ となる. この論理展開を繰り返せば, 任意の \mathcal{R}_T に対して, $|\mathcal{D}|$ は次の上限値以下となることがわかる .

$$\begin{aligned} & (|Q_2||\Gamma_2|)(|Q_2||\Gamma_2| + 1)^{|Q_2|}(|Q_2||\Gamma_2| + 1)^{|Q_2|^2} \\ & \quad \dots (|Q_2||\Gamma_2| + 1)^{|Q_2|^{\mathcal{R}_T-1}} \\ & < (|Q_2||\Gamma_2| + 1)^{1+|Q_2|+|Q_2|^2+\dots+|Q_2|^{\mathcal{R}_T-1}} \\ & \leq (|Q_2||\Gamma_2| + 1)^{(1+|Q_2|)\mathcal{R}_T-1} \quad \square \end{aligned}$$

定義 3.3.1 (文献 [TomSei89], p.42, Definition 3.1. 参照)

dpdt T_1, T_2 について, ある $x_0 \in \Sigma^*, u_0, v_0 \in \Delta^*, p \in Q_1, \bar{p} \in Q_2, A \in \Gamma_1, \alpha'' \in \Gamma_1^*, \beta \in \Gamma_2^*$ に対して,

$$(q_{01}, Z_{01}) \xrightarrow[T_1]{x_0/u_0} (p, A\alpha'')$$

$$(q_{02}, Z_{02}) \xrightarrow[T_2]{x_0/v_0} (\bar{p}, \beta)$$

であり, 且つ, ある $h' \in \Delta^{\pm*}$ に対して, $u_0 h' = v_0$ であるとする. 更に, ある $x \in \Sigma^+, u, v \in \Delta^*, \alpha_1 \in \Gamma_1^*, \beta_1 \in \Gamma_2^*$ に対して,

$$(p, A|\alpha'') \xrightarrow[T_1]{x/u} (p, A\alpha_1|\alpha'') \quad (3.3.6)$$

$$(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x/v} (\bar{p}, \beta_1) \quad (3.3.7)$$

$$\text{但し, } \left| \text{RW-Seg} \left[(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x/v} (\bar{p}, \beta_1) \right] \right| \leq \mathcal{R}_T$$

$$\text{且つ, } (\bar{p}, \beta) \stackrel{\mathcal{R}_T}{\simeq} (\bar{p}, \beta_1)$$

であり, 且つ, ある $h \in \Delta^{\pm*}$ に対して, $uh = h'v$ であるとする. ここで, 式 (3.3.6), (3.3.7) のような推移対を $\stackrel{\mathcal{R}_T}{\simeq}$ SE 推移対と呼ぶ. また, この推移対の途中に, $\stackrel{\mathcal{R}_T}{\simeq}$ SE 推移対を一切含まない場合, この $\stackrel{\mathcal{R}_T}{\simeq}$ SE 推移対は極小 (minimal) であると言う.

命題 3.3.3 $T_1 \equiv T_2$ であり, 且つ, 定義 3.3.1 の状況において, 式 (3.3.6), (3.3.7) の推移対が極小であるものとする. ここで, 次の (i) ~ (iii) が成立する.

(i) ある $h'' \in \Delta^{\pm*}$ が存在して, 以下の (a) および (b) が成立する.

$$(a) h', h \in \Delta^* \text{ ならば, } h = h'h''$$

$$(b) h', h \in \Delta^{-*} \text{ ならば, } h^{-1} = h'^{-1}h''$$

(ii) $|\alpha_1| \leq \varphi = |Q_1||\Gamma_1|\mathcal{A}(\mathcal{R}_T)$

(iii) dpdt T_1, T_2 に依存する, ある定数 \mathcal{U} が存在し,

$$\|h\| - \|h'\| \leq \mathcal{U}$$

が成立する. 更に, $\|h'\| \geq \mathcal{U}$ ならば, 以下の (a) 且つ (b) が成立する.

$$(a) h' \in \Delta^* \text{ ならば } h \in \Delta^*, \text{ 且つ,}$$

$$h' \in \Delta^{-*} \quad \text{ならば} \quad h \in \Delta^{-*}$$

$$(b) \|h''\| \leq \mathcal{U}.$$

(証明) まず, (i) について考える. ここでは, その対称性を考慮し, (a) の場合のみを証明すれば十分である. さて, $h = h'h''$ とできない場合を考え,

$$h = tas, \quad h' = tbs'$$

$$\text{但し, } a \neq b, \quad t, s, s' \in \Delta^*, \quad a, b \in \Delta$$

とする. ここで, $uh = h'v$ より, 以下が成立する.

$$utas = tbs'v.$$

この式から, 直ちに $u \neq \varepsilon$ であることがわかる. 更に, 同じ $\overset{\mathcal{R}_T}{\simeq}$ SE 推移対が n 回繰り返される場合を考慮すると, 入力 x^n に対して, 各々の出力は u^n, v^n となり, このとき, ある $g, g' \in \Delta^*$ が存在し,

$$u^n g = hv^n = tasv^n, \quad u^n g' = h'v^n = tbs'v^n$$

とできるはずである. しかし, n が十分大きい場合, いずれは, $|u^n| \geq |t|$ のような状況となるが, この場合, $h = tas, h' = tbs', a \neq b$ という仮定に矛盾が生じる. 従って, $h = h'h''$ が成立する.

次に, (ii) については, $|\alpha_1|$ が φ を超えると, 命題 3.3.2 の成立, および, φ の定義からも明らかなように, 必ず途中に $\overset{\mathcal{R}_T}{\simeq}$ SE 推移対が存在することになる. これは, 式 (3.3.6), (3.3.7) の $\overset{\mathcal{R}_T}{\simeq}$ SE 推移対が極小であるという仮定に反する. 従って, (ii) の成立が保証される.

最後に, (iii) の成立性を証明する. ここで, T_1 の推移ステップ数について考える. まず. 上記 (ii) の成立より, ステップ数が $|Q_1|(|\Gamma_1| + 1)^\varphi$ を超えれば, 式 (3.3.6) の状況が得られる. 更に, 命題 3.3.2 の成立より, ステップ数が $\mathcal{U}_0 = |Q_1|(|\Gamma_1| + 1)^\varphi \mathcal{A}(\mathcal{R}_T)$ を超えれば, 式 (3.3.6), (3.3.7) のような $\overset{\mathcal{R}_T}{\simeq}$ SE 推移対が存在する. つまり, 極小の $\overset{\mathcal{R}_T}{\simeq}$ SE 推移対において, その推移ステップ数は, \mathcal{U}_0 以下となる. 従って, $|x| \leq \mathcal{U}_1$, $|u| \leq \mathcal{U}_2$ なるある定数 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ が存在する. また, T_2 が条件 2 を満足することにより補題 3.3.1(ii) が成立するため, $\mathcal{U}_3 = \mathcal{T}(\mathcal{U}_1)$ とすれば, $|v| \leq \mathcal{U}_3$ が成り立つ. ここで, 改め

て, $\mathcal{U} = \text{Max}\{\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3\}$ とすると, 以下のようになる.

$$|u| \leq \mathcal{U} \quad \text{且つ} \quad |v| \leq \mathcal{U}.$$

ここで, $uh = h'v$ であるため,

$$\|h| - |h'\| = \|v| - |u| \leq |v| \leq \mathcal{U}$$

となり, (iii) の前半が成立する. 後半については, 上記結果に加え, $\|h'\| \geq \mathcal{U}$ であることを仮定すれば, 直ちに (a) が成立し, このとき, $\|h''\| = \|h| - |h'\|$ となり, 同時に (b) も成立する. \square

補題 3.3.2 $T_1 \equiv T_2$ であり, 且つ, 式 (3.3.3), (3.3.4) のような推移に対して, 式 (3.3.5) が成り立つならば, 以下が成立する.

$$|\text{RW-Seg}(\bar{p}, \beta)| \leq \mathcal{B}(|\alpha|)$$

$$\text{但し, } \mathcal{B}(|\alpha|) = (1 + |Q_2|)^{\mathcal{R}_T|\alpha|-1}.$$

(証明) 補題 3.3.1 の成立より, 任意の $x \in L(\bar{p}, \beta)$, $\bar{r} \in \text{EMP}(\bar{p}, \beta)$ に対して,

$$\left| \text{RW-Seg} \left[(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x/y} (\bar{r}, \varepsilon) \right] \right| \leq \mathcal{R}_T|\alpha|$$

が成立する. 以降, 定義 3.2.3 を考慮し, 文献 [TomSei85], p.226, Lemma 2.6. と同様に, 次の Claim の成立を証明することにより本補題の証明とする.

Claim 任意の $x \in L(\bar{p}, \beta)$ に対して, ある $y \in \Delta^*$, $\bar{r} \in Q_2$, および, 正の整数 n が存在し,

$$\left| \text{RW-Seg} \left[(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x/y} (\bar{r}, \varepsilon) \right] \right| \leq n$$

である場合, 以下が成立する.

$$|\text{RW-Seg}(\bar{p}, \beta)| \leq (1 + |Q_2|)^{n-1}.$$

Claim の証明 整数 n に対する数学的帰納法により証明を行う. まず, $n = 1$ の場合は明らか. 次に, $n = k (k \geq 1)$ でのこの Claim の成立を仮定した場合に, $n = k + 1$ でも

同 Claim が成立することを示す．ここで，任意の $x \in L(\bar{p}, \beta)$ ，ある $y \in \Delta^*$ ， $\bar{r} \in Q_2$ に対して，

$$\left| \text{RW-Seg} \left[(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x/y} (\bar{r}, \varepsilon) \right] \right| \leq k + 1$$

であったとする．更に， $(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{\varepsilon/\varepsilon} (\bar{q}, C\gamma')$ ， $(\bar{q}, C) \in Q_2 \times \Gamma_2$ ， $\gamma' \in \Gamma_2^*$ に対して， $\text{EMP}(\bar{q}, C) = \{\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_m\}$ ， $(m \leq |Q_2|)$ であるとする．ここで，以下の展開により，Claim の成立が証明される．

$$\begin{aligned} |\text{RW-Seg}(\bar{p}, \beta)| &\leq |C| + \sum_{i=1}^m |\text{RW-Seg}(\bar{r}_i, \gamma')| \\ &\leq 1 + \sum_{i=1}^m (1 + |Q_2|)^{k-1} \end{aligned}$$

(帰納法の仮定による)

$$\begin{aligned} &\leq 1 + |Q_2|(1 + |Q_2|)^{k-1} \\ &\leq (1 + |Q_2|)^{(k+1)-1}. \quad \square \end{aligned}$$

3.4 等価性判定アルゴリズム

本アルゴリズムは, dpdt T_1, T_2 の初期計算状況に対する等価式 $(q_{01}, Z_{01}) \equiv (q_{02}, Z_{02})$ を根とする判定木を, 以下で説明する「分岐」, 「跳越し」の操作により逐次その子節点を導入し展開することにより行なう. さて, 推移 (3.3.3), (3.3.4) に対応して, 節点 (3.3.5) が判定木中に導入され, その成立性が着目されたとする. ここで, $\alpha = \beta = \varepsilon$ である場合, $T_1 \equiv T_2$ であるためには, $h = \varepsilon$ でなければならない. このチェックを終端チェックと呼ぶ. また, 判定木中に $(p, \alpha) \equiv h'(\bar{p}, \beta)$ なる節点が既に存在している場合, $T_1 \equiv T_2$ であるためには, $h = h'$ でなければならない. このチェックを出力の一意性チェックと呼ぶ. このいずれかのチェックが不成立である場合, 直ちに “ $T_1 \neq T_2$ ” と判定を下し, 全手続きを終了する. 以下では, 着目節点 (3.3.5) が, この両チェックの対象外である場合を考える.

3.4.1 分岐

本分岐操作は, 文献 [TomSei89], p.44, 4.1.Branching の操作に加えて, T_2 側の ε -モードを考慮したものである.

補題 3.4.1 dpdt T_1, T_2 の計算状況対 $(p, \alpha), (\bar{p}, \beta)$ に対して, 等価式 (3.3.5) が成立することと, 次の (i)(ii) が成立することは同値である.

(i)(a) $(p, \alpha), (\bar{p}, \beta)$ が共に入力モードである場合, 全ての $a_i \in \text{FIRST}(p, \alpha) = \text{FIRST}(\bar{p}, \beta) = \{a_1, a_2, \dots, a_l\} \subseteq \Sigma$ における推移,

$$(p, \alpha) \xrightarrow{T_1}^{a_i/u_i} (p_i, \alpha_i) \quad \text{且つ} \quad (\bar{p}, \beta) \xrightarrow{T_2}^{a_i/v_i} (\bar{p}_i, \beta_i)$$

に対して, ある適当な $h_i \in \Delta^{\pm*}$ が存在して, $u_i h_i = h v_i$ が成立する.

(b) (p, α) が ε -モードである場合, ある $u_1 \in \Delta^*$, $(p_1, \alpha_1) \in Q_1 \times \Gamma_1^*$ について,

$$(p, \alpha) \xrightarrow{T_1}^{\varepsilon/u_1} (p_1, \alpha_1)$$

であるとき, ある適当な $h_1 \in \Delta^{\pm*}$ が存在して, $u_1 h_1 = h$ が成立する. ここで, 後述 (ii) に対応して, $(\bar{p}, \beta) = (\bar{p}_1, \beta_1)$, $l = 1$ とする.

(c) (p, α) が入力モード, (\bar{p}, β) が ε -モードである場合, ある $v_1 \in \Delta^*$, $(\bar{p}_1, \beta_1) \in Q_2 \times \Gamma_2^*$ について,

$$(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{\varepsilon/v_1} (\bar{p}_1, \beta_1)$$

であるとき, ある適当な $h_1 \in \Delta^{\pm*}$ が存在して, $h_1 = hv_1$ が成立する. ここで, 後述 (ii) に対応して, $(p, \alpha) = (p_1, \alpha_1)$, $l = 1$ とする.

(ii) 上記 (i) の各々の場合に対して, 以下が成立する.

$$(p_i, \alpha_i) \equiv h_i(\bar{p}_i, \beta_i), \quad 1 \leq i \leq l. \quad (3.4.1)$$

(証明) (i) の場合, (a),(b),(c) のいずれかが成立しなければ, 明らかに式 (3.3.5) は成立しない. 同様に, (ii) の場合も, 式 (3.4.1) が成立しなければ, 明らかに式 (3.3.5) も成立しない. 従って, その対偶により上記補題の成立が保証される. \square

上記補題 3.4.1 (i) の成立性に対するチェックを, 分岐出力チェックと呼び, そのチェックが成功であるとき, 全ての i に対する等価式 (3.4.1) を着目節点 (3.3.5) の子節点として判定木中に加え, 各々の枝のラベルを $u_i \setminus x_i/v_i$ とする. この操作を分岐と呼ぶ. また, 分岐出力チェックが不成功であったならば, “ $T_1 \neq T_2$ ” と判定を下し, 全手続きを終了する.

3.4.2 跳越し

上記分岐操作のみでは, 判定木が無限に展開して終端しない場合がある. そこで, 文献 [TomSei89], p.45. 4.2.Skipping と同様に, 跳越し操作を導入する. なお, 現時点までに展開された判定木を $T(T_1 : T_2)$ とする.

定義 3.4.1 (文献 [Tom84], p.98, Definition 4.2., 文献 [TomSei89], p.45, Definition 4.1., 4.2. 参照)

$T(T_1 : T_2)$ 中に2節点 $(p_1, \alpha_1 \gamma_1) \equiv h_1(\bar{p}_1, \bar{\alpha}_1 \bar{\gamma}_1)$, $(p_2, \alpha_2 \gamma_1) \equiv h_2(\bar{p}_2, \bar{\alpha}_2 \bar{\gamma}_1)$ が存在し,

$$(p_1, \alpha_1) \xrightarrow[T_1]{x_1/u_1} (p_2, \alpha_2) \quad \text{且つ,}$$

$$(\bar{p}_1, \bar{\alpha}_1) \xrightarrow[T_2]{x_1/v_1} (\bar{p}_2, \bar{\alpha}_2)$$

但し , $x_1 \in \Sigma^*$, $u_1, v_1 \in \Delta^*$, $u_1 h_2 = h_1 v_1$

のような推移に対応して, この両節点が, $u_1 \setminus x_1 / v_1$ をラベルとする枝で結ばれ, 親子関係にある場合, 次のように記述する .

$$\begin{aligned} < (p_1, \alpha_1 \mid \gamma_1) \equiv h_1(\bar{p}_1, \bar{\alpha}_1 \mid \bar{\gamma}_1) > \xrightarrow{T(T_1:T_2)} \frac{u_1 \setminus x_1 / v_1}{T(T_1:T_2)} \\ < (p_2, \alpha_2 \mid \gamma_1) \equiv h_2(\bar{p}_2, \bar{\alpha}_2 \mid \bar{\gamma}_1) > . \end{aligned}$$

更に, このような親子関係が,

$$\begin{aligned} < (p_i, \alpha_i \mid \gamma_1) \equiv h_i(\bar{p}_i, \bar{\alpha}_i \mid \bar{\gamma}_1) > \xrightarrow{T(T_1:T_2)} \frac{u_i \setminus x_i / v_i}{T(T_1:T_2)} \\ < (p_{i+1}, \alpha_{i+1} \mid \gamma_1) \equiv h_{i+1}(\bar{p}_{i+1}, \bar{\alpha}_{i+1} \mid \bar{\gamma}_1) > \\ \text{但し, } u_i h_{i+1} = h_i v_i, \quad (1 \leq i \leq m) \end{aligned}$$

のように連続する場合, 次のように記述する .

$$\begin{aligned} < (p_1, \alpha_1 \mid \gamma_1) \equiv h_1(\bar{p}_1, \bar{\alpha}_1 \mid \bar{\gamma}_1) > \xrightarrow{T(T_1:T_2)} \frac{u \setminus x / v}{T(T_1:T_2)} \\ < (p_{m+1}, \alpha_{m+1} \mid \gamma_1) \\ \equiv h_{m+1}(\bar{p}_{m+1}, \bar{\alpha}_{m+1} \mid \bar{\gamma}_1) > \end{aligned}$$

但し , $x = x_1 x_2 \dots x_m$,

$$u = u_1 u_2 \dots u_m, \quad v = v_1 v_2 \dots v_m .$$

この状況を, $T(T_1 : T_2)$ 中に $x \in \Sigma^*$ による推移路が存在するという . 更に, “ $u \setminus$ ”, “ $/v$ ”, “ \mid ” については, 省略も可能とする . また, 矢印を $\xrightarrow{T(T_1:T_2)} \frac{u \setminus x / v}{T(T_1:T_2)}$ とした場合は, 随伴 dpda M_2 の推移において, $(\bar{p}_1, \bar{\alpha}_1) \xrightarrow[M_2]{x} (\bar{p}_{m+1}, \bar{\alpha}_{m+1})$ であることを意味する .

定義 3.4.2 (跳越しの前提条件 : 文献 [TomSei89], p.46, Definition 4.3. 参照)

着目節点 (3.3.5) において, (p, α) は非減少モード, (\bar{p}, β) は入出力モードであるとする .

更に, 着目節点を以下のように書き直す .

$$(p, A\alpha'') \equiv h(\bar{p}, \beta) \tag{3.4.2}$$

但し , $A \in \Gamma_1$, $\alpha = A\alpha''$

ここで, $T(T_1 : T_2)$ 中の既に分岐の適用されている,

$$(p, A\omega'') \equiv h'(\bar{p}, \beta') \quad (3.4.3)$$

なる節点が存在し, 且つ,

$$(\bar{p}, \beta) \stackrel{n}{\simeq} (\bar{p}, \beta') \quad (3.4.4)$$

であるとする. 但し, $n (\geq 1)$ は上記の関係を満足する $T(T_1 : T_2)$ 中の最大値とする. このとき, 以下の (a) あるいは (b) を満足する場合, 着目節点 (3.4.2) は跳越し前提条件を満足していると言う.

(a) $h = h'$

(b) $T(T_1 : T_2)$ 中に,

$$(p, A\underline{\alpha}'') \equiv g(\bar{p}, \underline{\beta}) \quad (3.4.5)$$

$$\text{但し, } (\bar{p}, \beta) \stackrel{n}{\simeq} (\bar{p}, \underline{\beta}) \quad (3.4.6)$$

$$(p, A\underline{\omega}'') \equiv g'(\bar{p}, \underline{\beta}') \quad (3.4.7)$$

$$\text{但し, } (\bar{p}, \beta) \stackrel{n}{\simeq} (\bar{p}, \underline{\beta}') \quad (3.4.8)$$

なる分岐被適用節点が存在し, ある $h'' \in \Delta^{\pm*}$ に対し, 次が成立する.

$$h, h', g, g' \in \Delta^*, \quad (3.4.9)$$

$$h = h'h'', \quad g = g'h''$$

あるいは,

$$h, h', g, g' \in \Delta^{-*}, \quad (3.4.10)$$

$$h^{-1} = h'^{-1}h'', \quad g^{-1} = g'^{-1}h''.$$

ここで, 節点 (3.4.3) をこの跳越しの対応節点, 更に, 節点 (3.4.5), (3.4.7) を副次対応節点と呼ぶ. なお, 節点 (3.4.3) と節点 (3.4.5) は同一でも良い.

定義 3.4.3 (跳越し適用の可否: 文献 [TomSei89], p.46, Definition 4.4. 参照)

着目節点 (3.4.2) が, 前定義の跳越しの前提条件を満足しており, 更に, ある $x_0 \in$

Σ^* , $u_0, v_0 \in \Delta^*$, $q \in Q_1$, $(\bar{q}_j, \gamma'_0) \in Q_2 \times \Gamma_2^*$, $t' \in \Delta^{\pm*}$ に対して, 対応節点 (3.4.3) から, 次の推移路が存在するものとする.

$$\begin{aligned} \langle (p, A \mid \omega'') \equiv h'(\bar{p}, \beta') \rangle &\xrightarrow{T(T_1:T_2)} \frac{u_0 \setminus x_0 / v_0}{T(T_1:T_2)} \\ &\langle (q, \varepsilon \mid \omega'') \equiv t'(\bar{q}_j, \gamma'_0) \rangle \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

$$\text{但し, } \left| \text{RW-Seg} \left[(\bar{p}, \beta') \xrightarrow{T_2} (\bar{q}_j, \gamma'_0) \right] \right| \leq n.$$

(ここで, n は式 (3.4.4) の定義と同じ.)

これに対応した, 着目節点 (3.4.2) に対する,

$$\begin{aligned} (p, A \mid \alpha'') &\xrightarrow{T_1} (q, \varepsilon \mid \alpha'') \\ (\bar{p}, \beta) &\xrightarrow{T_2} (\bar{q}_j, \gamma_0), \quad \gamma_0 \in \Gamma_2^* \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

のような推移について, ある $t \in \Delta^{\pm*}$ が存在し,

$$u_0 t = h v_0 \quad (3.4.13)$$

が成立するならば, 着目節点 (3.4.2) に対する跳越しが適用可能であると言う. □

着目節点 (3.4.2) が, 定義 3.4.2 における跳越しの前提条件を満足しており, 更に, 定義 3.4.3 の跳越し適用が可能である場合, 着目節点に対して跳越しを適用し, その子節点として,

$$(q, \alpha'') \equiv t(\bar{q}_j, \gamma_0) \quad (3.4.14)$$

を判定木に取り入れる. これを後続節点 (skipping-end) と呼び, そこへ至る枝のラベルを, “ $u_0 \setminus x_0 / v_0$ ” とする. その後の判定木の展開に応じて, 着目節点に対する跳越しの前提条件を常に監視し, それが不成立となった場合には, 着目節点に改めて分岐を適用する. また, 式 (3.4.13) が成立しない場合には, 直ちに “ $T_1 \neq T_2$ ” と判定を下し, 全手続きを終了する.

補題 3.4.2 (定義 3.4.2(b) の跳越しに対する正当性) 着目節点 (3.4.2) に対して, 定義 3.4.2 における (b) の跳越し前提条件が成立し, 式 (3.4.3) ~ (3.4.13) の状況によりその跳越しが適用され,

$$\begin{aligned} \langle (p, A\alpha'') \equiv h(\bar{p}, \beta) \rangle &\xrightarrow{T(T_1:T_2)} \frac{u_0 \setminus x_0 / v_0}{T(T_1:T_2)} & (3.4.15) \\ &\langle (q, \alpha'') \equiv t(\bar{q}_j, \gamma_0) \rangle \end{aligned}$$

であるとする. 更に, 対応節点 (3.4.3), および, 副次対応節点 (3.4.5), (3.4.7) に対して,

$$u_0 t' = h' v_0, \quad u_0 s = g v_0, \quad u_0 s' = g' v_0 \quad (3.4.16)$$

$$\text{但し, } t, t', s, s' \in \Delta^{\pm*}$$

であったとする. このとき, (3.4.3) を起点とする,

$$\begin{aligned} (p, A \mid \omega'') &\xrightarrow{T_1}^{x/u} (q, \varepsilon \mid \omega'') \quad \text{且つ,} \\ (\bar{p}, \beta') &\xrightarrow{T_2}^{x/v} |(\bar{q}_j, \gamma') \\ \text{但し, } \left| \text{RW-Seg} \left[(\bar{p}, \beta') \xrightarrow{T_2}^{x/v} |(\bar{q}_j, \gamma') \right] \right| &\leq n \end{aligned}$$

(ここで, n は式 (3.4.4) の定義と同じ.)

のような任意の $x \in \Sigma^*$, $u, v \in \Delta^*$ に関する推移に対応して, 式 (3.4.6), (3.4.8) の成立により, (3.4.5), (3.4.7) の右辺の計算状況を起点とする,

$$\begin{aligned} (\bar{p}, \underline{\beta}) &\xrightarrow{T_2}^{x/v} |(\bar{q}_j, \underline{\gamma}), \quad \underline{\gamma} \in \Gamma_2^* \\ (\bar{p}, \underline{\beta}') &\xrightarrow{T_2}^{x/v} |(\bar{q}_j, \underline{\gamma}'), \quad \underline{\gamma}' \in \Gamma_2^* \end{aligned}$$

なる推移も可能となるが, ここで,

$$u t' = h' v, \quad u s = g v, \quad u s' = g' v \quad (3.4.17)$$

が成立するならば, $u t = h v$ も同時に成立する.

(証明) $\stackrel{n}{\simeq}$ 同値関係の定義より, この推移の範囲において, 着目節点, 対応節点, 副次対応節点の入出力は完全に同一である. 従って, 文献 [TomSei89], p.47, Lemma

4.2. と同様に証明できるが，以下に詳細を記述する．ここで，本証明を通じて， $u_0, v_0, u, v, h, h', h'', g, g't, t's, s' \in F(\Delta)$ とする．但し， $F(\Delta)$ は，出力記号集合 Δ から生成されるある自由群 (free group) とする．

(A) はじめに，式 (3.4.9) が成立する場合を考える．まず，式 (3.4.13) と式 (3.4.9) の $h = h'h''$ から， $u_0t = hv_0 = h'h''v_0$ を得る．更に，式 (3.4.16) の $u_0t' = h'v_0$ から， $h' = u_0t'v_0^{-1}$ を得る．従って， $u_0t = u_0t'v_0^{-1}h''v_0$ であり，以下を得る．

$$t'^{-1}t = v_0^{-1}h''v_0 \quad (3.4.18)$$

また，式 (3.4.9) の $g = g'h''$ と式 (3.4.16) から， $u_0s = gv_0 = g'h''v_0 = u_0s'v_0^{-1}h''v_0$ となり，以下を得る．

$$s'^{-1}s = v_0^{-1}h''v_0 \quad (3.4.19)$$

同様に， $g = g'h''$ と式 (3.4.17) から，以下を得る．

$$s'^{-1}s = v^{-1}h''v \quad (3.4.20)$$

更に，式 (3.4.18), (3.4.19) から，以下を得る．

$$t'^{-1}t = s'^{-1}s \quad (3.4.21)$$

以上から次のような展開が可能となり $ut = hv$ の成立が保証される．

$$\begin{aligned} ut &= ut't'^{-1}t = ut's'^{-1}s \quad (\text{式 (3.4.21) より}) \\ &= ut'v^{-1}h''v \quad (\text{式 (3.4.20) より}) \\ &= h'vv^{-1}h''v \quad (\text{式 (3.4.17) の } ut' = h'v \text{ より}) \\ &= h'h''v = hv. \end{aligned}$$

(B) 次に，式 (3.4.10) が成立する場合を考える．ここでは，以下のような $F(\Delta)$ における変換 σ を定義する．

$$\sigma = \begin{pmatrix} u_0 \rightarrow v_0, v_0 \rightarrow u_0, u \rightarrow v, v \rightarrow u, \\ h \rightarrow h^{-1}, h' \rightarrow h'^{-1}, \\ h'' \rightarrow h'', g \rightarrow g^{-1}, g' \rightarrow g'^{-1}, \\ t \rightarrow t^{-1}, t' \rightarrow t'^{-1}, s \rightarrow s^{-1}, s' \rightarrow s'^{-1} \end{pmatrix}$$

この変換を先の (A) の証明に適用することにより同様な論理展開ができ， $\sigma(u)\sigma(t) = \sigma(h)\sigma(v)$ に対応して， $vt^{-1} = h^{-1}u$ となり， $hv = ut$ を得る．□

上記補題 3.4.2 により, 式 (3.4.13), (3.4.16), (3.4.17) が成立する場合, 自動的に $ut = hv$ が成立すること, つまり, 跳越しの正当性が保証される.

3.4.3 中断

本判定木展開において, 跳越しの後続節点が無限に増え続けることを抑制するために, 文献 [Tom84], p.101, 4.2.Halting, 文献 [TomSei85], p.229, 3.2.Halting に対して出力機構を加味し, 以下のような中断操作を導入する.

定義 3.4.4 dpdt T_2 の推移 $(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x/y}^{(n)} (\bar{q}, \gamma)$, ($n \geq 1$) において, 推移の高さを次のように定義する.

$$\begin{aligned} & \left| (\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x/y} (\bar{q}, \gamma) \right| \\ &= \text{Min} \{ |\beta'| \mid (\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x'/y'} (\bar{p}', \beta') \xrightarrow[T_2]{x''/y''}^{(n'')} (\bar{q}, \gamma), \\ & \quad x = x'x'', y = y'y'', \\ & \quad (\bar{p}', \beta') \in Q_2 \times \Gamma_2^+, 1 \leq n'' \leq n \} - 1 \end{aligned}$$

なお, その随伴 dpda M についても, 同定義の出力部分を除外して, 同様に推移の高さを定義する.

定義 3.4.5 着目節点 (3.4.2) が, $T(T_1 : T_2)$ 中の跳越し被適用節点であるとして, 既に推移路 (3.4.15) のような跳越しにより, 後続節点 (3.4.14) が判定木中に導入されているものとする. ここで, 更なる判定木展開において, 新たな跳越し,

$$\begin{aligned} & \langle (p, A\alpha'') \equiv h(\bar{p}, \beta) \rangle \xrightarrow[T(T_1:T_2)]{u_i \setminus x_i / v_i} \\ & \langle (q, \alpha'') \equiv t_i(\bar{q}_j, \gamma_i) \rangle \end{aligned}$$

が適用されたとき,

- (i) $t = t_i$.
- (ii) RW-Pop $\left[(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x_0/v_0} (\bar{q}_j, \gamma_0) \right]$

$$= \text{RW-Pop} \left[(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x_i/v_i} (\bar{q}_j, \gamma_i) \right].$$

であり、且つ、

$$(\bar{q}_j, \gamma_0) \stackrel{\mathcal{H}}{\cong} (\bar{q}_j, \gamma_i)$$

$$\begin{aligned} \text{但し, } \mathcal{H} &= \left| (\bar{p}, \beta) \xrightarrow[M_2]{x_0} (\bar{q}_j, \gamma_0) \right| \\ &\quad \left(= \left| (\bar{p}, \beta) \xrightarrow[M_2]{x_i} (\bar{q}_j, \gamma_i) \right| \right) \end{aligned}$$

また、 M_2 は T_2 の随伴 dpda.

が成立する場合、後続節点 $(q, \alpha'') \equiv t(\bar{q}_j, \gamma_i)$ は中断が適用可能であると言う。□

ある跳越しが適用されたとき、その後続節点に定義 3.4.5 の中断が適用可能である場合、その後続節点を直ちに中断節点として、以後の後続接点の追加および中断接点から先の判定木展開は行なわない。

3.4.4 アルゴリズム

本等価性判定アルゴリズムの全体を図 3.1 に示す。ここでは、 $(q_{01}, Z_{01}) \equiv (q_{02}, Z_{02})$ を唯一の節点とする初期状態から、分岐、跳越し、中断の各操作を順次適用し、判定木を展開することにより等価性判定を進める。判定木中の節点は、*unchecked*, *checked*, *skipping*, *s-checked*, *halting* の5つの状態 (status) をとる。なお、着目節点 $(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta)$ において、そのサイズを、 $(\text{Max}\{|\alpha|, |\beta|\}, \text{Min}\{|\alpha|, |\beta|\})$ なる数値対で定義する。そして、節点サイズの大小関係は、まず1つめ (左側) の数値の大小関係とし、これが等しい場合は、2つめ (右側) の数値の大小関係で決定するものとする。以上の手順において、途中で " $T_1 \not\equiv T_2$ " と判定されることなく、*unchecked* あるいは *skipping* 状態の節点が存在しなくなった場合、" $T_1 \equiv T_2$ " との判定を下す。

```

while 判定木中に unchecked あるいは skipping
の状態で節点が存在する.
do
  それらの節点の中で最小サイズのものを
  着目節点  $P : (p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta)$  とする.
  if  $\alpha = \varepsilon$  かつ  $\beta = \varepsilon$ 
  then if  $h = \varepsilon$ 
    then  $P$  を checked にする.
    else “ $T_1 \neq T_2$ ” と判定を下す.halt fi
  else if  $P$  以外の節点  $(p, \alpha) \equiv h'(\bar{p}, \beta)$  が存在.
    then if  $h = h'$ 
      then  $P$  を checked にする.
      else “ $T_1 \neq T_2$ ” と判定を下す.halt fi
    else if  $P$  は跳越し前提条件 (定義 3.4.2) を
      満足する.
      then if  $P$  は跳越し適用可能 (定義 3.4.3)
        then  $P$  に跳越しを適用し, 必要に
          応じ, 後続節点を子節点として加える.
          更に, 中断が適用可能 (定義 3.4.5) であ
          れば, その後続節点を halting にする.
          if 後続節点の追加があった.
            then  $P$  および全ての s-checked
              節点を,skipping にする.
            else  $P$  を s-checked にする.fi
          else (式 (3.4.13) が不成立)
            “ $T_1 \neq T_2$ ” と判定を下す.halt fi
        else if  $P$  に分岐出力チェックが成功.
          then 分岐を適用し,checked にする.
          else “ $T_1 \neq T_2$ ” と判定を下す.halt fi
      fi fi fi
    fi fi fi
  od

```

図 3.1 アルゴリズム

3.4.5 基本例題

具体的な例題として，以下の dpdt 対 T_1, T_2 を定義し，その推移図を図 3.2 に，本アルゴリズムによる等価性判定の判定木を図 3.3~3.6 に示す．

$$T_1 = \{Q_1, \Gamma_1, \Sigma, \Delta, \mu_1, q_{01}, Z_{01}, \phi\}$$

$$T_2 = \{Q_2, \Gamma_2, \Sigma, \Delta, \mu_2, q_{02}, Z_{02}, \phi\}$$

$$\text{但し, } Q_1 = \{q_{01}, p, q, s\}, Q_2 = \{q_{02}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{s}\}$$

$$\Gamma_1 = \{Z_{01}, A, B, C\}, \Gamma_2 = \{Z_{02}, D, E, F, G\}, \Sigma = \{a, b, c, d\}, \Delta = \{a, b, c\}$$

$$\mu_1 = \left\{ \begin{array}{l} (q_{01}, Z_{01}) \xrightarrow[T_1]{a/\varepsilon} (p, AB) \\ (p, A) \xrightarrow{a/\varepsilon} (p, A^2), (p, A) \xrightarrow{b/\varepsilon} (s, C) \\ (p, A) \xrightarrow{c/\varepsilon} (q, \varepsilon), (p, A) \xrightarrow{d/\varepsilon} (p, A) \\ (q, A) \xrightarrow{d/ab} (q, \varepsilon), (q, B) \xrightarrow{d/abc} (q, \varepsilon), \\ (s, A) \xrightarrow{\varepsilon/ab} (s, \varepsilon), (s, B) \xrightarrow{d/abc} (s, \varepsilon), (s, C) \xrightarrow{c/\varepsilon} (s, \varepsilon) \end{array} \right\},$$

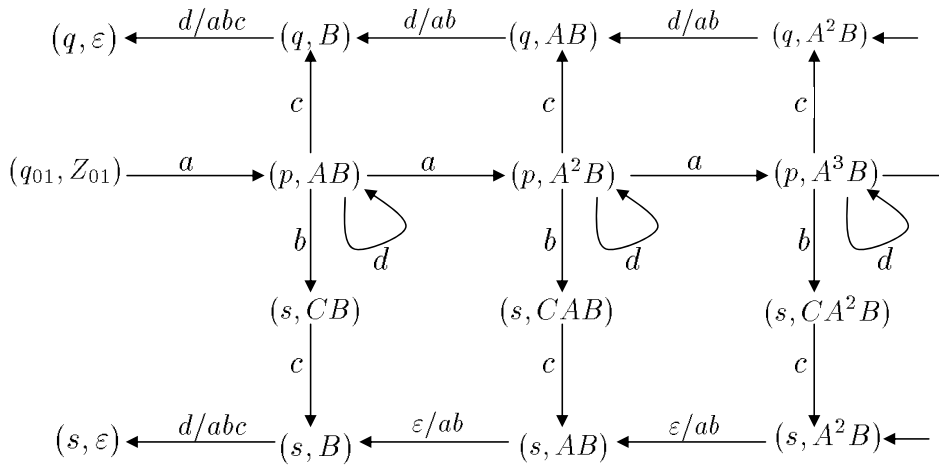
$$\mu_2 = \left\{ \begin{array}{l} (q_{02}, Z_{02}) \xrightarrow{a/ab} (\bar{p}, DE) \\ (\bar{p}, D) \xrightarrow{a/ab} (\bar{p}, D^2), (\bar{p}, D) \xrightarrow{b/\varepsilon} (\bar{s}, \varepsilon), \\ (\bar{p}, D) \xrightarrow{c/\varepsilon} (\bar{q}, D), (\bar{p}, D) \xrightarrow{d/\varepsilon} (\bar{p}, DG) \\ (\bar{q}, D) \xrightarrow{\varepsilon/c} (\bar{r}, \varepsilon), (\bar{r}, D) \xrightarrow{d/\varepsilon} (\bar{r}, \varepsilon), \\ (\bar{r}, E) \xrightarrow{d/\varepsilon} (\bar{r}, \varepsilon), (\bar{r}, G) \xrightarrow{\varepsilon/\varepsilon} (\bar{r}, \varepsilon) \\ (\bar{s}, D) \xrightarrow{\varepsilon/\varepsilon} (\bar{s}, \varepsilon), (\bar{s}, E) \xrightarrow{c/\varepsilon} (\bar{s}, F), \\ (\bar{s}, F) \xrightarrow{d/c} (\bar{s}, \varepsilon), (\bar{s}, G) \xrightarrow{\varepsilon/\varepsilon} (\bar{s}, \varepsilon) \end{array} \right\}.$$

なお，各々の受理記号列 / 出力記号列の集合は以下の通りである．

$$\text{TRANS}(q_{01}, Z_{01}) = \text{TRANS}(q_{02}, Z_{02})$$

$$= \{(ad^*)^n bcd / (ab)^n c \mid n \geq 1\} \cup \{(ad^*)^n cd^n / (ab)^n c \mid n \geq 1\}.$$

$$T_1 = \{Q_1, \Gamma_1, \Sigma, \Delta, \mu_1, q_{01}, Z_{01}, \phi\}$$



$$T_2 = \{Q_2, \Gamma_2, \Sigma, \Delta, \mu_2, q_{02}, Z_{02}, \phi\}$$

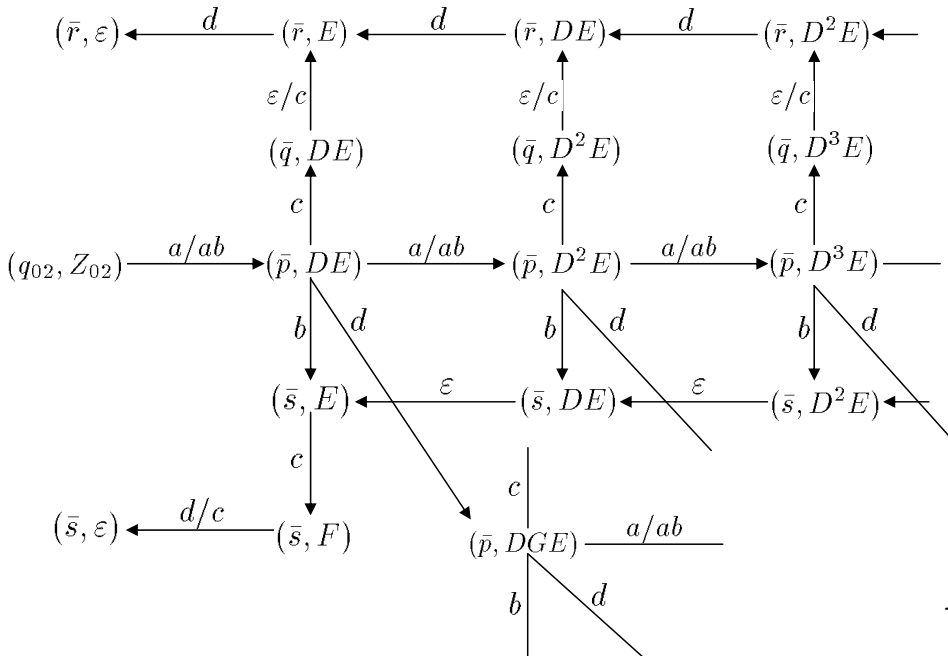


図 3.2 推移図

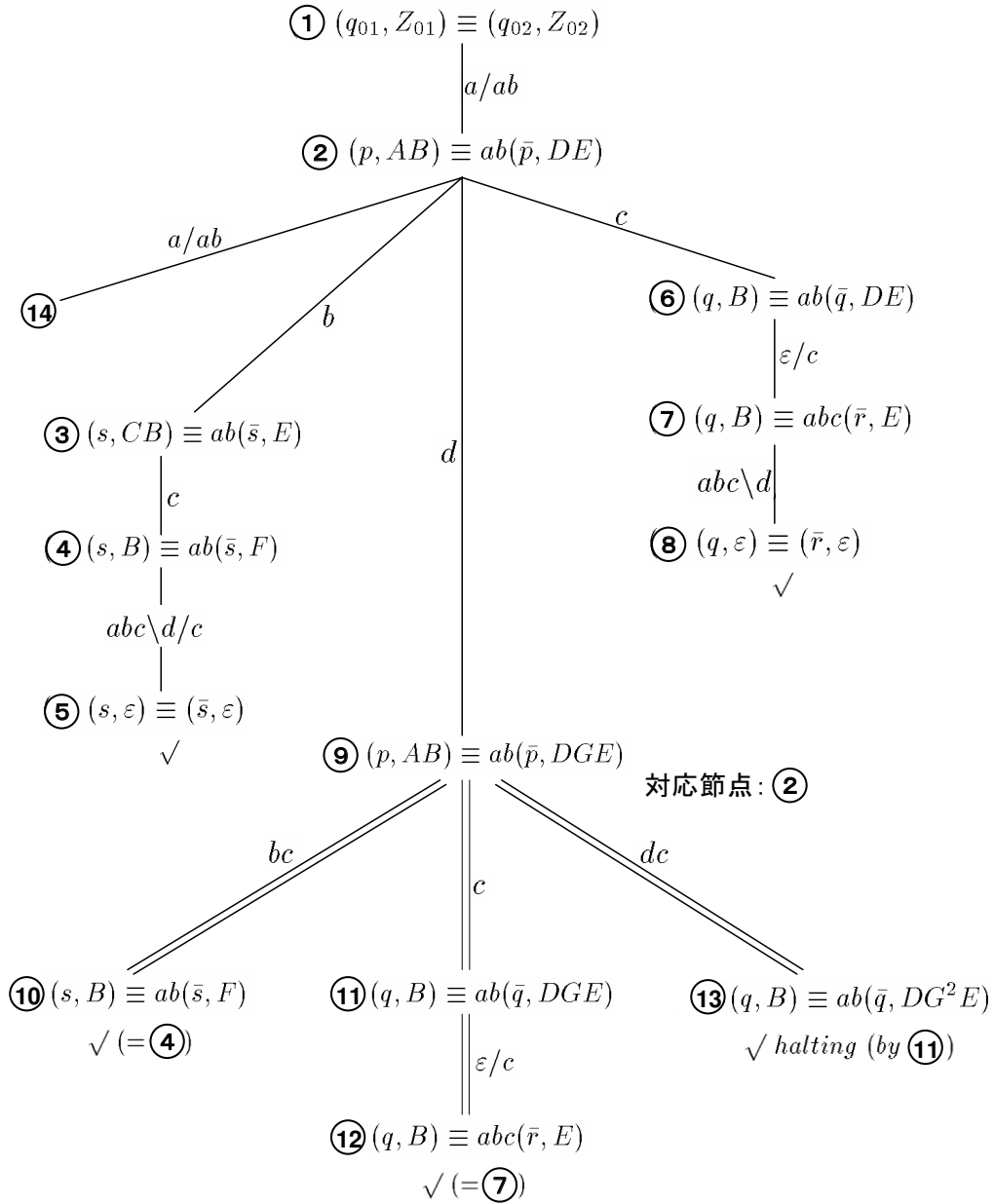


図 3.3 判定木 $T(T_1 : T_2)$

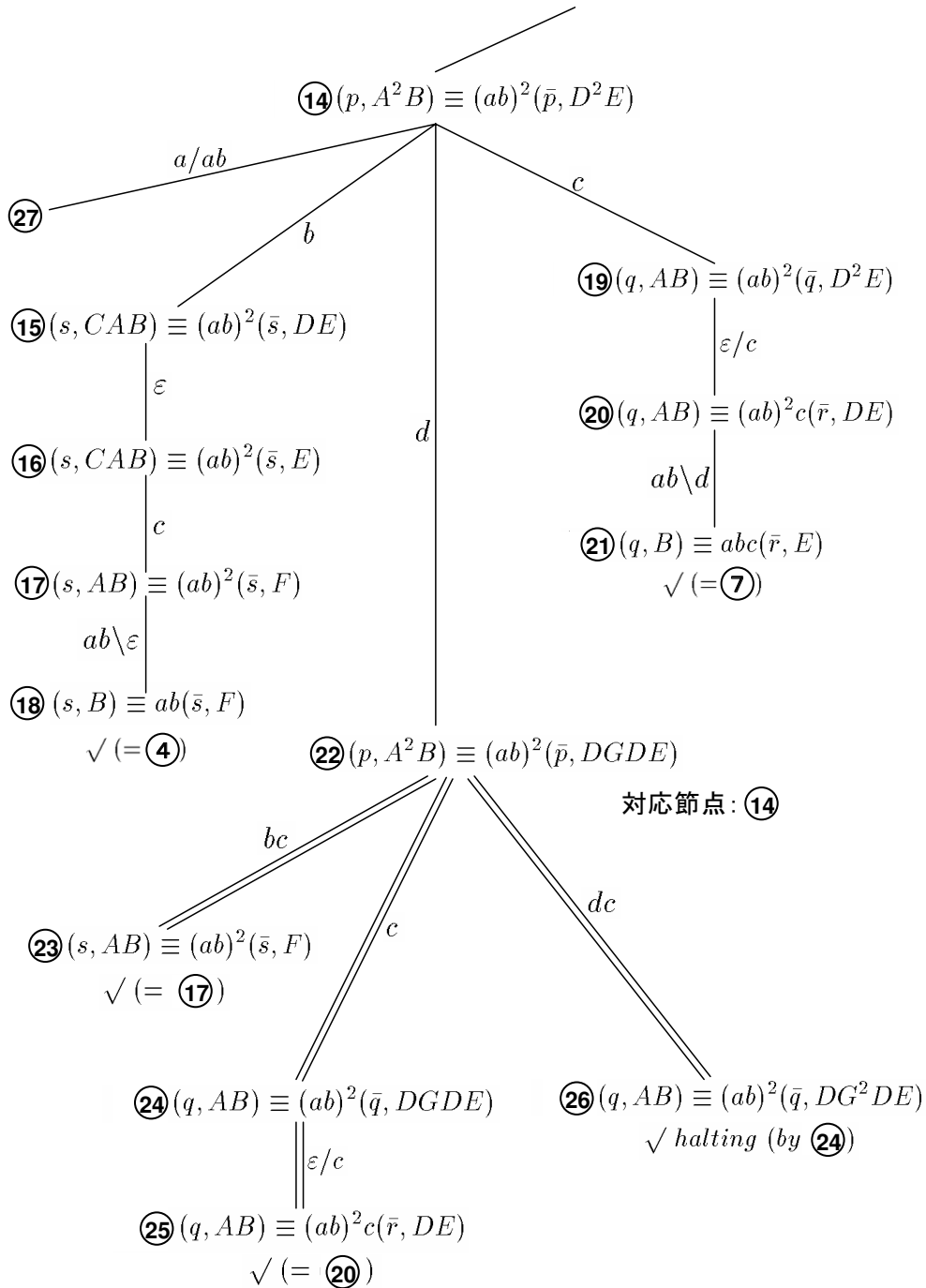


図 3.4 判定木 $T(T_1 : T_2)$ (つづき)

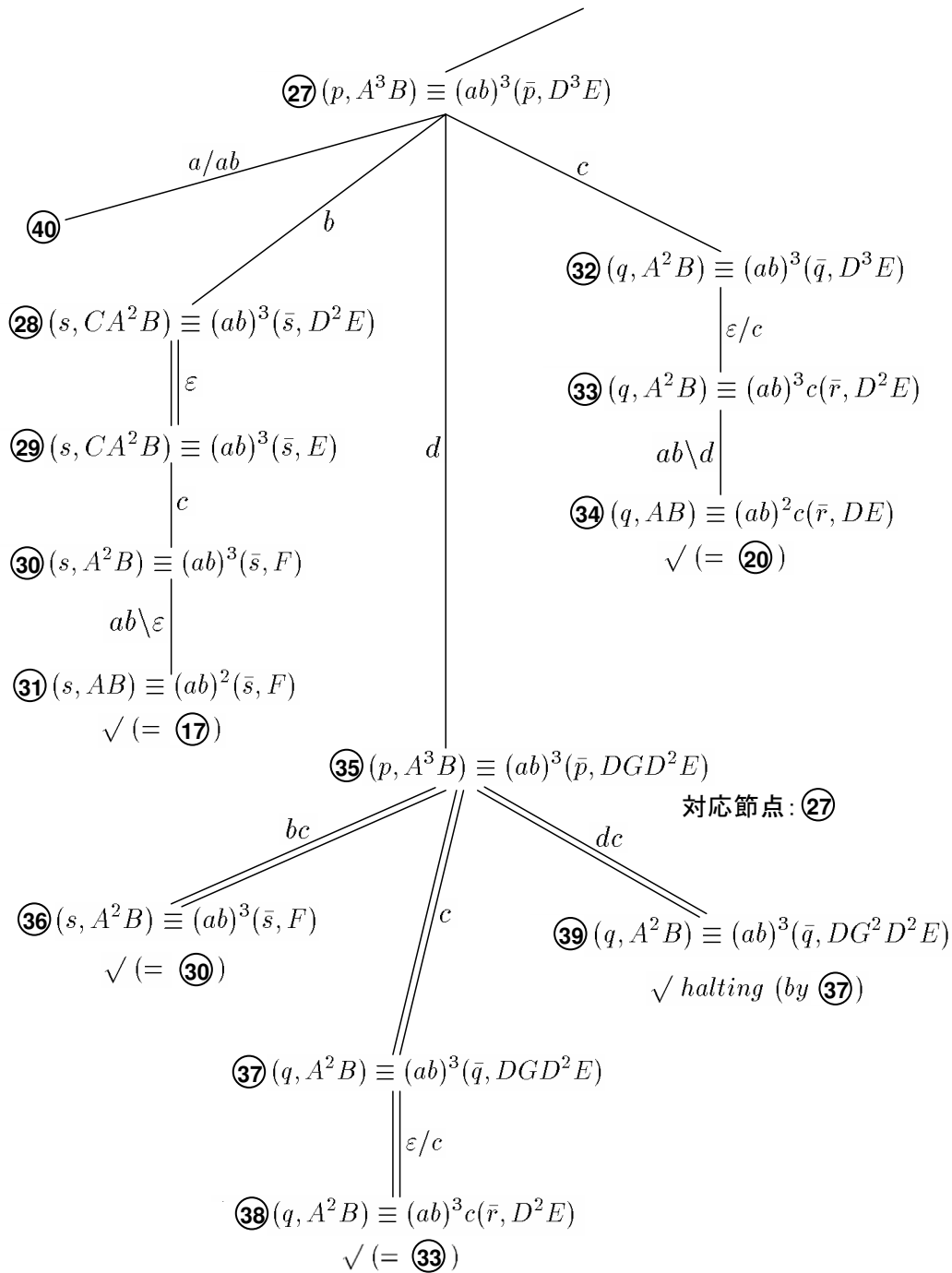


図 3.5 判定木 $T(T_1 : T_2)$ (つづき)

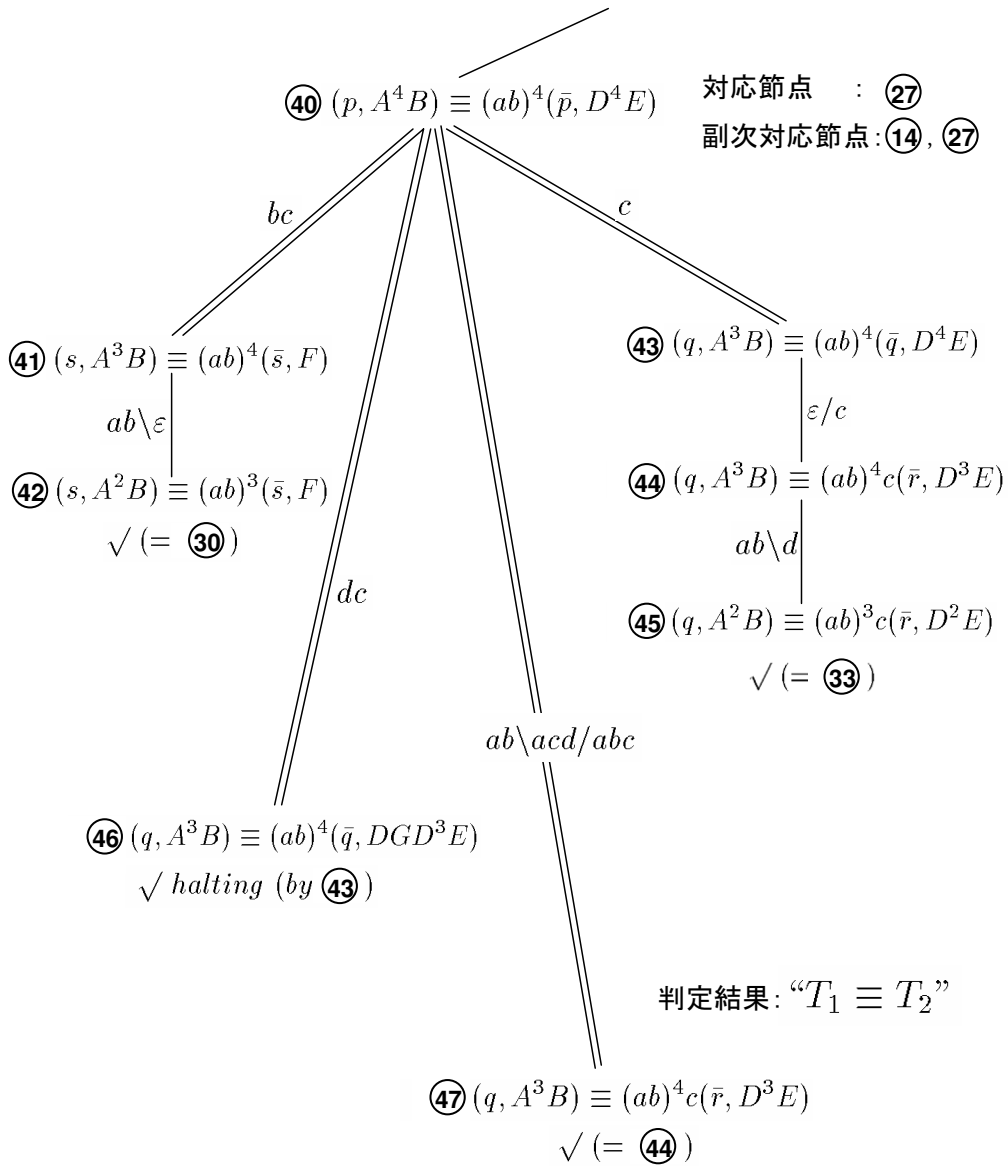


図 3.6 判定木 $T(T_1 : T_2)$ (つづき)

3.5 正当性と終端性

補題 3.5.1 $T_1 \equiv T_2$ が真であるとき，本アルゴリズムは “ $T_1 \equiv T_2$ ” と判定を下し有限の手数で終端する．

(証明) 本アルゴリズムの定義から，“ $T_1 \not\equiv T_2$ ” という判定を下した場合，その判定は明らかに真である．この対偶として， $T_1 \equiv T_2$ が真である場合，本アルゴリズムが “ $T_1 \not\equiv T_2$ ” という判定を下すことは無い．従って，本補題の証明では，アルゴリズムが有限の手数で終端するか否かがポイントとなる．以降， $T_1 \equiv T_2$ が真である場合について，判定木の高さ（根から葉に至るまでの節点数の最大値）の上限を示し，更に，判定木の幅（同じ節点から分岐される子節点数の最大値）の上限を示すことにより，有限終端性の証明とする．

(i) (判定木の高さの上限)

$T(T_1 : T_2)$ 中の任意の節点 $(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta)$ において，命題 3.3.3 の φ, \mathcal{U} を用いて，左辺のスタックの高さの上限として以下が成立する．

$$|\alpha| \leq \varphi_T = 4\varphi^2\{(|\Delta| + 1)^{3\mathcal{U}} + (|\Delta| + 1)^{\mathcal{U}}\} + \varphi.$$

これは，文献 [TomSei89], p.50, Lemma 5.1. Proof. と同様に証明できる．従って， $T(T_1 : T_2)$ 中の任意の節点について，左辺の種類は $|Q_1|(|\Gamma_1| + 1)^{\varphi_T}$ 以下となる．次に，文献 [Tom84], p.95, Lemma 3.9. と同様な論理展開により，左辺 (p, α) に対する右辺 (\bar{p}, β) について， \cong による同値類の数を考える．まず，補題 3.3.2 に $|\alpha| \leq \varphi_T$ を加味し以下が成立する．

$$|\text{RW-Seg}(\bar{p}, \beta)| \leq \mathcal{B}(|\alpha|) \leq \mathcal{B}(\varphi_T).$$

従って，右辺の入出力セグメント $\text{RW-Seg}(\bar{p}, \beta)$ の種類数は $(|\Gamma_2| + 1)^{\mathcal{B}(\varphi_T)}$ 以下となる．ここで更に，入出力 ε -セグメントの組合せを考慮する．まず，先頭の極大長の入出力 ε -セグメントの種類数は最大 $|Q_2|$ 以下である．次に，入出力セグメントの各スタック記号の下での極大長の入出力 ε -セグメントは，最大 $\mathcal{B}(\varphi_T)$ 個存在し，各々の種類数は最大 $|Q_2|^{|Q_2|}$ である．従って，同値類の数は次の値以下となる．

$$|Q_2|^{|Q_2|^{\mathcal{B}(\varphi_T)+1}} (|\Gamma_2| + 1)^{\mathcal{B}(\varphi_T)}.$$

これより, $T(T_1 : T_2)$ 中の左辺が非減少モード, 右辺が入出力モードであるような分岐被適用節点の数は次の定数以下となる.

$$|Q_1|(|\Gamma_1| + 1)^{\varphi_T} |Q_2|^{|Q_2|B(\varphi_T)+1} (|\Gamma_2| + 1)^{B(\varphi_T)}.$$

なぜならば, 分岐被適用節点の数がこの定数を超えたと仮定すると, このとき,

$$(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta)$$

$$(p, \alpha) \equiv h'(\bar{p}, \beta') \quad \text{但し, } (\bar{p}, \beta) \cong (\bar{p}, \beta')$$

なる分岐被適用節点对が存在することになる. ところが, 命題 3.3.1 (ii) により, この節点对において $h = h'$ が成立し, つまり, 定義 3.4.2 の跳越しの前提条件 (a) の成立により, 少なくとも一方は跳越し被適用節点であるはずで, 仮定に矛盾する. 従って, 上記の通り, 分岐被適用節点数の上限の存在が保証される. 更に, 左辺スタックの増加は分岐処理のみで発生することを加味すれば, 判定木の高さの有限性が保証される.

(ii) (判定木の幅の上限)

分岐被適用節点の子節点数は高々有限であるので, 跳越し被適用節点の後続節点数の有限性を保証すれば十分である. ここで, 上記 (i) の事情により, 左辺が同一の節点の右辺について, \cong による同値類の数が有限であることが保証されている. 従って, 定義 3.4.5 の中断条件と命題 3.3.1 (ii) の成立を考慮すれば, 直ちにその有限性が保証される. \square

補題 3.5.2 $T_1 \not\equiv T_2$ が真であるとき, 本アルゴリズムは “ $T_1 \not\equiv T_2$ ” と判定を下し有限の手数で終端する.

(証明) 本補題の証明のため, 次のような同値問題 (対偶) の証明を考える. 「本アルゴリズムが, “ $T_1 \not\equiv T_2$ ” と判定を下すことなく終端あるいは無限に進行したときには, $T_1 \equiv T_2$ が真に成立する.」これを証明するためには, 上記状況における判定木を $T(T_1 : T_2)$ としたとき, 随伴 dpda が等価であるという前提のもと, 以下の Claim E_m (i) の成立を証明すれば十分である. 従って, 以降, Claim E_m の成立性を証明する.

Claim E_m $T(T_1 : T_2)$ 中の任意の非中断節点を

$$(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta) \quad \text{但し } \alpha \in \Gamma_1^+ \tag{3.5.1}$$

とする. ここで, 任意の分割 $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$ に対して,

$$(p, \alpha_1 \mid \alpha_2) \xrightarrow[T_1]{w/z_1} (m) (r, \varepsilon \mid \alpha_2)$$

$$(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{w/z_2} (\bar{r}_k, \partial)$$

であるとき，以下の (i), (ii), (iii) が成立する．

(i) 上記のような全ての $w \in \Sigma^*$, $z_1, z_2 \in \Delta^*$, $r \in Q_1$, $(\bar{r}_k, \partial) \in Q_2 \times \Gamma_2^*$ に対して，ある $t_k \in \Delta^{\pm*}$ が一意に存在して， $z_1 t_k = h z_2$ が成立する．

(ii) ある $w_0 \in \Sigma^*$, $z_{10}, z_{20} \in \Delta^*$ に対して，次のような推移路が， $T(T_1 : T_2)$ 中に存在する．

$$\begin{aligned} \langle (p, \alpha_1 \mid \alpha_2) \equiv h(\bar{p}, \beta) \rangle & \xrightarrow[T(T_1:T_2)]{z_{10} \setminus w_0 / z_{20}} \\ & \langle (r, \varepsilon \mid \alpha_2) \equiv t_k(\bar{r}_k, \partial_0) \rangle \end{aligned}$$

但し， $(r, \alpha_2) \equiv t_k(\bar{r}_k, \partial_0)$ は非中断節点．

(iii) 更に，上記状況において，次が成立する．

$$\begin{aligned} \text{RW-Pop} \left[(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{w_0/z_{20}} (\bar{r}_k, \partial_0) \right] \\ = \text{RW-Pop} \left[(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{w/z_2} (\bar{r}_k, \partial) \right] \end{aligned}$$

且つ， $(\bar{r}_k, \partial_0) \stackrel{\mathcal{H}}{\cong} (\bar{r}_k, \partial)$

$$\begin{aligned} \text{但し，} \mathcal{H} = \left| (\bar{p}, \beta) \xrightarrow[M_2]{w_0} (\bar{r}_k, \partial_0) \right| \\ \left(= \left| (\bar{p}, \beta) \xrightarrow[M_2]{w} (\bar{r}_k, \partial) \right| \right). \end{aligned}$$

Claim E_m の証明 文献 [Tom84], [TomSei85] と同様に，数学的帰納法を用いて証明する．まず， $m = 1$ の場合， $w = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ とできる．ここで，節点 (3.5.1) が分岐被適用節点である場合，**Claim E₁** の成立は明らか．また，節点 (3.5.1) が跳越し被適用節点である場合も，その対応節点は分岐被適用節点であり，そこに a による分岐が適用されている．更に，この a による分岐推移路に対応して，節点 (3.5.1) への跳越し適用による後続節点の導入が直接検討されている．従って，この場合も **Claim E₁** の成立が保証される．次に，ある $m (\geq 1)$ について **E₁, E₂, …, E_m** が成立すると仮定した場合，**E_{m+1}** も

成立することを証明する .

(A) 節点 (3.5.1) が分岐被適用節点の場合

$T(T_1 : T_2)$ 中に , 次のような推移路が存在する .

$$\begin{aligned} < (p, \alpha_1 \mid \alpha_2) \equiv h(\bar{p}, \beta) > \xrightarrow{T(T_1:T_2)}^{z'_1 \setminus a/z'_2} \\ < (p', \alpha'_1 \mid \alpha_2) \equiv h'(\bar{p}', \beta') > \end{aligned}$$

但し , $w = aw'$, $a \in \Sigma$, $z'_1 h' = h z'_2$, $h' \in \Delta^{\pm*}$.

ここで , 節点 $(p', \alpha'_1 \mid \alpha_2) \equiv h'(\bar{p}', \beta')$ は非中断節点であり , 仮定より E_m が成立する .
従って ,

$$\begin{aligned} (p', \alpha'_1 \mid \alpha_2) &\xrightarrow{T_1}^{w'/z'_1(m)} (r, \varepsilon \mid \alpha_2), \quad z_1 = z'_1 z''_1 \\ (\bar{p}', \beta') &\xrightarrow{T_2}^{w'/z'_2} (\bar{r}_k, \vartheta), \quad z_2 = z'_2 z''_2 \end{aligned}$$

なる任意の $w' \in \Sigma^*$, $z''_1, z''_2 \in \Delta^*$, $r \in Q_1$, $(\bar{r}_k, \vartheta) \in Q_2 \times \Gamma_2^*$ に対して , ある $t_k \in \Delta^{\pm*}$ が一意に存在して , $z'_1 t_k = h' z''_2$ が成立する . ここで , 節点 (3.5.1) に対する $E_{m+1}(i)$ について考えると ,

$$\begin{aligned} z_1 t_k &= z'_1 z''_1 t_k \quad (z_1 = z'_1 z''_1) \\ &= z'_1 h' z''_2 \quad (z''_1 t_k = h' z''_2) \\ &= z'_1 h' z'_2{}^{-1} z'_2 z''_2 \\ &= h z_2 \quad (h = z'_1 h' z'_2{}^{-1}, z_2 = z'_2 z''_2) \end{aligned}$$

となり , その成立が保証される . また , $E_{m+1}(ii)$, (iii) についても , 同様に , 節点 (3.5.1) に対する E_m の成立性より , 直接的に保証される .

(B) 節点 (3.5.1) が跳越し被適用節点の場合

まず , 次の推移を考える .

$$\begin{aligned} (p, \alpha_1 \mid \alpha_2) &\xrightarrow{T_1}^{w/z_1(m+1)} (r, \varepsilon \mid \alpha_2) \\ (\bar{p}, \beta) &\xrightarrow{T_2}^{w/z_2} (\bar{r}_k, \vartheta). \end{aligned}$$

ここで , 改めて , 節点 (3.5.1) を式 (3.4.2) で置き直し , 上記推移を次のように分割する .

$$(p, A \mid \alpha'') \xrightarrow{T_1}^{x/u(m')} (q, \varepsilon \mid \alpha'') \tag{3.5.2}$$

$$(q, \alpha_1'' \mid \alpha_2) \xrightarrow[T_1]{x'/u'} (m'') (r, \varepsilon \mid \alpha_2) \quad (3.5.3)$$

$$(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x/v} (\bar{q}_j, \gamma) \xrightarrow[T_2]{x'/v'} (\bar{r}_k, \partial)$$

但し, $w = xx'$, $\alpha_1 = A\alpha_1''$, $\alpha'' = \alpha_1''\alpha_2$

$$m' + m'' = m + 1, \quad z_1 = uu', \quad z_2 = vv'.$$

はじめに, 前半の推移 (3.5.2) に対して, $\mathbf{E}_{m'}$ ($1 \leq m' \leq m + 1$) の成立性について考える. ここで, 節点 (3.4.2) は, 式 (3.4.3) ~ (3.4.10) の状況により, 跳越しの前提条件が満足されているものとする. このとき, 対応節点 (3.4.3) は分岐被適用節点であるため, 前述の (A) の事情により, $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_{m+1}$ が成立する. 従って,

$$(p, A \mid \omega'') \xrightarrow[T_1]{x/u} (m') (q, \varepsilon \mid \omega'')$$

$$(\bar{p}, \beta') \xrightarrow[T_2]{x/v} (\bar{q}_j, \gamma'), \quad (1 \leq m' \leq m + 1)$$

なる推移について, 次の (i)', (ii)', (iii)' が成り立つ.

(i)' このような任意の $x \in \Sigma^*$, $u, v \in \Delta^*$, $q \in Q_1$, $(\bar{q}_j, \gamma') \in Q_2 \times \Gamma_2^*$ に対して, ある $t' \in \Delta^{\pm*}$ が一意に存在し, $ut' = h'v$ が成立する.

(ii)' ある $x_0 \in \Sigma^*$, $u_0, v_0 \in \Delta^*$ に対して, 次のような推移路が, $T(T_1 : T_2)$ 中に存在する.

$$\begin{aligned} < (p, A \mid \omega'') \equiv h'(\bar{p}, \beta') > \xrightarrow[T(T_1:T_2)]{u_0 \setminus x_0 / v_0} \\ < (q, \varepsilon \mid \omega'') \equiv t'(\bar{q}_j, \gamma'_0) > \end{aligned}$$

但し, $(q, \omega'') \equiv t'(\bar{q}_j, \gamma'_0)$ は非中断節点.

(iii)' 更に, 上記状況において, 次が成立する.

$$\begin{aligned} \text{RW-Pop} \left[(\bar{p}, \beta') \xrightarrow[T_2]{x_0/u_0} (\bar{q}_j, \gamma'_0) \right] \\ = \text{RW-Pop} \left[(\bar{p}, \beta') \xrightarrow[T_2]{x/u} (\bar{q}_j, \gamma') \right] \end{aligned}$$

且つ, $(\bar{q}_j, \gamma'_0) \stackrel{\mathcal{H}}{\cong} (\bar{q}_j, \gamma')$

$$\text{但し, } \mathcal{H} = \left| (\bar{p}, \beta') \xrightarrow[M_2]{x_0} (\bar{q}_j, \gamma'_0) \right| \\ \left(= \left| (\bar{p}, \beta') \xrightarrow[M_2]{x} (\bar{q}_j, \gamma') \right| \right).$$

ここで, (ii)' の推移路の存在により, 節点 (3.4.2) に対して, 式 (3.4.11) ~ (3.4.13) の状況に基づく推移路 (3.4.15) のような跳越しが適用されている. 従って,

$$n \geq \left| \text{RW-Seg} \left[(\bar{p}, \beta') \xrightarrow[T_2]{x_0/v_0} (\bar{q}_j, \gamma'_0) \right] \right| \\ = \left| \text{RW-Seg} \left[(\bar{p}, \beta') \xrightarrow[T_2]{x/v} (\bar{q}_j, \gamma') \right] \right|$$

なる n について, \simeq 同値関係式 (3.4.4), (3.4.6), (3.4.8) の成立も保証される. ここで, 副次対応節点 (3.4.5), (3.4.7) も分岐被適用節点であり, $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_{m+1}$ の成立性を加味すれば, 上記 $x, x_0 \in \Sigma^*$ に対して, ある $s, s' \in \Delta^{\pm*}$ が存在し,

$$us = gv, \quad us' = g'v, \quad u_0s = gv_0, \quad u_0s' = g'v_0$$

とできる. つまり, 補題 3.4.2 の式 (3.4.15) ~ (3.4.17) の状況が成立することになり, 同補題より $ut = hv$ が成立し, 従って, $\mathbf{E}_{m'}(i)$ の成立性が保証される. 次に, 推移路 (3.4.15) の跳越しに対する後続節点 (3.4.14) について, 一般性を失うことなく, 非中断節点であると考えることができ, 従って, $\mathbf{E}_{m'}(ii)$ の成立性が保証される. なぜならば, この節点が中断節点である場合を考えると, 着目節点 (3.4.2) に, その中断を可能とする次のような跳越しが適用されている.

$$\langle (p, A\alpha'') \equiv h(\bar{p}, \beta) \rangle \xrightarrow[T(T_1:T_2)]{u_{00} \setminus x_{00}/v_{00}} \\ \langle (q, \alpha'') \equiv t(\bar{q}_j, \gamma_{00}) \rangle$$

但し, $(q, \alpha'') \equiv t(\bar{q}_j, \gamma'_{00})$ は非中断節点.

このとき, この跳越しの基になる, 対応節点 (3.4.3) からの $x_{00} \in \Sigma^*$ による推移路が $T(T_1 : T_2)$ 中に存在する. 従って, この場合, 論理展開の起点として, この推移路を前記 (ii)' に使用することを考えれば, 改めて, 一般性を失うことなく, 後続節点 (3.4.14) を非中断節点として扱えることが分かる. 更に, 式 (3.4.4), および, 前記 (iii)' の成立性によ

り, $\mathbf{E}_{m'}$ (iii) の成立も明らか. 以上のように $\mathbf{E}_{m'}$ ($1 \leq m' \leq m+1$) の成立が保証され, 従って, $m' = m+1$ の場合については, 全体として, \mathbf{E}_{m+1} の成立が保証される.

一方, 推移 (3.5.2) において, $m' < m+1$ である場合には, 更に後半の推移 (3.5.3) について考える必要がある. まず, 推移 (3.5.2) 中の $x \in \Sigma^*$ による推移先の計算状況を等価式の両辺とする節点 $(q, \alpha'') \equiv t(\bar{q}_j, \gamma)$ が, $T(T_1 : T_2)$ 中に存在する場合には, 前述の (A) とほぼ同様の論理展開により容易に証明できる. しかし, 一般には, この節点が $T(T_1 : T_2)$ 中に存在するとは限らない. そこで, 前記の推移路 (3.4.15) の跳越しに対する非中断後続節点 $(q, \alpha'') \equiv t(\bar{q}_j, \gamma_0)$ を考える. つまり, この節点には, 仮定より, \mathbf{E}_m の成立が保証されており, 従って, 後半の推移 (3.5.3) を, この非中断後続節点に対して同様に考えることにより, この場合も, 全体として, \mathbf{E}_{m+1} の成立を保証できる. \square

3.6 定理

以上を総合して，次の定理を得る．

定理 3.6.1 ある決定性プッシュダウン変換器対が，前記の条件 1，2 (3.3 前提と基本命題, p.17) を満足する場合，その等価性判定は可解である．

第 4 章

D P D T の等価性判定問題における 多項式時間アルゴリズム

4.1 概説

直接的分岐アルゴリズムを用いた等価性判定に関して，前章で紹介したような可解性を保証する十分条件の緩和に関する検討に並行して，その最大時間計算量の改善についても検討が行われている．特に効率改善において，多項式時間内で判定可能か否かを見極めることは非常に重要である．直接的分岐アルゴリズムの手法を用いることにより，dpda については，状態が単一という制限を持つ単純決定性プッシュダウンオートマトン同士，あるいは，スタック記号が単一という制限を持つ決定性限定ワンカウンターオートマトン同士について，その等価性判定を多項式時間で解決するアルゴリズムが得られている（[WT89], [WT91], [HTW95]）．

しかしながら，dpdt については，直接的分岐アルゴリズムの手法を用いた等価性判定において，多項式時間で解決できる対象の範囲は未だ示されていなかった．前章で紹介したアルゴリズムについても，他の多くの方式と比較すれば簡単な方式と言えるが，アルゴリズムの最大時間計算量としては指数関数的時間を要するものである．当然，dpda としての等価性判定が多項式時間で解決できなければ，それに出力を付与した dpdt の等価性判定は多項式時間では解決できない．そこで，本章では，直接的分岐アルゴリズムの有効性を示す，ひとつの典型的な結果として，既に文献 [HTW95] において多項式時間等価

性判定の可解性が得られている実時間空スタック受理式決定性限定ワンカウンターオートマトンに対して，任意に出力機構を付与した実時間空スタック受理式決定性限定ワンカウンター変換器の等価性判定について検討し，前章とほぼ同様のアルゴリズムのまま，その等価性判定が多項式時間で解決できるという結果を得た．アルゴリズム自体は文献 [TomSei89], [SeiTW07a] のアルゴリズムを本対象 $dpdt$ に特化して単純化したものであるが，ここでは，詳細な計算量解析とその証明を行っている．

ところで，受理記号列集合部分が本質的に正則を超えるような変換器に対して，その等価性を多項式的に判定出来るとの結果は，これまでほとんど存在しなかったが，第 1 章でも述べたように，最近の成果として，文献 [Ba07] が発表されている．この文献 [Ba07] においては，出力を付与した単純決定性言語同士の等価性判定が多項式時間で可解であることが示されている．以降，本章では，この文献 [Ba07] についても補足説明を行う．なお，本章の結果と文献 [Ba07] の結果は比較不能である．

本章の内容は，関連論文 (4) (文献 [SeiTW08]) に準じている．

4.2 定義と表記法

以下に本章で使用する定義と表記法を記す。

定義 4.2.1 (文献 [HTW95], p.306, Definition 2.2 参照)

ある dpda $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \phi)$ について, $\Gamma = \{Z_0\}$ である場合, dpda M を決定性限定ワンカウンターオートマトン (deterministic restricted one-counter automaton; droca) と呼ぶ。同様に, ある dpdt $T = (Q, \Gamma, \Sigma, \Delta, \mu, q_0, Z_0, \phi)$ について, $\Gamma = \{Z_0\}$ である場合, dpdt T を決定性限定ワンカウンター変換器 (deterministic restricted one-counter transducer; droct) と呼ぶ。また, 上記のように, droct T の出力機構を取り除いた droca が M となる場合, M を T の随伴 droca と呼ぶ。

定義 4.2.2 dpdt T の計算状況 $(p, \alpha) \in Q \times \Gamma^*$ に対して以下を定義する。なお, 随伴 dpda を M とする。

$$\text{FIRST}_{live}(p, \alpha) = \{a \in \text{FIRST}(p, \alpha) \mid$$

$$(p, \alpha) \xrightarrow[M]{a} (q, \beta), L(q, \beta) \neq \phi,$$

$$\text{for some } q \in Q, \beta \in \Gamma^*\}.$$

4.3 前提と基本命題

等価性判定対象とする実時間空スタック受理式 droct 対を, $T_1 = (Q_1, \Gamma_1, \Sigma, \Delta, \mu_1, q_{01}, Z_{01}, \phi)$, $T_2 = (Q_2, \Gamma_2, \Sigma, \Delta, \mu_2, q_{02}, Z_{02}, \phi)$ とし, 各々から出力機構を取り除いた droca (随伴 droca) を M_1, M_2 とする. ここで, 文献 [HTW95] において, 任意の droca 同士の包含性判定 (等価性判定を含む) を多項式時間で解決するアルゴリズムを得ている. 従って, 以降, 既に多項式時間内で “ $M_1 \equiv M_2$ ” との判定を得ている状況を前提とし, droct 対 T_1, T_2 の出力部分に関する多項式時間内の等価性判定を考える. なお, 以下では, スタック記号 $A \in \Gamma_1$ を頻繁に使用するが, T_1 のスタック記号は1種類であり, $Z_{01} = A$ であることに留意されたい.

ここで, まえがきで紹介した文献 [Ba07] で対象とする単純決定性言語と, 本章で対象とする droca の受理する言語の比較を考える. 例えば, $\{a^n b^n \mid n \geq 1\} \cup \{a^n c^n \mid n \geq 1\}$ なる記号列集合を受理する dpda を考えると, a^n による推移の後に状態の切り替えが必要となる. 従って, この記号列集合は, droca の受理言語クラスには属するが, 状態が単一である, 単純決定性プッシュダウンオートマトンの受理言語クラスには属さない. また, 逆に, $\{a^n b^n c \mid n \geq 1\}$ なる記号列集合を受理する dpda を考えると, n が状態数より大きい記号列を受理するためにスタック記号を2種類以上必要とする. 従って, 単純決定性言語のクラスには属するが, スタック記号が単一である, droca の受理言語のクラスには属さない. 以上のように, 本章の結果と文献 [Ba07] の結果は比較不能である.

命題 4.3.1 $T_1 \equiv T_2$ であるとき, 次の (i), (ii) が成立する.

(i) ある $w \in \Sigma^*$, $w_1, w_2 \in \Delta^*$, $p \in Q_1$, $\bar{p} \in Q_2$, $\alpha \in \Gamma_1^*$, $\beta \in \Gamma_2^*$ に対して,

$$(q_{01}, Z_{01}) \xrightarrow[T_1]{w/w_1} (p, \alpha) \quad (4.3.1)$$

$$(q_{02}, Z_{02}) \xrightarrow[T_2]{w/w_2} (\bar{p}, \beta) \quad (4.3.2)$$

であり, 更に, $L(p, \alpha) \neq \phi$ 且つ $L(\bar{p}, \beta) \neq \phi$ であるとき, $w_1 h = w_2$ なる, ある $h \in \Delta^{\pm*}$ が存在し, 以下が成立する.

$$(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta). \quad (4.3.3)$$

(ii) 更に, ある $w' \in \Sigma^*, w'_1, w'_2 \in \Delta^*$ に対して,

$$(q_{01}, Z_{01}) \xrightarrow[T_1]{w'/w'_1} (p, \alpha)$$

$$(q_{02}, Z_{02}) \xrightarrow[T_2]{w'/w'_2} (\bar{p}, \beta)$$

であるとき, $w'_1 h' = w'_2$ なる, ある $h' \in \Delta^{\pm*}$ が存在し, 且つ, $h = h'$ が成立する.

(証明) まず, (i) について考える. 式 (4.3.3) が不成立ならば, その等価式の定義 (定義 2.6) から, 直ちに, $T_1 \neq T_2$ となる. 従って, その対偶として, 式 (4.3.3) の成立が保証される. また, (ii) の成立は明らか. \square

定義 4.3.1 T_1, T_2 に依存する各種定数を定義する.

$$\tau_i = \text{Max}\{|z| \mid (p, A) \xrightarrow{a/z} (q, \theta) \in \mu_i\}, \quad (i = 1, 2)$$

$$\tau = \text{Max}(\tau_1, \tau_2)$$

$$\rho_i = \text{Max}\{|\theta| \mid (p, A) \xrightarrow{a/z} (q, \theta) \in \mu_i\}, \quad (i = 1, 2)$$

$$\rho = \text{Max}(\rho_1, \rho_2).$$

また, $L(p, A) \neq \phi$ なる, ある $(p, A) \in Q_1 \times \Gamma_1$ に対して, 以下の定数 $k_1(p, A)$ を定義する.

$$k_1(p, A) = \text{Max}\{$$

$$\text{Min}\{|w| \mid (p, A) \xrightarrow[M_1]{w} (q, \varepsilon), w \in \Sigma^*\} \mid q \in Q_1\}.$$

更に, droca M_1 に依存する, 定数 k_1 を定義する.

$$k_1 = \text{Max}\{k_1(p, A) \mid$$

$$L(p, A) \neq \phi, p \in Q_1, A \in \Gamma_1\}.$$

なお, $\tau = 0$ あるいは $\rho < 2$ である場合は, その多項式時間等価性判定の可解性は自明である. 従って, 以下では, $\tau > 0$ 且つ $\rho \geq 2$ を前提とする.

命題 4.3.2 T_1, T_2 の随伴 droca について, $M_1 \equiv M_2$ であるとき, ある $w \in \Sigma^*$, $p \in Q_1$, $\bar{p} \in Q_2$, $\omega_1 \in \Gamma_1^+$, $\omega_2 \in \Gamma_2^+$ に対して,

$$(q_{01}, Z_{01}) \xrightarrow[M_1]{w} (p, \omega_1), (q_{02}, Z_{02}) \xrightarrow[M_2]{w} (\bar{p}, \omega_2)$$

であり, 且つ, $L(p, \omega_1) \neq \phi$, $L(\bar{p}, \omega_2) \neq \phi$ であるとする. ここで, 次の (i), (ii) が成立する.

(i) $k_1 |\omega_1| \geq |\omega_2|$.

(ii) ある $x \in \Sigma^*$, $A \in \Gamma_1$, $q \in Q_1$ について,

$$(p, A \mid \alpha'') \xrightarrow[M_1]{x} (q, \varepsilon \mid \alpha''), \alpha'' \in \Gamma_1^*$$

であるとき, $|\omega_2| \leq |\beta|$ である任意の $\beta = \omega_2 \beta'' \in \Gamma_2^+$ について, 以下が成立する.

$$(\bar{p}, \omega_2 \mid \beta'') \xrightarrow[M_2]{x} (\bar{q}, \gamma \mid \beta'')$$

for some $\bar{q} \in Q_2$, $\gamma \in \Gamma_2^*$.

(証明) (i) については, M_1 に依存する定数 k_1 の定義と, droca M_2 が実時間であることから, 容易に証明できる (文献 [Tom82], p.197, Lemma 3.1 参照).

(ii) については, もし, ある $y \in L(\bar{p}, \omega_2)$ について,

$$(p, A) \xrightarrow[M_1]{y} (r, \eta), \text{ for some } \eta \in \Gamma^+$$

である場合, 明らかに $(p, \omega_1) \not\equiv (\bar{p}, \omega_2)$ であり, $M_1 \equiv M_2$ の前提に反し, 従って, 題意を得る. □

この命題 4.3.2 (ii) は, dpda の等価性判定を可解とする基本命題 (文献 [Tom82], p.195, Proposition 3.2) の成立に相当し, 従って, 文献 [TomSei89] の結果より, dpdt 対 T_1, T_2 の等価性判定の可解性が保証される. 図 4.1 参照.

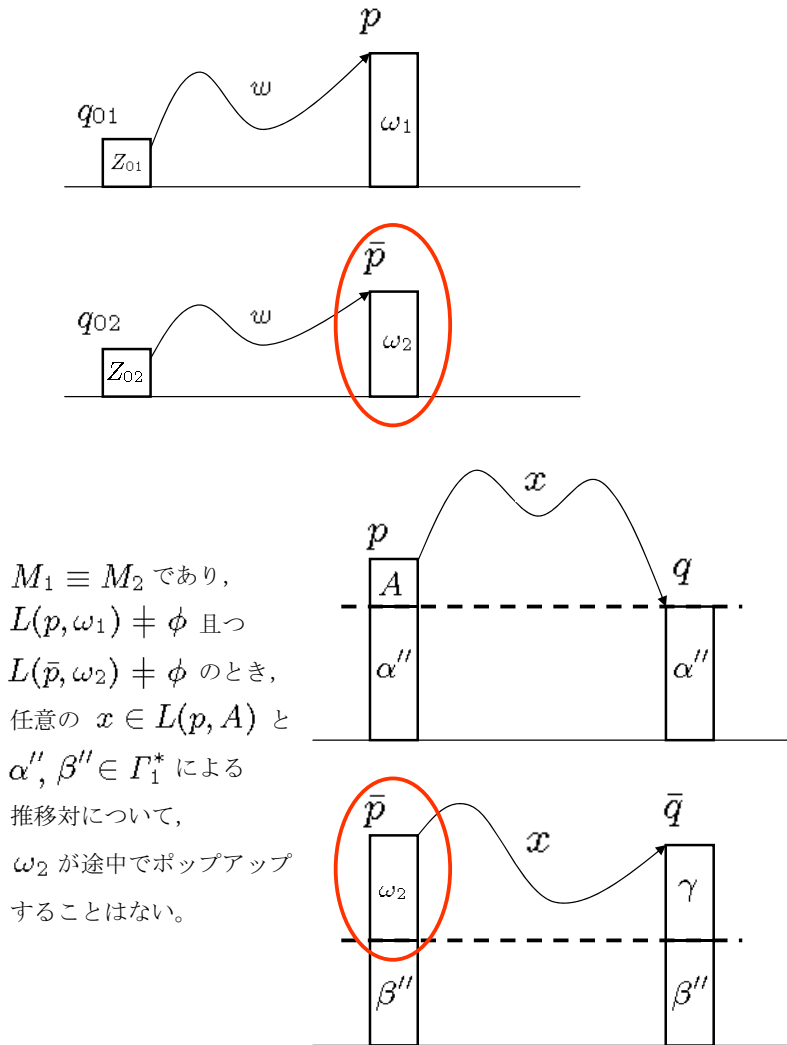


図 4.1 命題 4.3.2 (ii) の参考図

補題 4.3.1 $T_1 \equiv T_2$ であるとき, ある $x_0, x \in \Sigma^+, u_0, u, v_0, v \in \Delta^*, p \in Q_1, \bar{p} \in Q_2,$
 $\alpha, \alpha' \in \Gamma_1^+, \beta, \beta' \in \Gamma_2^+$ に対して,

$$(q_{01}, Z_{01}) \xrightarrow[T_1]{x_0/u_0} (p, \alpha) \xrightarrow[T_1]{x/u} (p, \alpha') \quad (4.3.4)$$

$$(q_{02}, Z_{02}) \xrightarrow[T_2]{x_0/v_0} (\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x/v} (\bar{p}, \beta')$$

であるとする. ここで, 以下の (i), (ii) が成立する.

(i) $|\alpha| \leq |\alpha'|$ ならば $|\beta| \leq |\beta'|$.

(ii) $|\alpha| > |\alpha'|$ ならば $|\beta| > |\beta'|$.

(証明) まず, (i) の証明のため, $|\alpha| \leq |\alpha'|$ である場合を考える. ここで, 背理法の仮定として, $|\beta| > |\beta'|$ であるものとする. このとき, T_1 の計算状況 (p, α) からは任意の非負整数 n に対する x^n による推移が可能であり, その間, 受理計算状況 (空スタック) に至ることはない. 一方, T_2 の計算状況 (\bar{p}, β) については, $|\beta| > |\beta'|$ なる仮定により, $(^m)x^n \in L(\bar{p}, \beta)$ であるような, ある非負整数 m, n が必ず存在することになる. 従って, 補題の前提である $T_1 \equiv T_2$ に矛盾し, 題意を得る. また, (ii) については, 上記証明の対称として, $|\beta| \leq |\beta'|$ である場合の $|\alpha| \leq |\alpha'|$ が成立性が保証され, その対偶として題意を得る. \square

定義 4.3.2 上記補題 4.3.1 の推移対 (4.3.4) において, ある $h \in \Delta^{\pm*}$ が存在して, $u_0 h = v_0$ であるとする. ここで, $|\alpha| \leq |\alpha'|$ 且つ $|\beta| \leq |\beta'|$ であり,

$$(p, \alpha) \xrightarrow[T_1]{x/u} (p, \alpha''\alpha), \quad (\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x/v} (\bar{p}, \beta''\beta)$$

ただし, $\alpha' = \alpha''\alpha, \alpha'' \in \Gamma_1^*, \beta' = \beta''\beta, \beta'' \in \Gamma_2^*$

更に, ある $h' \in \Delta^{\pm*}$ が存在して $uh' = hv$

であるとする. このような推移対を droct-SE 推移対と呼ぶ. そして, この推移対の途中に, 他の droct-SE 推移対を一切含まない場合, これを “極小 droct-SE 推移対” S と呼び, 次のように表記する.

$$S = ((p, \bar{p}, \alpha, \beta), h, (x, u, v), (\alpha'', \beta''), h').$$

更に, T_1, T_2 に依存する全ての極小 droct-SE 推移対の集合を $S(T_1 : T_2)$ と表記する.

命題 4.3.3 $T_1 \equiv T_2$ であるとき, ある極小 droct-SE 推移対 $S \in S(T_1 : T_2)$ を

$$S = ((p, \bar{p}, \alpha, \beta), h, (x, u, v), (\alpha'', \beta''), h')$$

for some $x \in \Sigma^*$, $u, v \in \Delta^*$, $p \in Q_1$, $\bar{p} \in Q_2$,

$$\alpha, \alpha'' \in \Gamma_1^*, \beta, \beta'' \in \Gamma_2^*, h, h' \in \Delta^{\pm*}$$

とする. ここで, 以下の (i) ~ (iii) が成立する.

(i) ある $h'' \in \Delta^{\pm*}$ が存在して, 以下が成立する.

$$(a) h', h \in \Delta^* \text{ ならば, } h = h'h''$$

$$(b) h', h \in \Delta^{-*} \text{ ならば, } h^{-1} = h'^{-1}h''.$$

(ii) ある $r \in Q_1$, $\gamma \in \Gamma_1^+$ に対して, 上記の極小 droct-SE 推移対における T_1 側の推移が,

$$(p, \alpha) \xrightarrow{T_1}^{x'/u'} (r, \gamma) \xrightarrow{T_1}^{x''/u''} (p, \alpha')$$

$$\text{ただし, } \alpha' = \alpha''\alpha, x = x'x'', u = u'u''$$

のように分割できるとき, $D = \rho|Q_1||Q_2|$ として, 以下が成立する.

$$||\alpha| - |\gamma|| \leq D \text{ (従って, } |\alpha''| \leq D).$$

更に, 対称的に T_2 側でも同様の性質が成立つ.

(iii) $U = 2\tau\rho|Q_1|^2|Q_2|^2$ として,

$$|u| \leq U \text{ 且つ } |v| \leq U.$$

(証明) (i) については, 極小 droct-SE 推移対 S の始点から, $x \in \Sigma^*$ による無限の繰り返し推移が可能であることより, 容易に証明できる (第3章の命題 3.3.3 参照).

次に, (ii) を証明する. まず, 背理法の仮定として, $|\gamma| - |\alpha| > D = \rho|Q_1||Q_2|$ である場合を考える. このとき, $|\alpha_1| \leq |\alpha_2|$ であるような, ある $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma_1^+$, および, ある $q \in Q_1, \bar{q} \in Q_2$ について,

$$(p, \alpha) \xrightarrow{T_1}^{x_1/u_1} (q, \alpha_1) \xrightarrow{T_1}^{x_2/u_2} (q, \alpha_2) \xrightarrow{T_1}^{x_3/u_3} (r, \gamma)$$

$$(\bar{p}, \beta) \xrightarrow{T_2}^{x_1/v_1} (\bar{q}, \beta_1) \xrightarrow{T_2}^{x_2/v_2} (\bar{q}, \beta_2)$$

$$\text{ただし, } x' = x_1x_2x_3, u' = u_1u_2u_3$$

for some $x_1, x_2, x_3 \in \Sigma^*$, $\beta_1, \beta_2 \in \Gamma_2^+$,

$$u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 \in \Delta^*$$

のような推移が存在する．更に，補題 4.3.1 (i) の成立により， $|\beta_1| \leq |\beta_2|$ が保証される．従って，上記 $x_2 \in \Sigma^*$ に対応する推移は droct-SE 推移対となり， S が極小 droct-SE 推移対であることに矛盾する．次に，背理法の仮定として， $|\alpha| - |\gamma| > D$ である場合を考える．このとき，(ii) の後半の推移， $(r, \gamma) \xrightarrow[T_1]{x''/u''} (p, \alpha')$ を考えた場合， $|\alpha'| - |\gamma| > D$ となる．従って，上記と同様の事情により，この推移の途中に droct-SE 推移対が含まれることになり矛盾する．更に， T_1, T_2 の対称性を考えれば， T_1, T_2 を逆にしても明らかに同様の事情が成立する．従って，(ii) の題意を得る．

最後に，(iii) の成立性を証明する．まず，上記 (ii) の成立より，極小の droct-SE 推移対の途中のスタックの上下変動の上限が D 以下であることが保証され，従って，この推移途中に出現する T_1 側の計算状況の種類は，スタック記号が単一であるためスタック記号列の違いは高さの違いだけであることを考慮すれば，たかだか $|Q_1| \times (2 \times D)$ 以下となる．ここで，命題中の極小 droct-SE 推移対 S において，ある非負定数 m について，その T_1 側の推移を，

$$(p, \alpha) \xrightarrow[T_1]{x/u}^{(m)} (p, \alpha'), \quad \alpha' = \alpha'' \alpha$$

とする．ここで，背理法の仮定として，

$$m > |Q_1| \times (2 \times D) \times |Q_2|$$

であるとする．このとき，ある $p' \in Q_1, \bar{p}' \in Q_2, \eta \in \Gamma_1^+$ について，この極小 droct-SE 推移対 S を以下のように分割できる．

$$(p, \alpha) \xrightarrow[T_1]{y_1/w_1} (p', \eta) \xrightarrow[T_1]{y_2/w_2} (p', \eta) \xrightarrow[T_1]{y_3/w_3} (p, \alpha')$$

$$(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{y_1/z_1} (\bar{p}', \partial_1) \xrightarrow[T_2]{y_2/z_2} (\bar{p}', \partial_2).$$

ただし， $x = y_1 y_2 y_3, u = w_1 w_2 w_3$

for some $y_1, y_2, y_3 \in \Sigma^*$, $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma_2^+$,

$$w_1, w_2, w_3, z_1, z_2 \in \Delta^*.$$

ここで，補題 4.3.1 (i) の成立により， $|\partial_1| \leq |\partial_2|$ となり， S が極小であるという前提に矛盾する．これより，

$$m \leq |Q_1| \times (2 \times \mathcal{D}) \times |Q_2|$$

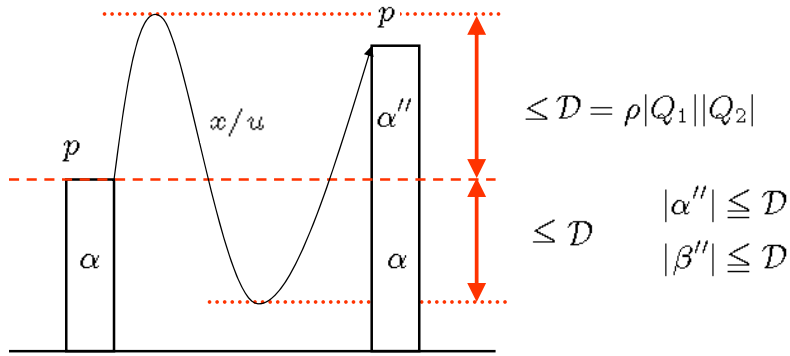
が保証される．従って，極小の droct-SE 推移対における T_1 側の出力長について，以下が得られる．

$$\begin{aligned} |u| &\leq \tau \times |Q_1| \times (2 \times \mathcal{D}) \times |Q_2| \\ &= \tau \times |Q_1| \times (2 \times \rho |Q_1| |Q_2|) \times |Q_2| \\ &= 2\tau\rho |Q_1|^2 |Q_2|^2 = \mathcal{U}. \end{aligned}$$

更に， T_1, T_2 を逆にした対称的な論理展開により， $|v| \leq \mathcal{U}$ の成立も保証され，(iii) の題意を得る．□

本命題 4.3.3 の定数 \mathcal{D}, \mathcal{U} が多項式オーダーであることにより，本章において， T_1, T_2 の等価性判定を多項式時間内で可解とする基本が確立された．図 4.2 参照．詳細な計算量評価は 5 章に示す．

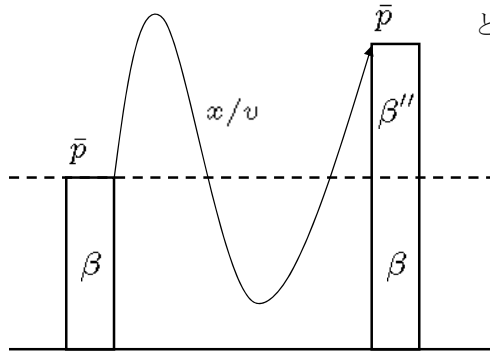
$$S = ((p, \bar{p}, \alpha, \beta), h, (x, u, v), (\alpha'', \beta''), h').$$



h

h'

$h, h' \in \Delta^{\pm*}$ について、
一方が他方の接頭辞 (prefix)
となる。



$$|u| \leq U \text{ 且つ } |v| \leq U \quad U = 2\tau\rho|Q_1|^2|Q_2|^2$$

図 4.2 droct-SE 推移対の性質

4.4 等価性判定アルゴリズム

本アルゴリズムは，文献 [TomSei89] と第3章 ([SeiTW07a]) のアルゴリズムを本章の対象 dpdt に特化したものである．具体的には， droct 対 T_1, T_2 の初期計算状況に対する等価式 $(q_{01}, Z_{01}) \equiv (q_{02}, Z_{02})$ を唯一の節点（根）とする判定木から，後述の“分岐”，“跳越し”の操作により逐次その子節点を導入することにより判定木の展開を行なう．なお， T_1, T_2 が実時間であるため，第3章で紹介した“中断”操作は不要となる．ここで，判定木中の節点は，*unchecked*，*checked*，*skipping*，*s-checked* の4つの状態（status）をとる．そして，*unchecked* 状態，あるいは，*skipping* 状態の節点が存在する間は，その中でサイズの最も小さいものに順次着目する．節点のサイズとは，節点 $(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta)$ の場合， $(\text{Max}\{|\alpha|, |\beta|\}, \text{Min}\{|\alpha|, |\beta|\})$ なる数値対で定義し，その大小関係は，まず1つめ（左側）の数値の大小関係とし，これが等しい場合は，2つめ（右側）の数値の大小関係で決定するものとする．

さて，推移 (4.3.1), (4.3.2) に対応して，節点 (4.3.3) が判定木中に導入され，その成立性が着目されたとする．ここで， $\alpha = \beta = \varepsilon$ である場合， $T_1 \equiv T_2$ であるためには， $h = \varepsilon$ でなければならない．このチェックを“終端チェック”と呼ぶ．また，判定木中に $(p, \alpha) \equiv h'(\bar{p}, \beta)$ なる節点既に存在している場合， $T_1 \equiv T_2$ であるためには， $h = h'$ でなければならない．このチェックを出力の“一意性チェック”と呼ぶ．このいずれかのチェックが不成立である場合，直ちに“ $T_1 \not\equiv T_2$ ”と判定を下し，全手続きを終了する．着目節点 (4.3.3) が，この両チェックの対象外である場合に，後述する“分岐”，“跳越し”操作の適用を検討する．

なお，式 (4.3.3) のような節点を判定木中に導入する時点で，まずは $L(p, \alpha)$ ， $L(\bar{p}, \beta)$ が ϕ であるか否かのチェックを行い，両者共に ϕ である場合はその節点を判定木に導入しない．また， $M_1 \equiv M_2$ の前提から，どちらか一方だけが ϕ である場合はない．このチェックを“Liveness チェック”と呼ぶが，文献 [HTW95] においてその多項式時間での判定可解性を得ている．従って，本章ではその方法についての記述は省略する．

以上の手順において，途中で“ $T_1 \not\equiv T_2$ ”と判定されることなく，*unchecked* 節点も *skipping* 節点も存在しなくなった場合，“ $T_1 \equiv T_2$ ”との判定を下す．

4.4.1 分岐

補題 4.4.1 $\text{droct } T_1, T_2$ のある計算状況対 $(p, \alpha) \in Q_1 \times \Gamma_1^+$, $(\bar{p}, \beta) \in Q_2 \times \Gamma_2^+$ に対して, 等価式 (4.3.3) が成立することと, 次の (i), (ii) が成立することは同値である.

(i) 全ての $a_i \in \text{FIRST}_{\text{live}}(p, \alpha) = \text{FIRST}_{\text{live}}(\bar{p}, \beta) = \{a_1, a_2, \dots, a_l\} \subseteq \Sigma$ における推移,

$$(p, \alpha) \xrightarrow{T_1}^{a_i/u_i} (p_i, \alpha_i) \quad \text{且つ} \quad (\bar{p}, \beta) \xrightarrow{T_2}^{a_i/v_i} (\bar{p}_i, \beta_i)$$

に対して, ある適当な $h_i \in \Delta^{\pm*}$ が存在して, $u_i h_i = h v_i$ が成立する.

(ii) 上記 (i) の各々の場合に対して, 以下が成立する.

$$(p_i, \alpha_i) \equiv h_i(\bar{p}_i, \beta_i), \quad 1 \leq i \leq l. \quad (4.4.1)$$

(証明) (i), あるいは, (ii) の式 (4.4.1) が成立しなければ, 明らかに式 (4.3.3) も成立しない. また, $(p, \alpha) \not\equiv h(\bar{p}, \beta)$ であるとき, (i), (ii) の両者が共に成立することはない. 従って, 題意を得る. □

上記補題 4.4.1(i) の成立性チェックを, “分岐出力チェック” と呼び, チェック成功であるとき, 全ての i に対する等価式 (4.4.1) を節点 (4.3.3) の子節点として加え, 着目節点の状態を *checked* にする. このとき, 各々の枝のラベルを “ $u_i \setminus a_i / v_i$ ” とする. この操作を分岐と呼ぶ. なお, 分岐出力チェックが不成功のとき, “ $T_1 \neq T_2$ ” と判定を下し, 全手続きを終了する.

4.4.2 跳越し

上記分岐操作のみでは, 判定木が無限に展開して終端しない場合がある. そこで, 文献 [TomSei89] や第3章 ([SeiTW07a]) と同様に跳越しを導入する. なお, 以降, 現時点までに展開された判定木を $T(T_1 : T_2)$ で表すこととする. 以下の記述においては, 第3章の定義 3.4.1 を理解しているものとして, そのまま使用する. また, 第3章の跳越しとの違いは, 以下の定義 4.4.1 の跳越しの前提条件がより単純になったことと, 4.4.2 において, 参照節点という概念を導入したことである. 各々, 第3章の定義 3.4.2, 3.4.3 と比較参照されたい.

定義 4.4.1 (跳越しの前提条件) 着目節点 (4.3.3) において, (p, α) が非減少モードであり, 更に, $T(T_1 : T_2)$ 中の既に分岐の適用されている,

$$(p, \omega_{11}) \equiv h'(\bar{p}, \omega_{12}) \quad (4.4.2)$$

for some $\omega_{11} \in \Gamma_1^+$, $\omega_{12} \in \Gamma_2^+$, $h' \in \Delta^{\pm*}$

なる節点が存在し, 且つ,

$$|\beta| \geq |\omega_{12}| \quad (4.4.3)$$

であるとする. このとき, 以下の (a) あるいは (b) が成立する場合, 着目節点 (4.3.3) は跳越し前提条件を満足していると言う.

(a) $h = h'$.

(b) $T(T_1 : T_2)$ 中に,

$$(p, \omega_{21}) \equiv g(\bar{p}, \omega_{22}) \quad (4.4.4)$$

$$(p, \omega_{31}) \equiv g'(\bar{p}, \omega_{32}) \quad (4.4.5)$$

for some $\omega_{21}, \omega_{31} \in \Gamma_1^+$, $\omega_{22}, \omega_{32} \in \Gamma_2^+$,

$$g, g' \in \Delta^{\pm*}$$

なる分岐被適用節点が存在し, ある $h'' \in \Delta^{\pm*}$ に対し, 次が成立する.

$$h, h', g, g' \in \Delta^*, \quad (4.4.6)$$

$$h = h'h'', \quad g = g'h'',$$

あるいは,

$$h, h', g, g' \in \Delta^{-*}, \quad (4.4.7)$$

$$h^{-1} = h'^{-1}h'', \quad g^{-1} = g'^{-1}h''.$$

ここで, 節点 (4.4.2) をこの跳越しの“対応節点”, 更に, 節点 (4.4.4), (4.4.5) を“副次対応節点”と呼ぶ. なお, 節点 (4.4.2) と節点 (4.4.4) は同一でも良い.

定義 4.4.2 (跳越し適用の可否) 対応節点 (4.4.2), 副次対応節点 (4.4.4), (4.4.5) の内で右辺のスタックの高さの最も低い節点をこの跳越しの“参照節点”と呼び, 改めて,

$$(p, \omega_{01}) \equiv h_0(\bar{p}, \omega_{02}) \quad (4.4.8)$$

とする. 従って, $(\omega_{01} = \omega_{11}, \omega_{02} = \omega_{12}, h_0 = h')$, あるいは, $(\omega_{01} = \omega_{21}, \omega_{02} = \omega_{22}, h_0 = g)$, あるいは, $(\omega_{01} = \omega_{31}, \omega_{02} = \omega_{32}, h_0 = g')$ となる. ここで, 着目節点 (4.3.3) が, 前定義の跳越しの前提条件を満足しており, 更に, ある $x_0 \in \Sigma^*$, $u_0, v_0 \in \Delta^*$, $q \in Q_1$, $(\bar{q}, \gamma_{02}) \in Q_2 \times \Gamma_2^*$, $t_0 \in \Delta^{\pm*}$ に対して, 参照節点 (4.4.8) から, 次の推移路が存在するものとする.

$$\begin{aligned} \langle (p, A \mid \omega''_{01}) \equiv h_0(\bar{p}, \omega_{02}) \rangle &\xrightarrow{T(T_1; T_2)} \langle (q, \varepsilon \mid \omega''_{01}) \equiv t_0(\bar{q}, \gamma_{02}) \rangle \\ &\quad (4.4.9) \end{aligned}$$

ただし, $\omega_{01} = A\omega''_{01}$, $A \in \Gamma_1$, $\omega''_{01} \in \Gamma_1^*$.

このとき, 式 (4.4.3) の成立, および, 参照節点の定義から, 上記推移 (4.4.9) に対応した, 着目節点 (4.3.3) の両辺の計算状況を起点とする次の推移が可能となる.

$$\begin{aligned} (p, A\alpha'') &\xrightarrow{T_1} (q, \alpha'') \quad (4.4.10) \\ (\bar{p}, \omega_{02}\beta'') &\xrightarrow{T_2} (\bar{q}, \gamma_{02}\beta'') \end{aligned}$$

ただし, $\alpha = A\alpha''$, $A \in \Gamma_1$, $\alpha'' \in \Gamma_1^*$,

$$\beta = \omega_{02}\beta'', \beta'' \in \Gamma_2^*.$$

さて, ここで, ある $t \in \Delta^{\pm*}$ が存在し,

$$u_0 t = h v_0 \quad (4.4.11)$$

が成立する場合, 着目節点 (4.3.3) に対する跳越しが適用可能であると言う. □

着目節点 (4.3.3) が, 定義 4.4.1 における跳越しの前提条件を満足しており, 更に, 定義 4.4.2 の跳越し適用が可能である場合, 着目節点に対して跳越しを適用し, その子節点 (これを“後続節点”と呼ぶ) として,

$$(q, \alpha'') \equiv t(\bar{q}, \gamma_{02}\beta'') \quad (4.4.12)$$

を $T(T_1 : T_2)$ に取り入れ, そこへ至る枝のラベルを “ $u_0 \setminus x_0 / v_0$ ” とする. 同様に, この時点の $T(T_1 : T_2)$ において可能な限りの後続節点の追加を行い, それ以上の追加ができなくなった時点で着目節点の状態を *s-checked* とする. そして, 以後 $T(T_1 : T_2)$ が変化するたびに, 全ての *s-checked* 節点の状態を *skipping* として跳越し適用の可能性を常に監視し, 必要に応じてその後続節点の追加を行う. なお, 式 (4.4.11) が成立しない場合には, 直ちに “ $T_1 \neq T_2$ ” と判定を下し, 全手続きを終了する.

以下に, この跳越しの正当性を保証する補題 4.4.2 を示す. 本アルゴリズムにおける跳越しの正当性の考え方は, 基本的に, 文献 [TomSei89], および, 第3章と同様の考え方を基礎としており, つまり, 左辺の先頭スタックがポップアップするような推移について, 対応節点, 副次対応節点以下の分岐出力チェックで, 跳越し被適用節点以下の分岐出力チェックを代替できることを保証するものである. この保証が補題 4.4.2 であるが, その証明については, 命題 4.3.2 の成立により, 文献 [TomSei89], p.47, Lemma 4.2., および, 第3章の補題 3.4.2 と全く同様となる.

補題 4.4.2 (定義 4.2(b) の跳越しに対する正当性: 第3章の補題 3.4.2 と比較参照されたい) 着目節点 (4.3.3) に対して, 定義 4.4.1 における (b) の跳越し前提条件が成立し, 式 (4.4.2) ~ (4.4.11) の状況によりその跳越しが適用され,

$$\begin{aligned} \langle (p, A\alpha'') \equiv h(\bar{p}, \omega_{02}\beta'') \rangle &> \frac{u_0 \setminus x_0 / v_0}{T(T_1:T_2)} && (4.4.13) \\ &< (q, \alpha'') \equiv t(\bar{q}, \gamma_{02}\beta'') \rangle \end{aligned}$$

であるとする. 更に, 対応節点 (4.4.2), および, 副次対応節点 (4.4.4), (4.4.5) の各 $h', g, g' \in \Delta^{\pm*}$ に対して, 各々ある $t', s, s' \in \Delta^{\pm*}$ が存在して,

$$u_0 t' = h' v_0, \quad u_0 s = g v_0, \quad u_0 s' = g' v_0 \quad (4.4.14)$$

であったとする. このとき,

$$(p, A) \xrightarrow{T_1}^{x/u} (q, \varepsilon), \quad (\bar{p}, \omega_{02}) \xrightarrow{T_2}^{x/v} (\bar{q}, \gamma_{02})$$

のような任意の $x \in L(p, A)$, $u, v \in \Delta^*$ に対して,

$$u t' = h' v, \quad u s = g v, \quad u s' = g' v \quad (4.4.15)$$

が成立するならば，以下が同時に成立する．

$$ut = hv.$$

(証明) 式 (4.4.3), および, 参照節点の定義から, 着目節点, 対応節点, 副次対応節点の右辺のスタックは ω_{02} が共通の接頭辞である．従って, この各節点両辺の計算状況において, 上記 $x \in \Sigma^*$ による推移に対する出力が完全に一致する．従って, 以降, 文献 [TomSei89], p.47, Lemma 4.2, および, 第3章の補題 3.4.2 と同様に証明できる．□

4.4.3 基本例題

具体的な例題として, 以下の droct 対 T_1, T_2 を定義し, その推移図を図 4.3 に, 本アルゴリズムによる等価性判定の判定木を図 4.4 に示す．

$$T_1 = \{Q_1, \Gamma_1, \Sigma, \Delta, \mu_1, q_{01}, A, \phi\},$$

$$T_2 = \{Q_2, \Gamma_2, \Sigma, \Delta, \mu_2, q_{02}, B, \phi\},$$

$$\text{但し, } Q_1 = \{q_{01}, p, q\}, Q_2 = \{q_{02}, \bar{p}, \bar{q}\},$$

$$\Gamma_1 = \{A\}, \Gamma_2 = \{B\}, \Sigma = \{a, b, c\}, \Delta = \{a, b\},$$

$$\mu_1 = \left\{ \begin{array}{l} (q_{01}, A) \xrightarrow{a/\varepsilon} (p, A^2) \\ (p, A) \xrightarrow{a/\varepsilon} (p, A^2) \\ (p, A) \xrightarrow{b/a} (q, \varepsilon), (q, A) \xrightarrow{c/ba} (q, \varepsilon) \end{array} \right\},$$

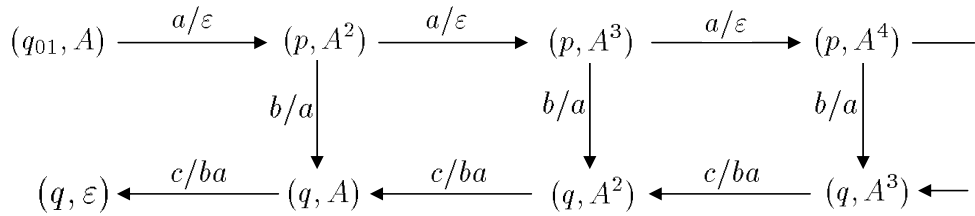
$$\mu_2 = \left\{ \begin{array}{l} (q_{02}, B) \xrightarrow{a/ab} (\bar{p}, B) \\ (\bar{p}, B) \xrightarrow{a/ab} (\bar{p}, B^2) \\ (\bar{p}, B) \xrightarrow{b/a} (\bar{q}, B), (\bar{q}, B) \xrightarrow{c/\varepsilon} (\bar{q}, \varepsilon) \end{array} \right\}.$$

なお, 各々の受理記号列 / 出力記号列の集合は以下の通りである．

$$\begin{aligned} \text{TRANS}(q_{01}, A) &= \text{TRANS}(q_{02}, B) \\ &= \{a^n bc^n / (ab)^n a \mid n \geq 1\}. \end{aligned}$$

$$T_1 = \{Q_1, \Gamma_1, \Sigma, \Delta, \mu_1, q_{01}, Z_{01}, \phi\}$$

$$\mu_1 = \left\{ \begin{array}{l} (q_{01}, A) \xrightarrow{a/\varepsilon} (p, A^2), (p, A) \xrightarrow{a/\varepsilon} (p, A^2) \\ (p, A) \xrightarrow{b/a} (q, \varepsilon), (q, A) \xrightarrow{c/ba} (q, \varepsilon) \end{array} \right\}$$



$$T_2 = \{Q_2, \Gamma_2, \Sigma, \Delta, \mu_2, q_{02}, Z_{02}, \phi\}$$

$$\mu_2 = \left\{ \begin{array}{l} (q_{02}, B) \xrightarrow{a/ab} (\bar{p}, B), (\bar{p}, B) \xrightarrow{a/ab} (\bar{p}, B^2) \\ (\bar{p}, B) \xrightarrow{b/a} (\bar{q}, B), (\bar{q}, B) \xrightarrow{c/\varepsilon} (\bar{q}, \varepsilon) \end{array} \right\}$$

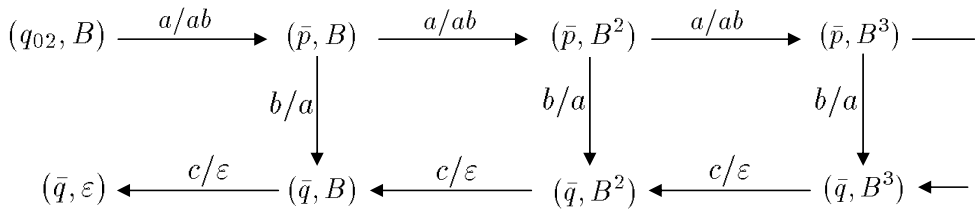


図 4.3 推移図

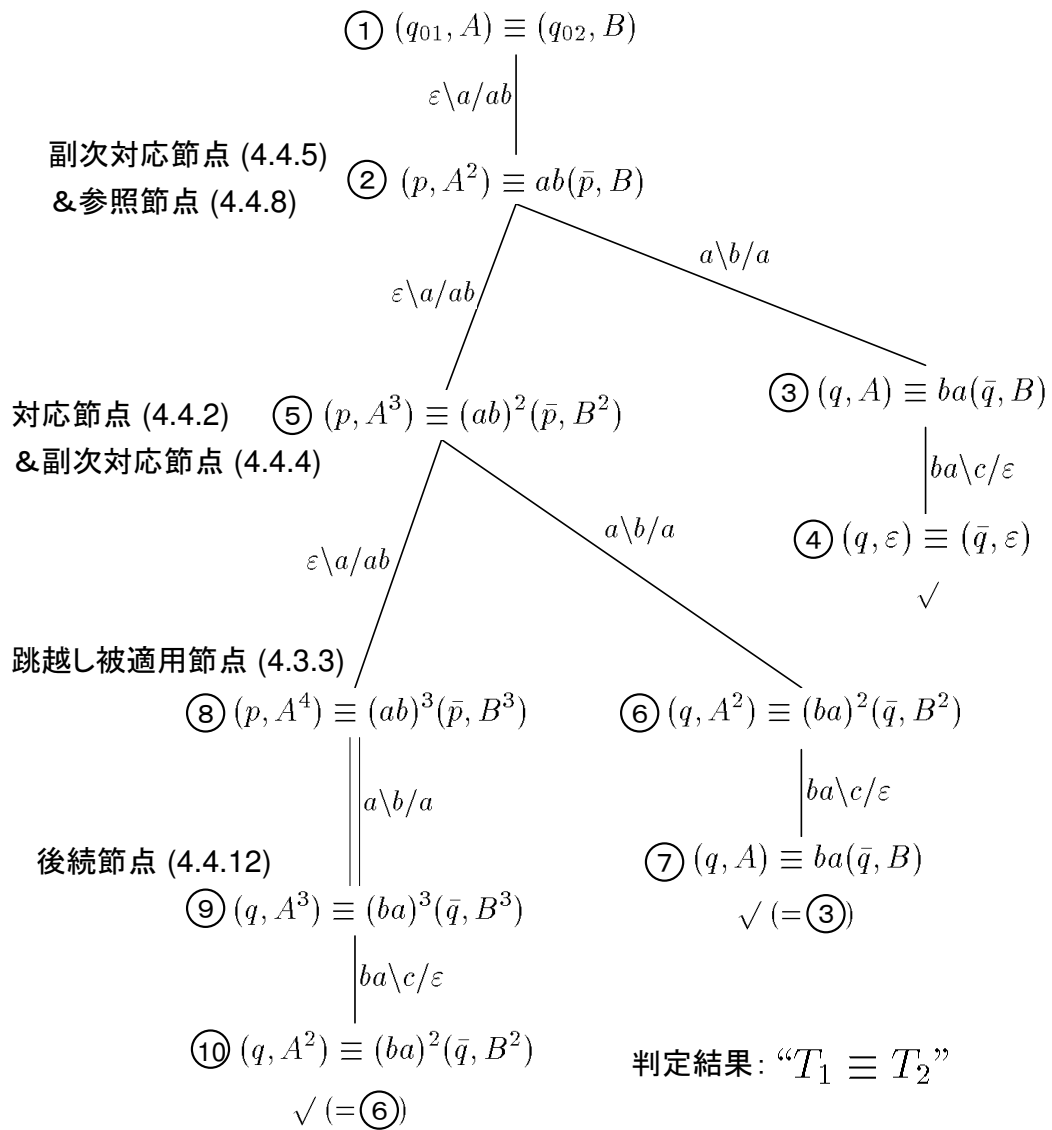


図 4.4 判定木 $T(T_1 : T_2)$

4.5 正当性と終端性

の場合に分けて，本アルゴリズムが多項式時間内で終端することと，判定した結果が正しいことを証明する．

4.5.1 $T_1 \equiv T_2$ が真である場合

最初に， $T_1 \equiv T_2$ が真であるとき，本アルゴリズムは“ $T_1 \equiv T_2$ ”と判定を下し，多項式時間内の有限の手数で終端することを示す．まず，本アルゴリズムの定義から，“ $T_1 \not\equiv T_2$ ”という判定を下した場合，その判定は明らかに真である．この対偶より， $T_1 \equiv T_2$ が真である場合，本アルゴリズムが有限終端した場合には，正しく“ $T_1 \equiv T_2$ ”との判定を下す．以降， $T_1 \equiv T_2$ が真である場合，本アルゴリズムは多項式時間の有限手数で終端することを証明する．

定義 4.5.1 任意の $p \in Q_1$, $\bar{p} \in Q_2$, $\alpha, \alpha'' \in \Gamma_1^*$, $\beta, \beta'' \in \Gamma_2^*$ について，次の集合を定義する．

$$U(p, \bar{p}, \alpha, \beta, \alpha'', \beta'') = \{S \in S(T_1 : T_2) \mid \\ S = ((p, \bar{p}, \alpha, \beta), h, (x, u, v), (\alpha'', \beta''), h'), \\ x \in \Sigma^*, u, v \in \Delta^*, h, h' \in \Delta^{\pm*}\}.$$

この集合を極小 droct-SE 推移対の“基本単位”と呼ぶ．更に，以下のような基本単位の集合を定義する．

$$C(p, \bar{p}, \alpha'', \beta'') = \{U_j = U(p, \bar{p}, \alpha_j, \beta_j, \alpha'', \beta'') \mid \\ U_j \neq \phi, \alpha_j \in \Gamma_1^*, \beta_j \in \Gamma_2^*\}.$$

この集合を極小 droct-SE 推移対の“カテゴリ”と呼ぶ．

また，ある基本単位 $U_j = U(p, \bar{p}, \alpha_j, \beta_j, \alpha'', \beta'')$ ($\neq \phi$) について，次の集合を定義する．

$$H(U_j) = \{(h, h') \in \Delta^{\pm*} \times \Delta^{\pm*} \mid$$

$$S = ((p, \bar{p}, \alpha_j, \beta_j), h, (x, u, v), (\alpha'', \beta''), h'),$$

$$S \in U_j \text{ for some } x \in \Sigma^+, u, v \in \Delta^* \}.$$

更に, ある極小 droct-SE 推移対 $S_{ji} \in U_j$ を

$$S_{ji} = ((p, \bar{p}, \alpha_j, \beta_j), h_i, (x_i, u_i, v_i), (\alpha'', \beta''), h'_i)$$

$$\text{for some } x_i \in \Sigma^*, u_i, v_i \in \Delta^*, h_i, h'_i \in \Delta^{\pm*}$$

として, 次のような分割を考える.

$$(p, \alpha_j) \xrightarrow{T_1} (r, \eta) \xrightarrow{T_1} (p, \alpha'' \alpha_j)$$

$$(\bar{p}, \beta_j) \xrightarrow{T_2} (\bar{r}, \partial) \xrightarrow{T_2} (\bar{p}, \beta'' \beta_j).$$

$$\text{ただし, } x_i = x'_i x''_i, u_i = u'_i u''_i, v_i = v'_i v''_i.$$

上記を満足する任意の $x'_i \in \Sigma^*$ (for some $u'_i, v'_i \in \Delta^*$, $(r, \eta) \in Q_1 \times \Gamma_1^+$, $(\bar{r}, \partial) \in Q_2 \times \Gamma_2^+$) に対する $|\alpha_j| - |\eta|$ の最大値を $\nu_1(S_{ji})$, $|\beta_j| - |\partial|$ の最大値を $\nu_2(S_{ji})$ とする. そして, U_j に属する異なる2つの極小 droct-SE 推移対を S_{j1}, S_{j2} として, 次の規則により両者の順序が定まるものとする.

(1) $\nu_1(S_{j1}) > \nu_1(S_{j2})$ であれば, S_{j1} が上位.

$$\nu_1(S_{j1}) < \nu_1(S_{j2}) \text{ であれば, } S_{j2} \text{ が上位.}$$

(2) $\nu_1(S_{j1}) = \nu_1(S_{j2})$ であるとき,

$$\nu_2(S_{j1}) > \nu_2(S_{j2}) \text{ であれば, } S_{j1} \text{ が上位.}$$

$$\nu_2(S_{j1}) < \nu_2(S_{j2}) \text{ であれば, } S_{j2} \text{ が上位.}$$

(3) $\nu_1(S_{j1}) = \nu_1(S_{j2})$ 且つ $\nu_2(S_{j1}) = \nu_2(S_{j2})$

ならば, 入出力記号列の辞書順で順序を決定.

ここで, U_j に属する全ての極小 droct-SE 推移対に対して上記順序付けを行った場合に, 最も上位に位置づけられる極小 droct-SE 推移対を,

$$S_{j0} = ((p, \bar{p}, \alpha_j, \beta_j), h_0, (x_0, u_0, v_0), (\alpha'', \beta''), h'_0)$$

$$\text{for some } x_0 \in \Sigma^*, u_0, v_0 \in \Delta^*, h_0, h'_0 \in \Delta^{\pm*}$$

とする．このときの (x_0, u_0, v_0) を，基本単位 U_j の“代表入出力記号列組”と呼び，以下のように表記する．

$$\nu(U_j) = (x_0, u_0, v_0).$$

補題 4.5.1 $T_1 \equiv T_2$ であるとき，ある極小 droct-SE 推移対 $S_{ji} \in S(T_1 : T_2)$ を， $S_{ji} = ((p_k, \bar{p}_k, \alpha_j, \beta_j), h_i, (x_i, u_i, v_i), (\alpha_k, \beta_k), h'_i)$ (for some $p_k \in Q_1, \bar{p}_k \in Q_2, \alpha_k \in \Gamma_1^*, \beta_k \in \Gamma_2^*, \alpha_j \in \Gamma_1^*, \beta_j \in \Gamma_2^*, h_i, h'_i \in \Delta^{\pm*}, x_i \in \Sigma^+, u_i, v_i \in \Delta^*$) とする．ここで， S_{ji} をその要素として含む基本単位を U_j ($S_{ji} \in U_j$)，更に， U_j を要素として含むカテゴリを C_k ($U_j \in C_k$) とする．このとき，以下の (i), (ii) が成立する．

(i) ある $h_j, h'_j \in \Delta^{\pm*}$ が存在し， $H(U_j) = \{(h_j, h'_j)\}$ となる．つまり，基本単位 U_j に対して h_j, h'_j が一意に定まり，基本単位 U_j に属する全ての極小 droct-SE 推移対 S_{ji} について，いかに x_i, u_i, v_i が異なるうとも，常に $h_i = h_j, h'_i = h'_j$ となる．

(ii) あるカテゴリ C_k に関して，次の集合を定義する．

$$I(C_k) = \{(x_0, u_0, v_0) \in \Sigma^+ \times \Delta^* \times \Delta^* \mid \\ \nu(U_j) = (x_0, u_0, v_0), U_j \in C_k\}.$$

このとき， $I(C_k)$ は有限集合となり，以下が成立する．

$$|I(C_k)| \leq D^2$$

ただし， D は命題 4.3.3 (ii) の定数．

(証明) まず，(i) を証明する．ここで，基本単位 U_j に属する次のような 2 つの異なる極小 droct-SE 推移対 S_{j1}, S_{j2} を考える．

$$S_{j1} = ((p_k, \bar{p}_k, \alpha_j, \beta_j), h_1, (x_1, u_1, v_1), (\alpha_k, \beta_k), h'_1)$$

$$S_{j2} = ((p_k, \bar{p}_k, \alpha_j, \beta_j), h_2, (x_2, u_2, v_2), (\alpha_k, \beta_k), h'_2)$$

for some $x_1, x_2 \in \Sigma^+, u_1, u_2, v_1, v_2 \in \Delta^*$,

$$h_1, h_2, h'_1, h'_2 \in \Delta^{\pm*}.$$

ここで， $T_1 \equiv T_2$ であるため， S_{j1}, S_{j2} の各々の始点の等価式， $(p_k, \alpha_j) \equiv h_1(\bar{p}_k, \beta_j)$ と $(p_k, \alpha_j) \equiv h_2(\bar{p}_k, \beta_j)$ が同時に成立する．従って，命題 4.3.1 (ii) から $h_1 = h_2$ が成立する．同様に，終点の等価式を考えれば， $h'_1 = h'_2$ が成立する．従って，題意を得る．

次に, (ii) を証明する. $|I(C_k)|$ はカテゴリ C_k に関する代表入出力記号列組の種類の数に等しい. ここで,

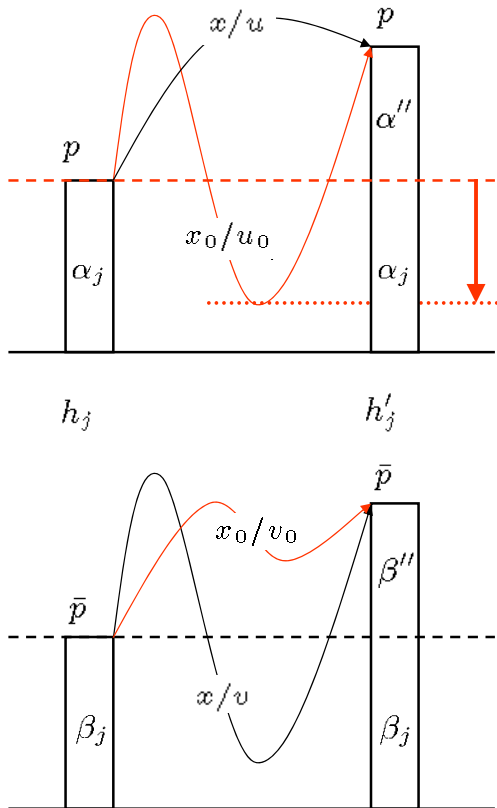
$$U_j = U(p_k, \bar{p}_k, \alpha_j, \beta_j, \alpha_k, \beta_k) (\neq \phi)$$

for some $\alpha_j \in \Gamma_1^*$, $\beta_j \in \Gamma_2^*$

のようなある $U_j \in C_k$ について考える. ここで, 定義 4.5.1 における代表入出力記号列組の定義を加味しつつ, 命題 4.3.3 (ii) の成立を考慮すれば, $|\alpha_j| > \mathcal{D}$, $|\beta_j| > \mathcal{D}$ である場合には, このような全ての U_j について代表入出力記号列組 $\nu(U_j)$ が同一となる. 更に, 定義から代表入出力記号列組は各 $U_j (\neq \phi)$ について一意であるため, $|\alpha_j| \leq \mathcal{D}$, 且つ, $|\beta_j| \leq \mathcal{D}$ であるような U_j の種類数の上限 \mathcal{D}^2 が $|I(C_k)|$ の上限となり, 題意を得る. \square

$$U_j = U(p, \bar{p}, \alpha_j, \beta_j, \alpha'', \beta'')$$

$p, \bar{p}, \alpha_j, \beta_j, \alpha'', \beta''$ が同一である, 極小droct-SE推移対の集合.



最も深い推移:
 代表入出力記号列組
 $\nu(U_j) = (x_0, u_0, v_0)$

$H(U_j) = \{(h_j, h'_j)\}$
 $T_1 \equiv T_2$ のとき,
 $h_j, h'_j \in \Delta^{\pm*}$ は
 基本単位 U_j について,
 一意に定まる.

図 4.5 基本単位 U_j の性質

補題 4.5.2 $T_1 \equiv T_2$ であるとき，次の (i) ~ (iii) が成立する．

(i) T_1, T_2 に依存する，全ての極小 droct-SE 推移対のカテゴリの集合を，

$$C(T_1 : T_2) = \{C_k = C(p_k, \bar{p}_k, \alpha_k, \beta_k) \mid C_k \neq \phi, \\ p_k \in Q_1, \bar{p}_k \in Q_2, \alpha_k \in \Gamma_1^*, \beta_k \in \Gamma_2^*\}$$

とすると，これは有限集合となり，以下が成立する．

$$|C(T_1 : T_2)| \leq |Q_1||Q_2|\mathcal{D}^2.$$

(ii) あるカテゴリを $C_k \in C(T_1 : T_2)$ ($C_k \neq \phi$) とする．ここで，補題 4.5.1 (i) により，任意の $U_j \in C_k$ についてある $h_j, h'_j \in \Delta^{\pm*}$ が存在し， $H(U_j) = \{(h_j, h'_j)\}$ とできる．そこで，カテゴリ C_k に関して，

$$H'(C_k) = \{h \in \Delta^{\pm*} \mid H(U_j) = \{(h, h')\}, \\ (h \in \Delta^+ \text{ and } h' \in \Delta^{-*}) \text{ or} \\ (h \in \Delta^{-+} \text{ and } h' \in \Delta^*), \\ U_j \in C_k \text{ for some } h' \in \Delta^{\pm*}\}$$

とすると，これは有限集合となり，以下が成立する．

$$|H'(C_k)| \leq 2\mathcal{U}\mathcal{D}^2.$$

ただし \mathcal{U} は命題 4.3.3 (iii) の定数．

(iii) 更に，命題 4.3.3 (i) により，上記 (ii) の h_j, h'_j について，ある $h''_j \in \Delta^{\pm*}$ が存在し， $h_j, h'_j \in \Delta^*$ ならば $h_j = h'_j h''_j$ ，あるいは， $h_j, h'_j \in \Delta^{-*}$ ならば $h_j^{-1} = h'^{-1} h''_j$ とできる．そこで，カテゴリ C_k に関して，

$$H''(C_k) = \{h'' \in \Delta^{\pm*} \mid H(U_j) = \{(h, h')\}, \\ (h, h' \in \Delta^* \text{ and } h = h' h'') \text{ or} \\ (h, h' \in \Delta^{-*} \text{ and } h^{-1} = h'^{-1} h''), \\ U_j \in C_k \text{ for some } h, h' \in \Delta^{\pm*}\}$$

とすると、これは有限集合となり、以下が成立する。

$$|H''(C_k)| \leq 2(U^2 + U)D^2.$$

(証明) 最初に、(i) の成立を証明する。まず、命題 4.3.3 (ii) により、 $|\alpha_k| > D$ 、あるいは、 $|\beta_k| > D$ であるときは $C_k = \phi$ となる。従って、 $|C(T_1 : T_2)|$ の上限は、 $|\alpha_k| \leq D$ 、且つ、 $|\beta_k| \leq D$ であるような $p_k, \bar{p}_k, \alpha_k, \beta_k$ の全ての組合せ数であり、

$$|Q_1| \times |Q_2| \times D \times D$$

として、(i) の題意を得る。

次に、(ii), (iii) を証明する。まず、ある代表入出力記号列組 $(x_0, u_0, v_0) \in I(C_k)$ を固定して、これを $\nu(U_j)$ とする任意の基本単位 U_j を対象として考える。このような U_j に対応する $H'(C_k), H''(C_k)$ の要素数を考えた場合、命題 4.3.3 (iii) による $|u_0| \leq U, |v_0| \leq U$ を加味し、その上限が各々 $2U, 2(U^2 + U)$ であることを以降で示し、最終的に、 $I(C_k)$ の全ての要素に関して同じ議論を繰り返した場合として、 $|I(C_k)|$ の上限 D^2 をこれに乗じて題意を得るものとする。なお、補題 4.5.1 (i) の成立に基づき、対象とする基本単位 U_j について、 $H(U_j) = \{(h_j, h'_j)\}$ (for some $h_j, h'_j \in \Delta^{\pm*}$) であるものとする。

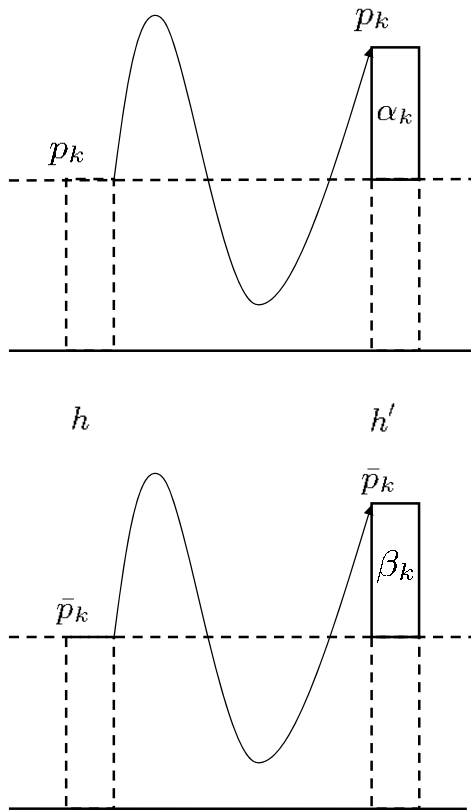
さて、まず、 $H'(C_k)$ について考える。ここで対象とする要素数は、 $h_j \in \Delta^+$ 且つ $h'_j \in \Delta^{-*}$ 、あるいは、 $h_j \in \Delta^{-+}$ 且つ $h'_j \in \Delta^*$ という条件における、 h_j の種類の数に等しい。以下、その上限が $2U$ であることを示す。まず、上記 h_j, h'_j, u_0, v_0 において、 $u_0 h'_j = h_j v_0$ であり、更に、命題 4.3.3 (iii) により、 $|u_0| \leq U, |v_0| \leq U$ である。従って、 $\|h_j\| \leq U$ が成立する。また、droct-SE 推移対の性質から、任意の非負整数 m に対して、 $x_0^m \in \Sigma^+$ による同推移の繰り返しが可能であるため、ある $g \in \Delta^{\pm*}$ について $u_0^m g = h_j v_0^m$ とできる。ここで、まず、 $h_j \in \Delta^+$ の場合を考える。このとき、 $h'_j \in \Delta^{-*}$ より $u_0 \in \Delta^+(u_0 \neq \varepsilon)$ が成立し、更に、 m が十分大きく $|h_j| < |u_0^m|$ である場合を考えると、ある非負整数 n', n'' について、 $h_j = u_0^{n'} (n'') u_0$ とできる。従って、 $h_j \in \Delta^+$ の場合の h_j の種類数の上限は、その文字列長の最大値 U に等しいことが分かる。一方、 $h_j \in \Delta^{-+}$ の場合も、同様の考察を対称的に行えば、ある非負整数 n', n'' について、 $h_j^{-1} = v_0^{n'} (n'') v_0$ とでき、同様にその種類数の上限は U となる。従って、(ii) の題意を得る。

次に、 $H''(C_k)$ について考える。ここで対象とする要素数は、 $h_j, h'_j \in \Delta^*$ 且つ $h_j = h'_j h''_j$ 、あるいは、 $h_j, h'_j \in \Delta^{-*}$ 且つ $h_j^{-1} = h'_j^{-1} h''_j$ であるような各 U_j に対応する h''_j の

種類の数に等しい．以下，その上限が $2(\mathcal{U}^2 + \mathcal{U})$ であることを示す．まず， $h_j, h'_j \in \Delta^*$ ，
 且つ， $|u_0| \leq |v_0|$ の場合を考える．このとき， $|h_j| \leq |h'_j|$ となり $h''_j \in \Delta^{-*}$ である．従っ
 て， $u_0 h'_j = u_0 h_j h''_j{}^{-1} = h_j v_0$ であり， $|h''_j{}^{-1}| \leq |v_0|$ であることから，ある任意の非負整
 数 m により， $h''_j{}^{-1} = v_0^{(m)}$ と表すことができる．従って，この場合の h''_j の種類数の上
 限は $|v_0|$ の最大値 \mathcal{U} に等しい．次に， $h_j, h'_j \in \Delta^*$ ，且つ， $|u_0| > |v_0|$ の場合を考える．
 このとき， $|h_j| > |h'_j|$ となり $h''_j \in \Delta^*$ である．従って， $u_0 h'_j = h_j v_0 = h'_j h''_j v_0$ となる．
 ここで，droct-SE 推移対の性質から，任意の非負整数 m に対して， $x_0^m \in \Sigma^+$ による同
 推移の繰り返しが可能であるため，従って，十分に大きな m について，ある $g \in \Delta^{\pm*}$ が
 存在して， $u_0^m g = h'_j h''_j v_0^m$ ， $|u_0^m| > |h'_j h''_j|$ とできる．更に， $|h''_j| \leq |u_0|$ であることを加
 味すれば，ある非負整数 $0 \leq n' \leq \mathcal{U}$ ， $0 \leq n'' \leq \mathcal{U}$ について， $h''_j = u_0^{(n') (n'')} u_0$ とでき，
 従って，この場合の h''_j の種類数の上限は \mathcal{U}^2 となる．以上より， $h, h' \in \Delta^*$ である場合
 の h'' の種類数の上限は， $\mathcal{U}^2 + \mathcal{U}$ となる．同様の考察を対称的に行えば， $h, h' \in \Delta^{-*}$ で
 ある場合の h'' の種類数の上限も同じ値になる．従って，(iii) の題意を得る．□

$$C_k = C(p_k, \bar{p}_k, \alpha_k, \beta_k)$$

$p_k, \bar{p}_k, \alpha_k, \beta_k$ が同一である, 基本単位の集合.



※全カテゴリ集合 $C(T_1 : T_2)$

は有限集合でその要素数は多項式オーダー.

※ $|H'(C_k)|$ は,

$h \in \Delta^+$ and $h' \in \Delta^{-*}$

あるいは,

$h \in \Delta^{-+}$ and $h' \in \Delta^*$

となる場合の数で,

多項式オーダー.

※ $|H''(C_k)|$ は,

$h, h' \in \Delta^*$. あるいは,

$h, h' \in \Delta^{-*}$ となる

場合の数で, 多項式オーダー.

図 4.6 カテゴリ C_k の性質

補題 4.5.3 $T_1 \equiv T_2$ が真であるとき, $T(T_1 : T_2)$ において, *unchecked* 節点も *skipping* 節点も存在しない場合, 次の (i) ~ (iii) が成立する.

(i) $T(T_1 : T_2)$ 中の任意の節点を $(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta)$ とする. ここで, ある定数

$$\varphi = 16\tau^2 \rho^7 |Q_1|^{10} |Q_2|^{10}$$

について, $|\alpha| < \varphi$ が成立する.

(ii) $T(T_1 : T_2)$ 中に含まれる葉でない節点の数は, 次の定数 S' 未満である.

$$S' = k_1 |Q_1| |Q_2| \varphi^2.$$

(iii) $T(T_1 : T_2)$ 中に含まれる任意の節点に対する子節点の数は, 次の定数 S'' 未満である.

$$S'' = |\Sigma| + k_1 |Q_1| |Q_2| \varphi.$$

(証明) 最初に, (i) について証明する. まず, 補題 4.5.2 (i) で定義した, T_1, T_2 に依存する全てのカテゴリ集合 $C(T_1 : T_2)$ に対して, そのある要素を $C_k \in C(T_1 : T_2)$ とする. 更に, このカテゴリ C_k に関して, 補題 4.5.2 (ii), (iii) で定義した集合 $H'(C_k), H''(C_k)$ を考慮し, 以下の定数 φ' を定める.

$$\varphi' = \mathcal{D} \times |C(T_1 : T_2)| \times (|H'(C_k)| + |H''(C_k)|).$$

ここで, この定数 φ' を全ての $C_k \in C(T_1 : T_2)$ に対する最大値と考え, その意味を考えてみる. T_1, T_2 の推移対において, T_1 側のスタックの上昇を考えた場合, 命題 4.3.3 (ii) より, \mathcal{D} より大きい上昇があると, その推移途中に必ず, 極小 droct-SE 推移対が存在する. 更に, $\mathcal{D} \times |C(T_1 : T_2)|$ 以上の上昇があると, その推移途中に必ず, 同じカテゴリに属する以下のようなある極小 droct-SE 推移対の対, S_1, S_2 が存在する.

$$S_1 = ((p_k, \bar{p}_k, \alpha_1, \beta_1), h_1, (x_1, u_1, v_1), (\alpha_k, \beta_k), h'_1)$$

$$S_2 = ((p_k, \bar{p}_k, \alpha_2, \beta_2), h_2, (x_2, u_2, v_2), (\alpha_k, \beta_k), h'_2)$$

for some $p_k \in Q_1, \bar{p}_k \in Q_2, \alpha_k, \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma_1^*$,

$\beta_k, \beta_1, \beta_2 \in \Gamma_2^*, h_1, h'_1, h_2, h'_2 \in \Delta^{\pm*}$,

$x_1, x_2 \in \Sigma^+, u_1, v_1, u_2, v_2 \in \Delta^*$.

ここで，補題 4.3.1 により，一般性を失うことなく，次のようであるとする．

$$|\alpha_1| \leq |\alpha_k \alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq |\alpha_k \alpha_2|$$

$$|\beta_1| \leq |\beta_k \beta_1| \leq |\beta_2| \leq |\beta_k \beta_2|.$$

更に， φ' 以上の上昇があると， $H'(C_k)$, $H''(C_k)$ の定義を考慮すれば，上記の S_1 , S_2 の関係に加えて，次の (A), (B), (C) のいずれかが成立することになる．

(A) $(h_1, h_2 \in \Delta^+$ and $h'_1, h'_2 \in \Delta^{-*})$ or

$(h_1, h_2 \in \Delta^{-+}$ and $h'_1, h'_2 \in \Delta^*)$ であり， $h_1 = h_2$.

(B) $h_1, h_2, h'_1, h'_2 \in \Delta^*$ であり，ある $h'' \in \Delta^{\pm*}$ が存在し，

$$h_1 = h'_1 h'', h_2 = h'_2 h'' .$$

(C) $h_1, h_2, h'_1, h'_2 \in \Delta^{\pm*}$ であり，ある $h'' \in \Delta^{\pm*}$ が存在し，

$$h_1 = h'_1 h'', h_2 = h'_2 h'' .$$

ここで， φ' の上限を考えると，命題 4.3.3，補題 4.5.2 により，

$$\begin{aligned} \varphi' &= \mathcal{D} \times |C(T_1 : T_2)| \times (|H'(C_k)| + |H''(C_k)|) \\ &\leq \mathcal{D} \times |Q_1| |Q_2| \mathcal{D}^2 \times (2\mathcal{U}\mathcal{D}^2 + 2(\mathcal{U}^2 + \mathcal{U})\mathcal{D}^2) \\ &= 2\mathcal{D}^5 |Q_1| |Q_2| \mathcal{U}(\mathcal{U} + 2) \\ &= 8\tau\rho^6 |Q_1|^8 |Q_2|^8 ((\tau\rho |Q_1|^2 |Q_2|^2) + 1) \\ &< 8\tau\rho^6 |Q_1|^8 |Q_2|^8 (\tau\rho |Q_1|^2 |Q_2|^2) \times 2 \\ &= 16\tau^2 \rho^7 |Q_1|^{10} |Q_2|^{10} = \varphi \end{aligned}$$

となる．さて，このとき，背理法の仮定として， $T(T_1 : T_2)$ 中のある節点 $(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta)$ について， $|\alpha| > \varphi$ であったとする．ここで， $T(T_1 : T_2)$ における展開操作において，節点左辺の計算状況におけるスタックの増加は分岐操作のみで発生することと，上記の φ' に対する考察を加味すれば，初期節点からこの節点までに至る推移路に，上記の極小 droct-SE 推移対 S_1 , S_2 の各々 T_1 , T_2 の始点と終点の計算状況同士を対にした次のような節点，

$$(p_k, \alpha_1) \equiv h_1(\bar{p}_k, \beta_1), (p_k, \alpha_k \alpha_1) \equiv h'_1(\bar{p}_k, \beta_k \beta_1),$$

$$(p_k, \alpha_2) \equiv h_2(\bar{p}_k, \beta_2), (p_k, \alpha_k \alpha_2) \equiv h'_2(\bar{p}_k, \beta_k \beta_2)$$

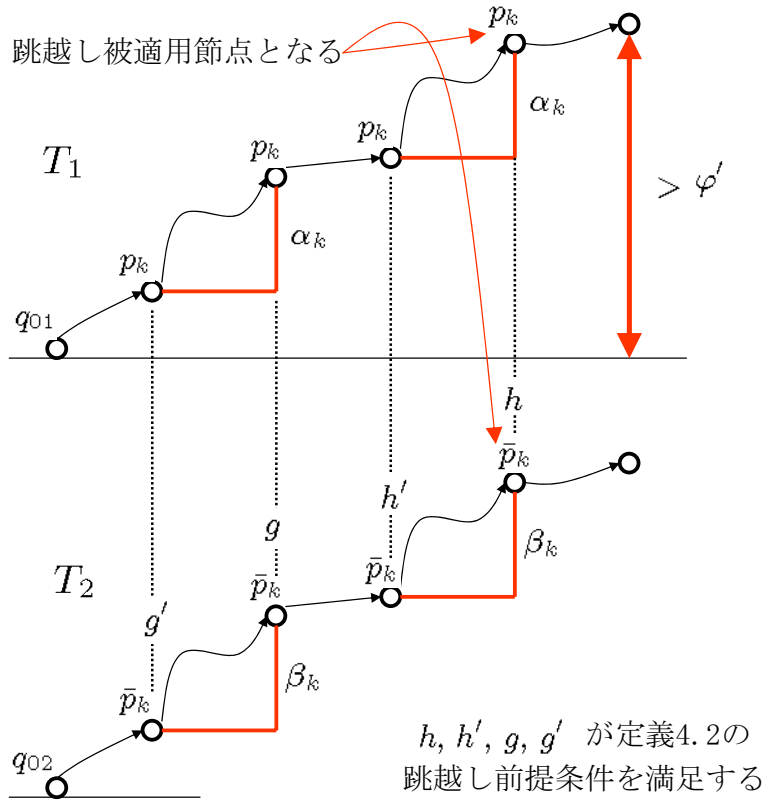
が全て分岐被適用節点として存在することになる．しかし，この場合，節点 $(p_k, \alpha_k \alpha_2) \equiv h'_2(\bar{p}_k, \beta_k \beta_2)$ は定義 4.4.1 の跳越しの前提条件を満たしており，跳越しが適用されているはずであり矛盾する．従って，任意の節点 $(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta)$ について， $|\alpha| \leq \varphi$ が成立し，題意を得る．

次に，(ii) については，まず，上記 (i) の結果，および，スタック記号が単一であるためスタック記号列の違いは高さの違いだけであることを考慮すれば， $T(T_1 : T_2)$ 中の葉で無い節点数は，

$$|Q_1| \times \varphi \times |Q_2| \times k_1 \varphi = k_1 |Q_1| |Q_2| \varphi^2$$

となり題意を得る．更に，(iii) については，まず，分岐による子節点の最大数は明らかに $|\Sigma|$ である．一方，跳越しによる後続節点については，左辺種類の上限が $|Q_1|$ ，また，上記 (i) と命題 4.3.2 (i) の成立により，右辺種類の上限が $|Q_2| \times k_1 \varphi$ となることを加味すれば，(iii) の題意を得る．□

判定木 $T(T_1 : T_2)$ 中の節点の左辺スタック高さの上限



$$\varphi' = \underbrace{D \times |C(T_1 : T_2)|}_{\text{red bracket}} \times \underbrace{(|H'(C_k)| + |H''(C_k)|)}_{\text{red bracket}}.$$

同一カテゴリの極小droct-SE推移対が
2つ以上存在する

図 4.7 判定木中の節点左辺スタック高さの上限

以上の通り, $T_1 \equiv T_2$ が真であるとき, $T(T_1 : T_2)$ 中の節点の数は, $|Q_1|, |Q_2|, |\Sigma|, \tau, \rho, k_1$ に関する多項式オーダの定数 $S = S' \times S''$ 未満である. ここで, ひとつの節点に対する分岐, 跳越し操作が多項式時間内で完了することは容易に証明できる. また, $T(T_1 : T_2)$ の展開に応じた跳越し被適用節点に対する跳越し適用の見直し回数も, 節点数 (多項式オーダ) 以下である. 更に, 定義 4.3.1 における τ と ρ を求める手数は $O(|\mu_1| + |\mu_2|)$ である. また, k_1 の定義における (p, A) をポップアップする最短の w を考えた場合, $(p, A) \xrightarrow[M_1]{w} (q, \varepsilon)$ なる推移の途中には, 同一の計算状況があらわれることは無く, かつ, その途中の計算状況のスタックの高さは $|Q_1|$ 以下である. この事情により, $k_1 \leq |Q_1|^2$ であることが分かる. 従って, $T_1 \equiv T_2$ が真であるとき, 本アルゴリズム全体が, $|Q_1|, |Q_2|, |\Sigma|, |\mu_1|, |\mu_2|$ に関する多項式時間内で終端する.

4.5.2 $T_1 \not\equiv T_2$ が真である場合

次に, $T_1 \not\equiv T_2$ が真であるとき, 本アルゴリズムは “ $T_1 \not\equiv T_2$ ” と判定を下し, 多項式時間内の有限の手数で終端することを示す. 前節の証明から, $T_1 \not\equiv T_2$ が真であるときも, 明らかに, 本アルゴリズムは多項式時間内で終端する. 従って, 以降, $T_1 \not\equiv T_2$ であるとき, 本アルゴリズムが誤って “ $T_1 \equiv T_2$ ” との判定を下すことのないことを示す.

補題 4.5.4 $T_1 \not\equiv T_2$ が真であるとき, 本アルゴリズムは “ $T_1 \not\equiv T_2$ ” と判定を下す.

(証明) 本補題の証明のため, その対偶として, 本アルゴリズムが “ $T_1 \not\equiv T_2$ ” と判定を下すことなく終端した場合, $T_1 \equiv T_2$ が真に成立することを証明する. そのためには, 十分拡張され展開を止めた時点の判定木を $T(T_1 : T_2)$ としたとき, 次の Claim E_m (i) が成立することを証明すれば十分である.

Claim E_m $T(T_1 : T_2)$ 中の任意の節点を以下とする.

$$(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta) \tag{4.5.1}$$

for some $p \in Q_1, \bar{p} \in Q_2,$

$$\alpha \in \Gamma_1^*, \beta \in \Gamma_2^*, h \in \Delta^{\pm*}$$

ここで, 任意の分割 $\alpha = \alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 \in \Gamma_1^+$ に対して,

$$(p, \alpha_1 \mid \alpha_2) \xrightarrow[T_1]{x/u} (m) (r, \varepsilon \mid \alpha_2) \tag{4.5.2}$$

$$(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x/v} (\bar{r}, \partial)$$

for some $x \in \Sigma^*$, $u, v \in \Delta^*$,

$$r \in Q_1, (\bar{r}, \partial) \in Q_2 \times \Gamma_2^*$$

且つ, $L(r, \alpha_2) \neq \phi$ ならば, 次の (i), (ii) が成立する .

(i) ある $t \in \Delta^{\pm*}$ が存在し, $ut = hv$ が成立する .

(ii) ある $x_0 \in \Sigma^*$, $u_0, v_0 \in \Delta^*$ に対して, 次のような推移路が $T(T_1 : T_2)$ 中に存在する .

$$\begin{aligned} \langle (p, \alpha_1 \mid \alpha_2) \equiv h(\bar{p}, \beta) \rangle &\xrightarrow[T(T_1:T_2)]{u_0 \setminus x_0 / v_0} \\ &\langle (r, \varepsilon \mid \alpha_2) \equiv t(\bar{r}, \partial) \rangle . \end{aligned}$$

Claim E_m の証明 本 Claim E_m は, 第3章の補題 3.5.2 の Claim E_m をより単純にしたものである, 従って, それと同様の流れで証明できる. 以下, 数学的帰納法を用いて証明を行う. まず, $m = 1$ の場合, 節点 (4.5.1) が分岐被適用節点である場合, E_1 の成立は明らか. また, 跳越し被適用節点である場合も, その参照節点からの分岐推移路に対応して, 節点 (4.5.1) の後続節点の導入が直接検討されており, この場合も E_1 の成立が保証される.

次に, ある $n (\geq 1)$ について E_1, E_2, \dots, E_n が成立すると仮定した場合の E_{n+1} の成立性を考える. ここで, 推移 (4.5.2) において $m = n + 1$ とする. まず, 節点 (4.5.1) が分岐被適用節点の場合, $x = ax'$, $a \in \text{FIRST}_{\text{live}}(p, \alpha)$ とすると, この a に対応する分岐の子節点が必ず $T(T_1 : T_2)$ 中に存在する. そして, その節点には, 仮定より E_1, E_2, \dots, E_n が成立する. 従って, その親節点 (4.5.1) に対する E_{n+1} の成立性が保証される.

さて, 本証明のキーポイントとして, 節点 (4.5.1) が跳越し被適用節点の場合を考える. まず, 推移 (4.5.2) を更に次のように分割する.

$$(p, A \mid \alpha'') \xrightarrow[T_1]{x_1/u_1}^{(n_1)} (q, \varepsilon \mid \alpha'') \tag{4.5.3}$$

$$(q, \alpha'_1 \mid \alpha_2) \xrightarrow[T_1]{x_2/u_2}^{(n_2)} (r, \varepsilon \mid \alpha_2)$$

ただし, $x = x_1x_2$, $u = u_1u_2$,

$$n + 1 = n_1 + n_2 \quad (1 \leq n_1 \leq n + 1),$$

$$\alpha_1 = A\alpha''_1, \alpha'' = \alpha''_1\alpha_2 \text{ for some } \alpha'', \alpha''_1 \in \Gamma_1^*$$

ここで, $L(q, \alpha'') \neq \phi$ であるとし, 更に, $n_1 = n + 1, n_2 = 0$ である場合を考える. このとき, $\alpha''_1 = \varepsilon$, つまり, $\alpha_1 = A$ となる. そして, $T(T_1 : T_2)$ 中に存在する, この跳越しの参照節点を以下とする.

$$(p, \omega_{01}) \equiv h_0(\bar{p}, \omega_{02})$$

$$\text{for some } \omega_{01} \in \Gamma_1^+, \omega_{02} \in \Gamma_2^+, h_0 \in \Delta^{\pm*}.$$

ここで, この参照節点には, 帰納法の仮定により, $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$ が成立する. また, この節点は分岐被適用節点であるため, 前述した節点 (4.5.1) が分岐被適用節点である場合の保証により \mathbf{E}_{n+1} も成立する. 従って, $x_1 \in \Sigma^*$ に対応する,

$$(p, A \mid \omega''_{01}) \xrightarrow[T_1]{x_1/u_1} (n_1) (q, \varepsilon \mid \omega''_{01}) \tag{4.5.4}$$

$$(\bar{p}, \omega_{02}) \xrightarrow[T_2]{x_1/v_1} (\bar{q}, \gamma_{02})$$

$$\text{ただし, } \omega_{01} = A\omega''_{01}, \omega''_{01} \in \Gamma_1^*$$

$$\text{for some } v_1 \in \Delta^*, q \in Q_1, (\bar{q}, \gamma_{02}) \in Q_2 \times \Gamma_2^*$$

のような推移が可能で, 且つ, $L(q, \omega''_{01}) \neq \phi$ ならば, 参照節点に対する \mathbf{E}_{n_1} (i) の成立により, ある $t_0 \in \Delta^{\pm*}$ が存在し, 以下が成立する.

$$u_1 t_0 = h_0 v_1. \tag{4.5.5}$$

更に, 同参照節点に対する \mathbf{E}_{n_1} (ii) の成立により, ある $x_{10} \in \Sigma^*, u_{10}, v_{10} \in \Delta^*$ について, 次のような推移路が存在する.

$$\begin{aligned} < (p, A \mid \omega''_{01}) \equiv h_0(\bar{p}, \omega_{02}) > \xrightarrow[T(T_1:T_2)]{u_{10} \setminus x_{10}/v_{10}} \\ < (q, \varepsilon \mid \omega''_{01}) \equiv t_0(\bar{q}, \gamma_{02}) > \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } u_{10} t_0 = h_0 v_{10}. \tag{4.5.6}$$

従って, 着目節点には, この推移路を基にした跳越しの適用により, 定義 4.4.2 式 (4.4.11) の確認として, ある $t \in \Delta^{\pm*}$ が存在して,

$$u_{10} t = h v_{10} \tag{4.5.7}$$

の成立が確認されている．ここで適用される跳越しの前提条件については，定義 4.4.1 (b) が成立しているものとする（定義 4.4.1 (a) はより単純な場合に過ぎない）．従って，節点 (4.4.2), (4.4.4), (4.4.5) のような対応節点，副次対応節点が存在する．なお，上記の参照節点は，定義 4.4.2 の定義の通り，節点 (4.4.2), (4.4.4), (4.4.5) の内で右辺のスタックの最も低いものと同一である．つまり， $|\omega_{12}| \geq |\omega_{02}|$, $|\omega_{22}| \geq |\omega_{02}|$, $|\omega_{32}| \geq |\omega_{02}|$ であり，従って，上記 $x_1, x_{10} \in \Sigma^*$ による同様の推移が可能となる．更に，対応節点，副次対応節点は分岐被適用節点であるため， $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_{n+1}$ が成立し，以下が保証される．

$$u_1 s = g v_1, \quad u_1 s' = g' v_1, \quad (4.5.8)$$

$$u_{10} s = g v_{10}, \quad u_{10} s' = g' v_{10}$$

$$\text{for some } s, s' \in \Delta^{\pm*}.$$

更に，定義 4.4.1 の跳越しの前提条件における式 (4.4.3) の成立を加味すれば， $|\beta| \geq |\omega_{02}|$ である．従って，推移 (4.5.3) のような任意の $x_1 \in \Sigma^*$, $u_1 \in \Delta^*$, $q \in Q_1$ に対応する，

$$(\bar{p}, \omega_{02} \beta'') \xrightarrow[T_2]{x_1/v_1} (\bar{q}, \gamma_{02} \beta'')$$

$$\text{for some } v_1 \in \Delta^*, \bar{q} \in Q_2$$

なる推移が可能となる．ここで，補題 4.4.2 成立の基本である，式 (4.5.5), (4.5.6), (4.5.7), (4.5.8) の成立により，ある $t \in \Delta^{\pm*}$ が一意に存在し， $ut = hv$ が成立する（ \mathbf{E}_{n+1} (i) の成立）．更に，具体的な跳越し操作適用の結果として， $T(T_1 : T_2)$ 中に，次のような後続節点を導入するための推移路，

$$\begin{aligned} < (p, A\alpha'') \equiv h(\bar{p}, \omega_{02} \beta'') > \xrightarrow[T(T_1:T_2)]{u_{10} \setminus x_{10}/v_{10}} \\ < (q, \alpha'') \equiv t(\bar{q}, \gamma_{02} \beta'') > \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } \beta = \omega_{02} \beta'', \beta'' \in \Gamma_2^*$$

が存在する（ \mathbf{E}_{n+1} (ii) の成立）．以上により， $n_1 = n + 1$ の場合の節点 (4.4.4) に対する \mathbf{E}_{n+1} が保証される．

ところで，推移 (4.5.4) において， $L(q, \omega_{01}'') = \phi$ であるとする．このとき， $M_1 \equiv M_2$ であることから $L(\bar{q}, \gamma_{02}) = \phi$ となる．従って， $L(\bar{q}, \gamma_{02} \beta'') = \phi$ となり，上記同様に

$M_1 \equiv M_2$ であることから，対応する M_1 側の計算状況においても $L(q, \alpha'') = \phi$ となる．これは，推移 (4.5.3) における前提に矛盾するため，推移 (4.5.4) においては，必ず $L(q, \omega''_{01}) \neq \phi$ が成立するものとして考えればよい．

また， $1 \leq n_1 < n + 1$ である場合は，その後続節点が節点 (4.5.1) の子節点として $T(T_1 : T_2)$ 中に存在し，仮定より E_1, E_2, \dots, E_n が成立する．従って，節点 (4.5.1) について，それが分岐被適用節点である場合の考察と同様に E_{n+1} が保証される．□

4.6 定理

以上を総合して，次の定理を得る．

定理 4.6.1 任意の実時間空スタック受理式決定性限定ワンカウンター変換器同士の等価性は，その状態集合，スタック記号集合，入力記号集合，推移規則集合の各要素数に対する多項式時間内で判定可能である．

なお，文献 [Ba07] では，文献 [WT91] と同様に定義 3.3.1 の k_1 に相当する定数を用いた多項式時間で等価性判定が可能であるとしている．しかし，文献 [Ba07] の等価性判定の対象では，同文献中でも述べている様に，この定数 k_1 の大きさ自体は対象機構の指数オーダーとなり得，等価性判定全体を対象機構に対して完全に多項式時間的に行えるかについては次の課題 (a step towards a fully polynomial time algorithm) としている．これに対し，前述の通り，本章で対象とする droct では，この定数 k_1 の大きさ自体が状態集合の要素数に対する多項式オーダーとなり，従って，アルゴリズム全体が完全な多項式オーダーとなる．

第 5 章

結論

本論文では、これまで長年にわたり筆者らが提唱してきた、直接的分岐アルゴリズムによる dpdt の等価性判定に関する 2 つの最新の成果を与えた。本論文の成果は、序論でも述べた通り、オートマトンや形式文法を基礎とするシステムにおける学習過程において直接的に活用することができる。また、その見通しの良さにより、等価性判定を可解とする十分条件の緩和、更なる上位クラスに対する多項式時間等価性判定アルゴリズムの確立、などに関する今後の展開において、重要な意味を持つものと考えられる。以下に具体的な成果内容をまとめる。

まず、第 3 章では、dpdt の等価性判定を可解とする十分条件の緩和に関する検討の成果として、文献 [TomSei85] で対象とした Weaker Segmental Property と名付けた性質を持つ ε -推移を許した dpda 対に、ある条件のもとで出力機構を付与した dpdt 対に対しても等価性判定が可解であることを示した。この結果は、文献 [SeiT85a], [TomSei89] の結果を真に包含する拡張であり、直接的分岐アルゴリズムによる dpdt の等価性判定を可解とする十分条件を従来より大きく緩和した。現時点において、ここで提唱する dpdt 対を真に包含する等価性判定可能なクラス対は存在しない。また、この結果は、今後の ε -推移を許した dpdt の等価性判定問題における、更なるクラス拡張において有意義であるものと考えられる。

次に、第 4 章では、最大時間計算量の改善に関する検討の成果として、dpdt のある部分クラスである、実時間空スタック受理式決定性限定ワンカウンタ変換器について、その等価性判定が多項式時間で解決できることを証明した。具体的に、そのアルゴリズムに

対する詳細な計算量解析とその証明を行った。この結果は、直接的分岐アルゴリズムの有効性を示す、ひとつの典型的な成果であり、今後の多項式時間等価性判定が可解である dpdt クラスの検討における基礎となるものと考えられる。なお、現時点において、この成果を真に包含する結果は存在しない。

なお、上記第3章、第4章ともに、アルゴリズムの単純さ、および、効率性を明示する意味において、具体的な dpdt の等価性判定問題に対する基本例題を示した。前述したように、他の多くの方式ではこのような具体的例題を示すこと自体が非常に困難な状況である。

さて、ここで、等価性判定可能な dpdt クラスの対象範囲拡大に関して、今後の方向性を考える。第3章で示した等価性判定を可解とする十分条件は、条件2 (ε -推移に対する出力長の有限性)については一方の dpdt に閉じた条件であるが、条件1 (Weak Segmental Property の成立性)は dpdt (実際は対応する随伴 dpda) の対としての条件となっており、単純に、任意の dpdt との等価性判定が可能である dpdt クラスの提示ができていないことは、ひとつの課題である。筆者らは、文献 [SeiTS85b], [SeiT94], [TomSei95] において、この文献 [TomSei85] の対の条件1が、その内部の等価な計算状況において満足されるような dpda のクラスを提唱し、このクラスの dpda と任意の dpda との等価性判定が可解であることを証明している。第3章の結果は、文献 [TomSei85] で対象とする条件1を満足する dpda 対に対して、条件2のもとで出力機構を付与した dpdt 対に対する等価性判定の可解性を示している。従って、この結果と文献 [SeiTS85b] 以降の一連の成果を組み合わせることにより、上記で述べた課題については、比較的容易に解決できるものと予想する。

次に、等価性判定の時間計算量の改善に関する今後の方向性について考える。まず、直接的に、第4章の結果は更なる時間計算量改善の余地があると考えられる。つまり、更なるアルゴリズムの工夫により、多項式時間の範囲で、より時間計算量を改善することが可能であるものと考えられる。このような検討は、実用面においては、非常に重要である。また、多項式時間等価性判定の可能な dpdt クラスの更なる対象拡大に関しては、まずは、第4章を直接的に、実時間空スタック受理式決定性限定ワンカウンター変換器 (droct) に対して、任意に ε -推移を許した非実時間の空スタック受理式決定性限定ワンカウンター変換器の多項式時間等価性判定に拡張できる可能性が高いものと予想する。また、文献 [WT91]

において、単純決定性プッシュダウンオートマトンに関して、分岐アルゴリズムを用いた多項式時間等価性判定の可解性が証明されているが、これに出力機構を付与した単純決定性プッシュダウン変換器に対する多項式時間等価性判定についても、(文献 [Ba07] の出版は既にあるものの,) 直接的に第 4 章の結果を活用することができるものとする。

謝辞

本研究を進めるにあたり，長年にわたり，多大なるご指導・ご鞭撻を賜りました，電気通信大学 情報通信工学科 富田悦次教授に心から感謝の意を表します。先生のご指導，そして，叱咤・激励無くしては，この成果は決して有り得なかったことと思い，重ねて御礼申し上げる次第です。

また，ご多忙の中を種々ご検討を賜りました，情報通信工学専攻 高橋治久教授，尾関和彦教授，西野哲朗教授，情報工学専攻 小林聡教授に厚く御礼申し上げます。そして，学位論文および関連論文などの執筆にあたり，親身にご指導・ご協力を頂きました，情報通信工学科 若月光夫助教に心より感謝致します。また，本研究の基礎となる初期の検討段階においてご協力を頂いた，富田研究室OBの鈴木清美氏，西田久能氏，後藤昌宏氏，鈴木貴史氏，更に，博士課程後期（社会人）在籍中の研究環境整備等にご協力を頂いた，富田研究室の皆様にも厚く感謝致します。

更に，博士学位取得へ挑戦するにあたり，親身なご理解を賜り，日ごろご指導・ご助言を賜りました，東芝ソリューション株式会社 梶川茂司社長，坂内明首席技監，同社プラットフォームソリューション事業部 栗原高明事業部長，東芝ITサービス株式会社 石橋英次社長に厚く御礼申し上げます。

また，学位論文執筆に関して，励ましや種々ご協力を頂きました，浜松大学 坂井邦夫教授，株式会社東芝OBの長谷川健治氏，田辺吉久氏，山本秀範氏，東芝ソリューション株式会社 菅野雅之氏，山口晶嗣氏，古川豊氏，前田真氏，濱田洋一氏，福田美和氏に心より感謝致します。

最後に，精神的な支えとなった家族全員に感謝する次第です。

参考文献

- [AU72] A.V. Aho, J.D. Ullman, “The Theory of Parsing, Translation, and Compiling, Volume 1 : Parsing,” *Inf. Processing Letters*, **13**, pp.89-93, 1981.
- [Ba07] C. Bastien, J. Czyzowicz, W. Fraczak, W. Rytter, “Equivalence of simple functions,” *Theoretical Computer Science* Vol.376, pp.42-51, 2007.
- [Ch59] N. Chomsky, “On certain formal properties of grammars,” *Information and Control*, Vol.2, No.2, pp.137-167, 1959.
- [CK86] K. Culik II, J. Karhumäki, “Synchronizable deterministic pushdown automata and the decidability of their equivalence,” *Acta Informatica* **23**, pp.597-605, 1986.
- [Co83] B. Courcelle, “An axiomatic approach to the Korenjak-Hopcroft algorithm,” *Math. Systems Theory* **16**, pp.191-231, 1983.
- [De71] F.L. DeRemer, “Simple LR(k) grammars,” *Comm. ACM*, Vol.14, No.7, pp.453-460, 1971.
- [Fr76] E.P. Friedman, “The inclusion problem for simple languages,” *Theoretical Computer Science*, Vol.1.1, No.4, pp.297-316, 1976.
- [GG66] S. Ginsburg, S.A. Greibach, “Deterministic context-free languages,” *Information and Control*, Vol.9, No.6, pp.620-648, 1966.
- [HHY79] M.A. Harrison, I.M. Havel, A. Yehudai, “On equivalence of grammars through transformation trees,” *Theoretical Computer Science*, Vol.9, No.2, pp.173-205, 1979.
- [HTW95] K. Higuchi, E. Tomita, M. Wakatsuki, “A polynomial-time algorithm for checking the inclusion for strict deterministic restricted one-counter automata,”

- IEICE Trans. Inf. & Syst., **E78-D**, 4, pp.305-313, 1995.
- [HY79] M.A. Harrison, A. Yehudai, "A hierarchy of deterministic languages," J. of Computer and System Sciences, Vol.19, No.i, pp.63-78, 1979.
- [IR81] O.H. Ibarra, L.E. Rosier, "On the decidability of equivalence for deterministic pushdown transducers," Inf. Processing Letters, **13**, 3, pp.89-93, 1981.
- [KH66] A.J. Korenjak, J. Hopcroft, "Simple deterministic languages," IEEE Conference Record of 7th Annual Symposium on Switching and Automata Theory, Berkeley, CA., pp.36-46, 1966.
- [Kn65] D.E. Knuth, "On the translation of languages from left to right," Information and Control, Vol.8, No.6, pp.607-639, 1965.
- [KTE75] 片山卓也, 土屋昇, 榎本肇, "決定性プッシュダウン変換器の等価性判定について," 信学論 (D), Vol.J58-D, No.12, pp.760-767, 1975.
- [Le90] J.V. Leeuwen (Ed.), Handbook of Theoretical Computer Science, Vol.B, "Formal Models and Semantics," MIT Press, Cambridge/Elsevier, Amsterdam, Mass., 1990. (広瀬健・野崎昭弘・小林考次郎 監訳, "コンピュータ基礎理論ハンドブック," 丸善, 1994.)
- [OH78] M. Oyamaguchi, N. Honda, "The decidability of equivalence for deterministic stateless pushdown automata," Information and Control, Vol.38, No.3, pp.367-376, 1978.
- [OHI80] M. Oyamaguchi, N. Honda, Y. Inagaki, "The equivalence problem for real-time strict deterministic languages," Information and Control, Vol.45, No.1, pp.90-115, 1980.
- [OIH81] M. Oyamaguchi, Y. Inagaki, N. Honda, "The equivalence problem for two dpda's, one of which is a finite-turn or one-counter machine," J. Computer and System Sciences, Vol.23, No.3, pp.366-382, 1981.
- [Oy87] M. Oyamaguchi, "The equivalence problem for real-time DPDAs," J. ACM, Vol.34, No.3, pp.731-760, 1987.
- [OP77] T. Olshansky, A. Pnueli, "A direct algorithm for checking equivalence of LL(k) grammars," Theoretical Computer Science, Vol.4, No.3, pp.321-349, 1977.

- [SeiT83] 清野和司, 富田悦次, “ ε -推移を許したある決定性プッシュダウン変換器対の等価性判定,” 信学技報, AL83-15, pp.1-10, 1983.
- [SeiT85a] 清野和司, 富田悦次, “ある非実時間決定性プッシュダウン変換器対の等価性判定,” 信学論 (D), Vol.J68-D, No.10, pp.1785-1788, 1985.
- [SeiT94] K. Seino, E. Tomita, “The extended equivalence problem for a class WSP of non-real-time DPDA’s -The detailed proofs-,” Bulletin of UEC Vol.7, No.2, December, pp.141-156, 1994.
- [SeiTS83a] 清野和司, 富田悦次, 鈴木清美, “決定性プッシュダウン変換器 ($D_0 : R_0$) に対する等価性判定アルゴリズムの簡単化,” 信学技報, AL82-94, pp.15-28, 1983.
- [SeiTS83b] 清野和司, 富田悦次, 鈴木貴史, “実時間空スタック受理式を含むあるDPDAクラスの拡張等価性判定,” 信学技報, AL83-87, pp.77-92, 1984.
- [SeiTS85b] 清野和司, 富田悦次, 鈴木貴史, “分岐アルゴリズムによるDPDAの拡張等価性判定の一結果,” 信学論 (D), Vol.J68-D, No.12, pp.1785-1788, 1985.
- [SeiTW06] 清野和司, 富田悦次, 若月光夫, “ ε -推移を許したある決定性プッシュダウン変換器対の等価性判定アルゴリズム,” 情処研報, 2006-AL-104(9), pp.59-66, 2006.
- [SeiTW07a] 清野和司, 富田悦次, 若月光夫, “ ε -推移を許したある決定性プッシュダウン変換器対の等価性判定,” 信学論 (D), Vol.J90-D, No.10, pp.2675-2690, 2007.
- [SeiTW07b] 清野和司, 富田悦次, 若月光夫, “実時間空スタック受理式決定性限定ワンカウンター変換器の多項式時間等価性判定アルゴリズム,” 信学技報 Vol.107, No.258, COMP2007-47, pp.41-48, 2007.
- [SeiTW08] 清野和司, 富田悦次, 若月光夫, “実時間空スタック受理式決定性限定ワンカウンター変換器の多項式時間等価性判定,” 信学論 (D), Vol.J91-D, No.5, 14pages (2008.5 予定).
- [Sek85] 関本彰次, “実時間空スタック到達的 dpda の等価性判定問題について,” 信学論 (D), Vol.J68-D, No.8, pp.281-285, 1983.
- [Sen01] G. Sénizergues, “ $L(A)=L(B)$? decidability results from complete formal systems,” Theoretical Computer Science, Vol.251, Issues 1-2, pp.1-166, 2001.
- [Sen02] G. Sénizergues, “ $L(A)=L(B)$? A simplified decidability proof,” Theoretical Computer Science, vol.281, Issues 1-2, pp.555-608, 2002.

- [St67] R.E. Stearns, “A regularity test for pushdown machines,” *Information and Control*, Vol.11, No.3, pp.323-340, 1967.
- [Ta89] 田中穂積, “自然言語解析の基礎,” 産業図書, 1989.
- [TT00] Y. Tajima, E. Tomita, “A polynomial time learning algorithm of simple deterministic languages via membership queries and a representative sample,” *ICGI 2000, LNAI 1891*, 284-297, 2000.
- [TTWT04] Y. Tajima, E. Tomita, M. Wakatsuki, M. Terada, “Polynomial time learning of simple deterministic languages via queries and a representative sample,” *Theoretical Computer Science*, Vol.329, pp.203-221, 2004.
- [TK76] K. Taniguchi, T. Kasami, “A result on the equivalence problem for deterministic pushdown automata,” *J. Computer and System Sciences*, Vol.13, No.1, pp.38-50, 1976.
- [Tom79] 富田悦次, “一方が ϵ -動作なし空スタック受理式である決定性プッシュダウン変換器の等価性判定,” *信学論 (D)*, Vol.J62-D, No.7, pp.467-474, 1979.
- [Tom82] E. Tomita, “A direct branching algorithm for checking equivalence of some classes of deterministic pushdown automata,” *Information and Control* Vol.52, pp.187-238, 1982.
- [Tom83] E. Tomita, “A direct branching algorithm for checking equivalence of strict deterministic vs. LL(k) grammars,” *Theoretical Computer Science*, Vol.32, pp.87-120, 1983.
- [Tom84] E. Tomita, “An extended direct branching algorithm for checking equivalence of deterministic pushdown automata,” *Theoretical Computer Science*, Vol.32, pp.87-120, 1984.
- [TomSei85] E. Tomita, K. Seino, “A weaker sufficient condition for the equivalence of a pair of dpda’s to be decidable,” *Theoretical Computer Science*, Vol.41, pp.223-230, 1985.
- [TomSei89] E. Tomita, K. Seino, “A direct branching algorithm for checking the equivalence of two deterministic pushdown transducers, one of which is real-time strict,” *Theoretical Computer Science*, Vol.64, pp.39-53, 1989.

- [TomSei95] E. Tomita, K. Seino, "The extended equivalence problem for a class of non-real-time deterministic pushdown automata," *Acta Informatica* Vol.32, pp.395-413, 1995.
- [TY92] 富田悦次, 横森貴, "オートマトン・言語理論," 森北出版 (基礎情報工学シリーズ 5), 1992.
- [Va73] L.G. Valiant, "Decision procedures for families of deterministic pushdown automata," Ph.D. Dissertation, University of Warwick, Coventry, 1973.
- [Va74] L.G. Valiant, "The equivalence problem for deterministic finite-turn pushdown automata," *Information and Control*, Vol.25, No.2, pp.123-133, 1974.
- [VP75] L.G. Valiant, M.S. Paterson, "Deterministic one-counter automata," *J. Computer and System Sciences*, Vol.10, No.3, pp.340-350, 1975.
- [WT89] 若月光夫, 富田悦次, 藤橋忠悟, "単純決定性プッシュダウンオートマトンの等価性判定を行う直接的分岐アルゴリズム," *信学論 (D-I)*, Vol.J74-DI, No.5, pp.327-334, 1989.
- [WT91] 若月光夫, 富田悦次, "単純決定性プッシュダウンオートマトンの等価性判定の改良分岐アルゴリズムとその最大時間計算量," *信学論 (D-I)*, Vol.J74-DI, No.9, pp.595-603, 1991.
- [WT92] 若月光夫, 富田悦次, "単純決定性プッシュダウンオートマトンの等価性を決定する最短入力記号列長の上界," *信学論 (D-I)*, Vol.J75-D-I, No.10, pp.950-953, 1992.
- [WT93] M. Wakatsuki, E. Tomita, "A fast algorithm for checking the inclusion for very simple deterministic pushdown automata," *IEICE Trans. on Information and Systems*, E76-D, pp.1224-1233 (1993).

関連論文の印刷公表方法と時期

(1) 清野和司, 富田悦次

題目「ある非実時間決定性プッシュダウン変換器対の等価性判定」

電子通信学会論文誌 D, Vol.J68-D, No.10, pp.1785-1788, (1985.10).

(第 1 章および第 3 章の内容)

(2) 清野和司, 富田悦次, 鈴木貴史

題目「分岐アルゴリズムによる DPDA の拡張等価性判定の一結果」

電子通信学会論文誌 D, Vol.J68-D, No.12, pp.1785-1788, (1985.12).

(第 1 章および第 5 章の内容)

(3) 清野和司, 富田悦次, 若月光夫

題目「 ϵ -推移を許したある決定性プッシュダウン変換器対の等価性判定」

電子情報通信学会論文誌 D, Vol.IJ90-D, No.10, pp.2675-2690, (2007.10).

(第 3 章の内容)

(4) 清野和司, 富田悦次, 若月光夫

題目「実時間空スタック受理式決定性限定ワンカウンタ変換器の
多項式時間等価性判定」

電子情報通信学会論文誌 D, Vol.J91-D, No.5, 14pages (2008.5 予定).

(第 4 章の内容)

その他の参考文献

1 . 学術論文誌

(1) Etsuji Tomita, Kazushi Seino

Title 「 A weaker sufficient condition for the equivalence of a pair of dpda's
to be decidable 」

Theoretical Computer Science, Vol.41, pp.223-230, (1985).

(2) Etsuji Tomita, Kazushi Seino

Title 「 A direct branching algorithm for checking the equivalence of two
deterministic pushdown transducers, one of which is real-time strict 」

Theoretical Computer Science, Vol.64, pp.39-53, (1989).

(3) Etsuji Tomita, Kazushi Seino

Title 「 The extended equivalence problem for a class of non-real-time
deterministic pushdown automata 」

Acta Informatica, Vol.32, pp.395-413, (1995).

2 . 紀要

(1) Kazushi Seino, Etsuji Tomita

Title 「 The extended equivalence problem for a class WSP of non-real-time
DPDA's -The detailed proofs- 」

Bulletin of the University of Electro-Communications, Vol.7, No.2, December,
pp.141-156, (1994.12).

3. その他

(1) 清野和司, 富田悦次, 鈴木清美

題目「決定性プッシュダウン変換器 ($D_0 : R_0$) に対する等価性判定
アルゴリズムの簡単化」

電子通信学会技術研究報告, AL82-94, pp.15-28, (1983.2).

(2) 清野和司, 富田悦次

題目「 ε -推移を許したある決定性プッシュダウン変換器対の等価性判定」

電子通信学会技術研究報告, AL83-15, pp.1-10, (1983.6).

(3) 清野和司, 富田悦次

題目「DPDA 対の等価性判定を可解とする十分条件の拡張」

昭和 59 年度電子通信学会総合全国大会, 1486, 6-39, (1984.3).

(4) 清野和司, 富田悦次, 鈴木貴史

題目「実時間空スタック受理式を含むある DPDA クラスの拡張等価性判定」

電子通信学会技術研究報告, AL83-87, pp.77-92, (1984.3).

(5) 清野和司, 富田悦次, 若月光夫

題目「 ε -推移を許したある決定性プッシュダウン変換器対の
等価性判定アルゴリズム」

情報処理学会研究報告, 2006-AL-104 (9), pp.59-66, (2006.1).

(6) 清野和司, 富田悦次, 若月光夫

題目「実時間空スタック受理式決定性限定ワンカウンタ変換器の多項式時間
等価性判定アルゴリズム」

電子情報通信学会技術研究報告,

Vol.107, No.258, COMP2007-47, pp.41-48, (2007.10).