修 士 論 文 の 和 文 要 旨

研究科・専攻	大学院　情報理工学研究科　情報・工学ネットワーク　専攻　博士前期課程		
氏　　名	熱田 慶人	学籍番号	2031006
論 文 題 目	無人機輸送を考慮した多品種容量制限付きマルチレベル施設配置問題のモデル化と評価		

要　　旨

近年，物流業界には，電子商取引(EC)市場の拡大による小口配送の増加や人口減少による労働力の不足といった課題がある．これらの解決策として無人機を用いた輸送が注目されており，各地で目視外飛行での無人機配送の検証実験や過疎地域における物資輸送の活用事例等があり実用化が進んでいる．

無人機輸送を活用するにあたり，長距離飛行や需要充足のための無人機の発着施設，充電施設の必要量と配置場所の策定が課題となっている．施設の最適な配置を決定する問題として施設配置問題がある．特に配置したい施設が「無人機の発着」，「無人機の充電」といった異なるサービスを提供している場合には，提供可能なサービスごとに施設をレベル分けし，各レベル間の施設同士の関係性を考慮して施設の最適な配置を決定する問題はマルチレベル施設配置問題と呼ばれる．

本研究では，複数のアイテムが存在し，アイテムの生産，アイテムの保管，無人機輸送に関する施設を考慮したモデルとして多品種容量制限付きマルチレベル施設配置問題のモデルを提案した．多品種容量制限付きマルチレベル施設配置問題は，マルチレベル施設配置問題において，アイテムが多品種に拡張され，配置したい施設に生産量や保管量といったその施設の容量を制約に追加した問題である．また，提案したモデルに対して，施設配置を決定する問題とアイテムの輸送量を決定する問題に分割して解を求める Benders 分解法による提案モデルの最適値の下界値を与えるアルゴリズムを提案した．

提案したモデルに対して，施設配置候補点の生成方法を変えた複数のインスタンスに対して，計算機実験を行い提案モデルがどの程度の規模の問題まで解けるのか，コスト面についてどの程度違いが存在するのかを実験的に評価した．計算機実験の結果より，過疎地域における無人機輸送や無人機に関する実証実験のような顧客の数，アイテム数が多くならない場合には現実的な時間で最適解を求められることを示した．また，日本の物流企業の小口貨物取引実績を用いた実験では，提案したモデルが従来のトラック輸送のみのモデルよりも総輸送コストの面で優れていることを示し，年間の輸送量が与えられたときに最も輸送量が多い日のデータをもとに施設の配置を求めたほうが，総輸送コスト，追加で必要な無人機で輸送する量が最小となることを示した．

電気通信大学大学院情報理工学研究科
情報・ネットワーク工学専攻情報数理工学プログラム修士論文

無人機輸送を考慮した多品種容量制限付きマルチレベル施設配置問題のモデル化と評価

令和 4 年 1 月 28 日

情報数理工学プログラム

学籍番号 2031006

熱田 慶人

指導教員　高橋里司
岡本吉央

目次

1 **はじめに** 2

2 **基礎知識** 4
- 2.1 凸集合 4
- 2.2 施設配置問題 5
- 2.3 マルチレベル施設配置問題 7
- 2.4 Benders 分解法 10

3 **関連研究** 13
- 3.1 Irawan らの 2 レベル施設配置問題 13
- 3.2 マルチレベル施設配置問題に対するアルゴリズム 15

4 **提案モデル** 17
- 4.1 前提条件，記号の定義 17
- 4.2 無人機輸送のみを考慮したモデル 19
- 4.3 無人機輸送とトラック輸送を考慮したモデル 20

5 **計算機実験** 22
- 5.1 インスタンスの生成 22
- 5.2 実験 1 25
- 5.3 実験 2 31

6 **Benders 分解法を用いた提案モデルの最適値の下界値を与えるアルゴリズム** 54
- 6.1 $MLFLP1$ に対する最適値の下界値を与えるアルゴリズム 54
- 6.2 $MLFLP2$ に対する最適値の下界値を与えるアルゴリズム 60

7 **おわりに** 65

付録 A 提案アルゴリズムの性能評価 68
- A.1 実験環境 68
- A.2 実験結果 68

1　はじめに

近年，物流業界には，電子商取引 (EC) 市場の拡大による小口配送の増加や人口の減少による労働力の不足といった課題がある [1]．これらの解決策として無人機を用いた輸送の効率化や幹線輸送の自動化・機械化，自動運航船を用いた海運の効率化等が挙げられている．特に，無人機を用いた輸送に関しては，実証実験が行われたり，一部地域では実際に活用されており，安全性の問題や法的な問題は残っているが実用化が進んでいる．例えば，Amazon 社による 30 分以内に最大 2.2kg の荷物を配達するサービス「Amazon Prime Air」の事例 [2]，楽天の長野県白馬村で行われた白馬岳の山頂へ物資を配送する国内初の目視外飛行での無人機配送の検証実験 [3]，長野県伊那市で 2020 年から実際に運用されているドローンによる商品配達を行う支え合い買物サービス「ゆうあいマーケット」[4] がある．また，2022 年には，無人機の目視外飛行が有人地帯で行えるようになり，都市部における物流配送なども検討されている．

無人機輸送を活用するにあたり，長距離飛行や需要充足のための無人機の発着施設，充電施設の必要量と配置場所の策定が課題となっている．このような施設の最適な配置箇所を決定する問題を施設配置問題という．特に配置したい施設が「無人機の発着」,「無人機の充電」といった異なるサービスを提供している場合には，サービスごとに施設をレベル分けし，各レベル間の施設同士の関係性を考慮して施設の最適な配置を決定することになる．このような問題をマルチレベル施設配置問題という．マルチレベル施設配置問題は，医療施設の配置問題や無人機を考慮した物流システムの構築等に応用がある．例えば，発展途上国における医療システム構築のために，診療所や病院といった異なる医療サービスを提供する施設の配置を決定する問題 [5] や無人機による配送により多くの需要を満たすために，必要な無人機の発着施設と充電施設の数と配置数を決定する問題 [6] といった 2 レベルのマルチレベル施設配置問題が数多く研究されている．

本研究の目的は，複数のアイテムが存在し，アイテムの生産，アイテムの保管，無人機輸送に関する施設を考慮したマルチレベル施設配置問題のモデル化である．提案したモデルが解ける問題の規模，および従来の配送モデルと提案モデルのコスト面における差を実験的に評価する．また，本研究の最後で提案モデルの最適値の下界値を与えるアルゴリズムの提案も行う．

本論文の構成を示す．2 章では，モデル化と提案手法に関する知識について述べる．3 章では，マルチレベル施設配置問題に関する先行研究について述べる．4 章では，本研究においてモデル化を行った無人機輸送を考慮したマルチレベル施設配置問題について述べ

る．5 章では，提案したモデルに対して行った数値実験とその結果について述べる．6 章では，Benders 分解法を用いた提案モデルの最適値の下界値を与えるアルゴリズムについて述べる．最後に 7 章で，まとめと今後の展望について述べる．

2　基礎知識

本章では，本研究における基礎知識とモデル化に関連する施設配置問題，マルチレベル施設配置問題に関して述べ，提案手法に関連する Benders 分解法について述べる．また，本論文で用いる記号として，非負の整数の集合を，$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$，非負の実数の集合を，$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ とする．

2.1　凸集合

S を n 次元実線形空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．任意の 2 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$, および実数 $0 \leq t \leq 1$ に対して

$$t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \in S$$

が成り立つとき，S は**凸集合**とよばれる．

有限本の 1 次等式あるいは 1 次不等式を満たす $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $\mathcal{P}$ も凸集合であるが，このような集合 $\mathcal{P}$ を**凸多面体**という．すなわち，$A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, B \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$, $\boldsymbol{b}_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $\boldsymbol{b}_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ に対して，

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2, A_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

と表される集合である．ここで，ベクトルの比較に用いる記号は，成分ごとに比較するものとして定義する．

S が凸集合であるとき，S の異なる 2 点の中間点として表されない点，すなわち，任意の $\boldsymbol{x}_1 \in S$, $\boldsymbol{x}_2 \in S$, および実数 $0 \leq t \leq 1$ に対して

$$\hat{\boldsymbol{x}} = t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2 \Rightarrow \hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$$

が成り立つような点 $\hat{\boldsymbol{x}}$ を S の **端点** という．

ここで，次のような線形計画問題を考える．ただし，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とする．

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

この線形計画問題の実行可能解集合

$$X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

は凸集合である．これは，有限本の 1 次等式あるいは 1 次不等式を満たす $\mathbb{R}^n$ の部分集合は凸集合であることから明らかである．ここで，$X \neq \emptyset$ と仮定する．$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_K\}$ を X の端点集合としたとき， $A\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}$ を満たす $L \geq 0$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_j \neq \boldsymbol{0}$ $(j = 1, \ldots, L)$ が存在して，集合 X の点 $\boldsymbol{x}$ は，

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{L} \mu_j \boldsymbol{v}_j$$

と表現される．ここで，λ_i, μ_j は非負の実数であり，λ_i は $\sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1$ を満たす．また，この $A\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}$ を満たす $L \geq 0$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_j$ を X の**端線**という．

2.2 施設配置問題

施設配置問題には，需要をすべて満たし，施設配置コストの総和が最小となるような施設の数と配置を決める問題，施設の数は固定され，顧客が施設まで移動する距離の総和が最小となるような施設の配置を決める問題，顧客全員を被覆できるような施設配置のうちもっとも少ない施設配置を求める問題といった様々な種類がある．本節では，需要をすべて満たし，施設配置コストの総和と輸送コストの総和が最小となるように施設の数と配置，輸送量を決める問題の中で，施設に容量制限があり，輸送するアイテムが複数ある場合について述べる．

2.2.1 多品種容量制限付き施設配置問題

輸送するアイテムが複数あり，施設に容量制限がある場合の施設配置問題を多品種容量制限付き施設配置問題という．最初に，アイテムの集合，各アイテムに対する顧客の需要，施設の配置候補点，アイテムを施設から顧客へと輸送するときにかかる輸送コスト，施設を配置するときにかかる配置コスト，各アイテムに対する施設の供給量の上限が与えられる．この問題では，すべての顧客の需要を満たすような，施設の配置，施設と顧客間の輸送量を決定し，施設配置コストと輸送コストの総和の最小化を目的とする．輸送するアイテムが 1 種類の場合には単に容量制限付き施設配置問題という．アイテムの集合を I, 顧客の集合を R, 顧客 $r \in R$ のアイテム $i \in I$ に対する需要を d_{ir}，施設の配置候補点の集合を V, 施設 $j \in V$ の配置コストを f_j, アイテム i を施設 j から顧客 r へと輸送す

るときにかかる輸送コストを c_{ijr}，アイテム i に対する施設 j の容量を q_{ij} とし，連続変数 x_{ijr}, 0-1 整数変数 y_j を以下のように定義する．

$$x_{ijr} = \text{アイテム } i \text{ の施設 } j \text{ から顧客 } r \text{ への輸送量},$$
$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{施設 } j \text{ を開設する} \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases}$$

上記の定数と変数を用いて，多品種容量制限付き施設配置問題を次の混合整数計画問題として定式化する．

$$\text{minimize} \quad \sum_{j \in V} f_j y_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in V} \sum_{r \in R} c_{ijr} x_{ijr} \tag{2.1}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j \in V} x_{ijr} = d_{ir} \qquad \forall i \in I, r \in R \tag{2.2}$$

$$\sum_{j \in V} x_{ijr} \leq q_{ij} y_j \qquad \forall i \in I, j \in V \tag{2.3}$$

$$x_{ijr} \geq 0 \qquad \forall i \in I, j \in V, r \in R \tag{2.4}$$

$$y_j \in \{0, 1\} \qquad \forall j \in V. \tag{2.5}$$

目的関数 (2.1) は施設配置コストと総輸送コストの総和である．制約 (2.2) は各顧客の需要を過不足なく満たすことを要請し，制約 (2.3) はアイテムの輸送量は施設の供給量以下であることを要請する．

図 2.1 に，$|I| = 1$ のときの容量制限付き施設配置問題の例を示す．施設に付随する数字は (施設配置コスト，容量) を表し，顧客に付随する数字は (需要) を表す．辺に付随する数字は輸送コストを表す．図 2.2 は，図 2.1 の入力に対する最適解であり，開設する施設とアイテムの輸送経路を実線で表し，辺に付随する数字は (輸送コスト，輸送量) を表す．

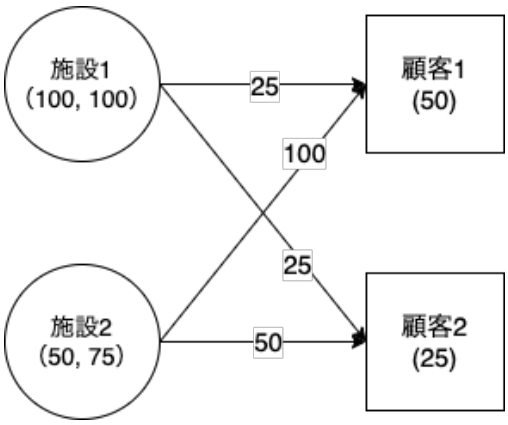

図 2.1　入力例

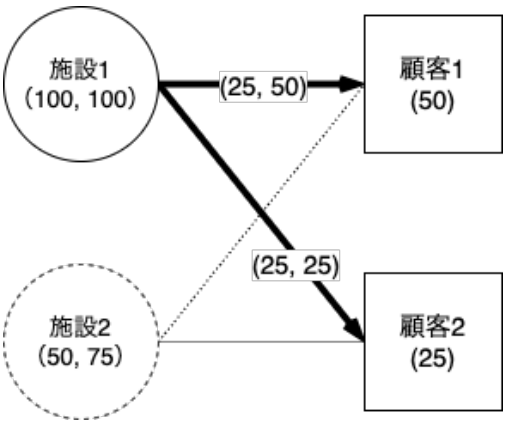

図 2.2　最適解

2.3　マルチレベル施設配置問題

マルチレベル施設配置問題とは，工場と倉庫，ごみ焼却施設と埋め立て地，診療所と病院といった配置を行いたい施設ごとに提供できるサービスが異なる，施設同士が相互作用する関係にある施設群をサービスや人やアイテムが流れていく方向等を基準にレベル分けを行い，各レベルごとの施設の配置を考える問題である．例えば，ある製品を生産する工場の配置とその製品を保管するための倉庫の配置，工場から倉庫への輸送量と倉庫から顧客への輸送量を決定するマルチレベル施設配置問題を考える．このとき，アイテムの流れは工場から倉庫へ流れるので，レベル 2 施設は工場，レベル 1 施設は倉庫として考える．この問題では，各レベルの施設のうちどれを開設するのか否かは，工場と倉庫間の輸送量，倉庫と顧客間の輸送量，各レベルの施設の配置コストによって決まる．

マルチレベル施設配置問題は施設配置問題の拡張なので，施設配置問題と同様に様々な種類があるが，本節では需要をすべて満たし，施設配置コストの総和と輸送コストの総和が最小となるように施設の数と配置，施設間，施設と顧客間の輸送量を決定する問題の中で，施設に容量制限があり，輸送するアイテムが複数ある場合について述べる．

2.3.1　多品種容量制限付きマルチレベル施設配置問題

輸送するアイテムが複数あり，施設に容量制限がある場合のマルチレベル施設配置問題を多品種容量制限付きマルチレベル施設配置問題という．最初に，アイテムの集合，各アイテムに対する顧客の需要，$k \in \mathbb{N}$ レベルに分割された施設の配置候補点，アイテムを施設から顧客へと輸送するときにかかる輸送コスト，レベル k 施設を配置するときにかかる配置コスト，レベル k 施設の各アイテムに対する供給量の上限が与えられる．この問題で

は，すべての顧客の需要を満たすような，各レベルの施設の配置，上位レベル施設と下位レベル施設間，施設と顧客間の輸送量を決定し，施設配置コストと輸送コストの総和の最小化を目的とする．輸送するアイテムが 1 種類の場合には単に容量制限付きマルチレベル施設配置問題という．

例として，上記に挙げた工場と倉庫の配置を考える 2 レベル施設配置問題を考える．アイテムの集合を I, 顧客の集合を R, 顧客 $r \in R$ のアイテム $i \in I$ に対する需要を d_{ir}，レベル k 施設の配置候補点の集合を V_k, 施設 $j_k \in V_k$ の配置コストを f_{j_k}, アイテム i をレベル 2 施設 j_2 からレベル 1 施設 j_1 へと輸送するときにかかる輸送コストを $c_{ij_2j_1}$，アイテム i をレベル 1 施設 j_1 から顧客 r へと輸送するときにかかる輸送コストを c'_{ij_1r}，アイテム i に対するレベル k 施設 j_k の容量を q_{ij_k} とし，連続変数 $x_{ij_2j_1}$, x'_{ij_1r}, 0-1 整数変数 y_{j_k} を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
x_{ij_2j_1} &= \text{アイテム } i \text{ のレベル 2 施設 } j_2 \text{ から レベル 1 施設 } j_1 \text{ への輸送量,} \\
x'_{ij_1r} &= \text{アイテム } i \text{ のレベル 1 施設 } j_1 \text{ から顧客 } r \text{ への輸送量,} \\
y_{j_k} &= \begin{cases} 1 & \text{施設 } j_k \text{を開設する} \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

上記の定数と変数を用いることによって，多品種容量制限付きマルチレベル施設配置問題は以下のような混合整数計画問題として定式化できる．

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^{2} \sum_{j_k \in V_k} f_{j_k} y_{j_k} + \sum_{i \in I} \sum_{j_2 \in V_2} \sum_{j_1 \in V_1} c_{ij_2j_1} x_{ij_2j_1} + \sum_{i \in I} \sum_{j_1 \in V_1} \sum_{r \in R} c'_{ij_1r} x'_{ij_1r} \tag{2.6}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j_2 \in V_2} x_{ij_2j_1} = \sum_{r \in R} x'_{ij_1r} \qquad \forall i \in I, j_1 \in V_1 \tag{2.7}$$

$$\sum_{j_1 \in V_1} x'_{ij_1r} = d_{ir} \qquad \forall i \in I, r \in R \tag{2.8}$$

$$\sum_{j_1 \in V_1} x_{ij_2j_1} \leq q_{ij_2} y_{j_2} \qquad \forall i \in I, j_2 \in V_2 \tag{2.9}$$

$$\sum_{r \in R} x_{ij_1r} \leq q_{ij_1} y_{j_1} \qquad \forall i \in I, j_1 \in V_1 \tag{2.10}$$

$$x_{ij_2j_1} \geq 0 \qquad \forall i \in I, j_2 \in V_2, j_1 \in V_1 \tag{2.11}$$

$$x'_{ij_1r} \geq 0 \qquad \forall i \in I, j_1 \in V_1, r \in R \tag{2.12}$$

$$y_{j_k} \in \{0, 1\} \qquad \forall j_k \in V_k, k = 1, 2. \tag{2.13}$$

目的関数 (2.6) は施設配置コストと総輸送コストの総和である．制約 (2.7) は施設間の輸送量は一致していなければならないことを要請する，(2.8) は各顧客の需要を過不足なく満たすことを要請し，制約 (2.9) は，レベル 2 施設からレベル 1 施設への輸送量はレベル 2 施設の生産量以下であることを要請する，(2.10) レベル 1 施設から顧客への輸送量はレベル 1 施設の受入可能量以下であることを要請する．

図 2.3 に，$|I| = 1$ のときの容量制限付き 2 レベル施設配置問題の例を示す．施設に付随する数字は (施設配置コスト，容量) を表し，顧客に付随する数字は (需要) を表す．辺に付随する数字は輸送コストを表す．図 2.4 は，図 2.3 の入力に対する最適解であり，開設する施設とアイテムの輸送経路を実線で表し，辺に付随する数字は (輸送コスト，輸送量) を表す．

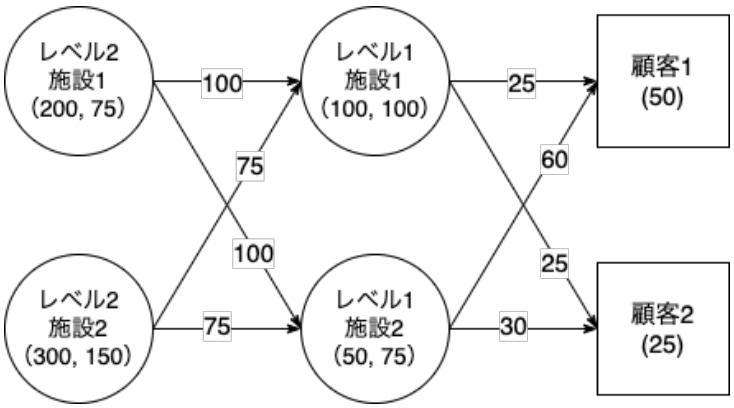

図 2.3　入力例

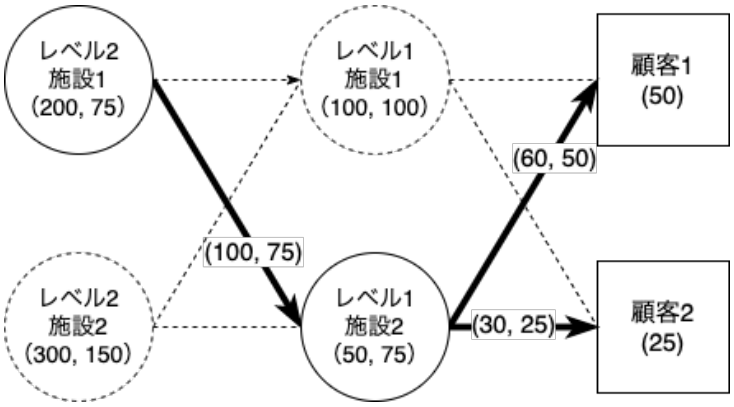

図 2.4　最適解

2.4　Benders 分解法

Benders 分解法とは，最適化問題を線形部分と非線形部分（または整数部分）に分け，2 つの問題を繰り返し解くことで最適解を見つけるアルゴリズムである [7]．例として次のような最適化問題を考える．ただし，決定変数を $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^p$ とし，定数を $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^p, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{m \times p}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とし，Y を $\boldsymbol{y}$ の許容集合とする．

$$
\begin{aligned}
P: \quad \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} && (2.14)\\
\text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{b} && (2.15)\\
& \boldsymbol{y} \in Y && (2.16)\\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. && (2.17)
\end{aligned}
$$

ここで，最適化問題 P の変数 $\boldsymbol{y}$ を $\bar{\boldsymbol{y}} \in Y$ に固定した問題 $P_{\boldsymbol{y}}$ を

$$
\begin{aligned}
P_{\boldsymbol{y}}: \quad \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} && (2.18)\\
\text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} - B\bar{\boldsymbol{y}} && (2.19)\\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} && (2.20)
\end{aligned}
$$

とする．問題 $P_{\boldsymbol{y}}$ の双対問題 $D_{\boldsymbol{y}}$ は, 双対変数を $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ とすると,

$$
\begin{aligned}
D_{\boldsymbol{y}}: \quad \text{maximize} \quad & (\boldsymbol{b} - B\bar{\boldsymbol{y}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} && (2.21)\\
\text{subject to} \quad & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{c} && (2.22)\\
& \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0} && (2.23)
\end{aligned}
$$

となる．$D_{\boldsymbol{y}}$ の実行可能解の集合を W とし, $W \neq \emptyset$ と仮定する．また，$W \neq \emptyset$ ならば，元の問題 P は P' のように定式化することができる．

$$
\begin{aligned}
P': \quad \text{minimize} \quad & \left(\max_{\boldsymbol{\lambda} \in W} (\boldsymbol{b} - B\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\right) + \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} && (2.24)\\
\text{subject to} \quad & \boldsymbol{y} \in Y. && (2.25)
\end{aligned}
$$

次に $D_{\boldsymbol{y}}$ が最適解を持つための条件について考える．ここで，W の端点の集合を $W_1 = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_K\}$，端線の集合を $W_2 = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_L\}$ とする．このとき，W の点 $\boldsymbol{x}$ は次のように表すことができる．

$$
\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{L} \mu_j \boldsymbol{v}_j \tag{2.26}
$$

ここで，λ_i, μ_j は非負の実数であり，λ_i は $\sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1$ を満たす．もしある $\boldsymbol{\beta'} \in W_2$ に対して，$(\boldsymbol{b} - B\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta'} > 0$ が成り立つならば，端線ベクトルのパラメータ $\boldsymbol{v}_j$ を大きく選ぶことにより，$D_{\boldsymbol{y}}$ の目的関数値はいくらでも大きくできるので，$D_{\boldsymbol{y}}$ は非有界となる．しかし，$P_{\boldsymbol{y}}$ が実行可能ならば，双対定理より $D_{\boldsymbol{y}}$ は非有界とはならないので，任意の $\boldsymbol{\beta} \in W_2$ に対して，$(\boldsymbol{b} - B\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} \leq 0$ が成り立たなければならない．このとき，端点のいずれかが $D_{\boldsymbol{y}}$ の最適解となる．したがって，$\max_{\boldsymbol{\lambda} \in W} (\boldsymbol{b} - B\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}$ に対応する補助変数 ξ を導入すれば，問題 P' は

$$
\begin{aligned}
BM: \quad \text{minimize} \quad & \xi + \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} && (2.27)\\
\text{subject to} \quad & (\boldsymbol{b} - B\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} \leq \xi \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in W_1 && (2.28)\\
& (\boldsymbol{b} - B\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in W_2 && (2.29)\\
& \boldsymbol{y} \in Y && (2.30)\\
& \xi \geq 0. && (2.31)
\end{aligned}
$$

と書き換えることができる．BM は Benders 主問題，$D_{\boldsymbol{y}}$ は Benders 部分問題と呼ばれ，制約式 (2.28), (2.29) はそれぞれ最適性カット，実行可能性カットと呼ばれる．有限個の制約 (2.28), (2.29) がすべて列挙されていれば，BM と P は等価な問題である．Benders 分解法では，制約式 (2.28), (2.29) の一部を取り除いた次の緩和問題 BM' を考える．ここで, $W_1' \subseteq W_1, W_2' \subseteq W_2$ とする．

$$
\begin{aligned}
BM': \quad \text{minimize} \quad & \xi + \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} && && (2.32)\\
\text{subject to} \quad & (\boldsymbol{b} - B\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} \leq \xi \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in W_1' && && (2.33)\\
& (\boldsymbol{b} - B\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in W_2' && && (2.34)\\
& \boldsymbol{y} \in Y && && (2.35)\\
& \xi \geq 0. && && (2.36)
\end{aligned}
$$

BM' の最適解を $(\xi^s, \boldsymbol{y}^s)$ とし，$\boldsymbol{y}^s$ を所与として $D_{\boldsymbol{y}^s}$ を解き，$D_{\boldsymbol{y}^s}$ の最適値が ξ^s と一致していれば，$\boldsymbol{y}^s$ が BM の最適解であるので反復を終了する．$D_{\boldsymbol{y}^s}$ が非有界の場合は，$(\boldsymbol{b} - B\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} > 0$ を満たす端線が得られているので，それをもとに実行可能性カットを求め，W_2' に追加して BM' を解き直す．$D_{\boldsymbol{y}^s}$ が有界であるが，最適値が ξ^s と一致しない場合は，$D_{\boldsymbol{y}^s}$ の最適解 $\boldsymbol{\lambda}^s$ より最適性カット

$$
(\boldsymbol{b} - B\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^s \leq \xi^s \tag{2.37}
$$

を求め，W_1' の追加して BM' を解き直す．最終的に得られた $\boldsymbol{y}^*$ を所与として問題 $P_{\boldsymbol{y}^*}$ を解くことで，元の問題 P の最適解 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ を求める．

3 関連研究

本章では，容量制限付きマルチレベル施設配置問題に関する先行研究とマルチレベル施設配置問題に対するアルゴリズムの先行研究について述べる．

3.1 Irawan らの 2 レベル施設配置問題

輸送する製品が多品種かつ施設に容量制限があるマルチレベル施設配置問題に関して，Irawan らの研究 [8] がある．彼らは，製品を生産する工場と製品を保管するための倉庫の配置と配置する倉庫の容量，工場から倉庫，倉庫から顧客への製品の流れを決定する問題である多品種容量制限付きマルチレベル施設配置問題の定式化を行っている．倉庫の容量として製品の保管できる個数に基づく場合と製品の体積に基づく場合の 2 つの場合を想定して定式化を行っている．ただし，倉庫の容量の候補は事前に与えられているものとし，どの容量で倉庫を配置するのかを決定する．本節では，提案モデルに関連がある製品の保管できる個数に基づく定式化について詳しく述べる．定式化に必要な記号を以下に定義する．

集合

- I: 工場の配置候補点の集合
- J: 倉庫の候補点の集合
- K: 顧客の集合
- P: 製品の集合
- D_{jp}: 倉庫 j で製品 p を格納できる個数の候補の集合 $(\forall j \in J, p \in P)$

定数

- s_{ip} : 工場 $i \in I$ における製品 $p \in P$ の生産量
- w_{kp} : 顧客 $k \in K$ の製品 p に対する需要量
- f_j : $j \in J$ に倉庫を配置するために必要なコスト
- $\hat{f}_{jpd}$: 倉庫 j における製品 p の最大格納数を $d \in D_{jp}$ とした際に発生するコスト
- b_{jpd} : 倉庫 j における製品 p の最大格納数が d のときに製品 p を保存する個数
- c_{ijp} : 工場 i から倉庫 j までの製品 p の単位輸送コスト
- $\hat{c}_{jkp}$: 倉庫 j から顧客 k への製品 p の単位輸送コスト

変数

- $Q_j = \begin{cases} 1 & \text{倉庫 } j \text{ を配置する} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$
- $Y_{jpd} = \begin{cases} 1 & \text{倉庫 } j \text{ の製品 } p \text{ の最大格納数を } d \text{ とする} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$
- $X_{ijp} =$ 工場 i から倉庫 j までの製品 p の輸送量
- $\hat{X}_{jkp} =$ 倉庫 j から顧客 k への製品 p の輸送量

上記の記号を用いて，製品の生産工場と製品を保管する倉庫の配置を決定する問題を整数計画問題として定式化を行う．目的関数は，工場および倉庫の配置コストと工場から倉庫への輸送コスト，倉庫から顧客への輸送コストの総和である．したがって，次のように目的関数を定義する．

$$\sum_{j\in J} f_j Q_j + \sum_{j\in J}\sum_{p\in P}\sum_{d\in D_{jp}} \hat{f}_{jpd} Y_{jpd} + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{p\in P} c_{ijp} X_{ijp} + \sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\sum_{p\in P} \hat{c}_{jkp}\hat{X}_{jkp}.$$

式 (3.1) から (3.10) に多品種容量制限付き 2 レベル施設配置問題 ($TLFLP$) を示す．目的関数 (3.1) は施設配置コストと総輸送コストの総和の最小化である．制約 (3.2) は，工場から倉庫への輸送量は工場の生産量以下でなければならないことを要請し，制約 (3.3) は，倉庫から顧客への輸送量は倉庫の保管量以下でなければならないことを要請する．制約 (3.4) は，開設する倉庫が製品ごとに最大 1 つの容量でのみ開設することを要請する．制約 (3.5) は，工場と倉庫間，倉庫から顧客間の輸送量は一致していなければならないことを要請する．制約 (3.6) は各顧客の需要を過不足なく満たすことを要請する．

Irawan らは，ヒューリスティックアルゴリズムを提案し，ランダムなデータセットと英国の洋上/陸上風力発電所の運転・保守をサポートするために必要なスペアパーツを生産・保管する工場・倉庫の最適な数と配置を求める事例から得たデータセットで計算機実験を行い，提案手法がソルバーよりも現実的な時間で求解が可能であり，最適値と提案手法により得た目的関数値の差が 0.1% である結果を示した．

$TLFLP$

$$\text{minimize} \quad \sum_{j\in J} f_j Q_j + \sum_{j\in J}\sum_{p\in P}\sum_{d\in D_{jp}} \hat{f}_{jpd} Y_{jpd} + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{p\in P} c_{ijp} X_{ijp} + \sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\sum_{p\in P} \hat{c}_{jkp} \hat{X}_{jkp} \tag{3.1}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j\in J} X_{ijp} \leq s_{ip} \qquad \forall i \in I, p \in P \tag{3.2}$$

$$\sum_{i\in I} X_{ijp} \leq \sum_{d\in D_{jp}} b_{jpd} Y_{jpd} \qquad \forall j \in J, p \in P \tag{3.3}$$

$$\sum_{d\in D_{jp}} Y_{jpd} \leq Q_j \qquad \forall j \in J, p \in P \tag{3.4}$$

$$\sum_{i\in I} X_{ijp} = \sum_{k\in K} \hat{X}_{jkp} \qquad \forall j \in J, p \in P \tag{3.5}$$

$$\sum_{j\in J} \hat{X}_{jkp} = w_{kp} \qquad \forall k \in K, p \in P \tag{3.6}$$

$$X_{ijp} \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall i \in I, j \in J, p \in P \tag{3.7}$$

$$\hat{X}_{jkp} \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall j \in J, k \in K, p \in P \tag{3.8}$$

$$Y_{jpd} \in \{0, 1\} \qquad \forall j \in J, p \in P, d \in D_{jp} \tag{3.9}$$

$$Q_j \in \{0, 1\} \qquad \forall j \in J. \tag{3.10}$$

3.2 マルチレベル施設配置問題に対するアルゴリズム

マルチレベル施設配置問題の解法に関する研究も近似アルゴリズム，厳密アルゴリズム問わず数多く行われている．例えば，近似アルゴリズムに関する研究として，Shavaraniら [6] の遺伝的アルゴリズムと局所探索法を取り入れたハイブリッド遺伝的アルゴリズムが提案されており，無人機の発着施設と充電施設の配置を決定する問題に適用している．また，厳密アルゴリズムに関する研究として，Astorquiza ら [9] が容量制限のないマルチレベル施設配置問題に対して提案した Benders 分解法に基づく分枝限定法を用いた厳密

アルゴリズムがある．彼らは，マルチレベル施設配置問題を Benders 分解より得られた Benders 部分問題がネットワークフロー構造を持つことに着目し，Benders 部分問題を効率的に解くことで Benders 主問題に追加する最適性カット，実行可能性カットを求め，さらに妥当不等式を導入することにより追加するカットの数を減らす手法を提案している．

4　提案モデル

本章では，無人機輸送を考慮した多品種容量制限付きマルチレベル施設配置問題の定式化について述べる．まず，定式化に必要な前提条件，記号を定義し，無人機輸送のみを考慮した定式化と無人機輸送とトラック輸送を考慮した定式化について述べる．

4.1　前提条件，記号の定義

提案するモデルでは，輸送するアイテムは複数存在するものとし，アイテムを生産する工場 (レベル 3 施設)，アイテムを保管する倉庫 (レベル 2 施設)，無人機の燃料補給施設 (レベル 1 施設) の 3 つの施設の配置を考える．各レベルの施設にはそれぞれ，アイテムの生産量，受入可能な量が与えられているものとする．加えて，レベル 2 施設は，倉庫と無人機の発着場の役割を担い，レベル 2 施設とレベル 1 施設間，レベル 1 施設と顧客間の輸送には無人機を用い，それ以外の輸送にはトラックなどの既存の輸送手段を用いるとし，すべてのアイテムは無人機で輸送可能な箱に詰められて輸送されると仮定し，一度に無人機で輸送できるのは一つのアイテムのみとする．加えて，無人機は建物等の上空を飛行すると仮定するので，各施設間，施設と顧客間の距離はユークリッド距離として考える．また，無人機の補給が行えるのは，レベル 2 施設とレベル 1 施設のみとするので，無人機がアイテムをレベル 2 施設からレベル 1 施設へ，レベル 1 から顧客へ輸送するには，レベル 2 とレベル 1 施設の片道距離とレベル 1 施設と顧客の往復距離が，一度の補給で飛行可能な距離以下でなければならない．この距離を距離制限とする．一度の補給で飛行可能な距離とは別に，無人機の飛行可能な限界距離を定める．飛行可能な限界距離とは，提案モデルにおいて，輸送量は 1 日あたりの量を想定しているので，無人機の 1 日の稼働時間を定数として与えたとき，その時間と用いる無人機の速度から定まる距離である．

次に，定式化で用いる記号を定義する．

集合

- V_k: レベル k 施設の集合, $k = 1, 2, 3$
- R: 顧客の集合
- I: アイテムの集合

定数

- f_{j_k} : レベル k 施設 $j_k \in V_k$ の開設コスト

- q_{ij_k}：レベル k 施設 j_k のアイテム $i \in I$ の保管容量，または生産量
- $C_{ij_{k+1}j_k}$：アイテム i のレベル $k+1$ 施設 j_{k+1} からレベル k 施設 j_k までの単位輸送コスト
- C'_{ij_kr}：アイテム i のレベル k 施設 j_k から顧客 r までの単位輸送コスト
- w_{ir}：顧客 r が持つアイテム i に対する需要
- $E_{j_{k+1}j_k}$：レベル $k+1$ 施設 j_{k+1} からレベル k 施設 j_k までの距離制限
- E'_{j_kr}：レベル k 施設 j_k から顧客 r までの距離制限
- $d_{j_{k+1}j_k}$：レベル $k+1$ 施設 j_{k+1} からレベル k 施設 j_k までのユークリッド距離
- d'_{j_kr}：レベル k 施設 j_k から顧客 r までのユークリッド距離
- $\overline{d}$：$d_{j_{k+1}j_k}$ の最小値
- $\overline{d}'$：d'_{j_kr} の最小値
- ρ：1 日の飛行限界距離 (1 日 8 時間運用の場合を想定)
- $\rho_2 = \frac{\rho\overline{d}}{\overline{d}'+\overline{d}}$
- $\rho_1 = \frac{\rho\overline{d}'}{\overline{d}'+\overline{d}}$
- n_c：補給機を含む無人機 1 台のコスト

変数

- $Y_{j_k} = \begin{cases} 1 & \text{レベル } k \text{ 施設 } j_k \text{を配置する} \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases}$
- $X_{ij_{k+1}j_k}$ = アイテム i のレベル $k+1$ 施設 j_{k+1} からレベル k 施設 j_k までの輸送量
- X'_{ij_kr} = アイテム i のレベル k 施設 j_k から顧客 r までの輸送量
- n_{j_1} = レベル 1 施設 j_1 を経由する無人機の数

ここで，$\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n}$ をそれぞれの変数全体のベクトルとする．以降の節では，これらの記号を用いて，無人機輸送のみを考慮したモデルと無人機輸送とトラック輸送を考慮したモデルの定式化を行う．また，各施設間と施設と顧客間の距離制約は，

$$\sum_{i\in I} X_{ij_{k+1}j_k}(2d_{j_{k+1}j_k} - E_{j_{k+1}j_k}) \leq 0 \qquad \forall j_{k+1} \in V_{k+1}, j_k \in V_k, k = 1, 2,$$

$$\sum_{i\in I} X'_{ij_1r}(2d'_{j_1j_r} - E'_{j_1r}) \leq 0 \qquad \forall j_1 \in V_1, r \in R,$$

と表すことができるが，$2d_{j_{k+1}j_k} - E_{j_{k+1}j_k}$，および $2d'_{j_1j_r} - E'_{j_1r}$ は定数であり，入力が与えられた際に $2d_{j_{k+1}j_k} - E_{j_{k+1}j_k} < 0$，または $2d'_{j_1r} - E'_{j_1r} < 0$ であるかがわかる．そのた

め，前述の距離制約に違反する場合には，任意の $i \in I$ に対して $X_{ij_{k+1}j_k} = 0, X'_{ij_1r} = 0$ と固定すれば距離制約は予め考慮することができるので，施設間，施設と顧客間の距離に関する制約は省略して定式化を行う，

4.2 無人機輸送のみを考慮したモデル

この提案モデルでは，アイテムの輸送はレベル 3 施設からレベル 2 施設へ，レベル 2 施設からレベル 1 の施設へ，レベル 1 施設から顧客までの輸送のみを考える．上記の記号を用いて，レベル 3 施設，レベル 2 施設，レベル 1 施設の配置数と配置箇所，各施設間，施設と顧客間の輸送量を決定する問題を整数計画問題として定式化を行う．目的関数は，各施設の配置コストと各レベルの施設間，レベル 1 施設から顧客までの輸送コスト，必要な無人機の数の総和である．したがって，次のように目的関数 $z_1(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n})$ を定義する．

$$z_1(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n}) = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j_k \in V_k} f_{j_k} Y_{j_k} + \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{2} \sum_{j_{k+1} \in V_{k+1}} \sum_{j_k \in V_k} C_{ij_{k+1}j_k} X_{ij_{k+1}j_k} + \sum_{i \in I} \sum_{j_1 \in V_1} \sum_{r \in R} C'_{ij_1r} X'_{ij_1r} + \sum_{j_1 \in V_1} n_c n_{j_1}.$$

式 (4.1) から (4.12) に無人機輸送のみを考慮した多品種容量制限付きマルチレベル施設配置問題 $MLFLP1$ を示す．

$(MLFLP1)$

$$\text{minimize} \quad z_1(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n}) \tag{4.1}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j_3 \in V_3} X_{ij_3j_2} = \sum_{j_1 \in V_1} X_{ij_2j_1} \qquad \forall j_2 \in V_2, i \in I \tag{4.2}$$

$$\sum_{j_2 \in V_2} X_{ij_2j_1} = \sum_{r \in R} X'_{ij_1r} \qquad \forall j_1 \in V_1, i \in I \tag{4.3}$$

$$\sum_{j_1 \in V_1} X'_{ij_1r} = w_{ir} \qquad \forall r \in R, i \in I \tag{4.4}$$

$$\sum_{j_k \in V_k} X_{ij_{k+1}j_k} \leq q_{ij_{k+1}} Y_{j_{k+1}} \qquad \forall j_{k+1} \in V_{k+1}, i \in I, k = 1, 2 \tag{4.5}$$

$$\sum_{r \in R} X'_{ij_1r} \leq q_{ij_1} Y_{j_1} \qquad \forall j_1 \in V_1, i \in I \tag{4.6}$$

$$n_{j_1} \geq \frac{\sum_{i \in I} \sum_{j_2 \in V_2} 2d_{j_2j_1} X_{ij_2j_1}}{\rho_2} \qquad \forall j_1 \in V_1 \tag{4.7}$$

$$n_{j_1} \geq \frac{\sum_{i \in I} \sum_{r \in R} 2d'_{j_1r} X'_{ij_1r}}{\rho_1} \qquad \forall j_1 \in V_1 \tag{4.8}$$

$$X_{ij_{k+1}j_k} \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall i \in I, j_{k+1} \in V_{k+1}, j_k \in V_k, k = 1, 2 \tag{4.9}$$

$$X'_{ij_1r} \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall i \in I, j_1 \in V_1, r \in R \tag{4.10}$$

$$Y_{j_k} \in \{0, 1\} \qquad j_k \in V_k, k = 1, 2, 3 \tag{4.11}$$

$$n_{j_1} \in \mathbb{Z}_+ \qquad j_1 \in V_1. \tag{4.12}$$

目的関数 (4.1) は，施設配置コスト，総輸送コスト，需要を満たすために必要な無人機を確保するためのコストの総和である．制約 (4.2), (4.3) は，施設間の輸送量は一致していなければならないことを要請する．(4.4) は，各顧客の需要を過不足なく満たすことを要請する．制約 (4.5), (4.6) は，輸送量は各施設の供給量または，受入可能量以下でなければならないことを要請する．制約 (4.7), (4.8) は，需要を満たすために必要な無人機の数を表す．これは，無人機で一度に輸送できるアイテムは一つのみと仮定していることから成り立つ．

4.3 無人機輸送とトラック輸送を考慮したモデル

この提案モデルでは，アイテムの輸送はレベル 3 施設からレベル 2 施設へ，レベル 2 施設からレベル 1 の施設へ，レベル 2 施設または，レベル 1 施設から顧客までの輸送を考える．上記の記号を用いて，レベル 3 施設，レベル 2 施設，レベル 1 施設の配置数と配置箇

所を決定する問題を整数計画問題として定式化を行う．目的関数は，各施設の配置コストと各レベルの施設間，レベル 2 施設または，レベル 1 施設から顧客までの輸送コスト，必要な無人機の数の総和である．したがって，次のように目的関数 $z_2(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n})$ を定義する．

$$z_2(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n}) = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j_k \in V_k} f_{j_k} Y_{j_k} + \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{2} \sum_{j_{k+1} \in V_{k+1}} \sum_{j_k \in V_k} C_{ij_{k+1}j_k} X_{ij_{k+1}j_k} + \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{2} \sum_{j_k \in V_k} \sum_{r \in R} C'_{ij_k r} X'_{ij_k r} + \sum_{j_1 \in V_1} n_c n_{j_1}.$$

式 (4.13) から (4.17) に無人機輸送とトラック輸送を考慮した多品種容量制限付きマルチレベル施設配置問題 $MLFLP2$ を示す．

($MLFLP2$)

$$\text{minimize} \quad z_2(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n}) \tag{4.13}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j_3 \in V_3} X_{ij_3j_2} = \sum_{j_1 \in V_1} X_{ij_2j_1} + \sum_{r \in R} X'_{ij_2r} \quad \forall j_2 \in V_2, i \in I \tag{4.14}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{j_k \in V_k} X'_{ij_k r} = w_{ir} \quad \forall r \in R, i \in I \tag{4.15}$$

$$\sum_{r \in R} X'_{ij_k r} \leq q_{ij_k} Y_{j_k} \quad \forall j_k \in V_k, i \in I, k = 1, 2 \tag{4.16}$$

$$(4.3), (4.5), (4.7), (4.8)$$
$$(4.9), (4.10), (4.11), (4.12). \tag{4.17}$$

目的関数 (4.1) は，施設配置コスト，総輸送コスト，需要を満たすために必要な無人機を確保するためのコストの総和である．制約 (4.14) は，施設間の輸送量は一致していなければならないことを表す．制約 (4.15) は，各顧客の需要を過不足なく満たすことを要請する．制約 (4.16) は，輸送量は各施設の受入可能量以下でなければならないことを要請する．その他の制約は $MLFLP1$ の制約と同じである．

5　計算機実験

本章では，提案したモデルに対して行った計算機実験について，およびその実験結果について述べる．本実験は，提案したモデルが解くことのできる問題の規模，トラックのみの輸送のモデルと提案モデルの総輸送コストの面の差を実験的に評価することを目的とする．まず，提案したモデルに対して，アイテム数を固定して施設数を増やしたとき，施設数を固定し輸送するアイテム数を増やしたときの各モデルの計算時間を測定する．また，ヤマト運輸の 2020 年 1 月から 2021 年 1 月までの小口貨物取扱実績 [14] をもとに年間の輸送コスト比較を行う．以降では，計算時間の測定を行う実験を実験 1，コスト比較を行う実験を実験 2 とする．

5.1　インスタンスの生成

まず，施設配置候補点，顧客の配置点の生成方法について述べる．50 マス × 50 マス，1 マス 1km の 2 次元平面上にレベル 3 施設，レベル 2 施設，レベル 1 施設の配置候補点と顧客の配置点を配置する．各レベルの施設の配置候補点の重複はなし，顧客の配置点の重複はありと仮定して，次の 3 種類のインスタンスを生成する．

- インスタンス 1：各施設の配置候補点をランダムに生成する
- インスタンス 2：顧客の配置点が中心にあり，各レベル施設の配置候補点は下位レベル施設配置候補点の外側に配置されるように生成する
  - 顧客の配置点：右下の頂点を (12, 12) と左上の頂点を (37, 37) とする長方形の内側に生成する．
  - レベル 1 施設配置候補点：右下の頂点を (10, 10) と左上の頂点を (39, 39) とする長方形の内側に生成する．
  - レベル 2 施設配置候補点：レベル 1 施設配置候補点の生成範囲の外側かつ，右下の頂点を (7, 7) と左上の頂点を (43, 43) とする長方形の内側に生成する．
  - レベル 3 施設配置候補点：レベル 2 施設配置候補点の生成範囲の外側かつ，右下の頂点を (2, 2) と左上の頂点を (48, 48) とする長方形の内側に生成する．
- インスタンス 3：顧客の配置点，各レベル施設の配置候補点が固まって配置されるように生成する
  - 顧客の配置点：右下の頂点を (2, 23) と左上の頂点を (27, 48) とする長方形の内側に生成する．

– レベル 1 施設配置候補点：右下の頂点を (10, 15) と左上の頂点を (35, 40) とする長方形の内側に生成する．
– レベル 2 施設配置候補点：右下の頂点を (25, 11) と左上の頂点を (40, 21) とする長方形の内側に生成する．
– レベル 3 施設配置候補点：右下の頂点を (39, 1) と左上の頂点を (49, 7) とする長方形の内側に生成する．

ここで，インスタンス 2，3 は，それぞれ都市部での輸送を想定，地方での輸送を想定したインスタンスである．図 5.1，5.2，5.3 にインスタンスの例として，レベル 3 施設の配置候補点が 5 個，レベル 2 施設の配置候補点が 10 個，レベル 1 施設の配置候補点を 25 個，顧客の配置点を 15 個としたインスタンス 1，2，3 における各レベルの施設配置候補点と顧客をプロットしている．

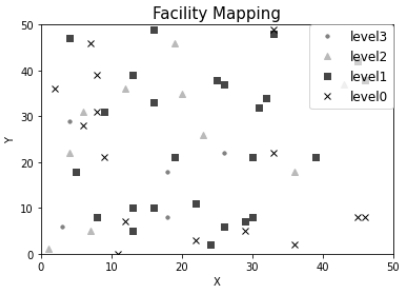

図 5.1　インスタンス 1

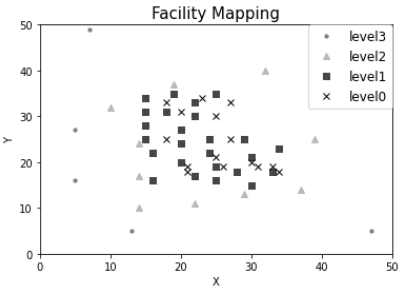

図 5.2　インスタンス 2

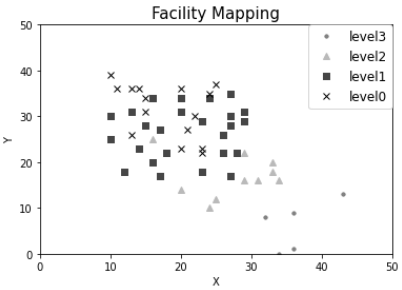

図 5.3　インスタンス 3

次に各レベル施設の容量と顧客の需要量について述べる．各レベル 3 施設の各アイテムに対する容量は，閉区間 $[30000, 50000]$ の中で一様乱数を用いて整数値を生成，各レベル 2 施設の各アイテムに対する容量は，閉区間 $[5000, 7000]$ の中で一様乱数を用いて整数値を生成，各レベル 1 施設の各アイテムに対する容量は，閉区間 $[100, 200]$ の中で一様乱数を用いて整数値を生成,，各インスタンス顧客の各アイテムに対する需要量は，実験 1 のみ閉区間 $[1, 50]$ の中で一様乱数を用いて整数値を生成する．実験 2 では，小口貨物取扱実績のデータをもとに各顧客の需要量を生成する．また，各レベル施設の配置コストは，各アイテムに対する容量の平均値を用い，単位は万円とする．

最後に無人機と入力に必要なパラメータに関して述べる．まず，本実験で想定する無人機は，一度の補給で 40km 飛行可能，平均時速は 40km/h，無人機 1 つあたりのコストは 40 万円と仮定する．また，無人機 1 台を連続で稼働させる時間は 8 時間とする．すなわち，提案モデルにおけるレベル 2 施設とレベル 1 施設間の距離制限は，任意の

$j_1 \in V_1, j_2 \in V_2$ に対して $E_{j_1 j_2} = 40\text{km}$ であり，レベル 1 施設と顧客の距離制限は，任意の $j_1 \in V_1, r \in R$ に対して $E_{j_1 r} = 20\text{km}$ である．加えて，飛行可能な限界距離 ρ は，荷物の積込み，積み下ろし，補給の時間を考慮して $\rho = 240\text{km}$ とする．また，レベル 3 施設とレベル 2 施設間，レベル 2 施設と顧客間はトラックの輸送を想定しており，一度の補給で十分な距離を移動できるため，レベル 3 施設とレベル 2 施設間の距離制限は任意の $j_2 \in V_2, j_3 \in V_3$ に対して $E_{j_3 j_2} = 500\text{km}$ とする．無人機の輸送コストは先行研究 [6] を参考に 1km ごとに 10 円，トラックの輸送コストは，ヤマト運輸の宅配運賃一覧表 [15] を参考に輸送するアイテム 1 つごとに 500 円の輸送コストがかかるものとする．

実験 1，2 の $MLFLP2$ に関する実験では，半分のアイテムが必ずレベル 2 施設からレベル 1 施設を経由して顧客に輸送，残りのアイテムが必ずレベル 2 施設から顧客へ輸送されるように実験を行う．すなわち，与えられるアイテムの集合 I の各要素に 1 から番号が付与されているとし，1 から $\frac{|I|}{2}$ までのアイテムの集合を A，残りのアイテムの集合を B としたとき，任意の $i \in A, j_2 \in V_2, j_1 \in V_1, r \in R$ に対して，$X'_{ij_1 r} = 0, X_{ij_2 j_1} = 0$，任意の $i \in B, j_2 \in V_2, j_1 \in V_1, r \in R$ に対して，$X'_{ij_2 r} = 0$ と固定し，実験を行う．

実験環境は表 5.1 のとおりである．

表 5.1　実験環境

プロセッサ	2.7 GHz Intel Xeon
メモリ	64 GB 1600MHz DDR3
OS	macOS 10.15.2
使用言語	Python 3.9
ソルバー	CPLEX 20.10

5.2 実験 1

5.2.1 アイテム数を固定し施設数を増やす実験結果

アイテム数を固定し施設数を増やす実験結果についてまとめる．インスタンス 1，2，3 それぞれに対してアイテム数を 50 に固定し，施設数を変化させてそれぞれ異なる 10 個のインスタンスを生成しソルバーで解いた際の計算時間の平均を取った．ここで，計算時間は 10000 秒で打ち切りとし，計算時間の平均は最適解が求まったインスタンスのみで平均を取った．ここで 10000 秒以内に最適解を求めることができることを現実的な時間で最適解が求めることができると定義する．表 5.2，5.3，5.4 に $MLFLP1$ を解いた結果を，表 5.5，5.6，5.7 に $MLFLP2$ を解いた結果を示す．また以降では，レベル 3 施設の数を $L3$，レベル 2 施設の数を $L2$，レベル 1 施設の数を $L1$，顧客の数を $L0$ と省略して表記する．

表 5.2　インスタンス 1 に対する $MLFLP1$ の計算時間

$(L3, L2, L1, L0)$	平均計算時間 [sec]	最小値 [sec]	最大値 [sec]	最適解が求まったインスタンスの数
(5, 5, 25, 30)	—	—	—	0
(5, 10, 40, 50)	3.49	2.84	4.42	3
(5, 15, 75, 100)	10.60	8.27	14.77	8
(5, 20, 125, 200)	52.74	29.34	138.62	10
(5, 25, 200, 300)	69.49	61.10	78.91	10
(5, 30, 300, 500)	172.11	148.54	196.81	10

表 5.3　インスタンス 2 に対する $MLFLP1$ の計算時間

$(L3, L2, L1, L0)$	平均計算時間 [sec]	最小値 [sec]	最大値 [sec]	最適解が求まった インスタンスの数
(5, 5, 25, 30)	10.57	4.23	16.24	10
(5, 10, 40, 50)	35.51	11.47	48.44	10
(5, 15, 75, 100)	89.53	47.78	248.82	10
(5, 20, 125, 200)	241.11	178.47	364.33	10
(5, 25, 200, 300)	741.97	521.88	1251.64	10
(5, 30, 300, 500)	6884.24	6884.24	6884.24	1

表 5.4　インスタンス 3 に対する $MLFLP1$ の計算時間

$(L3, L2, L1, L0)$	平均計算時間 [sec]	最小値 [sec]	最大値 [sec]	最適解が求まった インスタンスの数
(5, 5, 25, 30)	8.81	4.01	16.19	10
(5, 10, 40, 50)	32.72	11.27	57.04	10
(5, 15, 75, 100)	80.88	47.76	217.11	10
(5, 20, 125, 200)	368.58	175.15	907.03	10
(5, 25, 200, 300)	926.39	528.33	1233.69	10
(5, 30, 300, 500)	—	—	—	0

表 5.5　インスタンス 1 に対する $MLFLP2$ の計算時間

$(L3, L2, L1, L0)$	平均計算時間 [sec]	最小値 [sec]	最大値 [sec]	最適解が求まった インスタンスの数
(5, 5, 25, 30)	—	—	—	0
(5, 10, 40, 50)	2.81	2.66	3.01	3
(5, 15, 75, 100)	17.47	8.63	45.74	8
(5, 20, 125, 200)	86.07	31.53	171.47	10
(5, 25, 200, 300)	161.03	69.08	267.13	10
(5, 30, 300, 500)	2093.36	236.42	6076.35	10

表 5.6　インスタンス 2 に対する $MLFLP2$ の計算時間

$(L3, L2, L1, L0)$	平均計算時間 [sec]	最小値 [sec]	最大値 [sec]	最適解が求まったインスタンスの数
(5, 5, 25, 30)	3.15	2.50	5.67	10
(5, 10, 40, 50)	9.33	7.06	14.90	10
(5, 15, 75, 100)	159.03	33.40	288.14	10
(5, 20, 125, 200)	550.74	188.22	879.58	10
(5, 25, 200, 300)	2090.68	1267.62	3022.43	10
(5, 30, 300, 500)	5578.54	4451.31	7885.13	10

表 5.7　インスタンス 3 に対する $MLFLP2$ の計算時間

$(L3, L2, L1, L0)$	平均計算時間 [sec]	最小値 [sec]	最大値 [sec]	最適解が求まったインスタンスの数
(5, 5, 25, 30)	14.46	2.39	119.80	10
(5, 10, 40, 50)	7.91	7.03	11.02	10
(5, 15, 75, 100)	168.96	63.52	276.30	10
(5, 20, 125, 200)	603.74	123.38	1282.46	10
(5, 25, 200, 300)	2362.62	948.66	3478.72	10
(5, 30, 300, 500)	6496.19	3337.90	9534.13	10

得られた結果について考察する．$MLFLP1, MLFLP2$ ともに施設数，顧客の数が多くない場合には，現実的な時間で最適解を求めることができることがわかった．また，インスタンス 3 のような施設配置候補点の与え方は，過疎地域における無人機輸送のモデルや無人機輸送に関する実証実験で考えている無人機の発着施設と顧客の関係を想定しているため，そのような場合の最適な施設の配置を求めることを考えた場合，現実的な時間で最適解を求めることが可能であるとわかった．また，都市型を想定したインスタンスにおいても，顧客を小売店などのアイテムを販売する箇所に変更すれば，現実的な時間で最適解を求めることが可能であると考える．

5.2.2 施設数を固定しアイテム数を増やす実験結果

施設数を固定しアイテム数を増やす実験結果についてまとめる．施設数をそれぞれ $(L3, L2, L1, L0) = (5, 15, 75, 100)$ に固定し，アイテム数を変化させてそれぞれ異なる 10 個のインスタンスに対する計算時間の平均を取った．計算時間を 10000 秒で打ち切りとしている．表 5.8，5.9，5.10 に $MLFLP1$ を解いた結果を, 表 5.11，5.12，5.13 に $MLFLP2$ を解いた結果を示す.

表 5.8　インスタンス 1 に対する $MLFLP1$ の計算時間

アイテム数	平均計算時間 [sec]	最小値 [sec]	最大値 [sec]	最適解が求まったインスタンスの数
50	10.6	8.27	14.77	8
100	33.64	24.22	51.70	7
300	135.10	61.03	356.31	7
500	317.14	146.74	537.41	7
700	349.79	181.78	783.32	7
1000	1019.43	300.15	2620.20	7

表 5.9　インスタンス 2 に対する $MLFLP1$ の計算時間

アイテム数	平均計算時間 [sec]	最小値 [sec]	最大値 [sec]	最適解が求まったインスタンスの数
50	89.53	47.78	248.82	10
100	310.76	114.81	649.89	10
300	1240.67	457.46	1808.39	10
500	2347.20	730.55	3940.71	8
700	3557.35	1080.89	4943.30	6
1000	6541.27	4998.52	9627.26	4

表 5.10　インスタンス 3 に対する $MLFLP1$ の計算時間

アイテム数	平均計算時間 [sec]	最小値 [sec]	最大値 [sec]	最適解が求まったインスタンスの数
50	80.88	47.76	217.11	10
100	353.06	118.04	524.06	10
300	961.17	428.65	1609.56	10
500	2266.19	772.63	6627.89	9
700	3734.14	1281.65	6282.44	7
1000	—	—	—	0

表 5.11　インスタンス 1 に対する $MLFLP2$ の計算時間

アイテム数	平均計算時間 [sec]	最小値 [sec]	最大値 [sec]	最適解が求まったインスタンスの数
50	17.47	8.63	45.74	8
100	59.93	38.2	97.38	7
300	275.59	124.47	355.90	7
500	589.08	336.07	789.14	7
700	1576.71	349.63	4454.96	6
1000	319.42	254.73	443.93	7

表 5.12　インスタンス 2 に対する $MLFLP2$ の計算時間

アイテム数	平均計算時間 [sec]	最小値 [sec]	最大値 [sec]	最適解が求まったインスタンスの数
50	159.03	33.4	288.14	10
100	285.91	87.58	473.11	10
300	1842.41	611.97	5266.20	10
500	2728.33	1296.07	3923.82	6
700	3182.41	1980.34	6009.83	10
1000	2206.05	972.85	5932.02	10

表 5.13　インスタンス 3 に対する $MLFLP2$ の計算時間

アイテム数	平均計算時間 [sec]	最小値 [sec]	最大値 [sec]	最適解が求まった インスタンスの数
50	168.96	63.52	276.30	10
100	511.08	100.73	2628.43	10
300	2719.43	950.96	4671.91	10
500	3475.27	1237.99	9830.17	9
700	3940.16	1944.44	7854.91	6
1000	1992.45	1050.38	3362.63	9

得られた結果について考察する．$MLFLP1, MLFLP2$ ともにアイテム数が多くない場合には，現実的な時間で最適解を求めることができることがわかった．また，施設数を増やす実験結果と同様に過疎地域における無人機輸送のモデルや無人機輸送に関する実証実験における最適な施設の配置を現実的な時間で求めることが可能であるとわかった．$MLFLP2$ の実験において，どのインスタンスにおいてもアイテム数と計算時間には比例関係はないことがわかった．これは，無人機で輸送する量を決定する箇所が，$MLFLP1$ と同等の難しさの問題になっているからだと考えられる．

5.3 実験 2

本実験では，ヤマト運輸の 2020 年 1 月から 2021 年 1 月までの小口貨物取扱実績 [14] のデータを用いて実験を行う．まず，以下に示す High，Avg，Low の 3 つの場合のデータでそれぞれマルチレベル施設配置問題を解く．そして，得られた施設配置箇所，必要な無人機と日ごとの各アイテムに対する需要量を入力とし，ペナルティ付きのマルチレベル施設配置問題を 1 年分解く．1 年分解いた結果を各月ごとにまとめ，各月ごとの提案モデルとトラックの輸送のみを考慮したモデルの総輸送コストの差分，与えられた配置で満たされない需要量，与えられた無人機ですべての需要を満たすことの可否を確認する．

- High: 配達数が最も多い日
- Avg: 配達数が年間の平均値付近の日
- Low: 配達数が最も低い日

次に，施設配置候補点とアイテム数について述べる．施設数は $(L3, L2, L1, L0) = (5, 10, 40, 50)$ とし，アイテム数は $|I| = 50$ として，インスタンス 1，2，3 を生成する．ここで，各顧客の需要量は実験 1 より大きな値を取ることが予想されるので，各レベル 1 施設の各アイテムに対する容量は，閉区間 $[500, 1000]$ の中で一様乱数を用いて整数値を生成した．次に各顧客が持つ各アイテムに対する需要量の生成方法について述べる．各モデルの需要量は，整数変数として扱っているため，各月の総配達数はすべてのアイテムに対する各顧客の需要量の総和として扱う．また，各月の総需要量を 47 で割った値を各月のすべてのアイテムに対する各顧客の需要量の総和として用いる．加えて，日毎の各アイテムに対する各顧客の需要量は，平均がその月の総需要量の平均，分散が 100 の正規分布に従うように生成した．

5.3.1 実験に用いるモデルについて

本節では，実験を行う際の比較用モデルと各モデルに対して満たされない需要に対するペナルティ，必要な無人機数に対するペナルティを考慮したモデルについて述べる．まず，比較用のモデルとして，トラック輸送のみを考慮したモデルを考える．すなわち，アイテムの輸送はレベル 3 からレベル 2，レベル 2 から顧客のみで行われるモデルである．4.1 節で定義した記号を用いて，$MLFLP3$ を次のように定義する．

$(MLFLP3)$

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=2}^{3} \sum_{j_k \in V_k} F_{j_k} Y_{j_k} + \sum_{i \in I} \sum_{j_3 \in V_3} \sum_{j_2 \in V_2} C_{ij_3j_2} X_{ij_3j_2}$$
$$+ \sum_{i \in I} \sum_{j_2 \in V_2} \sum_{r \in R} C'_{ij_2r} X'_{ij_2r} \tag{5.1}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j_3 \in V_3} X_{ij_3j_2} = \sum_{r \in R} X'_{ij_2r} \qquad \forall j_2 \in V_2, i \in I \tag{5.2}$$

$$\sum_{j_2 \in V_2} X'_{ij_2r} = w_{ir} \qquad \forall r \in R, i \in I \tag{5.3}$$

$$\sum_{j_2 \in V_2} X_{ij_3j_2} \leq q_{ij_3} Y_{j_3} \qquad \forall j_3 \in V_3, i \in I \tag{5.4}$$

$$\sum_{r \in R} X'_{ij_2r} \leq q_{ij_2} Y_{j_2} \qquad \forall j_2 \in V_2, i \in I \tag{5.5}$$

$$X_{ij_3j_2} \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall i \in I, j_3 \in V_3, j_2 \in V_2 \tag{5.6}$$

$$X'_{ij_2r} \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall i \in I, j_2 \in V_2, r \in R \tag{5.7}$$

$$Y_{j_k} \in \{0, 1\} \qquad j_k \in V_k, k = 2, 3. \tag{5.8}$$

目的関数 (5.1) は，施設配置コスト，総輸送コストの総和である．制約 (5.2) は，施設間の輸送量は一致していなければならないことを要請する．制約 (5.3) は，各顧客の需要を過不足なく満たすことを要請する．制約 (5.4), (5.5) は，輸送量は各施設の供給量または，受入可能量以下でなければならないことを要請する．

次に，各ペナルティを考慮したモデルについて述べる．満たされない需要量を表す変数 $\boldsymbol{\alpha}$ と需要を満たすために追加で必要な無人機の数を表す変数 β を導入する．これらの変数と非常に大きな定数 M を用いて，日毎に解くモデル $MLFLP1$-P，$MLFLP2$-P，$MLFLP3$-P を以下に示す．ここで，High, Avg, Low のインスタンスで各モデルを解いた際の施設配置箇所の集合を $\bar{\boldsymbol{Y}}$，無人機の総数を $\bar{D}$ で表す．

$(MLFLP1\text{-}P)$

$$\text{minimize} \quad z_1(\bar{\boldsymbol{Y}}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n}) + \sum_{i\in I}\sum_{r\in R} M\alpha_{ir} + n_c\beta \tag{5.9}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j_1\in V_1} X'_{ij_1r} + \alpha_{ir} = w_{ir} \qquad \forall r \in R, i \in I \tag{5.10}$$

$$\sum_{j_k\in V_k} X_{ij_{k+1}j_k} \le q_{ij_{k+1}}\bar{Y}_{j_{k+1}} \qquad \forall j_{k+1} \in V_{k+1}, i \in I, k = 1, 2 \tag{5.11}$$

$$\sum_{r\in R} X'_{ij_1r} \le q_{ij_1}\bar{Y}_{j_1} \qquad \forall j_1 \in V_1, i \in I \tag{5.12}$$

$$\beta \ge \sum_{j_1\in V_1} n_j - \bar{D} \tag{5.13}$$

$$\alpha_{ir} \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall r \in R, i \in I \tag{5.14}$$

$$\beta \in \mathbb{Z}_+ \tag{5.15}$$

$$(4.2), (4.3), (4.7), (4.8)$$
$$(4.9), (4.10), (4.12). \tag{5.16}$$

目的関数 (5.9) は，施設配置コスト，総輸送コスト，需要を満たすために必要な無人機を確保するためのコスト，与えられた施設では満たすことのできないの需要量，追加で必要な無人機のコストの総和である．制約 (5.10) は，ペナルティを加えたとしても各顧客の需要を過不足なく満たすことを要請する．制約 (5.13) は，需要を満たすために追加で必要な無人機の数を表す．

$(MLFLP2\text{-}P)$

$$\text{minimize} \quad z_2(\bar{\boldsymbol{Y}}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n}) + \sum_{i\in I}\sum_{r\in R} M\alpha_{ir} + n_c\beta \tag{5.17}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{k=1}^{2}\sum_{j_k\in V_k} X'_{ij_kr} + \alpha_{ir} = w_{ir} \qquad \forall r \in R, i \in I \tag{5.18}$$

$$\sum_{r\in R} X'_{ij_kr} \le q_{ij_k}\bar{Y}_{j_k} \qquad \forall j_k \in V_k, i \in I, k = 1, 2 \tag{5.19}$$

$$(4.3), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10)$$
$$(4.12), (4.14), (5.11), (5.13), (5.14), (5.15). \tag{5.20}$$

目的関数，各制約は $(MLFLP1\text{-}P)$ と同じである．

($MLFLP3$-P)

$$\text{minimize} \quad z_3(\bar{\boldsymbol{Y}}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n}) + \sum_{i \in I} \sum_{r \in R} M\alpha_{ir} \tag{5.21}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j_2 \in V_2} X'_{ij_2r} + \alpha_{ir} = w_{ir} \qquad \forall r \in R, i \in I \tag{5.22}$$

$$\sum_{j_2 \in V_2} X_{ij_3j_2} \leq q_{ij_3} \bar{Y}_{j_3} \qquad \forall j_{k+1} \in V_{k+1}, i \in I, k = 2 \tag{5.23}$$

$$\sum_{r \in R} X'_{ij_2r} \leq q_{ij_2} \bar{Y}_{j_2} \qquad \forall j_2 \in V_2, i \in I \tag{5.24}$$

$$(5.2), (5.6), (5.7), (5.14). \tag{5.25}$$

目的関数 (5.21) は，施設配置コスト，総輸送コスト，与えられた施設では満たすことのできないの需要量の総和である．他の制約は，$MLFLP3$ と同じである．

5.3.2 実験結果

まず，各インスタンスと各タイプ (High, Avg, Low) の各アイテムに対する各顧客の需要量を入力として，$MLFLP1$，$MLFLP2$，$MLFLP3$ を解いた結果を以下の表 5.14, 5.15，5.16 に示す．

表 5.14　$MLFLP1$ を解いた際の各レベルの施設数と無人機の数

インスタンス	タイプ	$L3$	$L2$	$L1$	無人機の数
1	High	1	9	21	65508
	Avg	1	9	21	31898
	Low	1	9	21	12077
2	High	1	6	16	21794
	Avg	1	5	12	10757
	Low	1	5	12	4073
3	High	1	6	19	26055
	Avg	1	6	17	12709
	Low	1	6	16	4822

表 5.15　$MLFLP2$ を解いた際の各レベルの施設数と無人機の数

インスタンス	タイプ	$L3$	$L2$	$L1$	無人機の数
	High	1	9	21	32760
	Avg	1	9	21	15954
	Low	1	9	21	6042
	High	1	5	14	10949
	Avg	1	6	14	5370
	Low	1	5	12	2041
	High	1	6	18	13000
	Avg	1	6	17	6360
	Low	1	6	16	2422

表 5.16　$MLFLP3$ を解いた際の各レベルの施設数

インスタンス	タイプ	$L3$	$L2$
	High	1	1
1	Avg	1	1
	Low	1	1
	High	1	1
2	Avg	1	1
	Low	1	1
	High	1	1
3	Avg	1	1
	Low	1	1

得られた施設配置点と無人機の総数と日毎の各アイテムに対する各顧客の需要量を入力として，$MLFLP1$-P，$MLFLP2$-P，$MLFLP3$-P を 1 年間分解き，各インスタンスごとに総輸送コストのみをまとめた結果を図 5.4 から図 5.12 に示す.

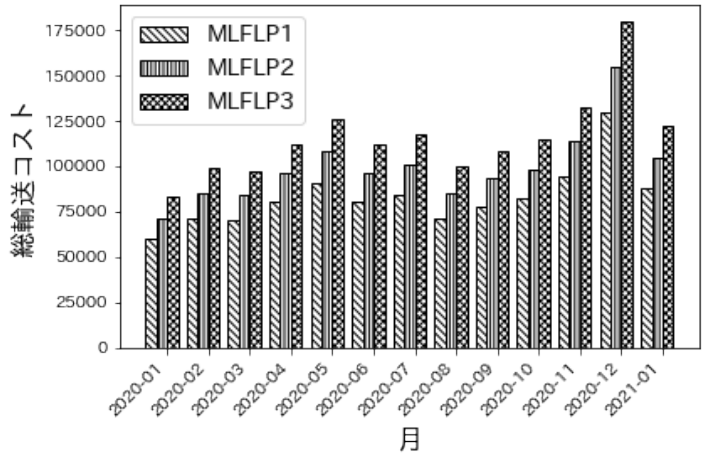

図 5.4　インスタンス 1 と High の結果を用いて解いた結果

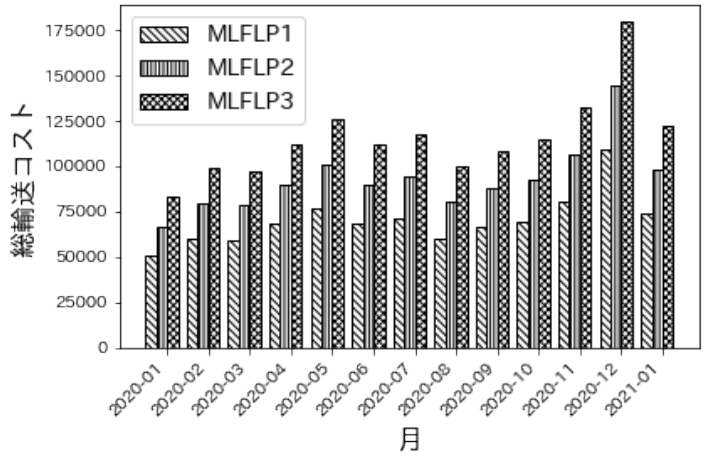

図 5.5　インスタンス 2 と High の結果を用いて解いた結果

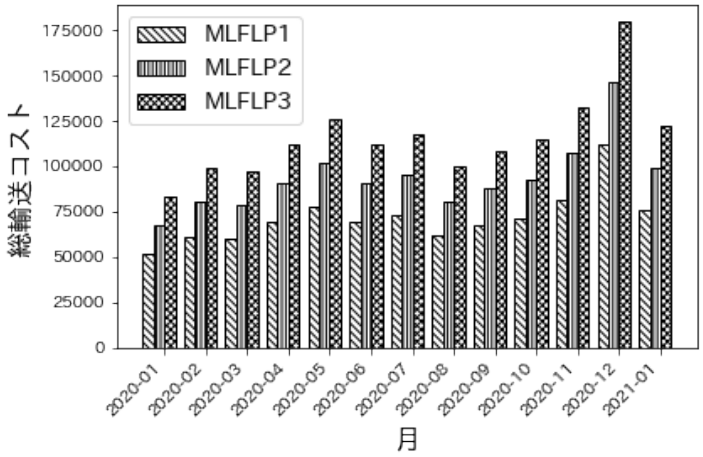

図 5.6　インスタンス 3 と High の結果を用いて解いた結果

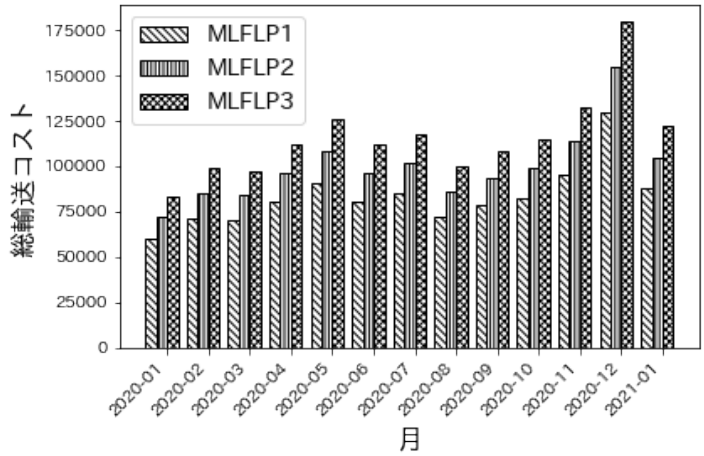

図 5.7　インスタンス 1 と Avg の結果を用いて解いた結果

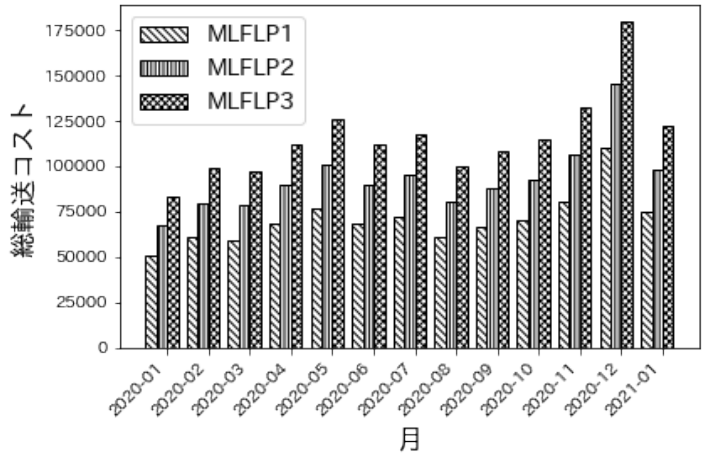

図 5.8　インスタンス 2 と Avg の結果を用いて解いた結果

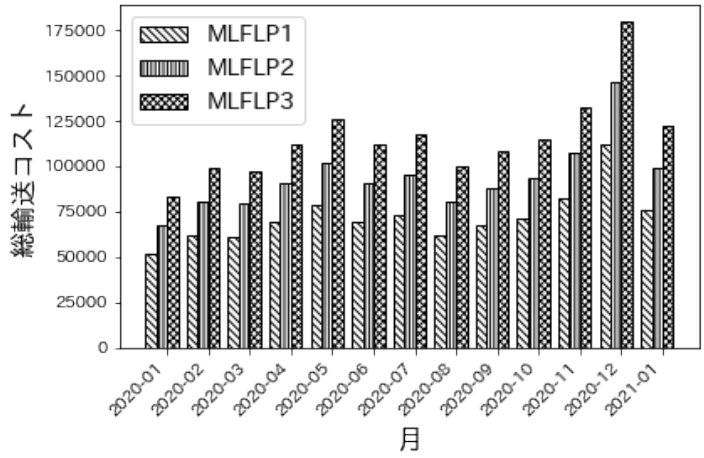

図 5.9　インスタンス 3 と Avg の結果を用いて解いた結果

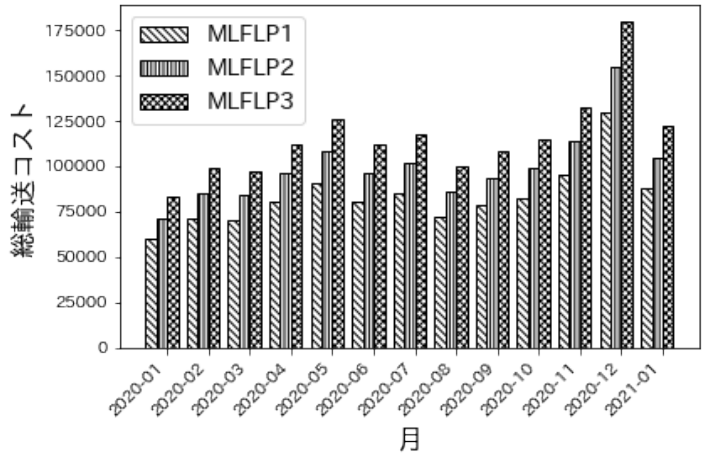

図 5.10　インスタンス 1 と Low の結果を用いて解いた結果

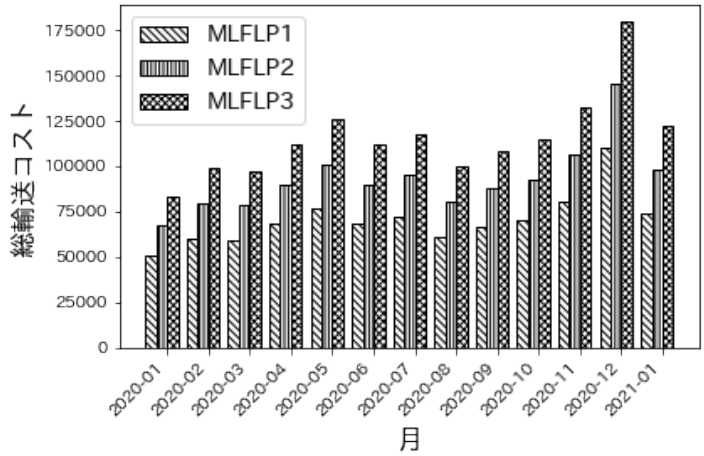

図 5.11　インスタンス 2 と Low の結果を用いて解いた結果

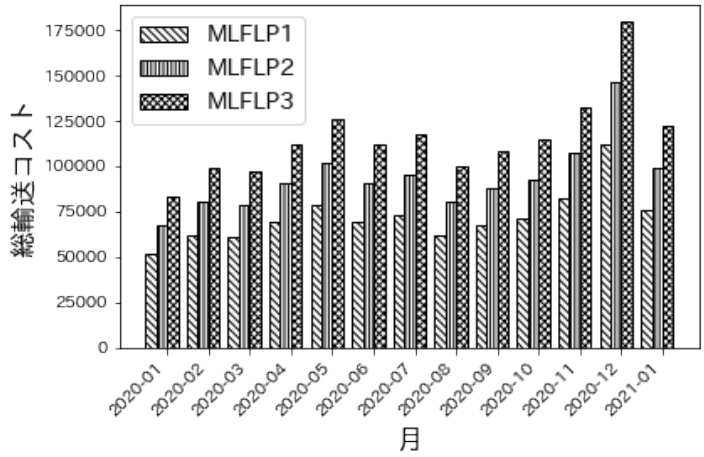

図 5.12　インスタンス 3 と Low の結果を用いて解いた結果

図 5.4 から図 5.12 より分かる通り，すべてのインスタンスとタイプのパターンに対して，無人機で全て輸送する $MLFLP1$ のモデルが最も輸送コストが低く，すべてトラックで輸送する $MLFLP3$ のモデルが最も輸送コストが高くなる結果となった．各月のモデルごとの総輸送コスト比の平均をとったものを表 5.17 に示す．

表 5.17　各モデルごとの総輸送コストの比較結果

インスタンス	タイプ	$MLFLP1$-P と $MLFLP2$-P のコスト比	$MLFLP1$-P と $MLFLP3$-P のコスト比	$MLFLP2$-P と $MLFLP3$-P のコスト比
1	High	16.4%	28.2%	14.1%
	Avg	16.3%	28.0%	14.0%
	Low	16.2%	28.0%	14.0%
2	High	24.4%	39.2%	19.6%
	Avg	24.2%	39.0%	19.5%
	Low	24.2%	39.0%	19.5%
3	High	24.0%	38.1%	19.0%
	Avg	23.3%	38.0%	19.0%
	Low	23.2%	37.7%	19.0%

表 5.17 より，提案モデルは，$MLFLP3$ よりも最大で 39% の総輸送コストを削減できることがわかった．次に，各インスタンス，各モデルごとに High, Avg, Low における輸送コストをまとめたものを表 5.13 から表 5.21 にまとめる．

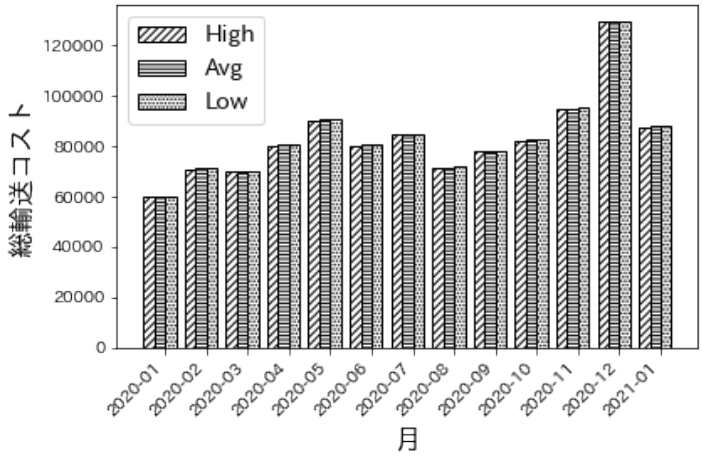

図 5.13　インスタンス 1 で $MLFLP1\text{-}P$ を解いた結果

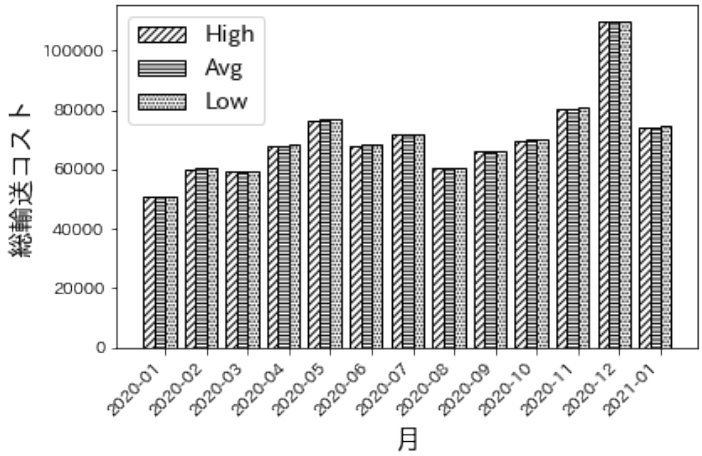

図 5.14　インスタンス 2 で $MLFLP1\text{-}P$ を解いた結果

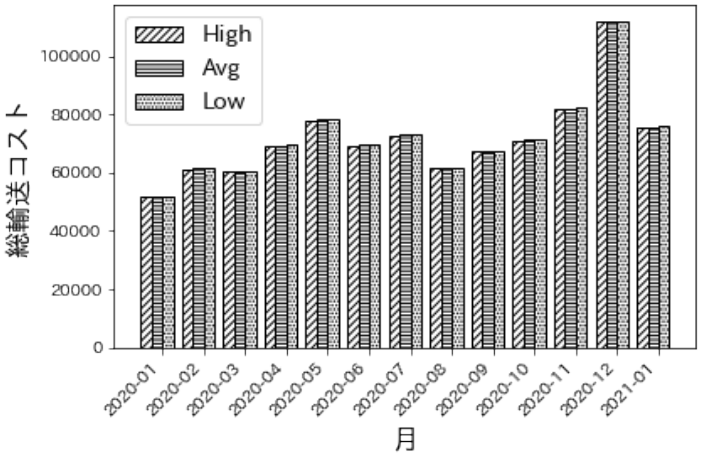

図 5.15　インスタンス 3 で $MLFLP1\text{-}P$ を解いた結果

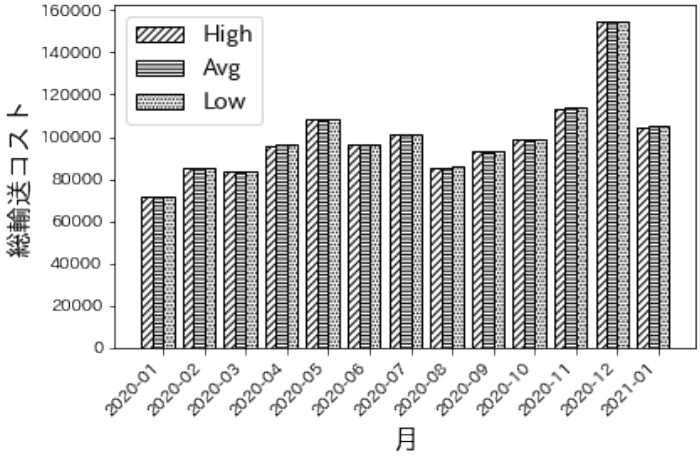

図 5.16　インスタンス 1 で $MLFLP2\text{-}P$ を解いた結果

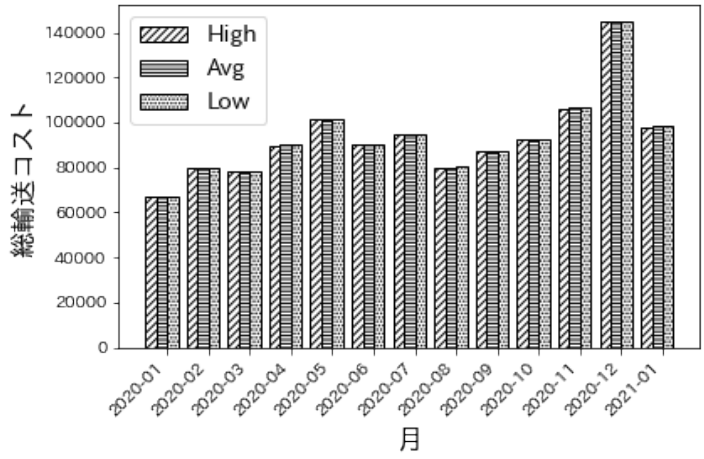

図 5.17　インスタンス 2 で $MLFLP2\text{-}P$ を解いた結果

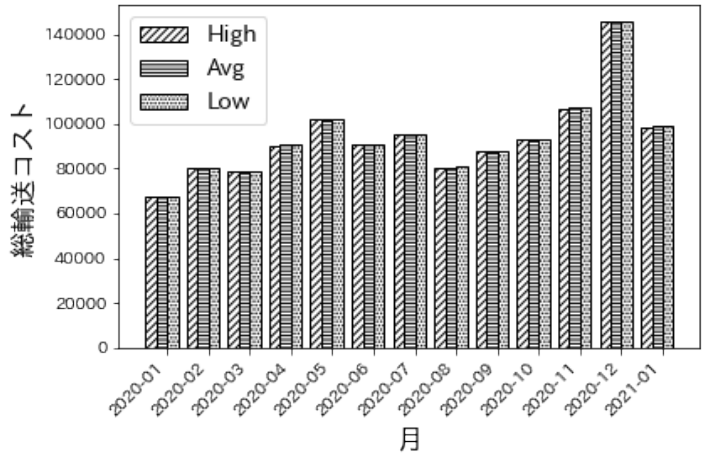

図 5.18　インスタンス 3 で $MLFLP2\text{-}P$ を解いた結果

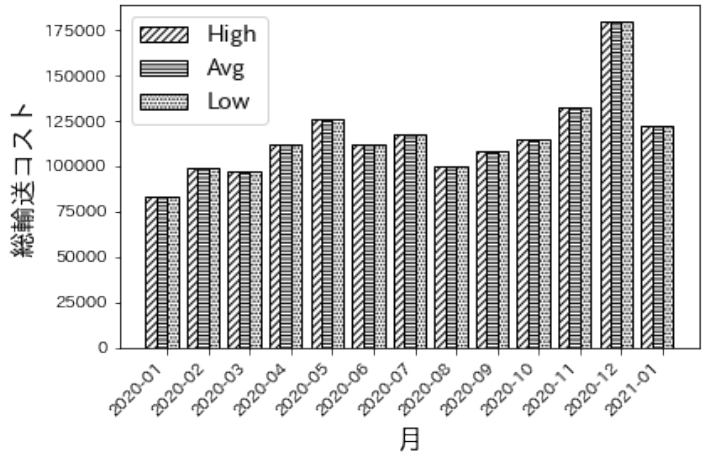

図 5.19　インスタンス 1 で $MLFLP3\text{-}P$ を解いた結果

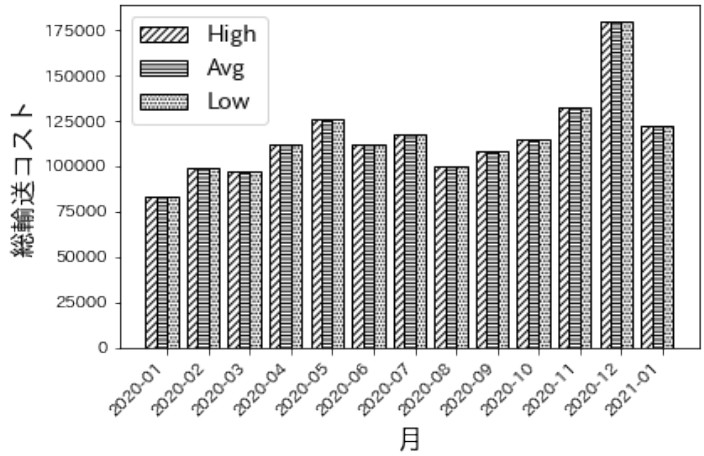

図 5.20　インスタンス 2 で $MLFLP3\text{-}P$ を解いた結果

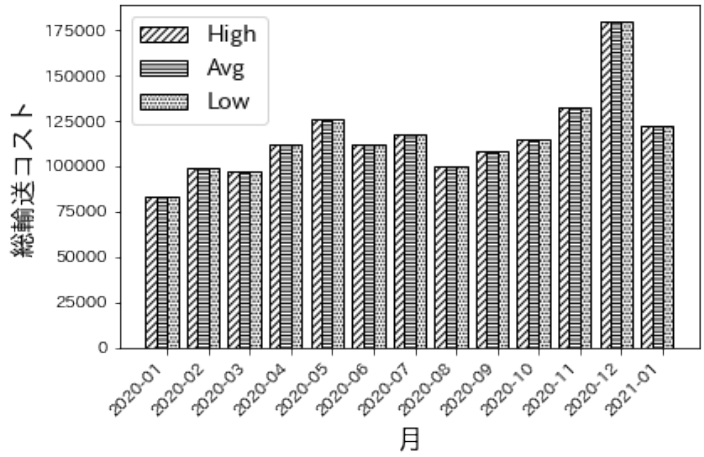

図 5.21　インスタンス 3 で $MLFLP3\text{-}P$ を解いた結果

表 5.13 から表 5.21 より，各タイプごとに総輸送コストに明確な差はないことがわかった．次に各ペナルティの結果について示す．今回の実験では，各モデルと High, Avg, Low からなるすべてのパターンにおいて任意の $i \in I, r \in R$ に対して $\alpha_{ir} = 0$ であった．すなわち，施設が不足していることによって満たされない需要は存在しないことがわかった．次に $MLFLP1\text{-}P, MLFLP2\text{-}P$ の β の結果を図 5.22 から図 5.30 に示す．以下の図において追加で必要な無人機数は各月ごとの平均を表している．

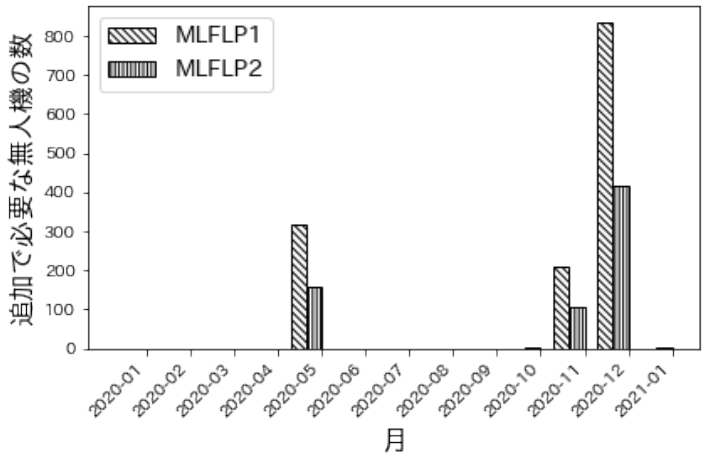

図 5.22　インスタンス 1 と High の結果を用いて解いた際のペナルティ β の月平均値

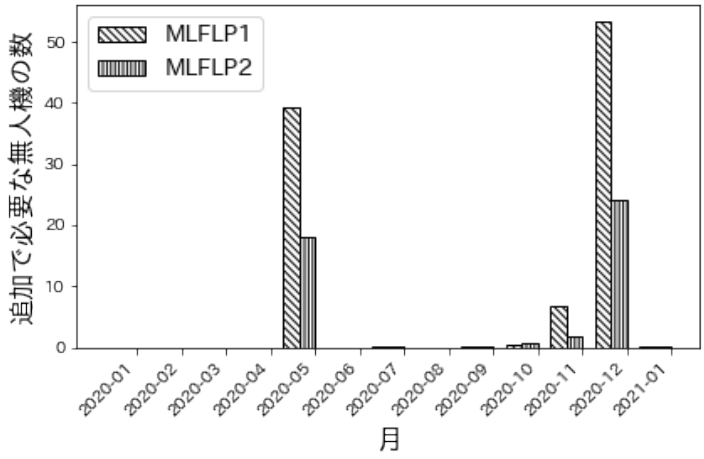

図 5.23　インスタンス 2 と High の結果を用いて解いた際のペナルティ β の月平均値

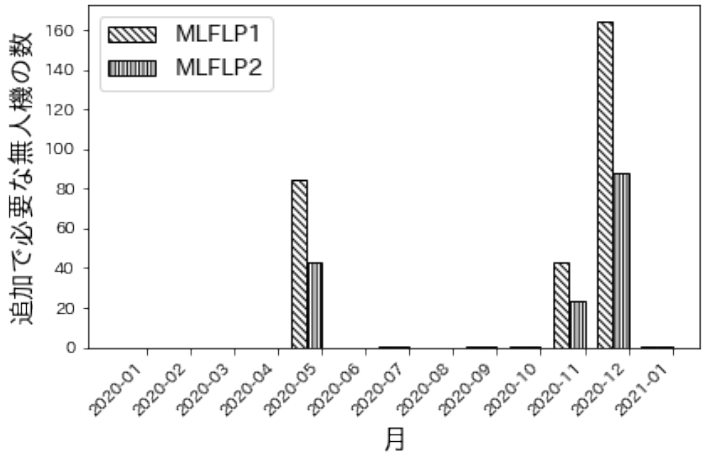

図 5.24　インスタンス 3 と High の結果を用いて解いた際のペナルティ β の月平均値

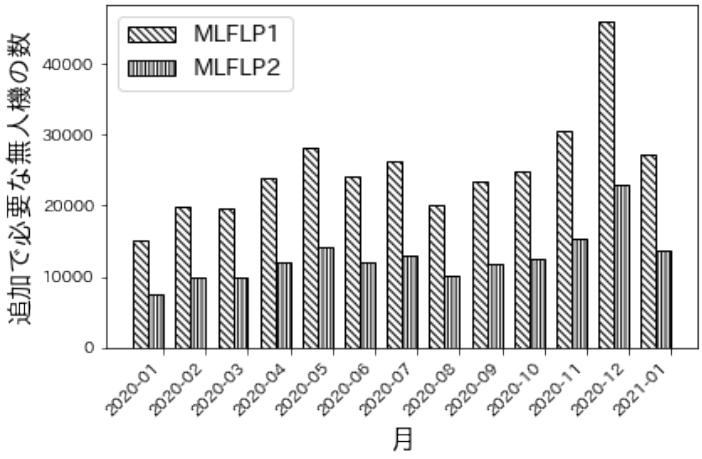

図 5.25　インスタンス 1 と Avg の結果を用いて解いた際のペナルティ β の月平均値

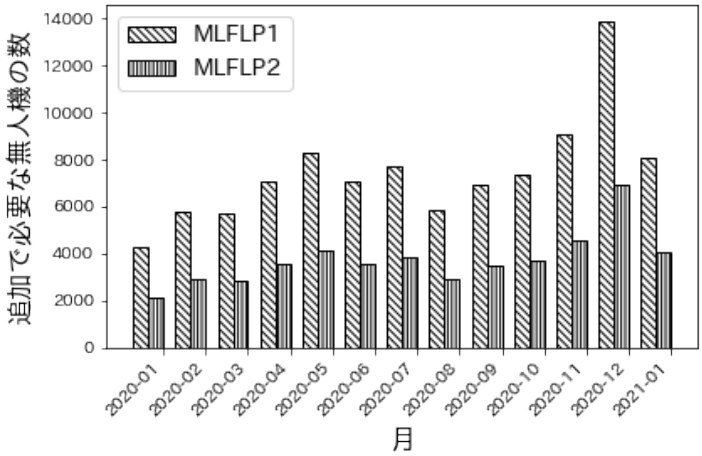

図 5.26　インスタンス 2 と Avg の結果を用いて解いた際のペナルティ β の月平均値

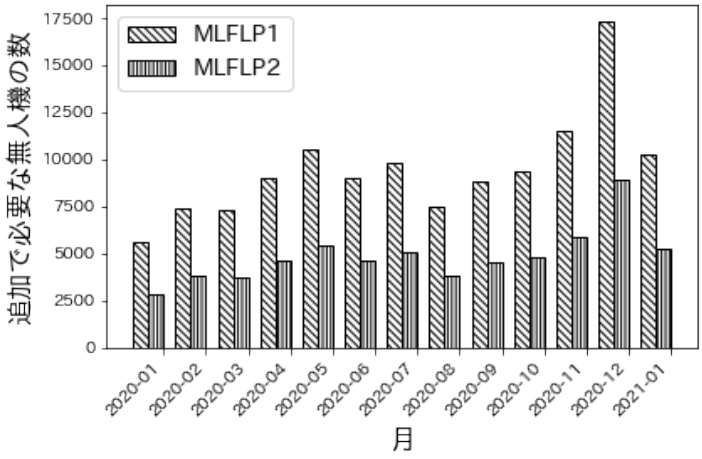

図 5.27　インスタンス 3 と Avg の結果を用いて解いた際のペナルティ β の月平均値

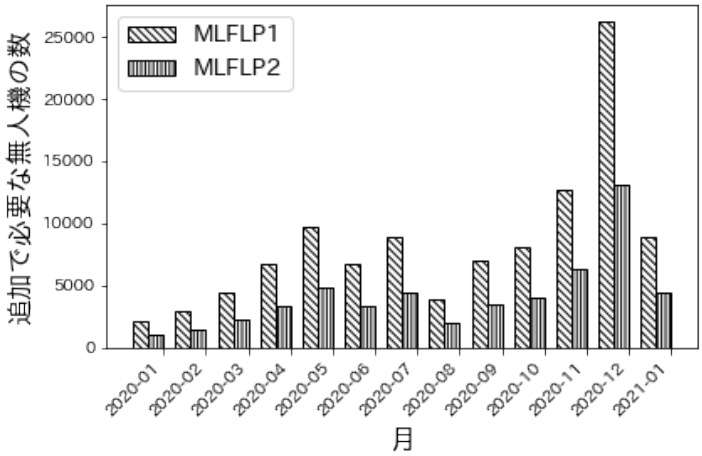

図 5.28　インスタンス 1 と Low の結果を用いて解いた際のペナルティ β の月平均値

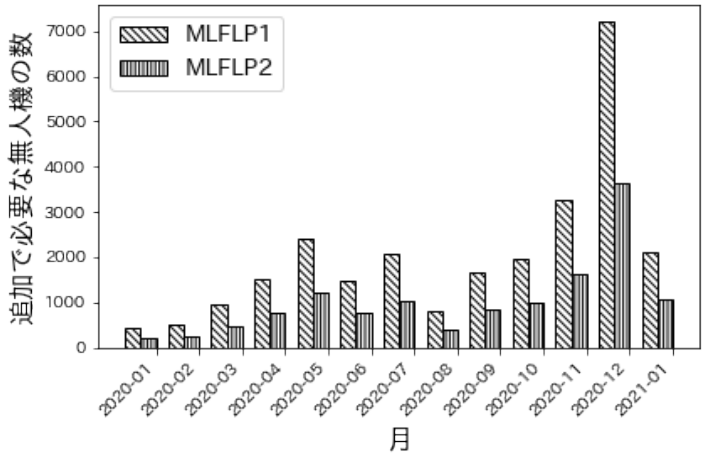

図 5.29　インスタンス 2 と Low の結果を用いて解いた際のペナルティ β の月平均値

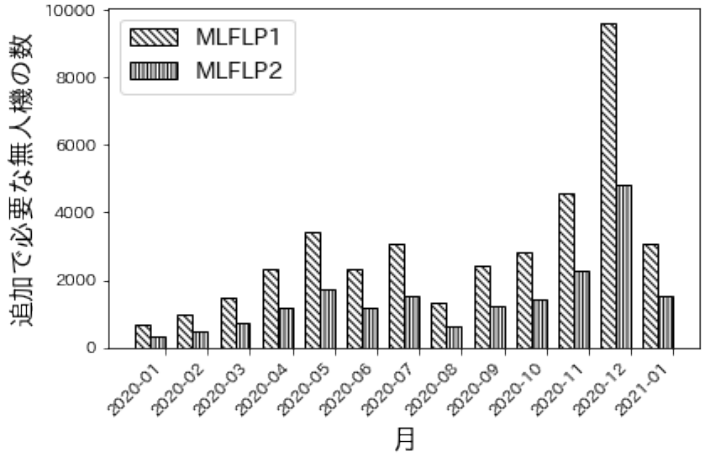

図 5.30　インスタンス 3 と Low の結果を用いて解いた際のペナルティ β の月平均値

追加で必要な無人機は High のときが最も少なく，Low のときが最も多くなることがわかった．次に，$MLFLP1\text{-}P, MLFLP2\text{-}P$ において需要を満たすために追加で必要となる無人機がどの程度の量を輸送しているかについて考える．まず，追加で必要となる無人機が輸送する量の求め方について述べる．まず, 追加の無人機がレベル 2 施設からレベル 1 施設へ輸送する量を w_{21}，レベル 1 施設から顧客へ輸送する量を w_{10} とする．日毎の問題を解いて得られた解を $(\bar{\boldsymbol{Y}}, \hat{\boldsymbol{X}}, \hat{\boldsymbol{X}}', \hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\beta})$ とする．任意の $j_2 \in V_2, j_1 \in V_1, r \in R, i \in I$ に対して，$\hat{d}_{j_2 j_1}$ を $\hat{X}_{i j_2 j_1} > 0$ を満たす j_2, j_1 間の距離 $d_{j_2 j_1}$ の平均とし，同様に $\hat{d}_{j_1 r}$ を $\hat{X}'_{i j_1 r} > 0$ を満たす j_1, r 間の距離 $d'_{j_1 r}$ の平均とし，各施設間の飛行限界距離を $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2$

とする．ここで，各施設間，施設と顧客間の追加の無人機で輸送する量を次の式 (5.26), (5.27) で求め，そのうちの最大値を，追加の無人機で輸送する総量とする．

$$w_{21} = \frac{\hat{\beta}\hat{\rho}_2}{2\hat{d}_{j_2 j_1}|I||V_1|} \tag{5.26}$$

$$w_{10} = \frac{\hat{\beta}\hat{\rho}_1}{2\hat{d}_{j_1 r}|I||V_1|} \tag{5.27}$$

追加で必要となる無人機が輸送する量を計算した結果を以下の図 5.31 から 5.36 に示す．ここで，各月のグラフは追加で必要となる無人機が輸送する量の日毎の平均をとったものを表す．

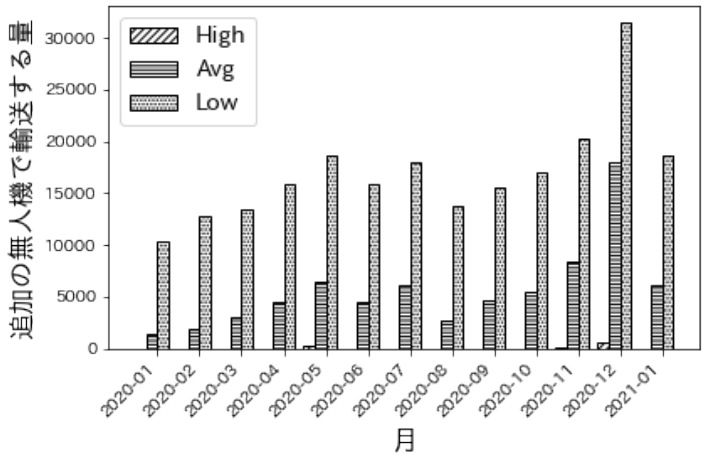

図 5.31　インスタンス 1 で $MLFLP1\text{-}P$ を解いた際の追加の無人機が輸送する量

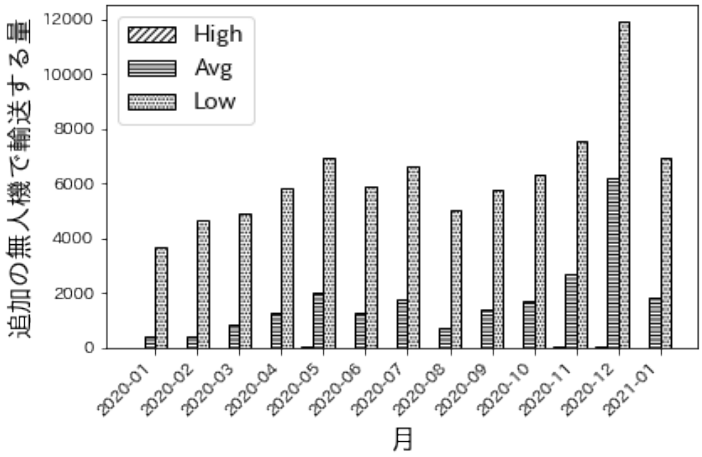

図 5.32　インスタンス 2 で $MLFLP1\text{-}P$ を解いた際の追加の無人機が輸送する量

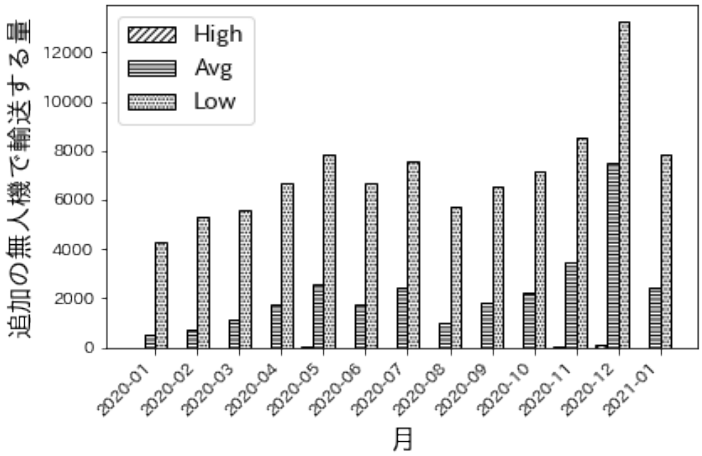

図 5.33　インスタンス 3 で $MLFLP1\text{-}P$ を解いた際の追加の無人機が輸送する量

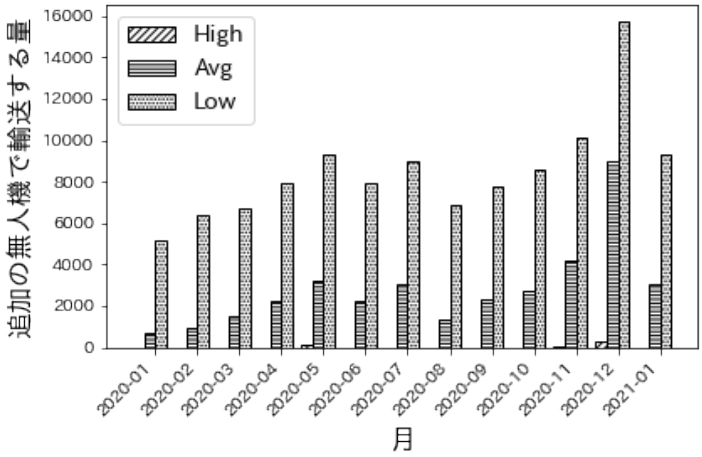

図 5.34　インスタンス 1 で $MLFLP2\text{-}P$ を解いた際の追加の無人機が輸送する量

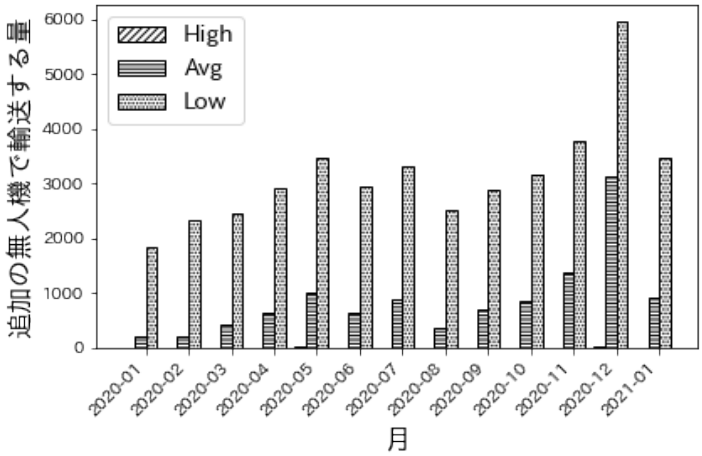

図 5.35　インスタンス 2 で $MLFLP2\text{-}P$ を解いた際の追加の無人機が輸送する量

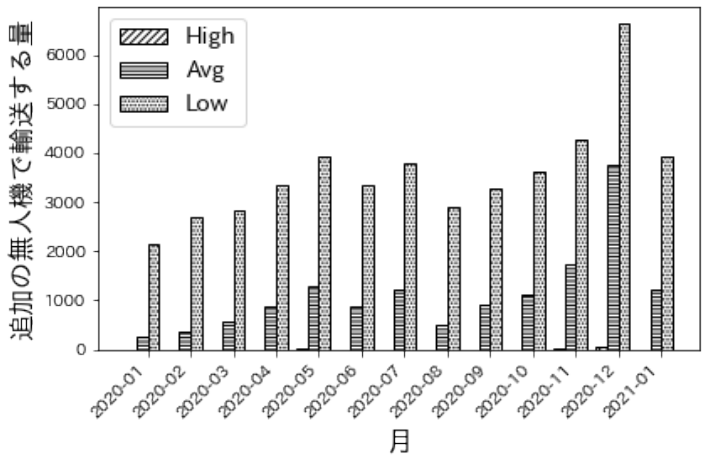

図 5.36　インスタンス 3 で $MLFLP2$-P を解いた際の追加の無人機が輸送する量

すべてのインスタンスにおいて High では，追加の無人機が輸送する量はほとんどないことがわかった．12 月に追加の無人機で輸送する量が発生しているが，これは High の場合における最適な施設の配置は，他の日のデータにおける最適な施設配置とは限らないため，与えられた施設配置では，各施設間の往復距離とレベル 1 施設と顧客の往復距離が，他の日の最適な施設配置の場合よりも長くなってしまい，必要な無人機が増えてしまうからだと考えれる，また，追加の無人機がどのタイプにおいても必要になるため，与えられた無人機で 1 年間の需要をすべて満たすことができないことがわかった．そして，Avg と Low の間に，顕著な差がないこともわかった．

以上の結果より，提案したモデル $MLFLP1, MLFLP2$ は輸送コストの面では従来のモデル ($MLFLP3$) よりも優れている結果となった．また，総輸送量が最大の日の最適な施設配置を用いると多くの場合で追加の無人機が輸送する量は発生しない，すなわち与えられた無人機で満たすことができない需要は少ないことがわかり，他の日の場合の総輸送コストよりも低くなる結果となった．総輸送量が年間の平均の日，総輸送量が年間の最小の日でそれぞれ提案モデルを解いた結果に顕著な差はなかったため，年間の総輸送量を入力として用いる際には，年間の総輸送量の平均値ではなく，平均値と最大値の間の値や 2 番目に多い月の総輸送量の値を用いるほうが，総輸送コストを比較する際には適しているのではないかと考える．

6 Benders 分解法を用いた提案モデルの最適値の下界値を与えるアルゴリズム

本章では，Benders 分解法を用いた $MLFLP1, MLFLP2$ の最適値の下界値を与えるアルゴリズムを提案する．

6.1 $MLFLP1$ に対する最適値の下界値を与えるアルゴリズム

$MLFLP1$ の整数変数 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X'}, \boldsymbol{n}$ を連続緩和した問題 $MLFLP1^{LP}$ を考える．すなわち $MLFLP1^{LP}$ は，整数変数 $\boldsymbol{Y}$，連続変数 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X'}, \boldsymbol{n}$ を含む混合整数計画問題となる．一般に混合整数計画問題を解くのは難しいため，Benders 分解法を用いた $MLFLP1$ の最適値の下界値を与えるアルゴリズムの提案を行う．まず，式 (6.1) から (6.6) に $MLFLP1$ の整数変数 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X'}, \boldsymbol{n}$ を連続緩和した問題 $MLFLP1^{LP}$ を示す．ここで，$MLFLP1^{LP}$ の目的関数 $z_1^{LP}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n})$ を次のように定義する．

$$z_1^{LP}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n}) = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j_k \in V_k} f_{j_k} Y_{j_k} + \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{2} \sum_{j_{k+1} \in V_{k+1}} \sum_{j_k \in V_k} C_{ij_{k+1}j_k} X_{ij_{k+1}j_k} + \sum_{i \in I} \sum_{j_1 \in V_1} \sum_{r \in V_0} C'_{ij_1r} X'_{ij_1r} + \sum_{j_1 \in V_1} n_c n_{j_1}.$$

$(MLFLP1^{LP})$

$$\begin{aligned}
&\text{minimize} && z_1^{LP}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n}) && && (6.1)\\
&\text{subject to} && (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) && &&\\
& && (4.6), (4.7), (4.8) && && (6.2)\\
& && X_{ij_{k+1}j_k} \in \mathbb{R}_+ && \forall i \in I, j_{k+1} \in V_{k+1}, j_k \in V_k, k = 1, 2 && (6.3)\\
& && X'_{ij_kr} \in \mathbb{R}_+ && \forall i \in I, j_k \in V_k, r \in R, k = 1 && (6.4)\\
& && Y_{j_k} \in \{0, 1\} && \forall j_k \in V_k, k = 1, 2, 3 && (6.5)\\
& && n_{j_1} \in \mathbb{R}_+ && \forall j_1 \in V_1. && (6.6)
\end{aligned}$$

まず，Benders 主問題 $(BM1)$ と Benders 部分問題 $(DBS1)$ を導出する．$MLFLP1$ の制約 (4.5)，(4.6)，(6.5) を満たす $\boldsymbol{Y}$ の集合を $\mathcal{Y}$ とする．ここで，$MLFLP1^{LP}$ の変数 $\boldsymbol{Y}$ を $\bar{\boldsymbol{Y}} \in \mathcal{Y}$ に固定した問題 $MLFLP1^{LP}_{\bar{\boldsymbol{Y}}}$ を考える．$MLFLP1^{LP}$ の目的関数から

施設配置コストの総和を除いたものを $h_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n})$ とし，次のように定義する．

$$h_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n}) = \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{2} \sum_{j_{k+1} \in V_{k+1}} \sum_{j_k \in V_k} C_{ij_{k+1}j_k} X_{ij_{k+1}j_k} + \sum_{i \in I} \sum_{j_1 \in V_1} \sum_{r \in V_0} C'_{ij_1r} X'_{ij_1r} + \sum_{j_1 \in V_1} n_c n_{j_1}. \tag{6.7}$$

式 (6.8) から式 (6.18) に $MLFLP1^{LP}$ の変数 $\boldsymbol{Y}$ を $\bar{\boldsymbol{Y}} \in \mathcal{Y}$ に固定した問題 $MLFLP1^{LP}_{\bar{\boldsymbol{Y}}}$ を示す．

($MLFLP1^{LP}_{\bar{\boldsymbol{Y}}}$)

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & h_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n}) && && (6.8)\\
\text{subject to} \quad & \sum_{j_3 \in V_3} X_{ij_3j_2} = \sum_{j_1 \in V_1} X_{ij_2j_1} && \forall j_2 \in V_2, i \in I && (6.9)\\
& \sum_{j_2 \in V_2} X_{ij_2j_1} = \sum_{r \in R} X'_{ij_1r} && \forall j_1 \in V_1, i \in I && (6.10)\\
& \sum_{j_1 \in V_1} X'_{ij_1r} = w_{ir} && \forall r \in R, i \in I && (6.11)\\
& \sum_{j_k \in V_k} X_{ij_{k+1}j_k} \leq q_{ij_{k+1}} \bar{Y}_{j_{k+1}} && \forall j_{k+1} \in V_{k+1}, i \in I, k = 1, 2 && (6.12)\\
& \sum_{r \in R} X'_{ij_1r} \leq q_{ij_1} \bar{Y}_{j_1} && \forall j_1 \in V_1, i \in I && (6.13)\\
& n_{j_1} \geq \frac{\sum_{i \in I} \sum_{j_2 \in V_2} 2 d_{j_2j_1} X_{ij_2j_1}}{\rho_2} && \forall j_1 \in V_1 && (6.14)\\
& n_{j_1} \geq \frac{\sum_{i \in I} \sum_{r \in R} 2 d'_{j_1r} X'_{ij_1r}}{\rho_1} && \forall j_1 \in V_1 && (6.15)\\
& X_{ij_{k+1}j_k} \in \mathbb{R}_+ && \forall i \in I, j_{k+1} \in V_{k+1}, j_k \in V_k, k = 1, 2 && (6.16)\\
& X'_{ij_1r} \in \mathbb{R}_+ && \forall i \in I, j_1 \in V_1, r \in R && (6.17)\\
& n_{j_1} \in \mathbb{R}_+ && \forall j_1 \in V_1. && (6.18)
\end{aligned}$$

次に $MLFLP1^{LP}_{\bar{\boldsymbol{Y}}}$ の双対問題 $DBS1$ を導出する．制約式 (6.9), (6.10), (6.11), (6.12, 6.13), (6.14), (6.15) に対応するラグランジュ乗数を $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta^1}, \boldsymbol{\theta^2}$ とする．このとき，$MLFLP1^{LP}_{\bar{\boldsymbol{Y}}}$ に対するラグランジュ関数は,

$$
\begin{aligned}
&L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\theta^1},\boldsymbol{\theta^2})\\
&=\sum_{i\in I}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j_{k+1}\in V_{k+1}}\sum_{j_k\in V_k} C_{ij_{k+1}j_k}X_{ij_{k+1}j_k}\\
&+\sum_{i\in I}\sum_{j_1\in V_1}\sum_{r\in R} C'_{ij_1r}X'_{ij_1r}+\sum_{j_1\in V_1} n_c n_{j_1}\\
&+\left(\sum_{i\in I}\sum_{j_2\in V_2}\sum_{j_3\in V_3}\alpha_{ij_2}X_{ij_3j_2}-\sum_{i\in I}\sum_{j_2\in V_2}\sum_{j_1\in V_1}\alpha_{ij_2}X_{ij_2j_1}\right)\\
&+\left(\sum_{i\in I}\sum_{j_1\in V_1}\sum_{j_2\in V_2}\beta_{ij_1}X_{ij_2j_1}-\sum_{i\in I}\sum_{j_1\in V_1}\sum_{r\in R}\beta_{ij_1}X'_{ij_1r}\right)\\
&+\left(\sum_{i\in I}\sum_{r\in R}\sum_{j_1\in V_1}\gamma_{ir}X'_{ij_1r}-\sum_{i\in I}\sum_{r\in R}\gamma_{ir}w_{ir}\right)\\
&+\left(\sum_{i\in I}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j_{k+1}\in V_{k+1}}\delta_{ij_{k+1}}q_{ij_{k+1}}\bar{Y}_{j_{k+1}}-\sum_{i\in I}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j_{k+1}\in V_{k+1}}\sum_{j_k\in V_k}\delta_{ij_{k+1}}X_{ij_{k+1}j_k}\right)\\
&+\left(\sum_{i\in I}\sum_{j_1\in V_1}\delta_{ij_1}q_{ij_1}\bar{Y}_{j_1}-\sum_{i\in I}\sum_{j_1\in V_1}\sum_{r\in R}\delta_{ij_1}X'_{ij_1r}\right)\\
&+\left(\sum_{j_1\in V_1}\theta^1_{j_1}n_{j_1}-\frac{\sum_{j_1\in V_1}\sum_{i\in I}\sum_{j_2\in V_2}\theta^1_{j_1}2d_{j_2j_1}X_{ij_2j_1}}{\rho_2}\right)\\
&+\left(\sum_{j_1\in V_1}\theta^2_{j_1}n_{j_1}-\frac{\sum_{j_1\in V_1}\sum_{i\in I}\sum_{r\in R}\theta^2_{j_1}2d'_{j_1r}X'_{ij_1r}}{\rho_1}\right)
\end{aligned}
$$

となる．$\boldsymbol{X},\boldsymbol{X'},\boldsymbol{n}$ についてそれぞれまとめると，$L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\theta^1},\boldsymbol{\theta^2})$ は

$$
\begin{aligned}
&L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\theta^1},\boldsymbol{\theta^2})\\
&=\sum_{i\in I}\sum_{j_3\in V_2}\sum_{j_2\in V_2} X_{ij_3j_2}(C_{ij_3j_2}+\alpha_{ij_2}-\delta_{ij_3})\\
&+\sum_{i\in I}\sum_{j_2\in V_2}\sum_{j_1\in V_1} X_{ij_2j_1}\left(C_{ij_2j_1}-\alpha_{ij_2}+\beta_{ij_1}-\delta_{ij_2}-\frac{\theta^1_{j_1}2d_{j_2j_1}}{\rho_2}\right)\\
&+\sum_{i\in I}\sum_{j_1\in V_1}\sum_{r\in R} X'_{ij_1r}\left(C'_{ij_1r}-\beta_{ij_1}-\delta_{ij_1}+\gamma_{ir}-\frac{\theta^2_{j_1}2d'_{j_1r}}{\rho_1}\right)\\
&+\sum_{j_1\in V_1} n_{j_1}(n_c+\theta^1_{j_1}+\theta^2_{j_1})\\
&-\sum_{i\in I}\sum_{r\in R}\gamma_{ir}w_{ir}+\sum_{i\in I}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j_{k+1}\in V_{k+1}}\delta_{ij_{k+1}}q_{ij_{k+1}}\bar{Y}_{j_{k+1}}+\sum_{i\in I}\sum_{j_1\in V_1}\delta_{ij_1}q_{ij_1}\bar{Y}_{j_1}
\end{aligned}
$$

となる．したがって，$MLFLP1^{LP}_{\bar{\boldsymbol{Y}}}$ の双対問題 $DBS1$ は以下のようになる．

$(DBS1)$

$$
\begin{aligned}
\text{maximize}\quad & -\sum_{i\in I}\sum_{r\in R}\gamma_{ir}w_{ir}\\
& +\sum_{i\in I}\sum_{k=0}^{2}\sum_{j_{k+1}\in V_{k+1}}\delta_{ij_{k+1}}q_{ij_{k+1}}\bar{Y}_{j_{k+1}} && (6.19)\\
\text{subject to}\quad & -\alpha_{ij_2}+\delta_{ij_3}\geq C_{ij_3j_2} && \forall i\in I, j_3\in V_3, j_2\in V_2 \quad (6.20)\\
& \alpha_{ij_2}-\beta_{ij_1}+\delta_{ij_2}+\frac{\theta_{j_1}2d_{j_2j_1}}{\rho_2}\geq C_{ij_2j_1} && \forall i\in I, j_2\in V_2, j_1\in V_1 \quad (6.21)\\
& \beta_{ij_1}+\delta_{ij_1}-\gamma_{ir}+\frac{\theta_{j_1}2d'_{j_1r}}{\rho_1}\geq C'_{ij_1r} && \forall i\in I, j_1\in V_1, r\in R \quad (6.22)\\
& -\theta^1_{j_1}-\theta^2_{j_1}\geq n_c && \forall j_1\in V_1, i\in I \quad (6.23)\\
& \gamma_{ir}\geq 0 && \forall i\in I, r\in R \quad (6.24)\\
& \delta_{ij_{k+1}}\geq 0 && \forall i\in I, j_{k+1}\in V_{k+1}, k=0,1,2. \quad (6.25)
\end{aligned}
$$

$DBS1$ の実行可能解の集合を W_1 とする．ここで，$W_1=\emptyset$ の場合は，$MLFLP1^{LP}$ が最適解を持たないことを以下の命題によって示す．

命題 1. $W_1=\emptyset$ ならば，$MLFLP1^{LP}$ は最適解を持たない．

証明. 対偶を用いて示す．すなわち，$MLFLP1^{LP}$ が最適解を持つならば，$W_1\neq\emptyset$ で

あることを示す．$MLFLP1^{LP}$ が最適解 $(\boldsymbol{Y}^*, \boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{X}'^*, \boldsymbol{n}^*)$ を持つとする．このとき $MLFLP1^{LP}_{\bar{\boldsymbol{Y}}}$ において，$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}^*$ とおいた問題は最適解 $(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{X}'^*, \boldsymbol{n}^*)$ を持つので，双対定理より $MLFLP1^{LP}_{\bar{Y}}$ の双対問題である $DBS1$ もある最適解を持つ．したがって，$DBS1$ は少なくとも 1 つの最適解を持つので，$W_1 \neq \emptyset$ である． □

命題 1 より以下の議論では，$W_1 \neq \emptyset$ と仮定する．W_1 の端点の集合と端線の集合をそれぞれ，$U_1 = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_K\}, U_2 = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_L\}$ とする．このとき，W_1 の点 x は次のように表すことができる．

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{L} \mu_j \boldsymbol{v}_j \tag{6.26}$$

ここで，λ_i, μ_j は非負の実数であり，λ_i は $\sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1$ を満たす．また，$DBS1$ は $MLFLP1^{LP}_{\bar{\boldsymbol{Y}}}$ の双対問題なので，$MLFLP1^{LP}$ は $g_1(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta})$ を

$$g_1(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) = -\sum_{i \in I} \sum_{r \in R} \gamma_{ir} w_{ir} + \sum_{i \in I} \sum_{k=0}^{2} \sum_{j_{k+1} \in V_{k+1}} \delta_{i j_{k+1}} q_{i j_{k+1}} \bar{Y}_{j_{k+1}}.$$

とすると次のように定式化できる．

$$\text{minimize} \quad \left(\max_{\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta} \in U_1} g_1(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) \right) + \sum_{k=1}^{3} \sum_{j_k \in V_k} f_{j_k} Y_{j_k} \tag{6.27}$$

$$\text{subject to} \quad Y_{j_k} \in \{0, 1\} \qquad \forall j_k \in V_k, k = 1, 2, 3. \tag{6.28}$$

次に $DBS1$ が最適解を持つための条件について考える．もしある $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) \in U_2$ に対して，$g_1(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) > 0$ が成り立つならば，端線ベクトルのパラメータを大きく選ぶことにより，$DBS1$ の目的関数値はいくらでも大きくできるので，$DBS1$ は非有界となる．しかし，$MLFLP1^{LP}_{\bar{\boldsymbol{Y}}}$ が実行可能ならば，$DBS1$ は非有界とはならないので，任意の $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) \in U_2$ に対して，$g_1(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) \leq 0$ が成り立たなければならない．このとき，端点のいずれかが $DBS1$ の最適解となる．以上のことを踏まえ，$\max_{\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta} \in U_1} g_1(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta})$ に対応する補助変数 ξ を導入すれば，Benders 主問題 $BM1$ は，

$(BM1)$

$$\text{minimize} \quad \xi + \sum_{k=1}^{3} \sum_{j_k \in V_k} f_{j_k} Y_{j_k} \tag{6.29}$$

$$\text{subject to} \quad g_1(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) \leq \xi \qquad \forall (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) \in U_1 \tag{6.30}$$

$$g_1(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) \leq 0 \qquad \forall (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) \in U_2 \tag{6.31}$$

$$Y_{j_k} \in \{0, 1\} \qquad \forall j_k \in V_k, k = 1, 2, 3. \tag{6.32}$$

となる．また，緩和主問題 $BM1'$ は，$U_1' \subseteq U_1, U_2' \subseteq U_2$ とすると次のように定式化できる．

$(BM1')$

$$\text{minimize} \quad \xi + \sum_{k=1}^{3} \sum_{j_k \in V_k} f_{j_k} Y_{j_k} \tag{6.33}$$

$$\text{subject to} \quad g_1(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) \leq \xi \qquad \forall (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) \in U_1' \tag{6.34}$$

$$g_1(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) \leq 0 \qquad \forall (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) \in U_2' \tag{6.35}$$

$$Y_{j_k} \in \{0, 1\} \qquad \forall j_k \in V_k, k = 1, 2, 3. \tag{6.36}$$

$BM1'$ と $DBS1$ を用いて，Benders 分解法による $MLFLP1$ の最適値の下界値を与えるアルゴリズムを Algorithm1 に示す．Algorithm1 において，入力は，$MLFLP1$ を LP 緩和した $MLFLP1^{LP}$ に対する入力であり，出力は，$MLFLP1$ の最適値に対する下界値である．

Algorithm 1 提案アルゴリズム 1

Step 1. W_1 の適当な端点の集合 U_1' と端線の集合 U_2' を求める．$s = 0$ とする．

Step 2. $BM1'$ を解きその最適解を $(\xi^s, \boldsymbol{Y}^s)$ とする．$BM1'$ が実行不能であれば 0 を出力し反復を終了する．

Step 3. $\boldsymbol{Y}^s$ をもとに $DBS1$ を解き，$DBS1$ が最適解を持つならば，そのときの解を $(\boldsymbol{\gamma}^*, \boldsymbol{\delta}^*) \in U_1'$ として **Step 4** へ，$DBS1$ が非有界の場合，$g_1(\boldsymbol{\gamma}^s, \boldsymbol{\delta}^s) > 0$ を満たす端線が得られているので，$U_2' = U_2' \cup \{(\boldsymbol{\gamma}^s, \boldsymbol{\delta}^s)\}, s = s + 1$ とし **Step 2** へ戻る．

Step 4. $g_1(\boldsymbol{\gamma}^*, \boldsymbol{\delta}^*) > \xi^s$ ならば，$U_1' = U_1' \cup \{(\boldsymbol{\gamma}^*, \boldsymbol{\delta}^*)\}, s = s + 1$ とし，**Step 2** へ戻る．$g_1(\boldsymbol{\gamma}^*, \boldsymbol{\delta}^*) \leq \xi^s$ ならば，**Step 5** へゆく．

Step 5. $\boldsymbol{Y}^s$ を用いて $MLFLP1^{LP}_{\boldsymbol{Y}}$ を解き $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X'}, \boldsymbol{n})$ を求める．

提案アルゴリズム 1 が $MLFLP1$ の最適値の下界値を与えることを以下の命題 2，3 によって示す．

命題 2. 提案アルゴリズム 1 が Step 5 で終了し，$BM1'$ の最適解 $(\xi^*, \boldsymbol{Y}^*)$，$DBS1$ の最適解 $(\boldsymbol{\gamma}^*, \boldsymbol{\delta}^*)$ が求まっているとする．このとき $BM1'$ の最適値は，$MLFLP1$ の最適値の下界値である．

証明. $BM1'$ の最適値を $\beta = \xi^* + \sum_{k=1}^{3} \sum_{j_k \in V_k} f_{j_k} Y^*_{j_k}$ とする．β が $MLFLP1^{LP}$ の最適値の下界値であることを示す．$DBS1$ の最適解が存在するので，$DBS1$ の双対問題

である $MLFLP1^{LP}_{\boldsymbol{Y}}$ にもある最適解 $(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{X'}^*, \boldsymbol{n}^*)$ が存在する．$MLFLP1^{LP}$ の最適値を OPT^{LP}，$MLFLP1^{LP}$ の実行可能解集合を W^{LP} とすると，$BM1'$ の目的関数の定義と $MLFLP1^{LP}_{\boldsymbol{Y}}$ が $MLFLP1^{LP}$ の $\boldsymbol{Y}$ を固定した緩和問題であることから

$$\begin{aligned}\beta &= g_1(\boldsymbol{\gamma}^*, \boldsymbol{\delta}^*) + \sum_{k=1}^{3} \sum_{j_k \in V_k} F_{j_k} Y^*_{j_k} \\ &= f_1(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{X'}^*, \boldsymbol{n}^*) + \sum_{k=1}^{3} \sum_{j_k \in V_k} F_{j_k} Y^*_{j_k} \\ &\leq \min_{(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X'}, \boldsymbol{n}) \in W^{LP}} z_1^{LP}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X'}, \boldsymbol{n}) \\ &\leq OPT^{LP}\end{aligned}$$

が成り立つ．また $MLFLP1^{LP}$ は，$MLFLP1$ の連続緩和問題であることから $MLFLP1$ の最適値を OPT とすると

$$OPT^{LP} \leq OPT$$

が成り立つ．したがって，$BM1'$ の最適値は $MLFLP1$ の最適値の下界値である． □

命題 3. 提案アルゴリズム 1 は有限回のステップで終了する．

証明. W_1 は有限なので，Step 3, 4 で U'_1, U'_2 に追加する $(\boldsymbol{\gamma^s}, \boldsymbol{\delta^s})$ がそれ以前の Step で追加したものと異なることを示せば良い．まず，Step 3 で追加する $(\boldsymbol{\gamma^s}, \boldsymbol{\delta^s})$ がそれ以前の Step 3 で追加したものと異なることを示す．Step 3 において U'_1 に追加する $(\boldsymbol{\gamma^s}, \boldsymbol{\delta^s})$ は，$g_1(\boldsymbol{\gamma^s}, \boldsymbol{\delta^s}) > \xi^s$ を満たす．また，i 回目の Step 3 のときに U'_1 に追加された要素を $(\boldsymbol{\gamma}^i, \boldsymbol{\delta}^i)$ としたとき，任意の $1 \leq i \leq |U'_1|$ に対して

$$g_1(\boldsymbol{\gamma}^i, \boldsymbol{\delta}^i) \leq \xi^s$$

が成り立つ．すなわち，$(\boldsymbol{\gamma^s}, \boldsymbol{\delta^s})$ はそれ以前の Step 3 で生成されたものとは異なる．Step 4 で生成される $(\boldsymbol{\gamma^s}, \boldsymbol{\delta^s})$ についても同様に示すことができる．

したがって，Step 3, 4 で生成される $(\boldsymbol{\gamma^s}, \boldsymbol{\delta^s})$ がそれ以前の Step で生成されたものと異なる． □

6.2 $MLFLP2$ に対する最適値の下界値を与えるアルゴリズム

$MLFLP2$ の整数変数 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X'}, \boldsymbol{n}$ を連続緩和した問題 $MLFLP2^{LP}$ を考える．すなわち $MLFLP2^{LP}$ は，整数変数 $\boldsymbol{Y}$，連続変数 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X'}, \boldsymbol{n}$ を含む混合整数計画問題

となる．$MLFLP1$ と同様に，Benders 分解法を用いた $MLFLP2$ の最適値の下界値を与えるアルゴリズムを提案を行う．式 (6.37) から (6.42) に $MLFLP2$ の整数変数 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X'}, \boldsymbol{n}$ を連続緩和した問題 $MLFLP2^{LP}$ を示す．ここで，$MLFLP2^{LP}$ の目的関数 $z_2^{LP}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n})$ を次のように定義する．

$$z_2^{LP}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n}) = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j_k \in V_k} f_{j_k} Y_{j_k} + \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{2} \sum_{j_{k+1} \in V_{k+1}} \sum_{j_k \in V_k} C_{ij_{k+1}j_k} X_{ij_{k+1}j_k} + \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{2} \sum_{j_k \in V_k} \sum_{r \in R} C'_{ij_kr} X'_{ij_kr} + \sum_{j_1 \in V_1} n_c n_{j_1}.$$

$(MLFLP2^{LP})$

$$\begin{aligned}
&\text{minimize} && z_2^{LP}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n}) && && (6.37)\\
&\text{subject to} && (4.3), (4.5), (4.7), (4.8) && &\\
& && (4.14), (4.15), (4.16) && && (6.38)\\
& && X_{ij_{k+1}j_k} \in \mathbb{R}_+ && \forall i \in I, j_{k+1} \in V_{k+1}, j_k \in V_k, k = 1, 2 && (6.39)\\
& && X'_{ij_kr} \in \mathbb{R}_+ && \forall i \in I, j_k \in V_k, r \in R, k = 1 && (6.40)\\
& && Y_{j_k} \in \{0, 1\} && j_k \in V_k, k = 1, 2, 3 && (6.41)\\
& && n_{j_1} \in \mathbb{R}_+ && j_1 \in V_1. && (6.42)
\end{aligned}$$

まず, Benders 主問題 $(BM2)$ と Benders 部分問題 $(DBS2)$ を導出する．$MLFLP2^{LP}$ の制約 (4.5)，(4.16)，(6.41) を満たす $\boldsymbol{Y}$ の集合を $\mathcal{Y}$ とする．ここで，$MLFLP2^{LP}$ の変数 $\boldsymbol{Y}$ を $\bar{\boldsymbol{Y}} \in \mathcal{Y}$ に固定した問題 $MLFLP1^{LP}_{\bar{\boldsymbol{Y}}}$ を考える．$MLFLP1^{LP}$ の目的関数から施設配置コストの総和を除いたものを $h_2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n})$ とし，次のように定義する．

$$h_2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{n}) = \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{2} \sum_{j_{k+1} \in V_{k+1}} \sum_{j_k \in V_k} X_{ij_{k+1}j_k} C_{ij_{k+1}j_k} + \sum_{i \in I} \sum_{j_1 \in V_1} \sum_{r \in V_0} X'_{ij_1r} C'_{ij_1r} + \sum_{j_1 \in V_1} n_{j_1} n_c. \tag{6.43}$$

式 (6.44) から式 (6.48) に $MLFLP2^{LP}$ の変数 $\boldsymbol{Y}$ を $\bar{\boldsymbol{Y}} \in \mathcal{Y}$ に固定した問題 $MLFLP2^{LP}_{\bar{\boldsymbol{Y}}}$ を示す．

$(MLFLP2^{LP}_{\bar{\boldsymbol{Y}}})$

$$\text{minimize} \quad f_2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X'}, \boldsymbol{n}) \tag{6.44}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j_3 \in V_3} X_{ij_3j_2} = \sum_{j_1 \in V_1} X_{ij_2j_1} + \sum_{r \in R} X'_{ij_2r} \qquad \forall j_2 \in V_2, i \in I \tag{6.45}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{j_k \in V_k} X'_{ij_kr} = w_{ir} \qquad \forall r \in R, i \in I \tag{6.46}$$

$$\sum_{i \in I} X'_{ij_kr} \leq q_{j_k} \bar{Y}_{j_k} \qquad \forall j_k \in V_k, r \in R, k = 1, 2 \tag{6.47}$$

$$(6.10), (6.12), (6.14), (6.15)$$

$$(6.39), (6.40), (6.42). \tag{6.48}$$

次に $MLFLP2^{LP}_{\bar{\boldsymbol{Y}}}$ の双対問題 $DBS2$ を導出する．制約式 (6.45), (6.10), (6.47), (6.12, 6.47), (6.14), (6.15) に対応するラグランジュ双対変数を $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta^1}, \boldsymbol{\theta^2}$ とする．このとき，問題 $MLFLP2^{LP}_{\bar{\boldsymbol{Y}}}$ の双対問題 $DBS2$ は，

$(DBS2)$

$$\text{maximize} \quad -\sum_{i \in I} \sum_{r \in R} \gamma_{ir} w_{ir}$$

$$+ \sum_{i \in I} \sum_{k=0}^{2} \sum_{j_{k+1} \in V_{k+1}} \delta_{ij_{k+1}} q_{ij_{k+1}} \bar{Y}_{j_{k+1}} \tag{6.49}$$

$$\text{subject to} \quad \alpha_{ij_2} - \gamma_{ij_2} + \delta_{ij_2} \geq C'_{ij_2r} \qquad \forall i \in I, j_2 \in V_2, r \in R \tag{6.50}$$

$$(6.20), (6.21), (6.22), (6.23), (6.24), (6.25). \tag{6.51}$$

$DBS2$ の実行可能解の集合を W_2 とする．ここで，$W_2 = \emptyset$ の場合は，$MLFLP2^{LP}$ が最適解を持たないことを以下の命題によって示す．

命題 4. $W_2 = \emptyset$ ならば，$MLFLP2^{LP}$ は最適解を持たない．

証明. 命題 1 と同様に示せる． □

W_2 の端点の集合と端線の集合をそれぞれ，U_1, U_2 とする．前節と同様の議論より，$MLFLP2^{LP}$ は $g_2(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta})$ を

$$g_2(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) = -\sum_{i \in I} \sum_{r \in R} \gamma_{ir} w_{ir} + \sum_{i \in I} \sum_{k=0}^{2} \sum_{j_{k+1} \in V_{k+1}} \delta_{ij_{k+1}} q_{ij_{k+1}} \bar{Y}_{j_{k+1}}$$

とすると次のように定式化できる.

$$\text{minimize} \quad \left(\max_{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}\in U_1} g_2(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta})\right) + \sum_{k=1}^{3}\sum_{j_k\in V_k} f_{j_k}Y_{j_k} \tag{6.52}$$

$$\text{subject to} \quad Y_{j_k} \in \{0,1\} \qquad \forall j_k \in V_k, k = 1,2,3. \tag{6.53}$$

加えて前節と同様に $DBS2$ が最適解を持つための条件を考えると，$\max_{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}\in U_2} g_2(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta})$ に対応する補助変数 ξ を導入すれば，Benders 主問題 $BM2$ は,
$(BM2)$

$$\text{minimize} \quad \xi + \sum_{k=1}^{3}\sum_{j_k\in V_k} f_{j_k}Y_{j_k} \tag{6.54}$$

$$\text{subject to} \quad g_2(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}) \le \xi \qquad \forall(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}) \in U_1 \tag{6.55}$$

$$g_2(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}) \le 0, \qquad \forall(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}) \in U_2 \tag{6.56}$$

$$Y_{j_k} \in \{0,1\} \qquad \forall j_k \in V_k, k = 1,2,3. \tag{6.57}$$

となる．また，緩和主問題 $BM2'$ は，$U_1' \subseteq U_1, U_2' \subseteq U_2$ とすると次のように定式化できる.
$(BM2')$

$$\text{minimize} \quad \xi + \sum_{k=1}^{3}\sum_{j_k\in V_k} f_{j_k}Y_{j_k} \tag{6.58}$$

$$\text{subject to} \quad g_2(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}) \le \xi, \qquad \forall(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}) \in U_1' \tag{6.59}$$

$$g_2(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}) \le 0 \qquad \forall(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}) \in U_2' \tag{6.60}$$

$$Y_{j_k} \in \{0,1\} \qquad \forall j_k \in V_k, k = 1,2,3. \tag{6.61}$$

$BM2'$ と $DBS2$ を用いて，Benders 分解法による $MLFLP2$ の最適値の下界値を与えるアルゴリズムを Algorithm2 に示す．Algorithm2 において，入力は，$MLFLP2$ を LP 緩和した $MLFLP2^{LP}$ に対する入力であり，出力は，$MLFLP2$ の最適値に対する下界値である.

Algorithm 2 提案アルゴリズム 2

Step 1. W_2 の適当な端点の集合 U_1' と端線の集合 U_2' を求める．$s = 0$ とする．

Step 2. $BM2'$ を解きその最適解を $(\xi^s, \boldsymbol{Y}^s)$ とする．$BM1'$ が実行不能であれば 0 を出力し反復を終了する．

Step 3. $\boldsymbol{Y}^s$ をもとに $DBS2$ を解き，$DBS2$ が最適解を持つならば，そのときの解を $(\boldsymbol{\gamma}^*, \boldsymbol{\delta}^*) \in U_1$ として **Step 4** へ，$DBS2$ が非有界の場合，$g_2(\boldsymbol{\gamma}^s, \boldsymbol{\delta}^s) > 0$ を満たす端線が得られているので，$U_2' = U_2' \cup \{(\boldsymbol{\gamma}^s, \boldsymbol{\delta}^s)\}, s = s + 1$ とし **Step 2** へ戻る．

Step 4. $g_2(\boldsymbol{\gamma}^*, \boldsymbol{\delta}^*) > \xi^s$ ならば，$U_1' = U_1' \cup \{(\boldsymbol{\gamma}^*, \boldsymbol{\delta}^*)\}, s = s + 1$ とし，**Step 2** へ戻る．$g_2(\boldsymbol{\gamma}^*, \boldsymbol{\delta}^*) \leq \xi^s$ ならば，**Step 5** へゆく．

Step 5. $\boldsymbol{Y}^s$ を用いて $MLFLP2^{LP}_{\boldsymbol{Y}}$ を解き $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X'}, \boldsymbol{n})$ を求める．

提案アルゴリズムが $MLFLP2$ の最適値の下界値を与えることを以下の命題 5，6 によって示す．

命題 5. 提案アルゴリズム 2 が Step 5 で終了し，$BM2'$ の最適解 $(\xi^*, \boldsymbol{Y}^*)$，$DBS2$ の最適解 $(\boldsymbol{\gamma}^*, \boldsymbol{\delta}^*)$ が求まっているとする．このとき $BM2'$ の最適値は，$MLFLP2$ の下界値である．

証明. 命題 2 と同様に示せる． □

命題 6. 提案アルゴリズム 2 は有限回のステップで終了する．

証明. 命題 3 と同様に示せる． □

7　おわりに

本研究では，無人機輸送を考慮した多品種容量制限付きマルチレベル施設配置問題のモデルおよび，無人機とトラック輸送を同時に考慮した問題のモデルを提案し，各提案モデルに対して，Benders 分解法を用いた近似アルゴリズムを提案した．また，提案したモデルに対して計算機実験を行い，無人機輸送の実証実験や過疎地域における無人機輸送の無人機の発着施設，補給施設等の施設配置を考える場合であれば現実的な時間で最適解を求められることを実験的に示した．加えて，提案したモデルがトラック輸送のみ場合よりも総輸送コストを最大で 39% 削減できることを実験的に示し，実際の輸送量のデータをもとに施設配置を考えた際に選ぶ日によっては，満たされない需要量，総輸送コストに大きな差はないことを示した．

今後の課題として，実際に施設配置を考える際には，年単位の計画となるため計算時間の上限を数ヶ月にした場合にどの程度の規模の問題を解くことができるのかを実験的に確かめること，実際の地理データを用いた計算機実験を行うこと，提案したアルゴリズムを実験的に評価することが考えられる．

謝辞

本研究を進めるに当たり，熱心にご指導を頂いた高橋里司准教授に心より感謝いたします．また，高橋研究室，村松研究室ならびに保木研究室の先輩，同期の皆様にも大変お世話になりました．心より感謝いたします．

参考文献

[1] 国土交通省 総合政策局物流政策課. 最近の物流政策について. https://www.mlit.go.jp/common/001388194.pdf (最終閲覧日:2021/12/22)

[2] Amazon.com, Inc. Amazon Prime Air. https://www.amazon.com/Amazon-Prime-Air/ (最終閲覧日:2021/12/22)

[3] JP 楽天ロジスティクス株式会社. JP 楽天ロジスティクス、長野県白馬村の山岳エリアにおけるドローン配送の実用化に向けた実証実験を実施 https://corp.rakuten.co.jp/news/update/2021/0930_02.html (最終閲覧日:2021/12/22)

[4] KDDI 株式会社. 国内初の自治体運営によるドローン配送事業、伊那市支え合い買物サービス「ゆうあいマーケット」の本格運用開始 https://news.kddi.com/kddi/corporate/newsrelease/2020/08/05/4601.html (最終閲覧日:2021/12/22)

[5] Rahman, S. U., & Smith, D. K. (2000). Use of location-allocation models in health service development planning in developing nations.

[6] Shavarani, S. M., Nejad, M. G., Rismanchian, F., & Izbirak, G. (2018). Application of hierarchical facility location problem for optimization of a drone delivery system: a case study of Amazon prime air in the city of San Francisco. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 95(9), 3141-3153.

[7] Benders, J. F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. Numerische mathematik, 4(1), 238-252.

[8] Irawan, C. A., & Jones, D. (2019). Formulation and solution of a two-stage capacitated facility location problem with multilevel capacities. Annals of Operations Research, 272(1), 41-67.

[9] Ortiz-Astorquiza, C., Contreras, I., & Laporte, G. (2018). Multi-level facility location problems. European Journal of Operational Research, 267(3), 791-805.

[10] Şahin, G., & Süral, H. (2007). A review of hierarchical facility location models. Computers & Operations Research, 34(8), 2310-2331.

[11] Tadros, S. A., Galal, N. M., Ghazy, M., & ElSayed, A. E. (2018, March). A multi-objective two echelon capacitated facility location problem. In 2018 7th International Conference on Industrial Technology and Management (ICITM) (pp. 260-264). IEEE.

[12] Mišković, S., Stanimirović, Z., & Grujičić, I. (2017). Solving the robust two-

stage capacitated facility location problem with uncertain transportation costs. Optimization Letters, 11(6), 1169-1184.

[13] 田村明久，村松正和，最適化法，共立出版株式会社，2002.

[14] ヤマト運輸. 小口貨物取扱実績. https://www.yamato-hd.co.jp/investors/financials/monthlydata/ (最終閲覧日:2021/01/22)

[15] ヤマト運輸. 宅急便運賃一覧表：全国一覧 https://www.kuronekoyamato.co.jp/ytc/search/estimate/ichiran.html (最終閲覧日:2021/01/22)

付録 A　提案アルゴリズムの性能評価

6 章で提案したアルゴリズムに対して，性能評価実験を行い，その結果を示す．本実験では，ソルバーで解いたときの目的関数値と提案アルゴリズムで解いたときの目的関数値の比較を行い，最適値との差を実験的に確かめることを目的とする．

A.1　実験環境

実験データは，5 章の実験 1，2 で用いた施設 $(L3, L2, L1, L0, |I|) = (5, 15, 75, 100, 50)$ のデータを用いる．提案アルゴリズムの実装は，CPLEX に実装されている Benders 分解のアルゴリズムを用いて実装を行った．CPLEX では，ユーザーが指定した変数をマスター問題，サブ問題にそれぞれ分割できるため，$MLFLP1^{LP}, MLFLP2^{LP}$ の整数変数をマスター問題へ，連続変数をサブ問題に分割するように指定することで提案アルゴリズムを実装した．また，実験パラメータ，環境に関しては 5 章と同じである．

A.2　実験結果

10 個のインスタンス 1，2，3 それぞれに対して，ソルバー，提案アルゴリズムで解いた際の目的関数値の平均を取った．最適値と提案アルゴリズムの目的関数値の差分 (GAP) は，最適値を OPT，提案アルゴリズムの目的関数値を z としたとき，次の式より求める．

$$GAP = \frac{OPT - z}{OPT}$$

提案アルゴリズムで求めた最適解のうち，連続変数の解は，以下の 3 つのタイプごとに目的関数値を求め，最適値と比較を行う．

- タイプ 1：整数に丸めない
- タイプ 2：すべて四捨五入し整数に丸める
- タイプ 3：半分変数の値を切り上げ，それ以外は切り捨て整数に丸める

まず，表付録 A.1 に施設配置コストの平均値を示す．

表付録 A.1　施設配置コスト比較

モデル	インスタンス	最適値 [万円]	提案アルゴリズム [万円]	コスト比 [%]
$MLFLP1$	1	92233.3	90069.4	0.023
$MLFLP1$	2	89782.1	88571.0	0.013
$MLFLP1$	3	91430.3	90277.9	0.013
$MLFLP2$	1	89991.8	90067.2	0.001
$MLFLP2$	2	86748.2	87858.3	0.013
$MLFLP2$	3	85854.2	85263.8	0.007

次に，表付録 A.2 に最適値と各タイプごとの総輸送コストの平均値，表付録 A.3 に最適値と各タイプごとの差分の平均値を示す．

表付録 A.2　総輸送コスト比較

モデル	インスタンス	最適値 [万円]	タイプ 1[万円]	タイプ 2[万円]	タイプ 3[万円]
$MLFLP1$	1	5907.87	5907.99	5907.99	5907.99
$MLFLP1$	2	7043.66	7043.76	7043.76	7043.76
$MLFLP1$	3	7042.33	7042.45	7042.45	7042.45
$MLFLP2$	1	7221.41	7221.53	7221.53	7221.53
$MLFLP2$	2	9218.25	9218.17	9218.17	9218.17
$MLFLP2$	3	9218.70	9218.78	9218.78	9218.78

表付録 A.3　最適値と各タイプごとの差分

モデル	インスタンス	タイプ 1[%]	タイプ 2[%]	タイプ 3[%]
$MLFLP1$	1	2.0×10^{-5}	2.0×10^{-5}	2.0×10^{-5}
$MLFLP1$	2	1.0×10^{-5}	1.0×10^{-5}	1.0×10^{-5}
$MLFLP1$	3	2.0×10^{-5}	2.0×10^{-5}	2.0×10^{-5}
$MLFLP2$	1	2.0×10^{-5}	2.0×10^{-5}	2.0×10^{-5}
$MLFLP2$	2	1.0×10^{-5}	1.0×10^{-5}	1.0×10^{-5}
$MLFLP2$	3	1.0×10^{-5}	1.0×10^{-5}	1.0×10^{-5}

最後に，表付録 A.4 に最適値と各タイプごとの無人機の数の平均値，表付録 A.5 に最適値と各タイプごとの差分の平均値を示す．

表付録 A.4　無人機の数比較

モデル	インスタンス	最適値 [台]	タイプ 1[台]	タイプ 2[台]	タイプ 3[台]
$MLFLP1$	1	18725.30	18707.87	18708.40	18707.87
$MLFLP1$	2	14911.50	14895.22	14895.60	14895.22
$MLFLP1$	3	13948.50	13937.65	13938.10	13937.65
$MLFLP2$	1	9719.90	9689.47	9689.90	9689.47
$MLFLP2$	2	7650.50	7644.90	7645.10	7644.90
$MLFLP2$	3	7158.40	7142.94	7142.80	7142.94

表付録 A.5　最適値と各タイプごとの差分

モデル	インスタンス	タイプ 1[%]	タイプ 2[%]	タイプ 3[%]
$MLFLP1$	1	0.0009	0.0009	0.0009
$MLFLP1$	2	0.0011	0.0011	0.0011
$MLFLP1$	3	0.0008	0.0007	0.0008
$MLFLP2$	1	0.0031	0.0031	0.0031
$MLFLP2$	2	0.0007	0.0007	0.0007
$MLFLP2$	3	0.0022	0.0022	0.0022

どのモデル，どのインスタンスにおいても，提案アルゴリズムから得られた解の各コスト，無人機の数とそれぞれの最適値の差分は 0.02% を下回ることがわかった．また，整数に丸め方による明確な差はないことがわかった．