

# 精度保証付き数値計算による Lyapunov 関数の応用と 展開

新田光輝

電気通信大学情報理工学研究科

博士(理学)の学位申請論文

2022年3月

# 精度保証付き数値計算による Lyapunov 関数の応用と 展開

## 博士論文審査委員会

主査	山本 野人	教授
委員	伊東 裕也	准教授
委員	山本 有作	教授
委員	渡部 善隆	准教授
委員	松江 要	准教授
委員	緒方 秀教	教授

著作権所有者  
新田 光輝  
2022年

# Application and development of Lyapunov functions constructed by numerical verification

Koki Nitta

## Abstract

Lyapunov functions are a kind of energy functions and they are useful in analyzing dynamical systems. Usually, Lyapunov functions are considered to be global functions as analysis tools for dynamical systems. It is said that constructing Lyapunov functions is difficult and any general method to construct Lyapunov functions has not been established. However, for hyperbolic equilibria, the method to construct local Lyapunov functions by quadratic forms has been proposed. Combining with numerical verification methods, local Lyapunov functions has possibility to be useful tools to analyze dynamical systems. In this study, we propose a numerical verification method proving existence of homoclinic orbits in order to show usefulness of local Lyapunov functions. The proposed method contains Brouwer's coincidence theorem and numerical verification of mapping degree and so on. In this method, local Lyapunov functions are used to avoid calculation of infinite time development, which is different approach from existing methods. Thus I believe that new numerical verification method to prove existence of homoclinic orbits and this method shows usefulness of local Lyapunov functions. In order to show effectiveness of proposed method, I apply the method to two numerical examples, 3-dimensional one and 4-dimensional one. Furthermore I propose a numerical verification method to construct local Lyapunov functions for non-hyperbolic equilibria in two dimensional dynamical systems in this study. Nonlinear transformations inspired from the normal form theory of dynamical systems are used in the proposed method. Although this method has restriction of dimension and linear terms, it can be applied to general cases to some extent. In order to show availability of proposed method, I construct local Lyapunov functions for non-hyperbolic equilibria as a numerical example.

# 精度保証付き数値計算による Lyapunov 関数の 応用と展開

新田 光輝

## 概要

精度保証付き数値計算とは、計算と同時に誤差評価を行う数値計算法の一つである。計算機援用証明に用いられることもあり、証明であることに重きを置く文脈では、数値的検証法と呼ばれることもある。精度保証付き数値計算の適用例は幅広く、連立一次方程式や非線形方程式といった有限次元の問題に対する解の存在検証、更には常微分方程式、あるいは偏微分方程式といった無限次元の問題に対する解の存在検証などが精度保証付き数値計算によりなされている。近年では特に力学系分野への応用が盛んであり、多くの結果が得られている。例えば、ホモクリニック軌道やヘテロクリニック軌道、周期軌道、あるいは爆発解の存在検証などが挙げられる。

力学系の解析ツールとして Lyapunov 関数と呼ばれるものがある。これはある種のエネルギー関数であり、Lyapunov 関数が構成できると解の挙動の単調性が保証されることから、力学系の解析において非常に有用なツールである。通常 Lyapunov 関数は大域的、あるいは広い定義域を持つものを考えることが多い。しかし、Lyapunov 関数は構成するのが非常に難しく、一般的な構成法はまだ確立されていない。そのため、問題ごとに Lyapunov 関数の構成を試みるのが普通である。ただし、双曲型と呼ばれるクラスの平衡点に対しては、その近傍で定義される局所的な Lyapunov 関数を二次形式により構成することが可能であることが知られており、その構成法も提案されている。しかしながら、Lyapunov 関数が構成できたとしても局所的なものでは力学系解析のツールとしては扱いづらいと考えられる。これについては、精度保証付き数値計算を組み合わせることで有用な解析ツールとなる可能性がある。

本論文では、精度保証付き数値計算と局所 Lyapunov 関数の組み合わせが有用な解析ツールとなることを示す応用例として、局所 Lyapunov 関数を用いたホモクリニック軌道の精度保証法を提案する。また、精度保証付き数値計算による Lyapunov 関数の展開として、非双曲型平衡点に対する Lyapunov 関数の構成法を提案する。これは次元や線形項の制約はあるものの、ある程度一般的な方法となっている。

本論文はⅢ部構成となっている。第Ⅰ部は序論であり、第1章および第2章により構成される。第1章では研究の背景について、第2章では精度保証付き数値計算に関する基本的な方法や原理について記述する。第Ⅱ部は精度保証付き数値計算による Lyapunov 関数の応用に関する説明を行うパートであり、第3章、第4章および第5章により構成される。ホモクリニック軌道の精度保証法についての記述はこのパートで行う。第3章では力学系の基礎として、平衡点の定義やその安

定性といった概念などに関する説明を行う。第4章では Lyapunov 関数の定義と、双曲型平衡点に対する精度保証付き数値計算を用いた局所 Lyapunov 関数の構成法についての説明を先行研究に基づき行う。また、構成した Lyapunov 関数の妥当性に関する議論も行う。第5章では、局所 Lyapunov 関数を用いたホモクリニック軌道の精度保証法を提案する。ホモクリニック軌道は、その定義上時間無限大の計算が必要となるので、精度保証付き数値計算により存在検証を行おうとすると、無限大の計算を回避する工夫が必要となる。提案手法においては、実際の軌道計算は Lyapunov 関数の定義域まで行い、以降の解の挙動については Lyapunov 関数の単調性を用いる事で理論的に保証されることを利用して、時間無限大の計算を上手く回避している。また、本手法では、局所 Lyapunov 関数以外に写像度の精度保証や Brouwer の一致点定理を用いている。これは既存のホモクリニック軌道の精度保証法とは異なるアプローチであり、新しい精度保証法を提案していると考えられる。また、本手法を3次元の数値例と4次元の数値例に適用し、実際にホモクリニック軌道の存在検証を行い、その有用性を確かめる。第III部は精度保証法付き数値計算による Lyapunov 関数の展開に関する説明を行うパートであり、第6章により構成される。ここでは、非双曲型平衡点に対する局所 Lyapunov 関数の構成法について論じる。非双曲型平衡点に対しては、Lyapunov 関数が必ず作れるとは限らない。本論文では、構成可能な場合においては、力学系の理論である標準形変換から着想を得た非線形変換を用いる事により、Lyapunov 関数が構成できる条件を導き、その構成手順を与える。非双曲型平衡点に対する Lyapunov 関数の研究は、局所的なものも含めてほとんど行われておらず、これは有意義な成果であると考えている。また、非双曲型平衡点を持つ力学系に対し提案手法を適用し、実際に非双曲型平衡点に関する局所 Lyapunov 関数の構成を行うことでその有用性を確かめる。第7章では全体のまとめおよび本研究の今後の展望について述べる。

# 目次

<b>第 I 部 序論</b>	<b>3</b>
第 1 章 背景及び本論文の構成	4
第 2 章 精度保証付き数値計算	6
2.1 区間と区間演算	6
2.2 平均値形式	7
2.3 不動点定理	8
2.3.1 Brouwer の不動点定理 [23]	8
2.3.2 Schauder の不動点定理 [23]	8
2.4 Lohner 法	8
2.4.1 常微分方程式の初期値問題の精度保証	9
2.4.2 問題設定	9
2.4.3 解の粗い包含	9
2.4.4 Taylor 展開法	11
2.4.5 平均値形式の適用	12
2.4.6 初期区間の扱い	13
2.4.7 QR 分解による座標変換	13
2.4.8 QR 分解の選択	14
<b>第 II 部 Lyapunov 関数の構成と応用</b>	<b>15</b>
第 3 章 力学系の基礎	16
3.1 力学系	16
3.2 連続力学系とその平衡点	16
3.3 ホモ・ヘテロクリニック軌道	18
第 4 章 双曲型平衡点に対する Lyapunov 関数の構成	21
4.1 Lyapunov 関数	21
4.2 Lyapunov 関数の構成法	22
4.3 Lyapunov 関数の妥当性	23
4.4 Lyapunov 関数の定義域の検証	24

<b>第 5 章</b>	<b>Lyapunov 関数を用いたホモクリニック軌道の存在検証</b>	<b>26</b>
5.1	ホモクリニック軌道の精度保証付き数値計算について . . . . .	26
5.2	提案手法の概略 . . . . .	27
5.3	Brouwer の一致点定理と写像度の精度保証 . . . . .	31
5.4	数学的準備 . . . . .	34
5.5	Lyapunov Tracing . . . . .	37
5.5.1	Lyapunov Tracing の定義 . . . . .	37
5.5.2	Lyapunov Tracing $R$ の連続性 . . . . .	38
5.6	ホモクリニック軌道の検証手順 . . . . .	44
5.7	写像 $F_1$ の構成 . . . . .	48
5.8	ホモクリニック軌道の検証法 . . . . .	53
5.9	数値例 . . . . .	56
5.9.1	3次元の数値例 . . . . .	56
5.9.2	4次元の数値例 . . . . .	66
 <b>第 III 部 精度保証付き数値計算による Lyapunov 関数の展開</b>		<b>73</b>
<b>第 6 章</b>	<b>非双曲型平衡点に対する Lyapunov 関数の構成</b>	<b>74</b>
6.1	問題設定 . . . . .	74
6.2	非線形変換と変換後の Lyapunov 関数 . . . . .	75
6.3	変換後の微分方程式の $m$ 次項の計算について . . . . .	79
6.4	変換後の微分方程式の $m$ 次項が満たすべき条件について . . . . .	81
6.5	行列 $A_m$ の固有値について . . . . .	86
6.6	数値例 . . . . .	90
<b>第 7 章</b>	<b>まとめと今後の展望</b>	<b>97</b>
7.1	第 I 部のまとめ . . . . .	97
7.2	第 II 部のまとめと今後の展望 . . . . .	97
7.3	第 III 部のまとめと今後の展望 . . . . .	97



# 第I部

## 序論

# 第1章 背景及び本論文の構成

精度保証付き数値計算とは、計算の際に生じる誤差限界を厳密に評価する数値計算法であり、計算結果の正しさが数学的に保証されるという特徴を備えている [23, 41, 42]。この数学的厳密さから純粋数学への応用も多く、精度保証付き数値計算を利用した計算機援用証明も数多くなされている [2, 3, 5, 6, 23, 34]。数学的側面に重きを置く文脈では数値的検証法と呼ばれることもあり、本論文でも数値的検証を精度保証付き数値計算と同義な言葉として扱うこととする。

精度保証付き数値計算の適用例は数多いが、近年では特に力学系分野での応用が盛んに行われている。力学系の理論による局所的な解析と精度保証付き数値計算による直接的な軌道計算を組み合わせることで、大域的な解析を含む様々な解析ができるということがその理由である。例としては、ホモクリニック軌道やヘテロクリニック軌道 [6, 31, 32, 33]、周期解 [44, 45] あるいは爆発解 [21, 28] の存在証明などが精度保証付き数値計算を援用して行われている。

力学系の解析ツールの一つとして、Lyapunov 関数がある。これは一種のエネルギー関数であり、一般に構成することが難しいとされている。しかし、双曲型と呼ばれるクラスの平衡点に対しては、その近傍で二次形式による Lyapunov 関数が構成できるという事実に着目し、精度保証付き数値計算による局所的な Lyapunov 関数 (以下局所 Lyapunov 関数) の構成法についての研究が存在する [19]。

本論文では、双曲型平衡点に対する局所 Lyapunov 関数を用いた解析の応用例として、ホモクリニック軌道の存在証明のための精度保証法を提案し、数値例によりその有用性を確認する。

また、非双曲型の平衡点に対しても、二次元の問題に限れば局所 Lyapunov 関数の構成法が確立されつつある [29, 40]。精度保証付き数値計算による Lyapunov 関数の展望として、非双曲型平衡点に関する局所 Lyapunov 関数の構成法を説明し、さらに数値例を示す。

本論文は三部からなっており、その構成は以下の通りである。

まず第 I 部では、精度保証付き数値計算の基本的な技法についての説明を行う。具体的には区間や区間演算といった基礎的な事項と、常微分方程式の精度保証法の代表格である Lohner 法について説明する。

第 II 部では、Lyapunov 関数の構成と応用として、連続力学系における双曲型平衡点に対する Lyapunov 関数の構成法、およびその応用としてホモクリニック軌道の存在検証のための精度保証法について説明する。第 3 章では力学系、特に自励系常微分方程式により定義される連続力学系に関する基礎的な事項について説明を行う。第 4 章では、Lyapunov 関数の定義と双曲型平衡点に対する Lyapunov 関数の構成法、およびその定義域の精度保証付き数値計算による検証法について

説明を行う。第5章では、Lyapunov関数を用いてホモクリニック軌道の存在検証を行うための精度保証付き数値計算法について説明を行う。また、二つの数値例を用いて本手法の有用性を確認する。

第III部では、精度保証付き数値計算によるLyapunov関数の展開として、連続力学系の非双曲型平衡点に対するLyapunov関数の構成法について説明する。これは双曲型の場合と異なり、統一的な構成法はまだ確立できていないが、二次元でさらに線形部分を特定の形に絞ることである程度の結果が得られており、これについて第6章で述べる。第7章では、本論文全体のまとめと本研究の今後の展望について記述する。

## 第2章 精度保証付き数値計算

本章では精度保証付き数値計算の基礎として、区間や区間演算、不動点定理などについての説明を [23, 42] に基づき行う。また、常微分方程式に対する精度保証付き数値計算として、Lohner 法に関する説明も [47] に基づき行う。

### 2.1 区間と区間演算

通常、計算機で使用されている浮動小数点数では有限桁の数しか扱えないので実数をそのまま扱うことは出来ない。そこで、精度保証付き数値計算では区間と呼ばれる実数の閉集合を基本単位として計算を行うことが多い。

**定義 2.1.1** (区間).  $\underline{x} \leq \bar{x}$  を実数とする。実数  $\mathbb{R}$  上の閉集合として、区間  $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$  を以下で定義する：

$$[x, \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}. \quad (2.1.1)$$

計算の基本単位として区間を用いて計算を行うことで、真の解が包含される区間を得る、というのが精度保証付き数値計算の基本的な考え方である。区間の表現の仕方としては、上述した上限・下限で表す方法と、中心・半径で表す方法の二種類がある。中心  $c$ 、半径  $r \geq 0$  をともに実数としたとき、中心・半径形式による区間  $\langle c, r \rangle$  は以下のように記述される。

$$\langle c, r \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid c - r \leq x \leq c + r\}. \quad (2.1.2)$$

二つの区間  $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$ ,  $[y] = [\underline{y}, \bar{y}]$  の間の演算は、それぞれの区間に含まれる任意の実数同士の演算結果をすべて包含する最小の有界閉区間として定義される。この区間同士の演算を区間演算と呼ぶ。四則演算については以下ようになる。

$$\begin{aligned} [x] + [y] &= [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}], \\ [x] - [y] &= [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}], \\ [x] * [y] &= [\xi, \eta], \\ \xi &= \min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}, \\ \eta &= \max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}, \\ [x]/[y] &= [\underline{x}, \bar{x}] * [1/\bar{y}, 1/\underline{y}], \quad 0 \notin [y]. \end{aligned}$$

演算結果の上限・下限が浮動小数点数にならない場合は、上限の場合は上向きに、下限の場合は下向きに丸めた結果の浮動小数点数を上限・下限とする。

また、区間演算では分配則が成り立たず、次の半分配則しか成り立たないことに注意が必要である。

区間演算に対する半分配則

区間  $A$ , 区間または実数  $B, C$  について、

$$A * (B + C) \subset A * B + A * C \quad (2.1.3)$$

は成り立つが、逆向きの包含は一般には成立しない。

したがって、区間演算においては同じ変数はできるだけくくって計算したほうが区間の拡大を抑えられる。また、区間演算は加算と乗算についての逆元を持たない、つまり、

$$[x] - [x] \neq [0, 0],$$

$$[x]/[x] \neq [1, 1]$$

であることにも注意が必要である。

区間を成分として持つベクトル、行列をそれぞれ区間ベクトル、区間行列と呼び、それらの間の演算は通常のベクトル、行列に対する演算と同様に定義される。

区間を用いて計算を進めることにより、数学的に厳密な解を含む区間が得られるが、区間演算をそのまま適用したのでは過大評価により区間幅が拡大し過ぎてしまい、結果として意味をなさない場合がある。区間拡大の原因は大きく分けて二つある。

一つは Dependency Problem と呼ばれるもので、数式の表現によって区間拡大が起きてしまう現象である。これは区間に関して分配則が成立しないことに起因する区間拡大であり、特に区間に関する非線形演算で起こりやすい。この軽減には次節で述べる平均値形式やそのバリエーションがよく用いられる。

もう一つは Wrapping Effect (W.E.) と呼ばれる現象である。これは区間ベクトルと行列との積により区間ベクトルが歪み・回転作用を受けてしまい、その計算結果を区間として包含するときに生じる区間拡大である。一般に大きな W.E. は歪み作用ではなく回転作用により引き起こされることが多い。この区間拡大は行列ベクトル積の繰り返しにより指数関数的に増加していくので、精度保証においては行列ベクトル積の計算には注意が必要である。軽減方法としては、行列ベクトル積を計算し得られるベクトルにまた行列をかける、といった計算を繰り返す場合は、先に行列と行列の積を計算していき、最後にベクトルをかけることで W.E. を一回で抑える方法や、QR 分解による座標回転を用いる方法などがある。

## 2.2 平均値形式

区間  $[u]$  に対し、 $C^1$  級関数  $g: [u] \rightarrow \mathbb{R}$  を考え、その値域  $g([u]) = \{g(u) | u \in [u]\}$  を包含する区間を  $[g([u])]$  と書く。このような区間のひとつとして次式の右辺で得

られるものが考えられる。

$$g([u]) \subset g(\hat{u}) + [g'([u])]( [u] - \hat{u} ), \quad \hat{u} \in [u]. \quad (2.2.1)$$

$\hat{u}$  は  $[u]$  に属する任意の点とすることができるが、通常はその中心値を取る。この右辺を  $g([u])$  の  $\hat{u}$  における平均値形式という。

また、区間ベクトル  $[u]$ 、ベクトル値関数  $g$  に対しても同様に平均値形式を考えることができる。

## 2.3 不動点定理

精度保証付き数値計算では、解の存在を保証するために不動点定理を用いることが多い。本節では、精度保証付き数値計算でよく用いられる二つの不動点定理を紹介する。

### 2.3.1 Brouwer の不動点定理 [23]

Brouwer の不動点定理は、有限次元空間において不動点の存在及び存在範囲を保証する定理であり、精度保証付き数値計算においては有限次元の問題に対する解の存在を保証する原理として利用されることが多い。

**定理 2.3.1** (Brouwer の不動点定理).  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  を有界凸閉集合、 $f$  を  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  の連続写像としたときに  $f$  は不動点を持つ。すなわち、 $f(x) = x$  を満たす  $x \in \Omega$  が存在する。

### 2.3.2 Schauder の不動点定理 [23]

Schauder の不動点定理は、Banach 空間において不動点の存在及び存在範囲を保証する定理であり、微分方程式や積分方程式などの無限次元の問題の解の存在を保証するためによく用いられる。

**定理 2.3.2** (Schauder の不動点定理).  $M$  を Banach 空間  $X$  の空でない有界凸閉集合とし、 $T : M \rightarrow M$  がコンパクト作用素であるとき、 $T$  は  $M$  に不動点を持つ。すなわち、 $Tx = x$  を満たす  $x \in M$  が存在する。

## 2.4 Lohner 法

Lohner 法とは R.J.Lohner により考案された常微分方程式 (ordinary differential equation、以下 ODE と記述することもある) の初期値問題に対する精度保証法で、Schauder の不動点定理と Taylor 展開法に基づき、QR 分解を利用して区間拡大を抑えた手法であり、常微分方程式の初期値問題に対し広く利用されている。本節ではこの Lohner 法についての説明を [47] に基づき行う。

### 2.4.1 常微分方程式の初期値問題の精度保証

正規系の高階の ODE は、連立一階の ODE に変形することができ、数値計算ではこの形のもを扱うのが一般的である。そこで、ここでは次のような正規形の連立一階 ODE の初期値問題に対する精度保証について考える。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), & 0 < t < T, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

ここに、 $\mathbf{x}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  は  $m$  次元ベクトル値関数であり、 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$  は  $m$  次元ベクトルである。問題 (2.4.1) の解の一意存在性については、右辺  $\mathbf{f}$  が  $\mathbf{x}$  に関して Lipschitz 連続であることが十分条件であり、これは数学的な解析により示すことが可能な場合が多い。よって、この形の ODE の精度保証における中心的な問題は解の存在検証ではなく、如何にして誤差の上限に近い誤差限界を与えるかということになる。

打ち切り誤差の評価は計算法にしたがって決まる。また、区間拡大の大きな原因は前述のように W.E. と Dependency Problem による。Lohner 法では、Dependency Problem に起因する区間拡大については平均値形式を用いることで抑えており、W.E. に起因する区間拡大については、初期区間の線形部分をくくりだし行列積を先に計算させること、および QR 分解による座標回転を用いることで抑えている。また、Lohner 法以外の常微分方程式の初期値問題に関する精度保証法としては、べき級数演算を用いた方法 [9, 10, 43] や、Taylor model method と呼ばれる方法 [16, 17] などが存在する。

以下では、Lohner 法について説明する。

### 2.4.2 問題設定

以下の ODE の初期値問題を考える。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}), & 0 < t < T, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \in [\mathbf{u}_0] \subset D \subset \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

ここに、 $\mathbf{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^m$  であり、 $\mathbf{f}$  は定義域が  $[0, T] \times D, D \subset \mathbb{R}^m$  で、 $t, \mathbf{u}$  に関して  $p$  回連続微分可能な写像である。また、初期値  $\mathbf{u}_0$  は区間ベクトル  $[\mathbf{u}_0]$  の任意の点であるとする。

### 2.4.3 解の粗い包含

時間軸上に分点  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$  を設定し、ステップ幅  $h_j$  を  $h_j = t_{j+1} - t_j$  と定める。まず、 $[t_j, t_{j+1}]$  で真の解を包含する区間ベクトル  $[\mathbf{u}]$  を Schauder の不動点定理を用いて求める。そのためにまず  $\mathbf{u}$  の積分方程式を導く。

式 (2.4.2) を  $t_j$  から  $t$  ( $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ ) まで積分し、 $\mathbf{u}$  について整理することで次の式を得る。

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_j + \int_{t_j}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{u}(\tau)) d\tau. \quad (2.4.3)$$

この右辺は  $\mathbf{u}$  に関する作用素とみなすことが出来るので、右辺を  $F(\mathbf{u})$  とおくと、不動点方程式

$$\mathbf{u} = F(\mathbf{u}) \quad (2.4.4)$$

が得られる。積分作用素と連続写像の合成はコンパクト作用素であるという事実から、式 (2.4.4) の右辺  $F$  はコンパクト作用素である。

関数空間として  $[t_j, t_{j+1}]$  上の連続関数を要素に持つ  $m$  次元ベクトル全体の集合  $(C[t_j, t_{j+1}])^m$  を考える。 $\mathbf{f} \in (C[t_j, t_{j+1}])^m$  に対してノルム  $\|\mathbf{f}\|$  を

$$\|\mathbf{f}\| = \max_{1 \leq i \leq m} \left( \max_{t_j \leq t \leq t_{j+1}} |f_i(t)| \right) \quad (2.4.5)$$

として定めると  $(C[t_j, t_{j+1}])^m$  はこのノルムのもとで Banach 空間となる。

以上から Schauder の不動点定理より、

$$F([\mathbf{u}]) \subset [\mathbf{u}] \quad (2.4.6)$$

を満たす  $(C[t_j, t_{j+1}])^m$  の有界凸閉集合  $[\mathbf{u}]$  が得られれば、 $[\mathbf{u}]$  に不動点方程式 (2.4.4) の解が存在する。今、 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^m$  を選んで

$$[\mathbf{u}] = \{\mathbf{u} \in (C[t_j, t_{j+1}])^m \mid \boldsymbol{\alpha} \leq \mathbf{u}(t) \leq \boldsymbol{\beta}, \forall t \in [t_j, t_{j+1}]\} \quad (2.4.7)$$

と定めるとこれは有界凸閉集合である。なお、不等号は成分ごとに成立するものとする。 $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$  を下限が  $\boldsymbol{\alpha}$ 、上限が  $\boldsymbol{\beta}$  で与えられる区間ベクトルとする。まず、 $\mathbf{u}(\tau) \in [\mathbf{u}]$  のもとで  $\int_{t_j}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{u}(\tau)) d\tau \in \int_{t_j}^t \mathbf{f}(\tau, [\mathbf{u}]) d\tau$  であり、さらに  $t$  を固定して考えることで区間ベクトル同士の包含関係に帰着され、

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^t \mathbf{f}(\tau, [\mathbf{u}]) d\tau &\subset \int_{t_j}^t \mathbf{f}(\tau, [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]) d\tau \\ &\subset \int_{t_j}^t \mathbf{f}([t_j, t_{j+1}], [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]) d\tau \\ &= (t - t_j) \mathbf{f}([t_j, t_{j+1}], [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]) \\ &\subset [0, h] \mathbf{f}([t_j, t_{j+1}], [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]) \end{aligned}$$

となる。これより Schauder の不動点定理の条件を満たすための十分条件として、

$$[\mathbf{u}_j] + [0, h] \mathbf{f}([t_j, t_{j+1}], [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]) \subset [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] \quad (2.4.8)$$

が得られる。よって、条件 (2.4.8) を満たすように  $[\mathbf{u}] = [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$  を定めればよい。

通常、反復計算に関する  $[\mathbf{u}]$  の初期値を、時刻  $t_j$  における解  $\mathbf{u}_j$  を包含する区間  $[\mathbf{u}_j]$  とし、以下の反復アルゴリズムを用いることで条件 (2.4.8) を満たす  $[\mathbf{u}]$  が得られる。



1. 式 (2.4.8) の左辺を区間演算で計算し、これを包含する区間ベクトルを  $[v]$  とおく。
2.  $[v] \subset [\alpha, \beta]$  をチェックし、成立していれば  $[\alpha, \beta] := [v]$  とおき直して終了。
3. そうでなければ  $[\alpha, \beta] := (1 + \varepsilon)[v] - \varepsilon[v]$  とおき 1 に戻る。

$\varepsilon$  はあらかじめ定めた小さな正定数である。これにより  $[u]$  は  $[v]$  と区間中心が等しく、区間半径が  $[v]$  の  $1 + 2\varepsilon$  倍のものとなる。この反復法のことを  $\varepsilon$ -inflation と呼ぶ。

ここで得られる  $[\alpha, \beta]$  を用いて式 (2.4.7) により  $[u]$  を定める。このとき、 $[u]$  は真の解を包含してこそいるが、十分な精度とは言えない粗い包含である。そこで、打ち切り誤差の評価が簡単な Taylor 展開法を用い、より区間半径の小さな包含を求める。

#### 2.4.4 Taylor 展開法

$t = t_j$  での解  $u_j$  を包含する区間を  $[u_j]$  とする。区間  $[u_j]$  と前節で求めた  $[t_j, t_{j+1}]$  における真の解を包含する区間  $[u]$ 、ODE の数値計算法の一つである Taylor 展開法を組み合わせることで、より精度の高い  $[u_{j+1}]$  を得ることを考える。Taylor 展開法はその名の通り Taylor 展開を用いた数値解法で、以下のようなものである。

まず、 $u_{j+1} = u(t_j + h)$  を  $t = t_j$  の周りで Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned} u_{j+1} = u(t_j) + \dot{u}(t_j)h + \frac{1}{2!}\ddot{u}(t_j)h^2 + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}u^{(p-1)}(t_j)h^{p-1} \\ + \frac{1}{p!}u^{(p)}(t_j + \theta h)h^p, \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

となる。ここで、上付きのドット  $\dot{\cdot}$  は時間による微分を表す。また、正確には  $\theta$  は成分ごとに違う値を取るが、表記を簡単にするため、ただ  $\theta$  と記述した。さらに、

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{du}{dt} = f(t_j, u_j), \\ \ddot{u} &= \frac{d}{dt}f = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} f(t_j, u_j) \end{aligned}$$

などと式変形することができる。そこで、

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= f, \\ f^{(k+1)} &= \frac{1}{k+1} \left( \frac{\partial f^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial f^{(k)}}{\partial u} f \right) \end{aligned}$$

とおき、これらを用いることで、式 (2.4.9) は

$$u_{j+1} = u_j + \sum_{k=1}^{p-1} h^k f^{(k)}(t_j, u_j) + h^p f^{(p)}(t_j + \theta h, u(t_j + \theta h)) \quad (2.4.10)$$

と書くことが出来る。これが Taylor 展開法である。 $\mathbf{f}^{(p)}(t_j + \theta h, \mathbf{u}(t_j + \theta h)) \in \mathbf{f}^{(p)}([t_j, t_{j+1}], [\mathbf{u}])$  に注意し、区間  $[\mathbf{u}]$  を用いて  $[\mathbf{u}_j]$  に Taylor 展開法を適用することで

$$[\mathbf{u}_{j+1}] = [\mathbf{u}_j] + \sum_{k=1}^{p-1} h^k \mathbf{f}^{(k)}(t_j, [\mathbf{u}_j]) + h^p \mathbf{f}^{(p)}([t_j, t_{j+1}], [\mathbf{u}]) \quad (2.4.11)$$

を得る。

導関数の計算は、 $p = 4$  程度ならば手計算で導出することも不可能ではないが、その場合十分な精度が得られないことも多いので、可能であれば精度保証付き自動微分、あるいは数式処理を用いることが望ましい。

## 2.4.5 平均値形式の適用

式 (2.4.11) の計算はそのまま行くと  $[\mathbf{u}_j]$  より小さな区間幅になることは望めない。そこで平均値形式を適用し、より小さな区間を得ることを試みる。まず次のように式変形を行う。

$$\begin{aligned} \Phi([\mathbf{u}_j]) &= \sum_{k=1}^{p-1} h^{k-1} \mathbf{f}^{(k)}(t_j, [\mathbf{u}_j]), \\ [\mathbf{z}_j] &= h^p \mathbf{f}^{(p)}([t_j, t_{j+1}], [\mathbf{u}]). \end{aligned}$$

これらを用いる事で、式 (2.4.11) は

$$[\mathbf{u}_{j+1}] = [\mathbf{u}_j] + h\Phi([\mathbf{u}_j]) + [\mathbf{z}_j] \quad (2.4.12)$$

と書ける。さらに  $[\mathbf{u}_j]$  を中心ベクトル  $\hat{\mathbf{u}}_j$  と誤差区間ベクトル  $[\mathbf{r}_j] := [\mathbf{u}_j] - \hat{\mathbf{u}}_j$  に分けて、式 (2.4.12) の右辺に対して  $\hat{\mathbf{u}}_j$  に関する平均値形式を適用することで、

$$[\mathbf{u}_j] + h\Phi([\mathbf{u}_j]) + [\mathbf{z}_j] \subset \hat{\mathbf{u}}_j + h\Phi(\hat{\mathbf{u}}_j) + \left( I_m + h \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{u}=[\mathbf{u}_j]} \right) [\mathbf{r}_j] + [\mathbf{z}_j] \quad (2.4.13)$$

を得る。 $I_m$  は  $m$  次単位行列である。ここで区間行列  $[A_j]$  を、

$$[A_j] = I_m + h \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{u}=[\mathbf{u}_j]}$$

とおき、 $[A_j]$  の中心行列を  $\hat{A}_j$  とし、 $\langle A \rangle := [A_j] - \hat{A}_j$  とおく。これらを用いて、

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_{j+1} &= \hat{\mathbf{u}}_j + h\Phi(\hat{\mathbf{u}}_j), \\ [\boldsymbol{\varepsilon}_j] &= \langle A \rangle [\mathbf{r}_j] + [\mathbf{z}_j] + [\mathbf{e}_R], \\ [\mathbf{r}_{j+1}] &= \hat{A}_j [\mathbf{r}_j] + [\boldsymbol{\varepsilon}_j] \end{cases} \quad (2.4.14)$$

と算定し、

$$[\mathbf{u}_{j+1}] = \hat{\mathbf{u}}_{j+1} + [\mathbf{r}_{j+1}] \quad (2.4.15)$$

とする。ただし、 $\hat{\mathbf{u}}_{j+1}$  は点区間による区間演算を行い、結果の中心値を取ることにより計算する。またこの結果から中心値を引いて得られる区間を  $[e_R]$  とする。この区間は  $\hat{\mathbf{u}}_{j+1}$  の丸め誤差に相当する。以上の計算により  $[\mathbf{u}_{j+1}]$  を中心値と誤差区間で表すことができたことになる。

### 2.4.6 初期区間の扱い

このまま式 (2.4.14)、(2.4.15) を計算したのでは行列区間ベクトル積が繰り返されることにより W.E. が繰り返し引き起こされる。そこで、 $[\mathbf{r}_j]$  の計算を工夫することで、 $[\mathbf{r}_0]$  に起因する W.E. を軽減することを考える。

まず定義より  $[\mathbf{r}_0] := [\mathbf{u}_0] - \hat{\mathbf{u}}_0$  である。

$$[\mathbf{r}_j] := [\hat{\mathbf{r}}_j] + C_j[\mathbf{r}_0], \quad C_0 := I_m, [\hat{\mathbf{r}}_0] := 0 \quad (2.4.16)$$

とおくと、式 (2.4.14)、(2.4.16) より、

$$\begin{cases} [\mathbf{r}_{j+1}] = C_{j+1}[\mathbf{r}_0] + [\hat{\mathbf{r}}_{j+1}], \\ [\hat{\mathbf{r}}_{j+1}] = \hat{A}_j[\hat{\mathbf{r}}_j] + [\varepsilon_j], \\ C_{j+1} = \hat{A}_j C_j \end{cases} \quad (2.4.17)$$

を得る。ただし、 $C_{j+1}$  は  $\hat{\mathbf{u}}_j$  と同様に点区間による区間演算で行い結果の中心値をとることで算定する。結果から中心値を引いて得られる丸め誤差に相当する区間行列に  $[\mathbf{r}_0]$  を乗じ、これを (2.4.14) の  $[\varepsilon_j]$  に加えたものを改めて  $[\varepsilon_j]$  とする。

以上より  $[\mathbf{r}_{j+1}]$  の代わりに  $[\hat{\mathbf{r}}_{j+1}]$  を利用することで、

$$[\mathbf{u}_{j+1}] = \hat{\mathbf{u}}_{j+1} + [\hat{\mathbf{r}}_{j+1}] + C_{j+1}[\mathbf{r}_0] \quad (2.4.18)$$

が得られる。式 (2.4.18) を用いて計算することにより、初期区間  $[\mathbf{r}_0]$  に起因する W.E. を一回のみに抑えることが可能となる。

### 2.4.7 QR 分解による座標変換

式 (2.4.17)、(2.4.18) にしたがって計算することで、確かに初期区間に起因する W.E. は軽減できる。しかし、 $[\hat{\mathbf{r}}_{j+1}]$  の計算により初期区間の高次の誤差や丸め誤差・打ち切り誤差の影響は伝搬してしまい、それが W.E. の影響を受ける。前述のように W.E. による区間拡大は歪み作用より回転作用による影響が大きい。そこで QR 分解による座標変換を行い、 $\hat{A}_j$  の持つ回転作用による W.E. を小さくすることを考える。

座標変換に用いる行列を  $B_j$  として、

$$[\hat{\mathbf{r}}_j] = B_j[\tilde{\mathbf{r}}_j] \quad (2.4.19)$$

とおく。同様に  $[\hat{\mathbf{r}}_{j+1}] = B_{j+1}[\tilde{\mathbf{r}}_{j+1}]$  である。そこで  $B_j$  から  $B_{j+1}$  を算出する方法を考える。(2.4.17) より  $[\hat{\mathbf{r}}_{j+1}] = \hat{A}_j[\hat{\mathbf{r}}_j] + [\boldsymbol{\varepsilon}_j]$  であるから、これと (2.4.19) より

$$[\tilde{\mathbf{r}}_{j+1}] = B_{j+1}^{-1}\hat{A}_jB_j[\tilde{\mathbf{r}}_j] + B_{j+1}^{-1}[\boldsymbol{\varepsilon}_j] \quad (2.4.20)$$

を得る。回転による W.E. を軽減するためには、 $B_{j+1}^{-1}\hat{A}_jB_j$  が出来るだけ回転を引き起こさないように  $B_{j+1}$  を定めればよく、そのためには QR 分解を用い回転作用を司る直交行列  $Q$  を打ち消せばよい。具体的には以下の手順で行う。

1.  $B_0 = I_m$  とする。
2. 近似計算で  $\hat{A}_jB_j = QR$  と分解する。
3.  $B_{j+1} = Q$  ととる。
4. 精度保証法で  $B_{j+1}$  の逆行列を含む区間行列  $[B_{j+1}^{-1}]$  を計算する。
5. 区間行列  $[R] = [B_{j+1}^{-1}]\hat{A}_jB_j$  を精度保証法で計算する。
6. 精度保証法で  $[\tilde{\mathbf{r}}_{j+1}] = [R][\tilde{\mathbf{r}}_j] + [B_{j+1}^{-1}][\boldsymbol{\varepsilon}_j]$  を計算する。

以上のように計算することで  $[\tilde{\mathbf{r}}_j]$  に対する W.E は歪み作用に対応する区間行列  $[R]$  によるもののみとなる。

## 2.4.8 QR 分解の選択

歪み作用による W.E. も軽減するために QR 分解の際に列の置換を行う。具体的には以下の手順に従う。

1.  $D_j = \hat{A}_jB_j$  とおく。  $D_j = (\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m)$  と表記する。
2.  $l_i = \|\mathbf{d}_i\|_2 \times (\text{区間 } [\mathbf{r}_j] \text{ の第 } i \text{ 要素の区間半径})$  とし、  $l = (l_1, \dots, l_m)$  とする。  
ここで、 $l_i$  は平行四辺形  $\{x = D_j\mathbf{r} \mid \mathbf{r} \in [\tilde{\mathbf{r}}_j]\}$  の一辺の長さの半分に相当する。
3. 置換行列  $P_j$  を

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^* &= lP_j \\ &= (l_1^*, \dots, l_m^*) \end{aligned}$$

が  $l_1^* \geq l_2^* \geq \dots \geq l_m^*$  となるように選ぶ。

4.  $D_j^* = D_jP_j$  とし、近似計算で  $D_j^* = Q^*R^*$  と QR 分解する。
5.  $B_{j+1} = Q^*$  とおき以降は前述の手順に従い計算する。

以上で Lohner 法の説明は終了である。

## 第II部

# Lyapunov関数の構成と応用

## 第3章 力学系の基礎

本章では、力学系、特に連続力学系における平衡点の安定性やホモクリニック軌道やヘテロクリニック軌道に関する説明を行う。

### 3.1 力学系

力学系とは、時間発展とともに状態が変化する系を記述する数学モデルである。時間として離散量を考えるときその力学系を離散力学系と呼び、連続量を考えるとき連続力学系と呼ぶ。

本論文では常微分方程式系により記述される連続力学系を扱うので、以下ではその基礎的事項について [36, 44, 46] に基づき簡単に記述する。

### 3.2 連続力学系とその平衡点

以下では自励系常微分方程式系

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), t \in \mathbb{R} \quad (3.2.1)$$

により記述される連続力学系について考える。ここで、 $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は、ともに連続微分可能な関数とする。自励系とは右辺に時間  $t$  が陽に含まれないことを意味する。また、自励系においては異なる初期点から出発した解軌道が互いに交わらないという特徴がある。点  $\mathbf{x}$  を初期点とする解軌道を  $\varphi(t, \mathbf{x})$  と表記する。

式 (3.2.1) により表される連続力学系の平衡点を次で定義する。

**定義 3.2.1** (平衡点). 式 (3.2.1) の右辺  $\mathbf{f}$  に対し、

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

を満たす点  $\mathbf{x}^*$  を系 (3.2.1) の平衡点と呼ぶ。

次に平衡点に対し、安定性の概念の導入する。

**定義 3.2.2** (安定・不安定). 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、ある  $\delta > 0$  が存在し、

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t, \mathbf{x}) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon, \forall t > 0$$

が成立するとき、平衡点  $\mathbf{x}^*$  は安定であるという。安定でない平衡点は不安定であるという。

**定義 3.2.3** (漸近安定). 平衡点  $\mathbf{x}^*$  が安定であって、さらに

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, \mathbf{x}) - \mathbf{x}^*\| = 0$$

が成り立つとき、平衡点  $\mathbf{x}^*$  は漸近安定であるという。

線形の力学系、つまり定数行列  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  を用いて

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} \quad (3.2.2)$$

と表される場合について考える。線形系については、平衡点  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  の安定性に関して以下のことが知られている。

1.  $A$  のすべての固有値  $\lambda$  について

$$\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$$

かつ、実部 0 の固有値が (もしも存在するならば) semi-simple、つまり実部 0 の固有値に対して長さ 2 以上の Jordan 細胞を持たないのであれば  $\mathbf{x}^*$  は安定である。

2.  $A$  のすべての固有値  $\lambda$  について

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

ならば  $\mathbf{x}^*$  は漸近安定である。

3.  $A$  の固有値のうち

$$\operatorname{Re}(\lambda) > 0$$

となるものがあれば  $\mathbf{x}^*$  は不安定である。

次に非線形系の平衡点の安定性について考える。これは平衡点における線形化方程式を考えることで判別することができる。

(3.2.1) における右辺  $\mathbf{f}$  の平衡点  $\mathbf{x}^*$  における Jacobi 行列を  $D\mathbf{f}^* = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$  と表し、 $\mathbf{x}^*$  における線形化方程式

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = D\mathbf{f}^*\mathbf{y}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad (3.2.3)$$

を考える。このとき、以下が成立する。

1. 線形系 (3.2.3) の平衡点  $\mathbf{y}^*$  が漸近安定であれば、非線形系 (3.2.1) の平衡点  $\mathbf{x}^*$  も漸近安定である。
2. 線形系 (3.2.3) の平衡点  $\mathbf{y}^*$  が不安定であれば、非線形系 (3.2.1) の平衡点  $\mathbf{x}^*$  も不安定である。

線形系 (3.2.3) の平衡点  $\mathbf{y}^*$  が安定であっても、行列  $D\mathbf{f}^*$  の固有値に実部 0 のものが含まれる場合、元の系 (3.2.1) の平衡点  $\mathbf{x}^*$  の安定性については判断することが出来ない。

Jacobi 行列  $D\mathbf{f}^*$  が実部 0 の固有値を一つも持たないとき、平衡点  $\mathbf{x}^*$  を双曲型平衡点と呼び、実部 0 の固有値を一つでも持つとき、平衡点  $\mathbf{x}^*$  を非双曲型平衡点と呼ぶ。

また、双曲型平衡点においてその Jacobi 行列が実部正の固有値と実部負の固有値を共に持つ場合、その平衡点をサドルと呼ぶ。サドルについて以下が成り立つ。

サドルの性質

Jacobi 行列  $D\mathbf{f}^*$  の固有値のうち、実部正の固有値の数を  $u$  個、実部負の固有値の数を  $s$  個とする。このとき、 $s + u = n$  が成り立つ。さらに、 $\mathbf{x}^*$  の安定多様体の次元は  $s$ 、不安定多様体の次元は  $u$  である。

ここで、平衡点  $\mathbf{x}^*$  の安定多様体、不安定多様体は次で定義される。

**定義 3.2.4** (安定多様体・不安定多様体). 系 (3.2.1) とその平衡点  $\mathbf{x}^*$  に対し、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^* \quad (3.2.4)$$

を満たす初期点  $\mathbf{x}$  の集合を安定集合と呼び、安定集合が多様体をなす場合にそれを安定多様体と呼ぶ。

同様に、

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^* \quad (3.2.5)$$

を満たす初期点  $\mathbf{x}$  の集合を不安定集合と呼び、不安定集合が多様体をなす場合にそれを不安定多様体と呼ぶ。

### 3.3 ホモ・ヘテロクリニック軌道

本節では、平衡点を繋ぐ軌道であるホモクリニック軌道、ヘテロクリニック軌道の定義を与える。

**定義 3.3.1** (ホモクリニック軌道・ヘテロクリニック軌道). 系 (3.2.1) の平衡点を  $\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*$  とし、

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}_1^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}_2^* \quad (3.3.1)$$

を満たす軌道  $\varphi(t, \mathbf{x})$  を考える。このとき、 $\mathbf{x}_1^* = \mathbf{x}_2^*$  であれば、軌道  $\varphi(t, \mathbf{x})$  をホモクリニック軌道と呼び、 $\mathbf{x}_1^* \neq \mathbf{x}_2^*$  であれば、軌道  $\varphi(t, \mathbf{x})$  をヘテロクリニック軌道と呼ぶ。



ホモクリニック軌道やヘテロクリニック軌道には、平衡点が構造安定であってもその平衡点に対するホモクリニック軌道やヘテロクリニック軌道は構造不安定となるという特徴がある。つまり、系 (3.2.1) が例えばホモクリニック軌道を持つ場合、系に適当な摂動を加えると、通有的にはそのホモクリニック軌道は消滅する。また、系がホモクリニック軌道を持っている場合と、摂動によりホモクリニック軌道が消失している場合とでは、平衡点近傍の軌道は位相同値とはならない。

この様な理由から、ある力学系の性質を調べるときに、その系がホモクリニック軌道やヘテロクリニック軌道を持つかどうか、持つとしたら摂動により系がどのように変化するかを解析することは重要である。ホモクリニック軌道やヘテロクリニック軌道の性質についてより詳しくは [13, 36]などを参照されたい。

また、ホモクリニック軌道やヘテロクリニック軌道と関連する現象として、反応拡散方程式、あるいは反応拡散方程式を連立したものである反応拡散系における進行波解が挙げられる。以下では、進行波解とホモクリニック軌道、ヘテロクリニック軌道との関連について、[38]に基づき簡単に説明する。反応拡散方程式は、生物学や物理学など幅広い分野において現れる方程式で、空間1次元の反応拡散方程式とは、次で定義される偏微分方程式である：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u). \quad (3.3.2)$$

ここで、 $t \in \mathbb{R}$  は時間、 $x \in \mathbb{R}$  は空間を表す変数で、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は連続関数とする。また、進行波解とは、形を崩さず一定の速度で進む解のことである。

方程式 (3.3.2) の進行波解を求めるためには、動座標  $z = x - ct$  を導入し、 $u = \phi(x - ct)$  の形の解を見つけられればよい。速度  $c$  の進行波解  $u = \phi(z)$  は2階常微分方程式の境界値問題の解として与えられる：

$$\phi'' + c\phi' + f(\phi) = 0, \quad -\infty < z < \infty, \quad \phi(-\infty) = \alpha, \quad \phi(\infty) = \omega. \quad (3.3.3)$$

ここで、 $'$  は  $z$  による微分を表し、 $\alpha, \omega$  は  $f(u)$  の零点とする。

$$\phi_1 = \phi, \quad \phi_2 = \phi_1'$$

とおくことで、式 (3.3.3) は次の連立1階の常微分方程式系に変換できる。

$$\begin{cases} \phi_2' + c\phi_2 + f(\phi_1) = 0, \\ \phi_1' = \phi_2. \end{cases} \quad (3.3.4)$$

問題 (3.3.3) の解を見つけることは、問題 (3.3.4) において

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} (\phi_1, \phi_2) = (\alpha, 0), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} (\phi_1, \phi_2) = (\omega, 0)$$

となる解を見つけることと同値であり、これは式 (3.3.4) が定める力学系において、ホモクリニック軌道あるいはヘテロクリニック軌道を見つけることと同値である。

反応拡散系における進行波解についても、同様の議論により、ホモクリニック軌道やヘテロクリニック軌道を見つける問題に帰着させることができる。

よって、進行波解の解析には、元の偏微分方程式から導かれる常微分方程式が定める力学系におけるホモクリニック軌道やヘテロクリニック軌道を見つけることが重要である。進行波解の研究が進んでいる反応拡散系としては、例えば Fisher–KPP 方程式や FitzHugh–Nagumo 方程式、Gray–Scott 方程式などが挙げられる [7, 48, 49]。

# 第4章 双曲型平衡点に対する Lyapunov関数の構成

本章では、連続力学系の双曲型平衡点に対する Lyapunov 関数の精度保証付き数値計算による構成法、およびその定義域の検証法について説明する。

## 4.1 Lyapunov 関数

平衡点周辺における解析の有効な道具として Lyapunov 関数と呼ばれるものがある。これは一般には構成するのが困難であるといわれているが、精度保証を援用することで、双曲型平衡点の近傍で局所的な Lyapunov 関数を構成することが可能である。以下では、Lyapunov 関数の定義とその構成法について [19, 44] に基づき記述する。

**定義 4.1.1.** 系 (3.2.1) とその平衡点  $\mathbf{x}^*$  を考え、 $D_L \subset \mathbb{R}^n$  を  $\mathbf{x}^*$  を内点に含む有界集合とする。 $C^1$  級関数  $L : D_L \rightarrow \mathbb{R}$  が以下の条件を満たすとき、 $L$  を系 (3.2.1) の平衡点  $\mathbf{x}^*$  における (局所) Lyapunov 関数と呼ぶ。

1. 任意の  $\mathbf{x} \in D_L$  を初期点とする解軌道  $\{\varphi(t, \mathbf{x})\}$  について

$$\left. \frac{d}{dt} L(\varphi(t, \mathbf{x})) \right|_{t=0} \leq 0$$

が成立する。

- 2.

$$\left. \frac{d}{dt} L(\varphi(t, \mathbf{x})) \right|_{t=0} = 0$$

が成立するのは  $\varphi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^*$  のときに限る。

通常の Lyapunov 関数では漸近安定の平衡点しか扱わないので上述の条件に加えてさらに

$$L(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in D_L \setminus \{\mathbf{x}^*\}$$

という条件を課すが、ここではこの条件を排除することによりサドルに対しても利用できる Lyapunov 関数を考える。

## 4.2 Lyapunov 関数の構成法

双曲型平衡点の近傍では、以下の手順により Lyapunov 関数を構成することが出来る。

1. 系 (3.2.1) の右辺  $f$  の双曲型平衡点  $\mathbf{x}^*$  における Jacobi 行列  $Df^*$  を対角化する。対角化出来ないときは Jordan 標準形を用いることで同様の議論を行うことができる [19]。ここでは簡単のため  $Df^*$  が対角化できるとする。すなわち、 $\Lambda$  を固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  を並べた対角行列、 $X$  を対応する固有ベクトルを並べてできる行列として、

$$\Lambda = X^{-1} Df^* X$$

とする。

2. 行列  $I^*$  を  $i_1, i_2, \dots, i_n$  が対角成分である対角行列とする。ただし、 $i_k$  は

$$i_k = \begin{cases} 1, & \text{if } \operatorname{Re}(\lambda_k) < 0 \\ -1, & \text{if } \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0 \end{cases}, k = 1, 2, \dots, n$$

と定める。なお、平衡点を双曲型と仮定したので  $\operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$  とはならないことに注意されたい。

3. 実対称行列  $Y$  を

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= X^{-H} I^* X^{-1}, \\ Y &= \operatorname{Re}(\hat{Y}) \end{aligned}$$

と算定する。ただし、 $X^{-H}$  は行列  $X$  の共役転置の逆行列である。

4. 次の二次形式を Lyapunov 関数の候補として定める。

$$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

$Y$  が数値的に対称でなければ

$$Y := \frac{Y + Y^T}{2} \text{ もしくは } Y_{ji} := Y_{ij}$$

などとして対称性を確保する。

以上の計算に関しては通常の浮動小数点演算による近似計算で行えば良いことを注意しておく。

### 4.3 Lyapunov 関数の妥当性

上記の方法で構成した Lyapunov 関数の候補  $L(\mathbf{x})$  が、双曲型平衡点  $\mathbf{x}^*$  を含む領域で Lyapunov 関数の要件を満たすための十分条件を導き、さらに  $\mathbf{x}^*$  の十分小さな近傍ではこの要件を満たしていることを示す。

解軌道  $\mathbf{x}(t)$  に沿って Lyapunov 関数  $L$  を時刻  $t$  で微分すると

$$\frac{dL}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T Y(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4.3.1)$$

となる。ここで、以下の関数

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)), \quad s \in [0, 1]$$

を考える。 $\mathbf{g}$  を  $s$  に関して微分することで、

$$\frac{d\mathbf{g}}{ds} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \quad (4.3.2)$$

を得る。 $\mathbf{g}(1) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  に注意して (4.3.2) の両辺を 0 から 1 まで  $s$  に関して積分することにより

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \int_0^1 D\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)) ds (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \quad (4.3.3)$$

が得られる。ただし、 $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$  は  $\mathbf{f}$  の  $\mathbf{x}$  に関する Jacobi 行列である。式 (4.3.3) を用いると (4.3.1) は実二次形式

$$\frac{dL}{dt} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T \int_0^1 (D\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))^T Y + Y D\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))) ds (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

により表される。

今、 $\mathbf{z} = \mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$  とおき実対称行列  $A(\mathbf{z})$  を

$$A(\mathbf{z}) = D\mathbf{f}(\mathbf{z})^T Y + Y D\mathbf{f}(\mathbf{z})$$

により定める。 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}^*$  を結ぶ線分上の任意の点  $\mathbf{z}$  について  $A(\mathbf{z})$  が負定値であれば  $\mathbf{x}$  に対して

$$\frac{dL}{dt} < 0$$

となる。

以上より、平衡点  $\mathbf{x}^*$  に関する星型領域  $D_L$  においては、任意の  $\mathbf{z} \in D_L$  に対して  $A(\mathbf{z})$  が負定値であることが、 $L(\mathbf{x})$  が  $D_L$  で Lyapunov 関数となるための十分条件となる。次に、 $\mathbf{z}$  が平衡点  $\mathbf{x}^*$  の近傍にある時の負定値性を示す。 $A(\mathbf{z})$  の固有値の  $\mathbf{z}$  に関する連続性から、 $A(\mathbf{x}^*)$  の負定値性を示せばよい。

一般にエルミート行列  $H$  の二次形式は実数値をとり、特に実ベクトル  $z$  については

$$z^T H z = z^T \text{Re}(H) z$$

が成立することに注意すると、 $A(\mathbf{x}^*)$  の代わりにエルミート行列

$$A^* = (D\mathbf{f}^*)^H \hat{Y} + \hat{Y} (D\mathbf{f}^*)$$

の負定値性を調べればよいことになる。 $\hat{Y}$  の定義より、

$$\begin{aligned} A^* &= (D\mathbf{f}^*)^H X^{-H} I^* X^{-1} + X^{-H} I^* X^{-1} D\mathbf{f}^* \\ &= (\Lambda X^{-1})^H I^* X^{-1} + X^{-H} I^* \Lambda X^{-1} \\ &= X^{-H} (\Lambda^H I^* + I^* \Lambda) X^{-1} \\ &= X^{-H} (2\text{Re}(\Lambda) I^*) X^{-1} \\ &= -2X^{-H} |\text{Re}(\Lambda)| X^{-1} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $|\text{Re}(\Lambda)|$  は行列  $\text{Re}(\Lambda)$  の各成分の絶対値を取った行列を表す。

以上より、 $A^*$  は負定値のエルミート行列であり、 $\mathbf{x}^*$  の十分近傍では、

$$\frac{d}{dt} L(\mathbf{x}) < 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$$

となる。一方、

$$\frac{d}{dt} L(\mathbf{x}^*) = 0$$

であるから、この  $L(\mathbf{x})$  は平衡点  $\mathbf{x}^*$  の十分近傍で Lyapunov 関数の要件を満たすことがわかる。

## 4.4 Lyapunov 関数の定義域の検証

前節の結果より、第 4.2 節の手順で構成した関数  $L$  は、双曲型平衡点  $\mathbf{x}^*$  の十分近傍では Lyapunov 関数の要件を満たすことが確認できた。しかし、このままでは Lyapunov 関数の要件を満たす具体的な領域はわからない。そこで、構成した関数  $L$  が Lyapunov 関数の要件を満たす領域 (以下、この領域を Lyapunov 領域と呼ぶ) を具体的に同定するための精度保証法を説明する。

平衡点  $\mathbf{x}^*$  に関する星型領域  $D_L$  を取り、この領域が Lyapunov 関数の要件を満たすかどうかを確認する。Lyapunov 領域の検証方法は平衡点  $\mathbf{x}^*$  に近い領域と遠い領域でそれぞれ異なる。そこで、 $D_L$  を平衡点  $\mathbf{x}^*$  に近い領域  $D_{L1}$  とそれ以外の領域  $D_{L2}$  に分け、さらにそれらを適当な小領域に分割する。そのそれぞれに対して次の検証条件の成立を確認する。

Stage1. 領域  $D_{L1}$  の検証

$D_{L1}$  を分割した各小領域を区間ベクトル  $[\mathbf{x}]$  で包含し、さらに  $A([\mathbf{x}])$  の負定値性を以下の手順により検証する。

1.  $[\mathbf{x}]$  の中心ベクトルを  $\mathbf{x}$  とする。行列  $A(\mathbf{x})$  を浮動小数点演算で算定し、その対角化を近似的に行う。すなわち、

$$\Lambda = X^{-1}A(\mathbf{x})X$$

となる行列  $X$  を浮動小数点演算により算定する。

2. 精度保証によって区間行列  $X^{-1}A([\mathbf{x}])X$  を算定し、その成分を  $[a]_{ij}$  とおく。
3. この区間行列に Gershgorin の定理を適用する。すなわち、各  $i = 1, \dots, n$  について

$$[a]_{ii} + \sum_{j \neq i} |[a]_{ij}| < 0$$

を精度保証で検証する。

Stage2. 領域  $D_{L2}$  の検証

$D_{L2}$  を分割した各小領域を区間ベクトル  $[\mathbf{x}]$  で包含し、

$$\frac{d}{dt}L([\mathbf{x}]) = \mathbf{f}([\mathbf{x}])^T Y([\mathbf{x}] - \mathbf{x}^*) + ([\mathbf{x}] - \mathbf{x}^*)^T Y \mathbf{f}([\mathbf{x}])$$

が負となることを各小区間において区間演算で直接確認する。

以上により領域  $D_L$  が Lyapunov 領域となることが検証できる。また、以上の手順において、分割した小領域が平衡点  $\mathbf{x}^*$  を含まなくても良いことを注意しておく [44]。

# 第5章 Lyapunov関数を用いたホモクリニック軌道の存在検証

本章では、Lyapunov関数を利用したホモクリニック軌道の存在検証のための精度保証法を説明し、数値例によりその有効性を確認する。

## 5.1 ホモクリニック軌道の精度保証付き数値計算について

ホモクリニック軌道を含む connecting orbits に関する精度保証付き数値計算は、大石による仕事 [24] に始まり、その後 Arioli や Koch, Zgliczyński, Wilczak [2, 3, 6, 32, 33] などが多くの成果を残している。さらに、2011年ごろからは、Lessard らが解析的な手法をベースにしたホモクリニック軌道の精度保証付き数値計算法を考案し、彼らも多くの成果を上げている [5, 15, 30, 31]。

Connecting orbits に関する精度保証法は、位相的な方法と解析的な方法の二種類に大別される。位相的な方法の代表例の一つは、Arioli による covering relation [4] で、これは写像度の応用を含んでいる。解析的な方法の代表例は、Lessard らによる parameterization と radii polynomials を組み合わせた方法で、安定多様体や不安定多様体を陽に構成することで精度保証を実現している。この観点から考えると、写像度と Lyapunov 関数を組み合わせた我々の方法は、両手法の特徴を含んでいると考えられる。

本論文で提案するホモクリニック軌道の存在検証のための精度保証法は、Lyapunov 関数、精度保証付き数値計算による ODE の軌道計算、連続写像に対する Brouwer の一致点定理の組み合わせから構成されており、そのアイデアのベースは山野の仕事にある [39]。本論文で提案するホモクリニック軌道の検証法の枠組みは以下の通りである。

- 扱う平衡点の安定多様体・不安定多様体の次元を確認する。
- 扱う自励系 ODE にパラメータを設定する。パラメータは自励系 ODE の係数のうちから選択し、その数は不安定多様体の次元数と同じに取る。
- 近似的なホモクリニック軌道を与えるパラメータを特定し、その値を含む小さなパラメータ領域を設定する。
- 扱う平衡点の近傍で、精度保証を用いて Lyapunov 関数を構成する。



- 設定したパラメータ領域から不安定多様体への連続写像を構成し、その写像の値域の点から Lyapunov 関数の 0 レベルセット上の点を軌道計算により対応させることにより定まる連続写像を考える。
- パラメータ領域と同じ次元で平衡点を含む部分集合を用意し、Lyapunov 関数の 0 レベルセットからこの部分集合への射影を考える。
- 以上の写像を合成して、パラメータ領域から設定した部分集合への写像を構成する。この合成された連続写像が、同じ次元の空間の間の連続写像になることから、Brouwer の一致点定理を適用し、合成写像の像が平衡点を含むことを写像度の精度保証計算を通じて検証する。

この検証が成功すれば、写像の構成法から、不安定多様体上の点から平衡点への解軌道が存在することになり、ホモクリニック軌道を与えるパラメータの存在が証明できる。

次節から本手法の詳しい説明を行っていく。

## 5.2 提案手法の概略

パラメータ  $\mathbf{p}$  を伴う以下の自励系 ODE を考える：

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \mathbf{p}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{p} \in D, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{f} \in C^r(\mathbb{R}^n \times D, \mathbb{R}^n), \quad r \geq 1. \quad (5.2.1)$$

ここで、 $D \subset \mathbb{R}^{n-\nu}$  は閉集合、 $\nu$  は正の整数とする。整数  $\nu$  についての詳細は次の仮定で説明する。本章全体を通して、次を仮定する：

### 仮定 5.2.1.

- 任意の  $\mathbf{p} \in D$  に対し、系 (5.2.1) は双曲型平衡点を持ち、その安定多様体の次元は  $\nu$ 、不安定多様体の次元は  $n - \nu$  である。
- 平衡点  $\mathbf{x}^*(\mathbf{p})$  はパラメータ  $\mathbf{p}$  に依らない。

平衡点  $\mathbf{x}^*$  がパラメータに連続依存する場合にも、本手法とほぼ同じ手法によりホモクリニック軌道の存在検証が行えると予想される。しかし、数学的な論証がまだ完全ではないので、そちらについては今後の課題とする。

$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-\nu} \rightarrow \mathbb{R}^n$  を系 (5.2.1) により生成される flow とし、パラメータが  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n-\nu}$  で、 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  を初期点とする解軌道を  $\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p})$  と表記する。

系 (5.2.1) の双曲型平衡点  $\mathbf{x}^*$  に対する Lyapunov 関数を以下で定義する。

**定義 5.2.2** ((局所)Lyapunov 関数).  $D_L \subset \mathbb{R}^n$  を閉集合とする。  $C^1$  級関数  $L : D_L \times D \rightarrow \mathbb{R}$  が以下の条件を満たすとき、 $L$  を (局所)Lyapunov 関数と呼ぶ。

1. 任意の  $\mathbf{x} \in D_L$  を初期点とする解軌道  $\{\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p})\}$  について

$$\left. \frac{d}{dt} L(\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}), \mathbf{p}) \right|_{t=0} \leq 0$$

が成立する。

2.

$$\left. \frac{d}{dt} L(\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}), \mathbf{p}) \right|_{t=0} = 0$$

が成立するのは  $\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}) = \mathbf{x}^*$  のときに限る。

領域  $D_L$  を Lyapunov 領域と呼ぶ。

定義 5.2.2 は考えている系および Lyapunov 関数自身がパラメータを含むことを除いて定義 4.1.1 と同じであることに注意されたい。

パラメータ  $\mathbf{p} \in D$  を固定する。このとき、 $\mathbf{x}^*$  は双曲型平衡点なので、第 4 章で説明した方法により二次形式による Lyapunov 関数

$$L(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

が構成でき、精度保証により Lyapunov 領域  $D_L(\mathbf{p})$  の同定も可能である。なお、平衡点  $\mathbf{x}^*$  はパラメータ  $\mathbf{p}$  に依存しないが、二次形式を構成する行列  $Y(\mathbf{p})$  や Lyapunov 領域  $D_L(\mathbf{p})$  はパラメータ  $\mathbf{p}$  に依存することに注意されたい。

以下では、本論文で提案するホモクリニック軌道の精度保証法の詳細を述べる前に、その大まかな流れについて説明する。ここでは、提案手法の直感的なイメージを与えることを優先しており、数学的な正確さはいくらか犠牲にしていることを注意しておく。

$\tilde{\mathbf{p}} \in D$  を近似的なホモクリニック軌道を与えるパラメータとする。これは通常近似計算を用いて特定する。 $n - \nu$  次元球と同相で、 $\tilde{\mathbf{p}}$  を内点として含む小さな閉集合  $D_{\tilde{\mathbf{p}}} \subset D$  をとる。なお、 $D_{\tilde{\mathbf{p}}}$  を  $n - \nu$  次元球と同相にとるのは、Brouwer の一致点定理を適用するためである。

本論文におけるホモクリニック軌道の精度保証法では、ホモクリニック軌道を与えるパラメータ  $\mathbf{p}^*$  が  $D_{\tilde{\mathbf{p}}}$  に存在することを示すことを目標とする。まず、 $\mathbf{x}^*$  に対し第 4 章の方法により Lyapunov 関数を構成する。 $D_{\tilde{\mathbf{p}}}$  が十分小さいとき、パラメータ  $\mathbf{p}$  に依存しない共通の行列  $Y$  を用いて定義される以下の関数

$$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \quad (5.2.2)$$

を任意の  $\mathbf{p} \in D_{\tilde{\mathbf{p}}}$  に対する Lyapunov 関数として用いる事ができる。このとき、Lyapunov 関数 (5.2.2) はパラメータ  $\mathbf{p}$  に依存しないが、Lyapunov 領域  $D_L(\mathbf{p})$  は  $\mathbf{p}$  に依存していることに注意されたい。

第 4.4 節で示したように、各  $\mathbf{p} \in D_p$  に対し  $D_L(\mathbf{p})$  は星型領域としてとることができるが、以下では有界凸閉集合の  $D_L(\mathbf{p})$  を選ぶことにする。さらに、有界凸閉集合  $D_L$  を

$$D_L = \bigcap_{\mathbf{p} \in D_p} D_L(\mathbf{p})$$

により定義する。この  $D_L$  も Lyapunov 領域と呼ぶことにする。

$D_L$  の部分集合  $L^0$ ,  $L^+$  及び  $L^-$  を以下の様に定義する：

$$\begin{aligned} L^0 &= \{\mathbf{x} \in D_L \mid L(\mathbf{x}) = 0\}, \\ L^+ &= \{\mathbf{x} \in D_L \mid L(\mathbf{x}) > 0\}, \\ L^- &= \{\mathbf{x} \in D_L \mid L(\mathbf{x}) < 0\}. \end{aligned}$$

Brouwer の一致点定理を適用するために、超平面  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n-\nu}$  及び射影  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma$  を考える。ただし、射影  $P$  は以下の性質を満たすものとする：

射影  $P$  の性質

任意の  $\mathbf{x} \in L^0 \cup L^-$  に対し、 $P(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}^*)$  ならば  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  が成立する。

この性質を満たす射影  $P$  の具体的な構成法は 5.6 節で説明する。

$W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  と  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  をそれぞれ  $\mathbf{x}^*$  の安定多様体、不安定多様体とする。これらは、パラメータ  $\mathbf{p}$  に依存する。また、 $W_{c.c.}^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  と  $W_{c.c.}^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  をそれぞれ  $D_L$  内の  $W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  及び  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  の連結成分とする<sup>1</sup>。連結成分  $W_{c.c.}^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  は  $\mathbf{x}^*$  を端点とするすべての曲線  $C \in W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p}) \cap D_L$  上の点の集合として定義される。 $W_{c.c.}^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  についても同様に定義する。本論文を通して連結成分のみを考えるので、簡単のため  $W_{c.c.}^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  と  $W_{c.c.}^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  をそれぞれ  $W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  および  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  と書くことにする。

次の二つの連続写像を考える：

$$F_1 : D_p \rightarrow B_0 \times D_p, \quad F_2 : B_0 \times D_p \rightarrow L^0.$$

ここで、 $B_0$  は  $\bigcup_{\mathbf{p} \in D_p} W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  の部分集合で、 $F_1$  は  $\mathbf{f}_1(\mathbf{p}) : D_p \rightarrow B_0$  かつ  $\mathbf{f}_1(\mathbf{p}) \in W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  を満たす連続写像  $\mathbf{f}_1$  を用いて  $F_1(\mathbf{p}) = (\mathbf{f}_1(\mathbf{p}), \mathbf{p})$  と定義する。直感的には、 $\mathbf{f}_1$  とはパラメータ  $\mathbf{p}$  を引数として受け取り、 $\mathbf{p}$  に対する不安定多様体  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  上の一点を返す連続関数である。より詳しくは、適切に定めた  $\nu$  次元の部分集合  $\Sigma$  と不安定多様体  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  との交点を返す関数である。 $\mathbf{f}_1$  に関する説明は 5.7 節で行う。

<sup>1</sup> $W_{c.c.}^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  や  $W_{c.c.}^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  を導入する理由については、[20] の 3 ページにある脚注を参照されたい。

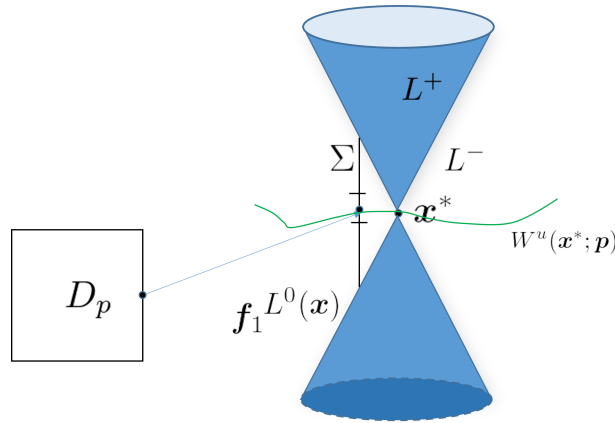


図 5.1:  $n = 3, \nu = 1$  の例における  $f_1$  の模式図

青い錐体は Lyapunov 関数の 0 レベルセットを表しており、錐体内部が  $L^+$ 、錐体外部が  $L^-$  である。また、緑の曲線は不安定多様体  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  を表している (本来は 2 次元の多様体であるが、ここでは説明の都合上、曲線で表した)。今、全体の次元が 3 であり、不安定多様体  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  の次元が 2 であることより、1 次元の直線  $\Sigma$  を適切に取れば、 $\Sigma$  と  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  は一点で交点を持つことが期待される。また、パラメータ  $\mathbf{p}$  が変化すると、不安定多様体  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  が変化するので、 $\Sigma$  との交点も変化する。 $D_p$  からこの交点への対応として  $f_1$  を定める。

写像  $F_2(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  は不安定多様体  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  上の点を初期点として、Lyapunov 関数の 0 レベルセットである  $L^0$  へ至る軌道  $\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p})$  を用いて定義される連続写像で、詳細な定義や連続性に関する議論は 5.8 節で行う。

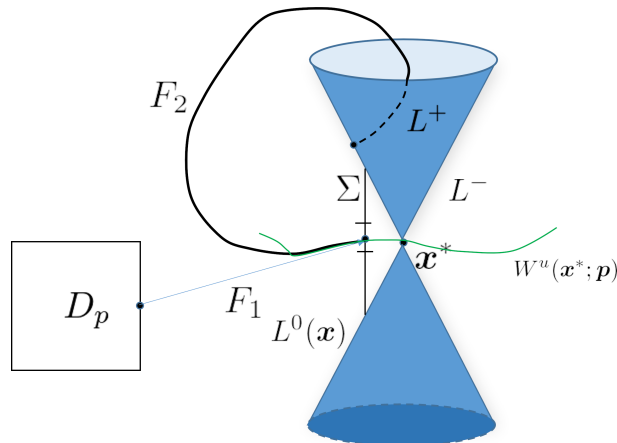


図 5.2:  $n = 3, \nu = 1$  の例における  $F_2$  の模式図

錐体、および緑の曲線は、図 5.1 と同様、それぞれ Lyapunov 関数の 0 レベルセット  $L^0$ 、および不安定多様体  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  を表す。 $F_2$  は不安定多様体上の点を初期点として、 $L^+$  に到達し、さらに  $L^0$  へ至る軌道を用いた連続写像として定義される。もし  $F_2$  の像が平衡点  $\mathbf{x}^*$  となれば、その軌道はホモクリニック軌道となる。

今、二つの連続写像  $F, H : D_p \rightarrow \Gamma$  を

$$F = P \circ F_2 \circ F_1, \quad H(\mathbf{p}) = P(\mathbf{x}^*) \text{ (定値写像)},$$

により定義し、 $F$  が Brouwer の一致点定理の成立条件を満たすことを精度保証付き数値計算により確認する。これには  $F$  の写像度に関する精度保証が必要になる。

もし、Brouwer の一致点定理の十分条件が満足されていれば、 $F$  と  $H$  は一致点を持つ、すなわち、ある  $\mathbf{p}^*$  が存在し、 $F(\mathbf{p}^*) = H(\mathbf{p}^*)$  を満たす。射影  $P$  の性質からこれは  $F_2 \circ F_1(\mathbf{p}^*) = \mathbf{x}^*$  を意味し、さらに  $F_1, F_2$  の定義より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathbf{f}_1(\mathbf{p}^*); \mathbf{p}^*) = \mathbf{x}^*. \quad (5.2.3)$$

を得る。これは、ホモクリニック軌道を与えるパラメータ  $\mathbf{p}^* \in D_p$  の存在を意味している。

**Remark.**  $\mathbf{p}^*$  の存在を示すために、一致点定理の代わりに不動点定理を適用する方法も考えられる。例えば、 $\mathcal{F}(\mathbf{p}) := F(\mathbf{p}) - H(\mathbf{p})$  とおき非線形方程式  $\mathcal{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$  に非線形方程式の精度保証法を適用する方法などが想定される。しかし、この方法の場合、 $\mathbf{p}^*$  の近傍における  $\mathcal{F}(\mathbf{p})$  の計算の際に長時間に及ぶ精度保証付き軌道積分が必要になり、その際に区間拡大が生じ、結果として精度保証が失敗する可能性が高いと考えられる。一方、一致点定理を採用した場合、 $\mathbf{p}^*$  の近傍の  $\mathbf{p}$  に対する軌道積分を実際に行う必要がない。これが不動点定理ではなく一致点定理を採用した理由である。

### 5.3 Brouwer の一致点定理と写像度の精度保証

ホモクリニック軌道の精度保証に Brouwer の一致点定理を適用するためには、連続写像に関する写像度を計算する必要があり、我々の方法では写像度の計算も精度保証付き数値計算により行う。本節では、Brouwer の一致点定理と写像度の定義を述べ、さらに写像度を計算するための精度保証法に関する説明も行う。

まず Brouwer の一致点定理について述べる。

**定理 5.3.1** (Brouwer の一致点定理 [27]).  $B^n$  を  $n$  次元の単位球、 $S^{n-1}$  をその表面とする。連続写像  $F : B^n \rightarrow B^n$  を考え、 $F|_{S^{n-1}}$  を  $F$  の  $S^{n-1}$  への制限とする。また、 $F$  の写像度を  $\deg F$  と表す。

$F|_{S^{n-1}}$  について、 $F|_{S^{n-1}} \subset S^{n-1}$  かつ  $\deg F|_{S^{n-1}} \neq 0$  が成立するならば、 $F$  は任意の連続写像  $G : B^n \rightarrow B^n$  と一致点を持つ。すなわち、ある  $\mathbf{x} \in B^n$  が存在し、 $F(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$  が成立する。

写像度の定義の仕方には、いくつかのやり方があるが、 $n = 2$  の時には、以下の様に比較的簡単な定義がある。

**定義 5.3.2** ( $S^1$  上の連続写像に対する写像度).  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  を複素平面上の単位円と同一視し、 $f : S^1 \rightarrow S^1$  を連続写像とする。任意の組  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$  を選び固定し、次の連続写像  $e, \hat{f}$  および  $\tilde{f}$  を考える：

$$\begin{aligned} e(t) &= \exp(2i\pi t) : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \\ \hat{f} &= f \circ e|_{[0,1]} : [0, 1] \rightarrow S^1, \\ \tilde{f} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \text{ ただし } e \circ \tilde{f} = \hat{f} \text{ および } \tilde{f}(x_0) = t_0 \text{ をみたく。} \end{aligned}$$

$\tilde{f}(x_0) = t_0$  の条件のもと、 $\tilde{f}$  は一意に決定される。このとき、 $f$  の写像度  $\deg f$  は、 $\deg f = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$  により定義される。

本論文の数値例では  $n = 2$  の場合の写像度しか扱っていないことを注意しておく。より一般の写像度の定義に関しては、例えば [27] を参照されたい。

以下の定理は、 $n = 2$  の場合に写像度が 0 ではないことを精度保証により確認する手順を与える定理で、*Interval Simplex* 定理と呼ばれている [39]。

**定理 5.3.3** (Interval Simplex 定理).  $f, e, \hat{f}, \tilde{f}$  を定義 5.3.2 に現れるものと同じの関数とする。  $0 < s_1 < s_2 < 1$  に対し、以下の条件を満たす閉区間  $V_1, V_2, V_3 \subset S^1$  を考える：

$$\begin{aligned} \hat{f}([0, s_1]) &= e \circ \tilde{f}([0, s_1]) \subset V_1, \\ \hat{f}([s_1, s_2]) &= e \circ \tilde{f}([s_1, s_2]) \subset V_2, \\ \hat{f}([s_2, 1]) &= e \circ \tilde{f}([s_2, 1]) \subset V_3. \end{aligned}$$

$V_1, V_2, V_3$  について、 $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$  ならば  $\deg f = 1$  or  $-1$  が成立する。

**証明.**  $t_0, t_1, t_2$  を

$$t_0 = \tilde{f}(0), \quad t_1 = \tilde{f}(s_1), \quad t_2 = \tilde{f}(s_2)$$

ととる。写像度の定義より、もし  $\deg f = k \in \mathbb{Z}$  であれば  $\tilde{f}(1) = t_0 + \deg f = t_0 + k$  が成立する。

ここで、 $e(t_0) = e(t_0 + k) (= e \circ \tilde{f}(1))$  に注意すると、

$$\begin{aligned} e(t_0) &= \hat{f}(0) \in V_3 \cap V_1, \\ e(t_1) &= \hat{f}(s_1) \in V_1 \cap V_2, \\ e(t_2) &= \hat{f}(s_2) \in V_2 \cap V_3, \\ e(t_0 + k) &= \hat{f}(1) \in V_3 \cap V_1 \end{aligned}$$

が成立する。この関係と定理の仮定  $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$  より、

$$e(t_0) \notin V_2, e(t_1) \notin V_3, e(t_2) \notin V_1, e(t_0 + k) \notin V_2$$

となる。この事実は、 $k$  に関わらず  $t_0, t_1, t_2$  の順序が、

$$t_0 \leq t_1 \leq t_2 \tag{5.3.1}$$

または

$$t_2 \leq t_1 \leq t_0 \quad (5.3.2)$$

とならなければいけないことを意味する。実際、 $t_1 \leq t_0 \leq t_2$  を仮定すると、

$$e(t_0) \in e([t_1, t_2]) = e \circ \tilde{f}([s_1, s_2]) \subset V_2$$

であり、これは仮定  $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$  に矛盾する。他の順序  $t_0 \leq t_2 \leq t_1, t_1 \leq t_0 \leq t_2, t_1 \leq t_2 \leq t_0, t_2 \leq t_0 \leq t_1$  についても同様に矛盾を示すことが出来る。

今、 $k = 0$  を仮定する。このとき、 $e(t_0) = e \circ \tilde{f}(1)$  より、順序が (5.3.1) のときには

$$e(t_1) \in e([t_0, t_2]) = e \circ \tilde{f}([s_2, 1]) \subset V_3$$

を、順序が (5.3.2) のときには

$$e(t_1) \in e([t_2, t_0]) = e \circ \tilde{f}([s_2, 1]) \subset V_3$$

を得る。これは仮定  $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$  に矛盾する。よって、 $k = 0$  は仮定  $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$  に矛盾するので、 $\deg f$  は 0 とならない。次に  $k \geq 1$  を仮定する。このとき、 $t_2 \leq t_1 \leq t_0 \leq t_0 + k$  とすると

$$e(t_1) \in e([t_2, t_0 + k]) = e \circ \tilde{f}([s_2, 1]) \subset V_3$$

が成立し、これは仮定  $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$  に矛盾する。これより  $k \geq 1$  のとき (5.3.2) の順序にはなり得ないことがわかる。

同様に、 $t_0 \leq t_1 \leq t_0 + k \leq t_2$  とおくと

$$e(t_0 + k) \in e([t_1, t_2]) = e \circ \tilde{f}([s_1, s_2]) \subset V_2$$

が、 $t_0 \leq t_0 + k \leq t_1 \leq t_2$  とおくと

$$e(t_1) \in e([t_0 + k, t_2]) = e \circ \tilde{f}([s_2, 1]) \subset V_3$$

がそれぞれ成立し、これらは仮定  $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$  に矛盾する。したがって、 $k \geq 1$  のときに  $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$  に矛盾しない順序は  $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_0 + k$  のみである。

一方、 $k \geq 2$  とすると、 $t_0 + 1 \leq t_1 + 1 \leq t_0 + k$  が成立し、これより  $e(t_1) = e(t_1 + 1) \in e([t_2, t_0 + k]) = e \circ \tilde{f}([s_2, 1]) \subset V_3$  となる。これは仮定  $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$  に矛盾する。したがって、 $k \geq 1$  の場合において仮定  $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$  に矛盾しないケースは  $k = 1$  のときだけである。

同様の議論により、 $k \leq 1$  の場合について、仮定  $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$  に矛盾しないケースは  $k = -1$  のときだけであることが示される。

以上より、 $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$  であれば  $\deg f = 1$  または  $-1$  であることが示された。  $\square$

定理 5.3.3 の仮定は精度保証付き数値計算により確認することができ、数値例では実際に精度保証付き数値計算により定理 5.3.3 の条件を確認している。また、実際の検証手順において  $\tilde{f}$  を構成する必要がないことを注意しておく。

もし、 $|\deg f| > 1$  または  $n > 2$  の場合について、写像度の精度保証付き数値計算が必要なときは、Aberth の方法 [1, 11] を適用することが考えられる。ただし、この方法は定理 5.3.3 より複雑であり、計算量も多くなることが予想される。本論文の数値例における写像度の精度保証はすべて定理 5.3.3 により行われている。

## 5.4 数学的準備

本節では、二次形式による Lyapunov 関数に関する二つの性質と、連続関数に関する定理を述べる。これらは、どちらもホモクリニック軌道の精度保証に用いられている。

**補題 5.4.1.**  $D_L$  を Lyapunov 領域とする。このとき、任意の  $\mathbf{p} \in D_p$  と  $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$  なる任意の二点  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D_L$  に対して

$$\left. \frac{d}{dt} L(\varphi(t, \mathbf{x}_2; \mathbf{p}) - \varphi(t, \mathbf{x}_1; \mathbf{p}) + \mathbf{x}^*) \right|_{t=0} < 0$$

が成立する。

**証明.** まず、 $L$  の定義より

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dt} L(\varphi(t, \mathbf{x}_2; \mathbf{p}) - \varphi(t, \mathbf{x}_1; \mathbf{p}) + \mathbf{x}^*) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \{(\varphi(t, \mathbf{x}_2; \mathbf{p}) - \varphi(t, \mathbf{x}_1; \mathbf{p}))^T Y \varphi(t, \mathbf{x}_2; \mathbf{p}) - \varphi(t, \mathbf{x}_1; \mathbf{p})\} \right|_{t=0} \\ &= (\mathbf{f}(\mathbf{x}_2; \mathbf{p}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1; \mathbf{p}))^T Y (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \\ & \quad + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T Y (\mathbf{f}(\mathbf{x}_2; \mathbf{p}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1; \mathbf{p})) \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

が成立する。関数  $\mathbf{g} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  を

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1 + s(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1); \mathbf{p})$$

により定義すると、 $\mathbf{g}$  の  $s$  による微分は

$$\frac{d}{ds} \mathbf{g}(s) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_1 + s(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1); \mathbf{p})(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$$

となる。この両辺を 0 から 1 まで  $s$  に関して積分することで

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_2; \mathbf{p}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1; \mathbf{p}) = \int_0^1 D\mathbf{f}(\mathbf{x}_1 + s(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1); \mathbf{p}) ds (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \quad (5.4.2)$$

を得る。



式 (5.4.2) を (5.4.1) に代入することで、

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} L(\varphi(t, \mathbf{x}_2; \mathbf{p}) - \varphi(t, \mathbf{x}_1; \mathbf{p}) + \mathbf{x}^*; \mathbf{p}) \Big|_{t=0} \\
&= \left( \int_0^1 D\mathbf{f}(\mathbf{x}_1 + s(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1); \mathbf{p}) ds (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \right)^T Y(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \\
&\quad + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T Y \left( \int_0^1 D\mathbf{f}(\mathbf{x}_1 + s(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1); \mathbf{p}) ds (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \right) \\
&= \int_0^1 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T A(\mathbf{z})(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) ds
\end{aligned}$$

を得る。ただし、 $\mathbf{z}, A(\mathbf{z})$  をそれぞれ

$$\begin{aligned}
\mathbf{z} &= \mathbf{x}_1 + s(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1), \\
A(\mathbf{z}) &= D\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_1 + s(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1); \mathbf{p})Y + YD\mathbf{f}(\mathbf{x}_1 + s(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1); \mathbf{p})
\end{aligned}$$

とおいた。 $D\mathbf{f}^T(\mathbf{x}; \mathbf{p})Y + YD\mathbf{f}(\mathbf{x}; \mathbf{p})$  の負定値性と  $D_L$  の凸性より、

$$\frac{d}{dt} L(\varphi(t, \mathbf{x}_2; \mathbf{p}) - \varphi(t, \mathbf{x}_1; \mathbf{p}) + \mathbf{x}^*) \Big|_{t=0} < 0$$

が成立する。 □

**Remark.** 補題 5.4.1 は次の cone condition を導く [19]。

$$\frac{d}{dt} (Q(\varphi(t, \mathbf{z}_1) - \varphi(t, \mathbf{z}_2))) > 0 \text{ for all } \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in N.$$

ここで、 $Q$  は二次形式、 $N$  は  $h$ -set と呼ばれる特定の性質を満たす集合である [35]。実際、 $Q, N$  を

$$Q = -\mathbf{x}^T Y \mathbf{x}, \quad N = D_L$$

と選ぶと、補題 5.4.1 よりこれは cone condition を満たす。

**補題 5.4.2.**  $D_L$  を Lyapunov 領域とする。このとき、 $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$  なる任意の  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D_L \cap W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  に対して、

$$L(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}^*) < 0$$

が成立する。

**証明.**  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}^*$  とおき、

$$L(\mathbf{y}) < 0$$

を示せばよい。

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D_L \cap W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  より、任意の負の時刻  $t < 0$  に対して

$$\varphi(t, \mathbf{x}_1; \mathbf{p}), \varphi(t, \mathbf{x}_2; \mathbf{p}) \in D_L$$

が成立する。これは、連結成分  $W_{c.c.}^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  のみを考えていることから導かれる。このとき、補題 5.4.1 より任意の負の時刻  $t < 0$  に対し

$$L(\varphi(t, \mathbf{x}_2; \mathbf{p}) - \varphi(t, \mathbf{x}_1; \mathbf{p}) + \mathbf{x}^*) > L(\mathbf{y})$$

となる。 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  が不安定多様体  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  上の点であることより、

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, \mathbf{x}_1; \mathbf{p}) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, \mathbf{x}_2; \mathbf{p}) = \mathbf{x}^*$$

および

$$L(\mathbf{y}) \leq L(\mathbf{x}^*) = 0$$

を得る。今、 $L(\mathbf{y}) = 0$  を仮定すると、ある負の時刻  $t_1 < 0$  が存在し、

$$L(\varphi(t_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{p}) - \varphi(t_1, \mathbf{x}_1; \mathbf{p}) + \mathbf{x}^*) > 0$$

が成立する。

$\mathbf{y}_1 = \varphi(t_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{p}) - \varphi(t_1, \mathbf{x}_1; \mathbf{p}) + \mathbf{x}^*$  とおき、 $\mathbf{y}_1$  について同様の議論を行うことで

$$L(\mathbf{y}_1) \leq 0$$

となるが、これは  $L(\mathbf{y}_1) > 0$  に矛盾する。以上より

$$L(\mathbf{y}) < 0$$

が示された。 □

次の定理は、第 5.7 節において、 $\nu$  次元球と不安定多様体  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  の交点がパラメータ  $\mathbf{p} \in D_p$  に関して連続であることを示すために用いられている。ここでは、より一般的な形で定理を記述する。

**定理 5.4.3** ([12]). 二つの有界閉集合  $D \subset \mathbb{R}^n, P \subset \mathbb{R}^m$  と連続写像  $\mathbf{f} : D \times P \rightarrow \mathbb{R}^n$  を考える。任意の  $\mathbf{p} \in P$  毎に、 $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{p}), \mathbf{p}) = \mathbf{0}$  を満たすただ一つの  $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{p}) \in D$  が存在することを仮定する。このとき、 $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{p})$  は  $\mathbf{p} \in P$  に関して連続である。

**証明.**  $\mathbf{p}_0 \in P$  を任意に固定し、 $P \ni \mathbf{p} \mapsto \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{p}) \in D$  で定まる写像が  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$  で連続であることを示せば良い。以下、 $\mathbf{p}_0$  で不連続だとして矛盾を導こう。 $\mathbf{f}$  が  $\mathbf{p}_0$  で不連続だとすると、正数  $\varepsilon > 0$  を十分小さくとれば、 $P$  の点列  $\{\mathbf{p}_j\}$  を

$$\mathbf{p}_j \rightarrow \mathbf{p}_0 \ (j \rightarrow \infty), \quad |\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{p}_j) - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{p}_0)| \geq \varepsilon$$

となるように選ぶことができる。\$D\$が有界閉集合であることに注意すると、Bolzano-Weierstrass の定理より \$\{\mathbf{p}\_j\}\_{j=1}^\infty\$ の部分列 \$\{\mathbf{p}\_{j\_k}\}\_{k=1}^\infty\$ を、\$\{\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{p}\_{j\_k})\}\_{k=1}^\infty\$ が \$D\$ の収束列 (極限を \$\mathbf{x}\_\infty \in D\$ と書く) となるように選ぶことができる。このとき、\$|\mathbf{x}\_\infty - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{p}\_0)| \ge \varepsilon\$ が成り立つから \$\mathbf{x}\_\infty \neq \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{p}\_0)\$ となる。一方、\$f\$ の連続性により、

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{p}_{j_k}), \mathbf{p}_{j_k}) = f(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_0).$$

仮定より、各 \$\mathbf{p} \in P\$ に対して \$f(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{p}), \mathbf{p})\$ を満たす \$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{p}) \in D\$ が一意に定まるから、\$\mathbf{x}\_\infty = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{p}\_0)\$ でなければならない (矛盾)。□

## 5.5 Lyapunov Tracing

*Lyapunov Tracing* とは Lyapunov 領域の部分集合から Lyapunov 関数の 0 レベルセット \$L^0 = \{\mathbf{x} \in D\_L \mid L(\mathbf{x}) = 0\}\$ への写像であり、flow \$\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p})\$ および \$\varphi(T, \mathbf{x}; \mathbf{p}) \in L^0\$ を満たす時刻 \$T\$ を用いて定義される。本節では、[20] に基づき、以下の仮定のもと、Lyapunov Tracing が \$\mathbf{x}\$ および \$\mathbf{p}\$ に関して連続であることを示す。

**仮定 5.5.1.** \$\mathbf{x}^\*\$ を内点に含み、任意の \$\mathbf{p} \in D\_p\$ および任意の \$\mathbf{x} \in B^+ \cap L^+\$ に対し、以下の条件のどちらかを満たす閉球 \$B^+ \subset D\_L\$ が存在すること仮定する。

1. 有限な正の時刻 \$T\_0 > 0\$ が存在し、すべての \$t \in [0, T\_0)\$ に対し \$\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}) \in B^+ \cap L^+\$ および \$\varphi(T\_0, \mathbf{x}; \mathbf{p}) \in B^+ \cap L^0\$ が成立する。
2. すべての正の時刻 \$t > 0\$ に対して、\$\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}) \in B^+ \cap L^+\$ が成立する。

二つ目の条件は \$\mathbf{x}\$ が \$W^s(\mathbf{x}; \mathbf{p})\$ 上の点であることを意味しており、このとき \$L(\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}))\$ は時間無限大で必ず 0 に漸近し、ある正の定数 \$L\_1\$ に漸近することはないということに注意しておく。

簡単のためこれ以降 \$T\_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})\$ を \$T\_0\$ と書くこととする。また、本節では \$T\_0\$ が正の場合を考えるが、\$T\_0\$ が負の場合にも同様の議論が行えることに注意されたい。

### 5.5.1 Lyapunov Tracing の定義

系 (5.2.1) を考え、仮定 5.2.1 及び仮定 5.5.1 が成り立っているものとする。パラメータ \$\mathbf{p} \in D\_p\$ と点 \$\mathbf{x} \in B^+ \cap L^+\$ を一つずつ選び固定する。このとき、\$L^+\$ の定義より、\$L(\mathbf{x})\$ は正の値を取る。仮定 5.5.1 と Lyapunov 関数の単調性より、任意の \$L \in (0, L(\mathbf{x})]\$ に対して、\$L = L(\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}))\$ を満たすただ一つの正の時刻 \$t > 0\$ が存在する。さらに、陰関数定理より、\$t\$ は \$L\$ に関する微分可能な関数により表すことができ、\$\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}) = \varphi(t(L), \mathbf{x}; \mathbf{p})\$ と書くことができる。

写像 \$R : (B^+ \cap L^+) \times D\_p \ni (\mathbf{x}, \mathbf{p}) \mapsto R(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in B^+ \cap L^0\$ を次で定義する。

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{x} + \lim_{L_\varepsilon \rightarrow +0} \int_{L(\mathbf{x}; \mathbf{p})}^{L_\varepsilon} \mathbf{f}(\varphi(t(L), \mathbf{x}; \mathbf{p}); \mathbf{p}) \frac{dt}{dL} dL. \quad (5.5.1)$$

Lyapunov 関数の性質より、任意の  $\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}) \in D_L \setminus \{\mathbf{x}^*\}$  に対して

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}L(\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p})) < 0$$

が成立する。  $L_\varepsilon \in (0, L(\mathbf{x})]$  について

$$\begin{aligned} \varphi(t_\varepsilon, \mathbf{x}; \mathbf{p}) &= \mathbf{x} + \int_0^{t_\varepsilon} \mathbf{f}(\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}); \mathbf{p}) dt \\ &= \mathbf{x} + \int_{L(\mathbf{x}; \mathbf{p})}^{L_\varepsilon} \mathbf{f}(\varphi(t(L), \mathbf{x}; \mathbf{p}); \mathbf{p}) \frac{dt}{dL} dL \\ &= \varphi(t(L_\varepsilon), \mathbf{x}; \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

かつ  $L_\varepsilon = L(\varphi(t_\varepsilon, \mathbf{x}; \mathbf{p}))$  を満たす正の時刻  $t_\varepsilon > 0$  が存在する。  $\mathbf{x}$  が  $W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  上の点でない場合、仮定 5.5.1 の 1 より式 (5.5.2) の  $L_\varepsilon \rightarrow 0$  に関する極限が存在し、

$$\lim_{L_\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(t(L_\varepsilon), \mathbf{x}; \mathbf{p}) = \lim_{t_\varepsilon \rightarrow T_0} \varphi(t_\varepsilon, \mathbf{x}; \mathbf{p}) = \varphi(T_0, \mathbf{x}; \mathbf{p})$$

となる。一方、  $\mathbf{x}$  が  $W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  上の点である場合、安定多様体の定義より式 (5.5.2) の  $L_\varepsilon \rightarrow 0$  に関する極限が存在し、

$$\lim_{L_\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(t(L_\varepsilon), \mathbf{x}; \mathbf{p}) = \lim_{t_\varepsilon \rightarrow \infty} \varphi(t_\varepsilon, \mathbf{x}; \mathbf{p}) = \mathbf{x}^*$$

が成立する。これらより、  $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in (B^+ \cap L^+) \times D_p$  に対し、式 (5.5.1) により定義される写像  $R$  は well-defined である。

**定義 5.5.2** (Lyapunov Tracing). 式 (5.5.1) により定義される関数  $R: (B^+ \cap L^+) \times D_p \rightarrow B^+ \cap L^0$  を *Lyapunov Tracing* と呼ぶ。

以下では、Lyapunov Tracing の  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  に関する連続性を議論する。

## 5.5.2 Lyapunov Tracing $R$ の連続性

**定理 5.5.3.** 式 (5.5.1) により定義される *Lyapunov Tracing*  $R$  は  $(B^+ \cap L^+) \times D_p$  で連続である。

証明は [20] の Theorem 4.1 に基づき、二つのパートからなる。まず、

$$(B^+ \cap L^+) \setminus \overline{\bigcup_{\mathbf{p} \in D_p} W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})} \times D_p$$

における  $R$  の連続性について考える。上付きのバーは補集合ではなく閉包であることに注意されたい。

$(B^+ \cap L^+) \setminus \overline{\bigcup_{\mathbf{p} \in D_p} W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})} \times D_p$  における  $R$  の連続性

$L_{\max} = \min_{\mathbf{p} \in D_p} \max_{\mathbf{x} \in B^+ \cap L^+} L(\mathbf{x})$  とおき、 $l \in (0, L_{\max})$  に対して

$$X_l := \{ \mathbf{x} \in B^+ \cap L^+ \mid L(\mathbf{x}) = l \},$$

$$B_l := \{ \mathbf{x} \in B^+ \cap L^+ \mid L(\mathbf{x}) > l \},$$

とおく。写像  $R_l : B_l \times D_p \rightarrow X_l$  を

$$R_l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \varphi(T_l(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \mathbf{x}; \mathbf{p})$$

で定義する。ただし、 $T_l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in (0, T_0(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$  は  $\varphi(T_l(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \mathbf{x}; \mathbf{p}) \in X_l(\mathbf{p})$  を満たす時刻とする。また、初期点  $\mathbf{x}$  の取り方より任意の時刻  $t \in [0, T_l(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$  に対して  $\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}) \in B_l(\mathbf{p})$  が成立する。

$T_l$  が  $T_l : B_l \times D_p \rightarrow \mathbb{R}^+$  なる連続関数となること、および関数  $R_l(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  が  $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in B_l \times D_p$  に関して連続であることを次の補題 5.5.4 で示す。

**補題 5.5.4.** 関数  $T_l(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  は  $B_l \times D_p$  で連続である。さらに、 $R_l(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  もまた  $B_l \times D_p$  で連続である。

**証明.** 任意の点  $(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty) \in B_l \times D_p$  をとり、 $(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty)$  に収束する点列  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i) \in B_l \times D_p$  を考える。この点列を以下の二つの部分列にわけるとする。

**部分列 1 .**  $T_l(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty) < T_l(\mathbf{x}_{i_k}, \mathbf{p}_{i_k})$  を満たす部分列を

$$\{(\mathbf{x}_{i_k}, \mathbf{p}_{i_k})\}_{k=1,2,\dots} \subset \{(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i)\}_{i=1,2,\dots}$$

とする。

**部分列 2 .**  $T_l(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty) \geq T_l(\mathbf{x}_{j_k}, \mathbf{p}_{j_k})$  を満たす部分列を

$$\{(\mathbf{x}_{j_k}, \mathbf{p}_{j_k})\}_{k=1,2,\dots} \subset \{(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i)\}_{i=1,2,\dots}$$

とする。

証明には常微分方程式の解の初期値およびパラメータに関する連続性を用いる。時刻  $T \in \mathbb{R}$  を固定すると、 $\|(\mathbf{x}', \mathbf{p}') - (\mathbf{x}, \mathbf{p})\| \rightarrow 0$  のとき

$$\begin{aligned} \|\varphi(T, \mathbf{x}'; \mathbf{p}') - \varphi(T, \mathbf{x}; \mathbf{p})\| &\leq \|\varphi(T, \mathbf{x}'; \mathbf{p}') - \varphi(T, \mathbf{x}; \mathbf{p}')\| \\ &\quad + \|\varphi(T, \mathbf{x}; \mathbf{p}') - \varphi(T, \mathbf{x}; \mathbf{p})\| \\ &\rightarrow 0 \end{aligned} \tag{5.5.3}$$

が成立する。ここで、 $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  に関するノルムは  $\|(\mathbf{x}, \mathbf{p})\| := \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{p}\|$  により定義する。

**部分列 1 :**  $T_l(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty) < T_l(\mathbf{x}_{i_k}, \mathbf{p}_{i_k})$  について

$T_l(\mathbf{x}_{i_k}, \mathbf{p}_{i_k})$  の定義より、 $\varphi(T_l(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty), \mathbf{x}_{i_k}; \mathbf{p}_{i_k}) \in B_l(\mathbf{p}_{i_k})$  が成立する。

$$L_k = L(\varphi(T_l(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty), \mathbf{x}_{i_k}; \mathbf{p}_{i_k}); \mathbf{p}_{i_k})$$

とおくと、 $L_k > l$  および

$$\varphi(T_l(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty), \mathbf{x}_{i_k}; \mathbf{p}_{i_k}) - \varphi(T_l(\mathbf{x}_{i_k}, \mathbf{p}_{i_k}), \mathbf{x}_{i_k}; \mathbf{p}_{i_k}) = \int_l^{L_k} \mathbf{f}(\varphi(t(L_t), \mathbf{x}_{i_k}; \mathbf{p}_{i_k}); \mathbf{p}_{i_k}) \frac{dt}{dL} dL \quad (5.5.4)$$

が成立する。(5.5.3) より、 $\|(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty) - (\mathbf{x}_{i_k}, \mathbf{p}_{i_k})\| \rightarrow 0$  の極限を考えると  $L_k$  は  $l$  に収束する。平衡点以外では  $dt/dL_t$  が有限であることに注意すると、 $l > 0$  のとき、式 (5.5.4) 右辺の被積分関数は有限であり、よって、 $L_k \rightarrow l$  の極限について考えると、 $\varphi(T_l(\mathbf{x}_{i_k}, \mathbf{p}_{i_k}), \mathbf{x}_{i_k}; \mathbf{p}_{i_k}) \rightarrow \varphi(T_l(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty), \mathbf{x}_{i_k}; \mathbf{p}_{i_k})$  となる。これと自励系常微分方程式の解が交差しないという事実より、 $\|(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty) - (\mathbf{x}_{i_k}, \mathbf{p}_{i_k})\| \rightarrow 0$  の極限を考えると、 $T_l(\mathbf{x}_{i_k}, \mathbf{p}_{i_k})$  は  $T_l(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty)$  に収束する。

**部分列 2** :  $T_l(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty) \geq T_l(\mathbf{x}_{j_k}, \mathbf{p}_{j_k})$  について

仮定 5.5.1 より、 $\varphi(T_l(\mathbf{x}_{j_k}, \mathbf{p}_{j_k}), \mathbf{x}_\infty; \mathbf{p}_\infty) \in B^+ \cap L^+$  および  $0 < T_l(\mathbf{x}_{j_k}, \mathbf{p}_{j_k}) \leq T_l(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty)$  が成立する。 $T_l(\mathbf{x}_{j_k}, \mathbf{p}_{j_k})$  の有界性より、 $T_l(\mathbf{x}_{j_k}, \mathbf{p}_{j_k})$  の上極限

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} T_l(\mathbf{x}_{j_k}, \mathbf{p}_{j_k})$$

と下極限

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} T_l(\mathbf{x}_{j_k}, \mathbf{p}_{j_k})$$

は有限の値をとり、

$$0 \leq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} T_l(\mathbf{x}_{j_k}, \mathbf{p}_{j_k}) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} T_l(\mathbf{x}_{j_k}, \mathbf{p}_{j_k}) \leq T_l(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty)$$

が成り立つ。

$T_l^\infty := \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} T_l(\mathbf{x}_{j_k}, \mathbf{p}_{j_k})$  とおく。下極限の性質より、 $T_l^\infty$  に収束する点  $T_l(\mathbf{x}_{j_{k_m}}, \mathbf{p}_{j_{k_m}})$  からなる部分列  $\{(\mathbf{x}_{j_{k_m}}, \mathbf{p}_{j_{k_m}})\}_{m=1,2,\dots} \subset \{(\mathbf{x}_{j_k}, \mathbf{p}_{j_k})\}_{k=1,2,\dots}$  が存在する。

一方、(5.5.3) より  $m \rightarrow \infty$  の極限について

$$\|\varphi(T_l^\infty, \mathbf{x}_\infty; \mathbf{p}_\infty) - \varphi(T_l^\infty, \mathbf{x}_{j_{k_m}}; \mathbf{p}_{j_{k_m}})\| \rightarrow 0$$

となる。式 (5.5.3) と  $\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p})$  の  $t$  に関する連続性より、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} L(\varphi(T_l^\infty, \mathbf{x}_{j_{k_m}}; \mathbf{p}_{j_{k_m}})) = \lim_{m \rightarrow \infty} L(\varphi(T_l(\mathbf{x}_{j_{k_m}}, \mathbf{p}_{j_{k_m}}), \mathbf{x}_{j_{k_m}}; \mathbf{p}_{j_{k_m}})) = l$$

が要請され、これは  $L(\varphi(T_l^\infty, \mathbf{x}_\infty; \mathbf{p}_\infty))$  が  $l$  とならなければいけないことを意味し、さらに  $T_l(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  の定義と  $T_l^\infty \leq T_l(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty)$  より、 $T_l^\infty = T_l(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty)$  が成立する。これより  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} T_l(\mathbf{x}_{j_k}, \mathbf{p}_{j_k}) = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} T_l(\mathbf{x}_{j_k}, \mathbf{p}_{j_k}) = T_l(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty)$  となり、 $\|(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty) - (\mathbf{x}_{j_k}, \mathbf{p}_{j_k})\| \rightarrow 0$  の極限に関して、 $T_l(\mathbf{x}_{j_k}, \mathbf{p}_{j_k})$  が  $T_l(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty)$  に収束することが導かれる。

$R_l$  の定義より  $B_l \times D_p$  上での  $R_l(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  の連続性は、 $T_l$  の連続性から自然に導かれる。  $\square$

$(B^+ \cap L^+) \setminus \overline{\bigcup_{p \in D_p} W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})} \times D_p$  上での  $R$  の連続性は  $T_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  の連続性から導かれる。 $\mathbf{p} \in D_p$  を固定した場合、 $\mathbf{x} \in (B^+ \cap L^+) \setminus \overline{W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})}$  に対し  $R(\mathbf{x})$  は平衡点  $\mathbf{x}^*$  とは異なる点であることから、 $dt/dL$  は有限となり、よって (5.5.4) 右辺の被積分関数は  $l=0$  でも有限となる。したがって、 $\mathbf{x} \in (B^+ \cap L^+) \setminus \overline{W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})}$  に関する  $T_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  の連続性は補題 5.5.4 と同様の議論により示される。

さらに  $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in (B^+ \cap L^+) \setminus \overline{\bigcup_{p \in D_p} W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})} \times D_p$  に関する  $T_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  の連続性を示すために以下の補題を用いる。

**補題 5.5.5.** 任意の  $\mathbf{p} \in D_p$  および任意の  $\mathbf{x} \in (B^+ \cap L^+) \setminus \overline{W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})}$  に対してある  $r > 0$  と  $\delta > 0$  が存在し、 $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| < r$ ,  $\|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\| < \delta$  を満たす  $\mathbf{x}', \mathbf{p}'$  に対して  $\mathbf{x}' \notin \overline{W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p}')}$  が成立する。

**証明.** 任意の  $r > 0$  と  $\delta > 0$  に対し、

$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| < r, \quad \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\| < \delta \quad \text{かつ} \quad \mathbf{x}' \in \overline{W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p}')} \quad (5.5.5)$$

を満たす  $\mathbf{x}' \in B^+ \cap L^+$  および  $\mathbf{p}' \in D_p$  が存在することを仮定し、矛盾を示す。平衡点  $\mathbf{x}^*$  がサドルであることより、 $\nu$  次元の安定固有空間  $E^\nu = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\nu\}$  と  $n - \nu$  次元の不安定固有空間  $E^{n-\nu} = \text{span}\{\mathbf{u}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$  が存在する。ただし、 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\nu$  を  $D\mathbf{f}^*(\bar{\mathbf{p}})$  の負の固有値に対応する一般固有ベクトル、 $\mathbf{u}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{u}_n$  を正の固有値に対応する一般固有ベクトルとする。 $\mathbf{x}^*$  の双曲性より  $\mathbb{R}^n = E^\nu \oplus E^{n-\nu}$  であり、 $n \times n$  行列  $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$  は正則である。よって、任意の  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  は

$$\mathbf{x} = U \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\zeta} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_\nu \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_{n-\nu} \end{pmatrix}, \quad \eta_i, \zeta_i \in \mathbb{R}$$

と書くことが出来る。補題 5.4.1 より  $D_L$  で cone condition が成立するので、任意の  $\mathbf{q} \in D_p$  に対して

$$W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{q}) = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\zeta} \end{pmatrix} \in D_L \mid \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{h}_s(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{q}) \right\} \quad (5.5.6)$$

を満たす関数  $\mathbf{h}_s : E^\nu \times D_p \rightarrow E^{n-\nu}$  (cf. [18, 35]) が存在する。ただし、座標系を  $U$  で定まる斜交座標に取り直した。このとき、 $\mathbf{h}_s$  は  $\boldsymbol{\eta}, \mathbf{q}$  に関して Lipschitz 連続である。

$\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  を  $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}), \mathbf{x}' = (\boldsymbol{\eta}', \boldsymbol{\zeta}')$  と書くと、仮定より  $\boldsymbol{\zeta} \neq \mathbf{h}_s(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{p})$  および  $\boldsymbol{\zeta}' = \mathbf{h}_s(\boldsymbol{\eta}', \mathbf{p}')$  が成り立つ。 $\hat{\mathbf{x}} = (\boldsymbol{\eta}, \mathbf{h}_s(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{p})) \in \overline{W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})}$ ,  $\varepsilon_0 = \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|$  とおくと、 $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}$  より  $\varepsilon_0$  は正である。式 (5.5.5) の  $r$  として、 $r < \frac{1}{4}\varepsilon_0$  を満たすものをとると、

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| &= \|\mathbf{x} - \mathbf{x}' - (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}')\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| + \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}'\| \\ \Leftrightarrow \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| - \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}'\| &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < r < \frac{1}{4}\varepsilon_0 \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

を得る。

一方、 $h_s$  の連続性より  $\frac{1}{4}\varepsilon_0$  に対して

$$\|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}'\| < r', \quad \|\mathbf{p} - \mathbf{p}'\| < \delta' \Rightarrow \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}'\| < \frac{1}{4}\varepsilon_0 \quad (5.5.8)$$

を満たす  $r' > 0$  および  $\delta' > 0$  が存在する。式 (5.5.5) の  $r, \delta$  として、(5.5.8) の条件を満たす十分小さいものを選ぶ。このとき、式 (5.5.7) の左辺は

$$-\frac{1}{4}\varepsilon_0 + \varepsilon_0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| - \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}'\|$$

と下から評価され、これは明らかに右辺と矛盾する。これは仮定 (5.5.5) が偽であることを意味する。よって背理法により題意が示された。□

**補題 5.5.6.** 関数  $T_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  は  $(B^+ \cap L^+) \setminus \overline{\bigcup_{\mathbf{p} \in D_p} W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})} \times D_p$  で連続である。

**証明.** 任意の  $\mathbf{p}_\infty \in D_p$  および  $\mathbf{x}_\infty \in (B^+ \cap L^+) \setminus \overline{W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p}_\infty)}$  をとる。補題 5.5.5 より、 $\mathbf{p}_\infty, \mathbf{x}_\infty$  に対し、「 $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\infty\| < r, \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}_\infty\| < \delta$  ならば  $\mathbf{x}' \notin W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p}')$ 」を満たす  $r > 0$  と  $\delta > 0$  が存在する。そこで

$$B_{r,\delta} = \{(\mathbf{x}', \mathbf{p}') \in (B^+ \cap L^+) \times D_p \mid \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\infty\| < r, \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}_\infty\| < \delta\}$$

とおき、 $(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty)$  に収束する任意の点列  $\{(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i)\}_{i=1,2,\dots}$ ,  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i) \in B_{r,\delta}$  を考える。 $\mathbf{x}_i \notin W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p}_i)$  より、式 (5.5.4) 右辺の被積分関数は  $l = 0$  においても任意の  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i) \in B_{r,\delta}$  で有界となる。このとき、補題 5.5.4 の証明と同様の議論を行うことができ、題意が示される。□

定義から、 $R(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  の  $(B^+ \cap L^+) \setminus \overline{\bigcup_{\mathbf{p} \in D_p} W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})} \times D_p$  における連続性は補題 5.5.6 により導かれる。これを命題の形でまとめておく。

**命題 5.5.7.** 写像  $R(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  は  $\left( (B^+ \cap L^+) \setminus \overline{\bigcup_{\mathbf{p} \in D_p} W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})} \right) \times D_p$  で連続である。

$\overline{\bigcup_{\mathbf{p} \in D_p} W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})} \times D_p$  における  $R$  の連続性

与えられた  $r > 0$  に対し、

$$D_r = \{\mathbf{x} \in B^+ \cap (L^+ \cup L^0) \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \geq r\}$$

で定義されるコンパクト集合  $D_r$  を考える。さらに  $r$  に関する関数  $\alpha$  を以下で定義する：

$$\alpha(r) = - \sup_{\mathbf{p} \in D_p} \sup_{\mathbf{x} \in D_r} \frac{\nabla_x L(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}; \mathbf{p})}{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}; \mathbf{p})\|}.$$

Lyapunov 関数の性質より  $\nabla_x L(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = \frac{d}{dt} L(\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}))$  は  $D_r$  で負の値をとり、 $\mathbf{x} \in D_r$  より  $\mathbf{f}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$  となる。これと  $\nabla_x L(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}; \mathbf{p})$  の  $\mathbf{p}$  に関する



連続性、および  $D_p$  のコンパクト性より  $\alpha(r)$  は正の値を取る。また、定義より  $\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}) \in D_r$  について

$$\frac{d}{dt}L(\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p})) \leq -\alpha(r) \left\| \frac{d}{dt}\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}) \right\| \quad (5.5.9)$$

が成立する。さらに、以下の補題が成り立つ。

**補題 5.5.8.**  $\mathbf{p} \in D_p$  を固定し、 $l \in (0, L_{\max})$  と  $\mathbf{x} \in X_l$  を任意にとる。  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|$  とおき、  $0 \leq t \leq T_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  を満たす時刻  $t$  に対し  $\varphi(t, \mathbf{x}) \in D_r$  となることを仮定する。このとき、

$$\|R(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \mathbf{x}^*\| \leq r + \frac{l}{\alpha(r)} \quad (5.5.10)$$

が成立する。

**証明.**  $0 \leq t \leq T_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  を満たす時刻  $t$  に対し  $\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}) \in D_r$  であるという仮定より、  $\mathbf{x} \in B^+ \setminus W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  であり、これより  $T_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  は有限な正の値をとる。これに注意して、(5.5.9) を用いると、

$$\begin{aligned} l &= - \int_0^{T_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})} \frac{d}{dt}L(\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}); \mathbf{p}) dt \\ &\geq \alpha(r) \int_0^{T_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})} \left\| \frac{d}{dt}\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}) \right\| dt \\ &\geq \alpha(r) \int_0^{T_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})} \frac{d}{dt}\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}) \cdot \frac{\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}) - \mathbf{x}^*}{\|\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}) - \mathbf{x}^*\|} dt \\ &= \alpha(r) \int_0^{T_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})} \frac{d}{dt}\|\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}) - \mathbf{x}^*\| dt \\ &= \alpha(r) (\|R(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \mathbf{x}^*\| - r) \end{aligned}$$

が得られ、これより (5.5.10) が成立する。  $\square$

以上の準備のもと、次の命題を示す。

**命題 5.5.9.** 写像  $R(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  は  $(B^+ \cap \overline{\bigcup_{\mathbf{p} \in D_p} W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})}) \times D_p$  で連続である。

**証明.** まず、[20] の結果より、  $\mathbf{p} \in D_p$  を止めるごとに  $B^+ \cap \overline{W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})} = B^+ \cap W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  である。さらに、  $W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  は Lipschitz 関数  $\mathbf{h}_s(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{p})$  のグラフとして表現することができる。また、  $B^+$  と  $D_p$  がコンパクトであることより、  $B^+ \cap (\bigcup_{\mathbf{p} \in D_p} W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p}))$  は有界閉集合となる。したがって、  $B^+ \cap \overline{\bigcup_{\mathbf{p} \in D_p} W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})} = B^+ \cap (\bigcup_{\mathbf{p} \in D_p} W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p}))$  となる。任意に  $(\mathbf{z}, \mathbf{p}) \in (B^+ \cap W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})) \times D_p$  をとり、  $(\mathbf{z}, \mathbf{p})$  に収束する任意の点列  $\{(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i)\}_{i=1}^{\infty} \subset (B^+ \cap L^+) \times D_p$  を考える。背理法により  $\lim_{i \rightarrow \infty} R(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i) = R(\mathbf{z}, \mathbf{p}) = \mathbf{x}^*$  を示そう。

$\mathbf{y}_i = R(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i) \in B^+ \cap L^0$  とおく。  $B^+ \cap L^0$  は有界閉集合であるから、点列  $\{\mathbf{y}_i\}$  は収束する部分列  $\{\mathbf{y}_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$  を持つ。その収束先を  $\mathbf{y}^* \in B^+ \cap L^0$  とおく。以下で

は、 $\mathbf{y}^* \neq \mathbf{x}^*$  を仮定し矛盾を導く。正数  $r$  を  $r := \frac{1}{2}\|\mathbf{y}^* - \mathbf{x}^*\|$  により定義する。 $\|\varphi(t_{l_0}, \mathbf{z}; \mathbf{p}) - \mathbf{x}^*\| < r$  を満たす十分長い時刻  $t_{l_0}$  をとる。 $\mathbf{z} \in W^s(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  であることからこのような時刻は存在する。 $l_0 = L(\varphi(t_{l_0}, \mathbf{z}; \mathbf{p}); \mathbf{p})$  とおくと、 $R_{l_0}(\mathbf{z}, \mathbf{p}) = \varphi(t_{l_0}, \mathbf{z}; \mathbf{p})$  である。補題 5.5.4 より  $R_{l_0}(\mathbf{z}, \mathbf{p})$  は連続であり、十分大きい  $j$  に対して  $\|R_{l_0}(\mathbf{x}_{i_j}, \mathbf{p}_{i_j}) - \mathbf{x}^*\| < r$  が成り立つ。そこで、任意の  $j \geq J$  に対して  $\|R_{l_0}(\mathbf{x}_{i_j}, \mathbf{p}_{i_j}) - \mathbf{x}^*\| < r$  および  $\|\mathbf{y}^* - \mathbf{y}_{i_j}\| < \frac{1}{2}r$  が成り立つように  $J$  をとる。

$j \geq J$  に対して  $\mathbf{x}_{l_0} = R_{l_0}(\mathbf{x}_{i_j}, \mathbf{p}_{i_j})$  とおく。 $\|\mathbf{y}^* - \mathbf{y}_{i_j}\| < \frac{1}{2}r$  より  $\varphi(T_0(\mathbf{x}_{l_0}, \mathbf{p}_{i_j}), \mathbf{x}_{l_0}; \mathbf{p}_{i_j}) = \mathbf{y}_{i_j} \in D_r(\mathbf{p})$  であること、および  $\|\mathbf{x}_{l_0} - \mathbf{x}^*\| < r$  より、ある時刻  $t_l \in (0, T(\mathbf{x}_{l_0}, \mathbf{p}_{i_j}))$  が存在し、 $\|\varphi(t_l, \mathbf{x}_{l_0}; \mathbf{p}_{i_j}) - \mathbf{x}^*\| = r$  が成立し、かつ  $t \in [t_l, T_0(\mathbf{x}_{l_0}, \mathbf{p}_{i_j})]$  を満たす任意の時刻  $t$  に対して  $\varphi(t, \mathbf{x}_{l_0}; \mathbf{p}_{i_j}) \in D_r$  が成立する。

$\mathbf{x}_l := \varphi(t_l, \mathbf{x}_{l_0}; \mathbf{p}_{i_j})$  および  $l := L(\mathbf{x}_l, \mathbf{p}_{i_j}) < l_0$  とおく。補題 5.5.8 の  $\mathbf{x}$  として  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_l$  を考えることで、

$$\|\mathbf{y}_{i_j} - \mathbf{x}^*\| \leq r + \frac{l}{\alpha(r)}$$

が得られ、これより

$$\|\mathbf{y}^* - \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{y}^* - \mathbf{y}_{i_j}\| + \|\mathbf{y}_{i_j} - \mathbf{x}^*\| < \frac{3}{2}r + \frac{l}{\alpha(r)}$$

となる。この不等式と  $\|\mathbf{y}^* - \mathbf{x}^*\| = 2r$  より

$$\frac{1}{2}r \leq \frac{l}{\alpha(r)} \tag{5.5.11}$$

が得られる。一方、固定された  $r$  に対して、時刻  $t_{l_0}$  を任意に大きくとることができる。よって、 $l_0$  と  $l < l_0$  は任意に小さくすることができ、 $\frac{l}{\alpha(r)} < \frac{1}{2}r$  とすることが可能である。これは (5.5.11) に矛盾する<sup>2</sup>。□

定理 5.5.3 は命題 5.5.7 と 5.5.9 より従う。

## 5.6 ホモクリニック軌道の検証手順

ホモクリニック軌道の精度保証についての数学的な論証を行う前に、実際の検証手順を本節で解説する。本節の内容は、数学的な議論はさておき、我々の手法を用いてホモクリニック軌道の存在検証をしたい読者の役に立つことが期待される。また、第 5.9 節の数値例では、本節で示す Procedure に則った記述が行われているので、本節と合わせて第 5.9 節を読むことで、我々の手順についての理解がさらに進むと思われる。

提案手法は二つの Procedure から構成されており、一つ目の Procedure では不安定多様体上の点を同定する方法、および連続写像  $F_1$  が構成できる十分条件を与える。

<sup>2</sup>[20] の Fig.1 はパラメータ  $\mathbf{p}_{i_j}$  を含まない類似の状況を描いている。

## Procedure 1.

1. 近似的なホモクリニック軌道  $\{\varphi(t, \mathbf{x}_0; \tilde{\mathbf{p}}) \mid t \in \mathbb{R}\}$  を与えるパラメータ  $\tilde{\mathbf{p}}$  および初期点  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  を近似計算により見つける。第 5.9 節の図 5.5 を参照。  
閉集合  $D_p \subset \mathbb{R}^{n-\nu}$  を、 $\tilde{\mathbf{p}}$  を内点に含む区間ベクトル  $[D_p] \subset \mathbb{R}^{n-\nu}$  により定義する。このとき、 $[D_p]$  の各成分の半径は十分小さいことを仮定する。以降、数学的な議論においては  $D_p$  を、区間演算による精度保証に関する文脈においては  $[D_p]$  を用いる。
2. Lyapunov 候補関数  $L(\mathbf{x})$  を与える対称行列  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$  を近似計算により算定する。 $L(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$  が有界凸閉集合  $D_L$  で  $\mathbf{x}^*$  に対する Lyapunov 関数になることを精度保証により検証する。 $D_L$  が Lyapunov 領域であることは、任意の  $\mathbf{x} \in D_L$  に対して区間行列  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}; [D_p])^T Y + Y D\mathbf{f}(\mathbf{x}; [D_p])$  が負定値になることを確認することにより検証される。第 5.9 節の図 5.6 を参照。
3. 対称行列  $Y$  の固有値  $\lambda_i$  を  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\nu > 0 > \lambda_{\nu+1} \geq \dots \geq \lambda_n$  とし、対応する固有ベクトルを  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  とする。ただし、各固有ベクトル  $\mathbf{v}_i$  は正規化されているものとする。 $Y$  は実対称行列なので、各  $\mathbf{v}_i$  は直交する。各  $\mathbf{v}_i$  を包含する区間ベクトル  $[\mathbf{v}_i] \subset \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, n$  を精度保証により計算する。固有値の精度保証は、例えば INTLAB を用いれば容易に行うことができる [25]。行列  $A^+, A^-$  および区間行列  $[A^+], [A^-]$  を

$$\begin{aligned} A^+ &:= (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_\nu) \in \mathbb{R}^{n \times \nu}, \\ A^- &:= (\mathbf{v}_{\nu+1} \ \mathbf{v}_{\nu+2} \ \dots \ \mathbf{v}_n) \in \mathbb{R}^{n \times (n-\nu)}, \\ [A^+] &:= ([\mathbf{v}_1] \ [\mathbf{v}_2] \ \dots \ [\mathbf{v}_\nu]) \subset \mathbb{R}^{n \times \nu}, \\ [A^-] &:= ([\mathbf{v}_{\nu+1}] \ [\mathbf{v}_{\nu+2}] \ \dots \ [\mathbf{v}_n]) \subset \mathbb{R}^{n \times (n-\nu)} \end{aligned}$$

により定義し、 $[A^+]^T Y [A^+]$  の正定値性および  $[A^-]^T Y [A^-]$  の負定値性を精度保証により検証する。

4. 閉球  $B^- = \{\mathbf{x} \in D_L \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq r^-\}$  が以下の条件を満たすように半径  $r^-$  を決定する (仮定 5.7.1 も参照)。

$B^-$  の境界を  $\partial B^-$  とする。 $\partial B^- \cap D_L$  を区間ベクトル  $[B^-]_k \subset \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \dots, K_0$  に包含される部分集合に分割する。このとき、各  $k$  に対して次の条件のうちどちらかが成立することを検証する：

- (I) 任意の  $\mathbf{x} \in \partial B^- \cap [B^-]_k$  と  $\mathbf{p} \in D_p$  に対して、 $\mathbf{n}(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) > 0$  が成立する。ここで、 $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  は  $\partial B^-$  の  $\mathbf{x}$  における外向き法線ベクトルを表す。
- (II) 任意の  $\mathbf{x} \in [B^-]_k$  と  $\mathbf{p} \in D_p$  に対してある負の時刻  $T_k^- < 0$  が存在し、 $L(\varphi(T_k^-, \mathbf{x})) > 0$  が成立する。さらに、任意の時刻  $t \in [T_k^-, 0]$  に対して  $\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}) \in D_L$  が成立する。

これらの条件の成立は精度保証付き数値計算により検証される。条件 (I) の検証には  $\mathbf{n}([B^-]_k)^T \mathbf{f}([B^-]_k; [D_p])$  を用いればよい。もし検証が失敗したら、 $r^-$  を変えて再度検証を行う。

5. 点  $\tilde{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \mathbf{v}_i \in \{\varphi(t, \mathbf{x}_0; \tilde{\mathbf{p}}) \mid t \in \mathbb{R}\} \cap (B^- \cap L^-)$  を選び、 $\tilde{\mathbf{x}}$  を用いて  $\nu$  次元の部分集合  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  を

$$\Sigma = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i, x_{\nu+1} = \tilde{x}_{\nu+1}, \dots, x_n = \tilde{x}_n \right\}$$

により定義する。

6. 任意の  $\mathbf{p} \in D_p$  に対する不安定多様体  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  の点を含む集合の候補として、 $\nu$  次元の球  $B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r) = \{\mathbf{x} \in \Sigma \mid \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \leq r\} \subset (\Sigma \cap B^- \cap L^-)$  をとる。第 5.9 節の図 5.7 を参照。

球  $B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)$  の境界  $\partial B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)$  を区間ベクトル  $[\mathbf{b}]_k \subset \mathbb{R}^n$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$  に含まれる部分集合に分割する。任意の  $\mathbf{x}_b \in [\mathbf{b}]_k$ ,  $\mathbf{p} \in D_p$  と  $k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) について  $L(\varphi(T_1(\mathbf{x}_b, \mathbf{p}), \mathbf{x}_b)) = 0$  が成立する負の時刻  $T_1(\mathbf{x}_b, \mathbf{p}) < 0$  が存在することを検証する。さらに、各  $k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) 毎に、すべての  $\mathbf{x}_b \in [\mathbf{b}]_k$  と  $\mathbf{p} \in D_p$  について  $\varphi(T_1(\mathbf{x}_b, \mathbf{p}), \mathbf{x}_b; \mathbf{p}) \in [\mathbf{x}]_k$  が成り立つ区間ベクトル  $[\mathbf{x}]_k$  を同定する。この同定には、区間 Lohner 法を用いて

$$L(\varphi(T_k^-, [\mathbf{b}]_k; [D_p])) < 0 < L(\varphi(T_k^+, [\mathbf{b}]_k; [D_p]))$$

を満たす時刻  $0 > T_k^- > T_k^+$  を見つけることなどが考えられる。

7. 部分集合  $\Gamma^- \subset \mathbb{R}^n$  を

$$\Gamma^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (A^-)^T \mathbf{x} = \mathbf{0}\} \quad (5.6.1)$$

により定義し、射影  $P^- : \mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma^-$  を  $P^- = I - A^-(A^-)^T$  で定義する。ここで、 $I$  は  $\mathbb{R}^n$  上の恒等写像である。区間行列  $[P^-] \subset \mathbb{R}^{n \times n}$  を  $[P^-] = I - [A^-][A^-]^T$  により計算する。

8.  $[P^-]$  を用いて以下の条件を検証する。

- 集合  $\bigcup_{k=1, \dots, K} [P^-][\mathbf{x}]_k$  が  $\Gamma^-$  上の球面と同相な closed surface  $S^- \subset \Gamma^-$  を含む。
- $S^-$  が囲む領域  $C^- \subset \Gamma^-$  が  $[P^-]\mathbf{x}^*$  を含む。
- $[P^-]\mathbf{x}^* \notin \bigcup_{k=1, \dots, K} [P^-][\mathbf{x}]_k$  が成立する。

三次元の場合には図 5.8 を、四次元の場合には図 5.12 を参照。

9. 固定された  $\mathbf{p} \in D_p$  毎に、 $\mathbf{x}_b \in \partial B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)$  に関する写像度  $\deg(P^- \circ \varphi(T_1(\mathbf{x}_b, \mathbf{p}), \mathbf{x}_b; \mathbf{p}))$  が0でないことを定理 5.3.3 または Aberth の方法と、 $[P^-]$ ,  $[\mathbf{b}]_k$  および  $[D_p]$  に関する区間演算を用いて検証する。このとき、球  $B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)$  は任意の  $\mathbf{p} \in D_p$  に対して  $W^u(\mathbf{x}^*, \mathbf{p})$  の点を含む。このことは次節で証明する。

**Note:** Steps 7, 8, 9 の条件を満たす適切な  $r$  を得るためには、通常は何度かの試行錯誤を行う。

第 5.2 節で言及した連続写像  $F_2$  および  $F$  が構成できるための十分条件を確認する手順を Procedure 2 で与える。

### Procedure 2.

1. 閉球  $B^+ = \{\mathbf{x} \in D_L \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq r^+\}$  が仮定 5.5.1 を満たすように半径  $r^+ > 0$  を見つける。これには、以下の条件を満たす  $r^+ > 0$  を見つければよい。

$\partial B^+$  を  $B^+$  の境界とする。 $\partial B^+ \cap L^+$  を区間ベクトル  $[B^+]_k \subset \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \dots, K'_0$  に包含される部分集合に分割する。各  $k$  毎に、以下のどちらかの条件が満たされることを確認する。

- (I)' 任意の  $\mathbf{x} \in [B^+]_k$  と  $\mathbf{p} \in D_p$  に対して  $\mathbf{n}(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) < 0$  が成立する。  
ここで、 $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  は  $\partial B^+$  の  $\mathbf{x}$  における外向き法線ベクトルを表す。この検証には、 $\mathbf{n}([B^+]_k)^T \mathbf{f}([B^+]_k; [D_p])$  を区間演算で算定することが考えられる。
- (II)' 任意の  $\mathbf{x} \in [B^+]_k$  および  $\mathbf{p} \in D_p$  に対してある正の時刻  $T_k^+$  が存在し、 $L(\varphi(T_k^+, \mathbf{x}; \mathbf{p})) < 0$  が成立する。さらに任意の時刻  $t \in [0, T_k^+]$  に対して  $\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}) \in D_L$  が成立する。

検証に失敗した場合、適切な  $r^+$  を見つけるために試行錯誤を繰り返す必要がある。

2.  $B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)$  を包含する区間ベクトル、または区間ベクトルの和集合  $[B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)]$  に対して  $\varphi(T_2, [B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)]; [D_p]) \subset B^+ \cap L^+$  を満たすある正の時刻  $T_2 > 0$  が存在することを検証する。第 5.9 節の図 5.9 参照。
3.  $D_p$  の境界  $\partial D_p$  を、区間ベクトル  $[\mathbf{d}]_k \subset \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \dots, K'$  に包含される部分集合に分割する。全ての  $\mathbf{x} \in B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r), \mathbf{p}_b \in [\mathbf{d}]_k$  および  $k (k = 1, \dots, K')$  に対して  $L(\varphi(T_3(\mathbf{x}, \mathbf{p}_b), \mathbf{x}; \mathbf{p}_b)) = 0$  を満たす正の時刻  $T_3(\mathbf{x}, \mathbf{p}_b) > T_2$  が存在することを検証する。さらに、各  $k (k = 1, \dots, K')$  毎に、すべての  $\mathbf{x} \in B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)$  と  $\mathbf{p}_b \in [\mathbf{d}]_k$  について  $\varphi(T_3(\mathbf{x}, \mathbf{p}_b), \mathbf{x}; \mathbf{p}_b) \in [\mathbf{x}' ]_k$  が成り立つ区間ベクトル  $[\mathbf{x}' ]_k$  を同定する。第 5.9 節の図 5.10 参照。
4. 部分集合  $\Gamma^+ \subset \mathbb{R}^n$  を

$$\Gamma^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (A^+)^T \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

により定義し、さらに射影  $P^+ : \mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma^+$  を  $P^+ = I - A^+(A^+)^T$  で定義する。また、区間行列  $[P^+]$  を  $[P^+] = I - [A^+][A^+]^T$  により定義する。ここで、 $I$  は  $\mathbb{R}^n$  の恒等写像である。

5. 区間行列  $[P^+]$  を用いて以下の条件を確認する。

- 集合  $\bigcup_{k=1, \dots, K'} [P^+][\mathbf{x}'_k]$  が  $\Gamma^+$  上の球面と同相な closed surface  $S^+ \subset \Gamma^+$  を含む。
- $S^+$  が囲む領域  $C^+ \subset \Gamma^+$  が  $[P^+]\mathbf{x}^*$  を含む。
- $[P^+]\mathbf{x}^* \notin \bigcup_{k=1, \dots, K'} [P^+][\mathbf{x}'_k]$  が成立する。

三次元の場合には図 5.11 を、四次元の場合には図 5.13 を参照。

6. 固定された  $\mathbf{x} \in B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)$  ごとに、 $\mathbf{p}_b \in \partial D_p$  に関する写像度  $\deg(P^+ \circ \varphi(T_3(\mathbf{x}, \mathbf{p}_b), \mathbf{x}; \mathbf{p}_b))$  が 0 でないことを、定理 5.3.3 または Aberth の方法と、 $[P^+]$ ,  $[B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)]$  および  $[d]_k$  に関する区間演算を用いて検証する。このとき、 $D_p$  は  $\mathbf{x}^*$  に関するホモクリニック軌道を与えるパラメータを含む。

## 5.7 写像 $F_1$ の構成

本節および次節では、前節で述べた手順がホモクリニック軌道の存在証明を与えることを示す。まず、次の写像

$$F_1 : D_p \rightarrow \bigcup_{\mathbf{p} \in D_p} W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p}) \times D_p$$

を構成することから始めよう。ここで、 $F_1$  は  $\mathbf{f}_1(\mathbf{p}) \in W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  を用いて  $F_1(\mathbf{p}) = (\mathbf{f}_1(\mathbf{p}), \mathbf{p})$  と表される。写像  $F_1$  の定義の詳細は後述する定理 5.7.3 および定理 5.7.5 により示される。

Lyapunov 関数  $L(\mathbf{x})$  が構成されており、さらに Lyapunov 領域  $D_L$  が同定されていることを仮定する。このとき、固定された  $\mathbf{p} \in D_p$  ごとに  $\mathbf{x}^*$  は系 (3.2.1) の  $D_L$  における一意な平衡点である [19]。さらに、以下が成立することを仮定する。この仮定は、仮定 5.5.1 の不安定方向に対応する仮定である。

**仮定 5.7.1.**  $\mathbf{x}^*$  を内点に含む閉球  $B^- \subset D_L$  が存在し、任意の  $\mathbf{p} \in D_p$  および任意の  $\mathbf{x} \in B^- \cap L^-$  に対し、以下の条件のどちらかを満たすこと仮定する。

1. 有限な負の時刻  $T_1 < 0$  が存在し、すべての  $t \in (T_1, 0]$  に対し  $\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}) \in B^- \cap L^-$  および  $\varphi(T_1, \mathbf{x}; \mathbf{p}) \in B^- \cap L^0$  が成立する。
2. すべての負の時刻  $t < 0$  に対して、 $\varphi(t, \mathbf{x}; \mathbf{p}) \in B^- \cap L^-$  が成立する。

実際の計算においては、仮定 5.7.1 の成立は Procedure 1 におけるステップ 4 の検証を通じて確認される。

以下の手順は、パラメータ  $\mathbf{p} \in D_p$  に対する不安定多様体  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  上の点を特定する条件を導く。

- (i) ベクトル  $\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, n$  を実対称行列  $Y$  の正規化された固有ベクトルとする。このとき、 $Y$  の対称性より、各  $\mathbf{v}_i$  は直交することに注意。行列  $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times \nu}$  および  $A^- \in \mathbb{R}^{n \times (n-\nu)}$  を、Procedure 1 のステップ 3 と同様に定義する。
- (ii)  $\{\varphi(t, \mathbf{x}_0; \tilde{\mathbf{p}}) \mid t \in \mathbb{R}\}$  を近似的なホモクリニック軌道とする。この軌道上の点  $\tilde{\mathbf{x}} \in \{\varphi(t, \mathbf{x}_0; \tilde{\mathbf{p}}) \mid t \in \mathbb{R}\} \cap (B^- \cap L^-)$  を一点選び、これを  $\mathbf{v}_i$  を用いて  $\tilde{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \mathbf{v}_i$  と書く。 $\nu$  次元の部分集合  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  を次で定義する：

$$\Sigma = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i, x_j = \tilde{x}_j \text{ for } j = \nu + 1, \dots, n \right\}.$$

$\Sigma \cap L^-$  上に  $\nu$  次元の開球  $B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r) = \{\mathbf{x} \in \Sigma \mid \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \leq r\}$  をとると、これは任意のパラメータ  $\mathbf{p} \in D_p$  に対する不安定多様体  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  と交点を持つことが期待される。これらは、実際の計算では、Procedure 1 におけるステップ 5 および 6 により確認される。

- (iii)  $R^- : B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r) \times D_p \ni (\mathbf{x}, \mathbf{p}) \mapsto \mathbf{y} \in L^0(\mathbf{p})$  を Lyapunov Tracing  $R^-(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = \varphi(T_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \mathbf{x}; \mathbf{p})$  とする。ここで、 $T_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in [-\infty, 0)$  は  $\varphi(T_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \mathbf{x}; \mathbf{p}) \in L^0(\mathbf{p})$  を満たす時刻である<sup>3</sup>。実際の計算においては、各  $\mathbf{x}_b \in \partial B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)$  および  $\mathbf{p} \in D_p$  に対する  $T_1(\mathbf{x}_b, \mathbf{p})$  が、Procedure 1 のステップ 6 で評価される。
- (iv) 部分集合  $\Gamma^- \subset \mathbb{R}^n$  を  $\Gamma^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (A^-)^T \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$  により定義し、射影  $P^- : \mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma^-$  を  $P^- = I - A^-(A^-)^T$  で定義する。これは Procedure 1 のステップ 7 に対応する。このとき、以下の補題が成立する。

**補題 5.7.2.**  $L^0 \cup L^+$  上の点  $\mathbf{x}$  について  $P^-(\mathbf{x}) = P^-(\mathbf{x}^*)$  が成立すれば、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  が成り立つ。

**証明.**  $L(\mathbf{x})$  の定義より、任意の  $\mathbf{x} \in L^0 \cup L^+$  について

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq 0 \quad (5.7.1)$$

が成り立つ。さらに、 $P^-$  の定義より

$$P^-(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* - A^-(A^-)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

であり、補題の仮定よりこの左辺は  $P^-(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = P^-(\mathbf{x}) - P^-(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  となる。これらより、 $\mathbf{x} - \mathbf{x}^* = A^-(A^-)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$  となる。これを式 (5.7.1) に代入することで、

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) &= (A^-(A^-)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))^T Y A^-(A^-)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T A^-(A^-)^T Y A^-(A^-)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \\ &= ((A^-)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))^T ((A^-)^T Y A^-) (A^-)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

<sup>3</sup>仮定 5.7.1 のもと、定理 5.5.3 は写像  $R^-(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  が  $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r) \times D_p$  に関して連続であることを保証する。

を得る。一方、Procedure 1 のステップ 3 で  $(A^-)^T Y A^-$  が負定値であることが確認されるので、 $(A^-)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  とならなければならない。よって、

$$\begin{aligned}\mathbf{x} - \mathbf{x}^* &= A^-(A^-)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

であり、これは補題の結論を意味する。  $\square$

(v)  $\mathbf{y}^* = P^-(\mathbf{x}^*)$  とおく。  $\Gamma^-$  上の  $\nu$  次元球  $B^-(\mathbf{y}^*, \varepsilon)$  を  $B^-(\mathbf{y}^*, \varepsilon) = \{\mathbf{y} \in \Gamma^- \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\| \leq \varepsilon\}$  ととる。半径  $\varepsilon > 0$  は任意に小さくとることができる。さらに、連続写像  $Q^- : \Gamma^- \rightarrow \Gamma^-$  を

$$Q^-(\mathbf{y}) = \begin{cases} \varepsilon \frac{\mathbf{y} - \mathbf{y}^*}{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\|} & \text{if } \mathbf{y} \notin B^-(\mathbf{y}^*, \varepsilon), \\ \mathbf{y} & \text{if } \mathbf{y} \in B^-(\mathbf{y}^*, \varepsilon) \end{cases} \quad (5.7.2)$$

により定義する。ここで、 $\varepsilon \frac{\mathbf{y} - \mathbf{y}^*}{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\|}$  は、 $\mathbf{y}^*$  と  $\mathbf{y} \in \Gamma^-$  を結ぶ線分と、 $B^-(\mathbf{y}^*, \varepsilon)$  の境界  $\partial B^-(\mathbf{y}^*, \varepsilon)$  との交点である。

**Remark.**  $Q^-$  は  $\Gamma^-$  から  $B^-(\mathbf{y}^*, \varepsilon)$  への retraction であり、我々の手法において Brouwer の一致点定理を適用するために必要な写像である。これは理論的な理由から導入されている写像であり、実際の計算においては  $Q^-$  の構成は省略可能である。第 5.9 節を参照されたい。

さて、球  $B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)$  が  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  上の点を含むための条件を導こう。

**定理 5.7.3.** 連続写像  $G^- : B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r) \times D_p \rightarrow B^-(\mathbf{y}^*, \varepsilon) \subset \Gamma^-$  を  $G^- = Q^- \circ P^- \circ R^-$  と定義する。パラメータ  $\mathbf{p} \in D_p$  を固定する。  $G^-$  の  $\partial B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)$  への制限として、連続写像  $G_S^- : \partial B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r) \rightarrow B^-(\mathbf{y}^*, \varepsilon)$  を  $G_S^- = G^-|_{\partial B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)}$  と定義する (図 5.3 参照)。さらに、次の条件の成立を仮定する。

- $G_S^-(\partial B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)) \subset \partial B^-(\mathbf{y}^*, \varepsilon)$
- $\deg G_S^- \neq 0$

このとき、固定された  $\mathbf{p} \in D_p$  に対して、球  $B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)$  は  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  上の点を少なくとも一点含む。



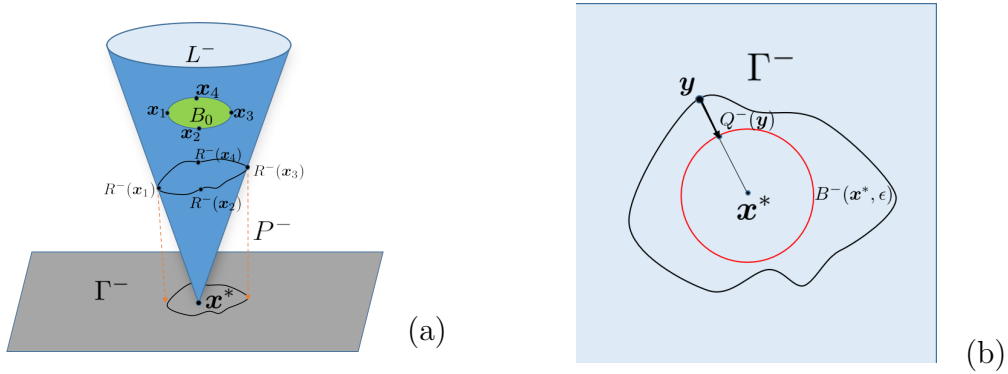


図 5.3: 写像  $G_S^- = (Q^- \circ P^- \circ R^-)|_{\partial B_0(\tilde{x}, r)}$  の概念図

(a):  $n = 3, \nu = 2$  における写像  $P^- \circ R^-(\partial B_0(\tilde{x}, r))$  の概念図。この図中の錐体面は Lyapunov 関数の 0-レベルセット  $L^-$  であり、錐体内部が  $L^-$  である。また、緑の円盤は  $B_0(\tilde{x}, r)$  を表す。そして、 $L^0$  上の閉曲線は  $R^-(\partial B_0(\tilde{x}, r))$  の像を、 $\Gamma^-$  上の閉曲線は  $P^- \circ R^-(\partial B_0(\tilde{x}, r))$  を表す。

(b): Retraction  $Q^-$  の概念図。赤い円が  $B^-(x^*, \epsilon)$  であり、閉曲線が  $P^- \circ R^-(\partial B_0(\tilde{x}, r))$  の像である。

**証明.** 定理の仮定と Brouwer の一致点定理 (定理 5.3.1) より、任意の連続写像  $H(x) : B_0(\tilde{x}, r) \rightarrow B^-(y^*, \epsilon)$  に対して

$$G^-(x_0; p) = H(x_0)$$

を満たす点  $x_0 \in B_0(\tilde{x}, r)$  が存在する。  $H$  として定値写像  $H(x) = P^-(x^*)$  をとると、点  $x_0$  は次の等式を満たす：

$$Q^- \circ P^- \circ R^-(x_0, p) = P^-(x^*).$$

これと  $Q^-$  の定義、そして補題 5.7.2 より、

$$R^-(x_0, p) = x^*$$

すなわち

$$\varphi(T_1(x_0, p), x_0; p) = x^*$$

を得る。これは点  $x_0$  が不安定多様体  $W^u(x^*; p)$  上の点であることを意味する。したがって、固定されたパラメータ  $p \in D_p$  に対して、 $B_0(\tilde{x}, r)$  は  $B_0(\tilde{x}, r)$  は  $\Sigma^-$  と  $W^u(x^*; p)$  の交点  $x_0$  を含む。  $\square$

**系 5.7.4.** Procedure 1 のステップ 8 およびステップ 9 の条件が満たされるとき、球  $B_0(\tilde{x}, r)$  はすべての  $p \in D_p$  に対する不安定多様体  $W^u(x^*; p)$  の点を含む。

**証明.**  $y^* = P^-(x^*)$  とおき、正定数  $\epsilon > 0$  に対し  $\Gamma^-$  上の  $\nu$  次元球  $B^-(y^*, \epsilon) = \{y \in \Gamma^- \mid \|y - y^*\| \leq \epsilon\}$  を考える。ステップ 8 の条件より、任意の  $p \in D_p$  に対

し集合  $\bigcup_{\mathbf{x}_b \in \partial B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)} P^- \circ \varphi(T_1(\mathbf{x}_b, \mathbf{p}), \mathbf{x}_b; \mathbf{p})$  が球  $B^-(\mathbf{y}^*, \varepsilon)$  の外側となるように十分小さい  $\varepsilon > 0$  をとることができる。このとき、 $Q^-$  の定義より、

$$G_S^-(\partial B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)) \subset \partial B^-(\mathbf{y}^*, \varepsilon)$$

が導かれる。さらに、Procedure 1 のステップ 9 が成立していることより、

$$\deg G_S^- = \deg (P^- \circ \varphi(T_1(\mathbf{x}_b, \mathbf{p}), \mathbf{x}_b; \mathbf{p})) \neq 0$$

が成立し、したがって定理 5.7.3 の仮定がすべて満たされる。□

$D_L$  が Lyapunov 領域であることから、球  $B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)$  と不安定多様体  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  の交点の一意性を示すために補題 5.4.2 を適用することが出来る。

**定理 5.7.5.** 球  $B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)$  と  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  の交点が存在するならば、その交点は各  $\mathbf{p} \in D_p$  に対して一意である。

**証明.** 補題 5.4.2 より、任意の  $\mathbf{p} \in D_p$  および任意の  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)$  に対して

$$L(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}^*) \geq 0$$

となることを示せば良い。 $\Sigma$  の定義より、 $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$  は

$$\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \sum_{i=1}^{\nu} c_i \mathbf{v}_i = A^+ \mathbf{c}^T, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^\nu$$

と書くことができる。したがって、

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}^*) &= (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T Y (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \\ &= \mathbf{c}^T (A^+)^T Y A^+ \mathbf{c} \geq 0 \end{aligned}$$

が成立する。□

定理 5.7.3 および定理 5.7.5 は、各  $\mathbf{p} \in D_p$  に対し  $B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r) \cap W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  上の点が一意に存在することを示す。その交点を  $\mathbf{f}_1(\mathbf{p})$  と書くと、 $\mathbf{f}_1$  は  $D_p$  から  $B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r) \cap \left( \bigcup_{\mathbf{p} \in D_p} W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p}) \right)$  への写像を与える。この  $\mathbf{f}_1$  を用いて、写像  $F_1$  は  $F_1(\mathbf{p}) = (\mathbf{f}_1(\mathbf{p}), \mathbf{p})$  と定義される。

写像  $F_1$  の連続性を示すために、定理 5.4.3 を用いる。第 5.5 節で定義した  $D\mathbf{f}^*(\tilde{\mathbf{p}})$  の安定固有空間  $E^\nu = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\nu\}$  と不安定固有空間  $E^{n-\nu} = \text{span}\{\mathbf{u}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$ 、および  $n \times n$  の正則な行列  $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$  を用い、第 5.5 節と同様な議論を行えば、ある Lipschitz 関数  $\mathbf{h}_u : E^{n-\nu} \times D_p \rightarrow E^\nu$  が存在し、不安定多様体  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  は

$$W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p}) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{h}_u(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{p}) \\ \boldsymbol{\zeta} \end{pmatrix} \in D_L \mid \boldsymbol{\zeta} \in E^{n-\nu}, \mathbf{p} \in D_p \right\}$$

と表現できる。さらに、 $(n - \nu) \times n$  行列

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_n \Bigg\}^{n - \nu}$$

を考えると、 $\zeta = AU^{-1}\mathbf{x}$  と書くことが出来る。

連続写像  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-\nu} \rightarrow \mathbb{R}^n$  を

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \left( U^{-1}\mathbf{x} - \begin{pmatrix} h_u(AU^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{p}) \\ AU^{-1}\mathbf{x} \end{pmatrix} \right)$$

で定義する。球  $B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)$  上の点  $\mathbf{x}$  に対して、 $g(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0$  が成立すれば、 $\mathbf{x}$  は  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  上の点でもある。定理 5.7.5 より、 $B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)$  と  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  の交点は各  $\mathbf{p} \in D_p$  に対して一意である。よって、定理 5.4.3 の  $P, D$  として  $\mathbf{f}$  として、 $D_p, B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r), g$  を選ぶことで、 $B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)$  と  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p})$  の交点がパラメータ  $\mathbf{p} \in D_p$  に関して連続であることが示される。これは  $F_1$  が  $D_p$  で連続であることを導く。

## 5.8 ホモクリニック軌道の検証法

前節では  $F_1$  が well-defined な連続写像として定義できることを示した。本節では、本手法がホモクリニック軌道の存在証明を与えることに関する数学的な論証の続きを行う。仮定 5.5.1 (これは Procedure 2 のステップ 1 で検証される) および以下が成立することを仮定する。

**仮定 5.8.1.** ある有限な正の時刻  $T_2$  ( $0 < T_2 < \infty$ ) が存在し、任意の  $\mathbf{x} \in B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)$  に対して  $\varphi(T_2, \mathbf{x}; \mathbf{p}) \in B^+ \cap L^+$  が成立する。ここで、 $B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r)$  は第 5.7 節のステップ (ii) で定義される球である。

$B^+$  は仮定 5.5.1 に現れる集合である。仮定 5.8.1 の成立は Procedure 2 のステップ 2 により検証される。

連続写像  $F_2$  および  $F$  を以下の手順で構成する。

- (i)  $R^+ : (B^+ \cap L^+) \times D_p \ni (\mathbf{x}, \mathbf{p}) \mapsto \mathbf{y} \in L^0$  を Lyapunov Tracing  $R^+(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = \varphi(T_3(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \mathbf{x}; \mathbf{p})$  とする。ここで、 $T_3(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in (0, \infty]$  は  $\varphi(T_3(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \mathbf{x}; \mathbf{p}) \in L^0$  を満たす時刻である<sup>4</sup>。連続写像  $F_2 : B_0(\tilde{\mathbf{x}}, r) \times D_p \ni (\mathbf{x}, \mathbf{p}) \mapsto \mathbf{y} \in L^0$  を

$$F_2(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = R^+(\varphi(T_2, \mathbf{x}; \mathbf{p}), \mathbf{p})$$

により定義する。

<sup>4</sup>仮定 5.5.1 のもと、 $R^+(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  が  $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in (B^+ \cap D^+) \times D_p$  に関して連続であることは定理 5.5.3 により保証される。

- (ii) 部分集合  $\Gamma^+ \subset \mathbb{R}^n$  を  $\Gamma^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (A^+)^T \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$  により定義し、また、射影  $P^+ : \mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma^+$  を  $P^+ = I - A^+(A^+)^T$  と定義する。これは、Procedure 2 のステップ 4 に対応する。このとき、次の補題が成り立つ。

**補題 5.8.2.**  $L^0 \cup L^-$  上の点  $\mathbf{x}$  について、 $P^+(\mathbf{x}) = P^+(\mathbf{x}^*)$  が成立すれば  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  が成り立つ。

補題 5.8.2 は補題 5.7.2 の証明と同様の議論により証明される。

- (iii)  $\mathbf{z}^* = P^+(\mathbf{x}^*)$  とおく。正定数  $\varepsilon > 0$  に対して、 $\Gamma^+$  上の  $(n - \nu)$  次元球  $B^+(\mathbf{z}^*, \varepsilon) = \{\mathbf{z} \in \Gamma^+ \mid \|\mathbf{z} - \mathbf{z}^*\| \leq \varepsilon\}$  を考える。このとき、半径  $\varepsilon$  は任意に小さくとることができる。連続写像  $Q^+ : \Gamma^+ \rightarrow \Gamma^+$  を

$$Q^+(\mathbf{z}) = \begin{cases} \varepsilon \frac{\mathbf{z} - \mathbf{z}^*}{\|\mathbf{z} - \mathbf{z}^*\|} & \text{if } \mathbf{z} \notin B^+(\mathbf{z}^*, \varepsilon), \\ \mathbf{z} & \text{if } \mathbf{z} \in B^+(\mathbf{z}^*, \varepsilon) \end{cases} \quad (5.8.1)$$

により定義する。ここで、 $\varepsilon \frac{\mathbf{z} - \mathbf{z}^*}{\|\mathbf{z} - \mathbf{z}^*\|}$  は  $\mathbf{z}^*$  と  $\mathbf{z} \in \Gamma^+$  を結ぶ線分と、 $B^+(\mathbf{z}^*, \varepsilon)$  の境界との交点である。第 5.7 節ステップ (v) の Remark も参照されたい。

さて、連続写像  $F$  を以下で定義しよう。

**定義 5.8.3.** 連続写像  $F : D_p \rightarrow B^+(\mathbf{z}^*, \varepsilon) \subset \Gamma^+$  を  $F_1, F_2, P^+, Q^+$  の合成として

$$F = Q^+ \circ P^+ \circ F_2 \circ F_1$$

により定義する。

以下の定理は、ホモクリニック軌道を与えるパラメータ  $\mathbf{p}^*$  が  $D_p$  に存在することを保証する定理である。

**定理 5.8.4.**  $F$  を  $D_p$  の境界  $\partial D_p$  に制限した写像を  $F_S$  とする (図 5.4 参照)。次の条件が成立することを仮定する：

- $F_S(\partial D_p) \subset \partial B^+(\mathbf{z}^*, \varepsilon)$
- $\deg F_S \neq 0$

このとき、 $D_p$  はホモクリニック軌道を与えるパラメータ  $\mathbf{p}^*$  を含む。

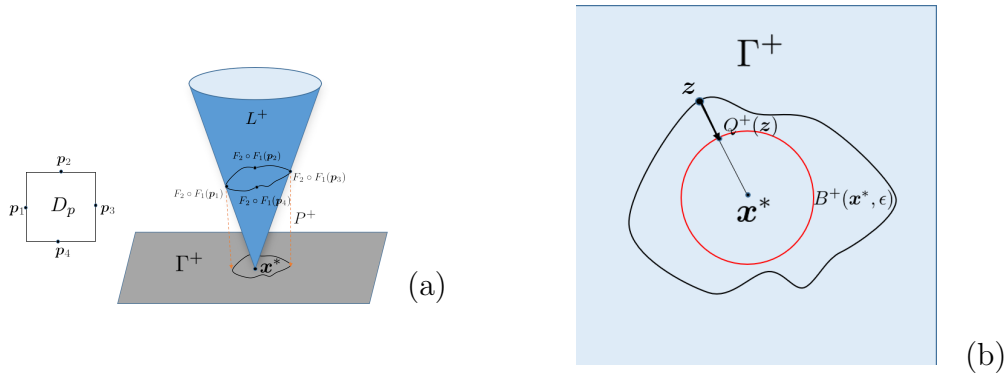


図 5.4: 写像  $F_S = (Q^+ \circ P^+ \circ F_2 \circ F_1)|_{\partial D_p}$  の概念図

(a):  $n = 3$  および  $\nu = 1$  のときの  $P^+ \circ F_2 \circ F_1(\partial D_p)$  の概念図。図に現れる錐体面は Lyapunov 関数の 0-レベルセット  $L^0$  であり、錐体内部が  $L^+$  である。 $L^0$  上の閉曲線が  $F_2 \circ F_1(\partial D_p)$  の像であり、 $\Gamma^+$  上の閉曲線が  $P^+ \circ F_2 \circ F_1(\partial D_p)$  の像である。  
(b): Retraction  $Q^+$  の概念図。図中の赤い円が  $B^+(\mathbf{x}^*, \varepsilon)$  であり、閉曲線が  $P^+ \circ F_2 \circ F_1(\partial D_p)$  の像である。

**証明.** 定理の仮定と Brouwer の一致点定理より、任意の連続写像  $H : D_p \rightarrow B^+(\mathbf{z}^*, \varepsilon)$  に対して、

$$F(\mathbf{p}^*) = H(\mathbf{p}^*)$$

を満たす点  $\mathbf{p}^* \in D_p$  が存在する。 $H$  を  $H(\mathbf{p}) = P^+(\mathbf{x}^*)$  ととれば、点  $\mathbf{p}^*$  は次の等式を満たす：

$$Q^+ \circ P^+ \circ F_2 \circ F_1(\mathbf{p}^*) = P^+(\mathbf{x}^*).$$

これと  $Q^+$  の定義、および補題 5.8.2 より、

$$F_2 \circ F_1(\mathbf{p}^*) = \mathbf{x}^*$$

を得る。 $F_1, F_2$  の定義より、これは

$$R^+(\varphi(T_2, \mathbf{f}_1(\mathbf{p}^*); \mathbf{p}^*), \mathbf{p}^*) = \mathbf{x}^*$$

を意味する。 $\mathbf{f}_1(\mathbf{p}^*)$  が不安定多様体  $W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p}^*)$  上の点であり、上式左辺は  $\mathbf{f}_1(\mathbf{p}^*)$  を初期点とした解軌道に沿った積分であることから、 $\mathbf{p}^*$  はホモクリニック軌道を与えるパラメータとなる。□

**系 5.8.5.** Procedure 2 のステップ 5 およびステップ 6 の条件が満たされるとき、 $D_p$  はホモクリニック軌道を与えるパラメータ  $\mathbf{p}^*$  を含む。

**証明.**  $\mathbf{z}^* = P^+(\mathbf{x}^*)$  とおき、正定数  $\varepsilon > 0$  に対して  $\Gamma^+$  上の  $(n-\nu)$  次元球  $B^+(\mathbf{z}^*, \varepsilon) = \{\mathbf{z} \in \Gamma^+ \mid \|\mathbf{z} - \mathbf{z}^*\| \leq \varepsilon\}$  を考える。ステップ 5 の条件より、任意の  $\mathbf{x} \in B(\tilde{\mathbf{x}}, r)$

に対して集合  $\bigcup_{p \in \partial D_p} P^+ \circ F_2 \circ F_1(\mathbf{p})$  が球  $B^+(\mathbf{z}^*, \varepsilon)$  の外側となるように十分小さい  $\varepsilon > 0$  をとることができる。このとき、 $Q^+$  の定義より

$$F_S(D_p) \subset \partial B^+(\mathbf{z}^*, \varepsilon)$$

が導かれる。さらに、Procedure 2 のステップ 6 が成立していることより、

$$\deg F_S = \deg (P^+ \circ F_2 \circ F_1)|_{\partial D_p} \neq 0$$

が成り立ち、したがって定理 5.8.4 の仮定がすべて満たされる。□

Procedures 1 および 2 がホモクリニック軌道の存在証明を与えることは、系 5.7.4 および系 5.8.5 により保証される。

## 5.9 数値例

本節では、二つの数値例に対して我々の手法を適用してホモクリニック軌道の存在検証を行った結果を示す。精度保証付き数値計算を行うためのプログラムの作成には、MATLAB 上で動作する精度保証ライブラリである INTLAB[25] と、c++ で動作する精度保証ライブラリである kv ライブラリ [37] を利用した。また、計算機環境は、下記の通りである。

- CPU: Intel Core i5-8500
- メモリ: 16GB
- コンパイラ: WSL Ubuntu 18.04 上の gcc version 7.4.0
- MATLAB 2019a
- INTLAB version 11
- kv version 0.4.48

### 5.9.1 3次元の数値例

次の修正 Rössler 方程式を考える [50] :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = bx + (x - c)z. \end{cases} \quad (5.9.1)$$

この方程式に対して以下が成り立つ。

- 任意の係数  $a, b, c$  について原点は平衡点である。

- 式 (5.9.1) 右辺の  $(x, y, z)$  に関する原点における Jacobi 行列  $D\mathbf{f}^*$  に関する解析より、係数  $a, b, c$  が以下の範囲

$$0.28 \leq a \leq 0.48, \quad 0.2 \leq b \leq 0.4, \quad 4.62 \leq c \leq 5.02$$

の値をとるとき、原点は1次元の安定多様体と2次元の不安定多様体を持つ。

パラメータをこの範囲内で考え、 $\nu = 1$  および  $n - \nu = 2$  ととる。

第 5.6 節の Procedure 1 に従い、連続写像  $F_1$  を構成する。

1. 係数  $a, b, c$  を  $a = 0.38, b = 0.30, c = 4.82$  とし、初期点を

$$\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1.0 \times 10^{-5} \\ -1.0 \times 10^{-4} \\ -5.7 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

に選び、時刻  $T = 73$  までの近似計算を行った (図 5.5)。この計算には MATLAB 上の常微分方程式のソルバである ODE45 を用いた。この計算結果より、係数の値が  $a = 0.38, b = 0.30, c = 4.82$  の時に近似的なホモクリニック軌道が出現することがわかる。 $c$  の値を 4.82 に固定し、残る二つの係数  $a, b$  をパラメータに採用し、 $\mathbf{p} = (a, b)$  とする。近似的なホモクリニック軌道を与えるパラメータ  $\tilde{\mathbf{p}} = (0.38, 0.30)$  に対し、パラメータ領域  $D_p$  を  $D_p = (\langle 0.38005, 2.5 \times 10^{-4} \rangle, \langle 0.30005, 6.5 \times 10^{-4} \rangle)$  ととる。ここで、 $\langle c, r \rangle$  は中心・半径形式の区間を表す。

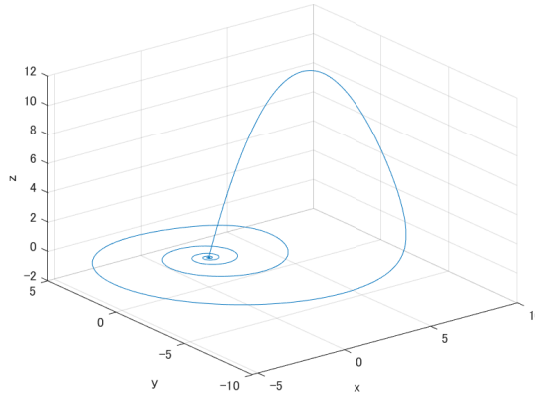


図 5.5: 系 (5.9.1) に対する近似的なホモクリニック軌道

パラメータ領域  $D_p$  は  $\mathbb{R}^2$  上の閉球と同相であることに注意されたい。

2. Jacobi 行列  $D\mathbf{f}^*$  の固有値および固有ベクトルを用いて、第 4.2 の手順に従い、平衡点  $\mathbf{x}^*$  近傍での局所 Lyapunov 関数  $L$  を構成した (図 5.6)。

$$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), \quad Y = \begin{pmatrix} -1.0671 & -0.23241 & 0.14240 \\ -0.23241 & -1.0583 & -0.0070826 \\ 0.14240 & -0.0070826 & 1.0256 \end{pmatrix}.$$

また、以下の領域

$$D_L = \begin{pmatrix} \langle 0, 0.5 \rangle \\ \langle 0, 0.5 \rangle \\ \langle 0, 0.5 \rangle \end{pmatrix}$$

が任意のパラメータ  $\mathbf{p} \in D_p$  に対する Lyapunov 領域  $D_L$  であることが精度保証付き数値計算により検証された。この領域は Stage 1 の検証法により検証された領域である。

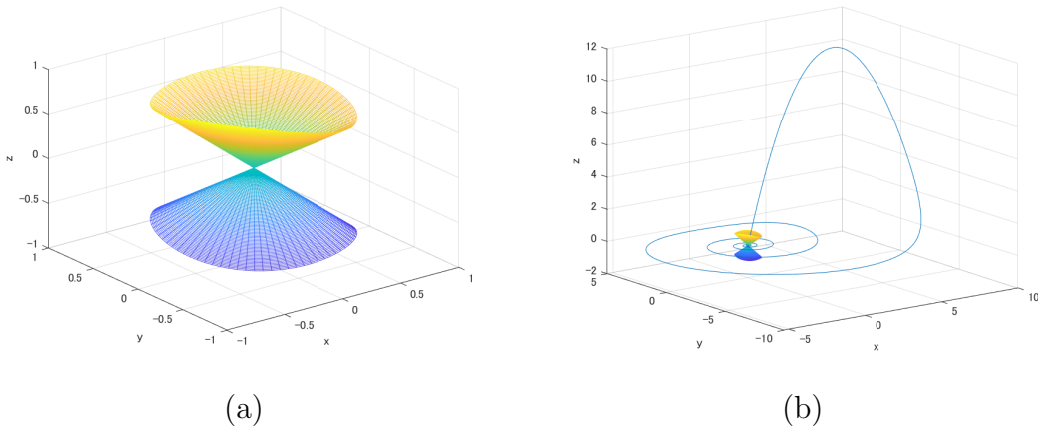


図 5.6: Lyapunov 関数の 0-レベルセットおよび近似的なホモクリニック軌道  
(a): Lyapunov 関数の 0-レベルセット。  
(b): 図 5.5 の近似的なホモクリニック軌道と Lyapunov 関数の 0-レベルセットを重ねた図。

3. 浮動小数点演算により、行列  $Y$  の固有値  $\tilde{\lambda}_i$  および固有ベクトル  $\tilde{\mathbf{v}}_i$  を計算した。

$$\tilde{\lambda}_1 = 1.0355, \quad \tilde{\lambda}_2 = -0.83612, \quad \tilde{\lambda}_3 = -1.2992,$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 0.068777 \\ -0.011007 \\ 0.99757 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} -0.69096 \\ 0.72074 \\ 0.055592 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} -0.71960 \\ -0.69311 \\ 0.0419649 \end{pmatrix}.$$

さらに、INTLAB による精度保証付き数値計算により、行列  $Y$  の真の固有



ベクトルが以下の区間ベクトルに含まれることを検証した。

$$[\mathbf{v}_1] = \begin{pmatrix} [0.068777, 0.068778] \\ [-0.011008, -0.011007] \\ [0.99757, 0.99758] \end{pmatrix},$$

$$[\mathbf{v}_2] = \begin{pmatrix} [-0.69097, -0.69096] \\ [0.72074, 0.72075] \\ [0.055592, 0.055593] \end{pmatrix},$$

$$[\mathbf{v}_3] = \begin{pmatrix} [-0.71961, -0.71960] \\ [-0.69312, -0.69311] \\ [0.041964, 0.041965] \end{pmatrix}.$$

区間行列  $[A^+], [A^-]$  を  $[A^+] = ([\mathbf{v}_1])$  および  $[A^-] = ([\mathbf{v}_2] [\mathbf{v}_3])$  とおき、 $[A^-]^T Y [A^-]$  の負定値性、 $[A^+]^T Y [A^+]$  の正定値性を精度保証により検証した。

4. 半径  $r^- = 0.01$  の閉球  $B^- = \{\mathbf{x} \in D_L \mid \|\mathbf{x}\| \leq r^-\}$  を考える。極座標系を用いると、閉球  $B^-$  の境界  $\partial B^-$  上の点  $\mathbf{x}$  は

$$\begin{aligned} x &= r^- \cos \theta_1, \\ y &= r^- \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ z &= r^- \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

と書かれる。ここで、 $\theta_1, \theta_2$  の定義域は、 $0 \leq \theta_1 \leq \pi$  および  $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$  である。区間  $[\theta_1], [\theta_2]$  を  $[\theta_1] = [0, \pi]$  および  $[\theta_2] = [0, 2\pi]$  ととる。区間  $[\theta_i]$  ( $i = 1, 2$ ) を 64 分割し、各小領域を包む区間を  $[\theta_i]_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 64$  とする。このとき、 $[B^-]_k$  は区間  $[\theta_i]_j$  を用いて表現することができる。Procedure 1 のステップ 4 に対応する以下の条件のいずれかが成立することを検証した。

- (I)  $\partial B^-$  上の点  $\mathbf{x}$  における単位外向き法線ベクトルを

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{r^-}$$

としたときに、 $\mathbf{n}([B^-]_k)^T \mathbf{f}([B^-]_k; [D_p])$  を区間演算により算定した結果が正値であること。

- (II)  $L(\varphi(T_k^-, [B^-]_k; [D_p])) > 0$  を満たす負の時刻  $T_k^- < 0$  が存在すること。さらに、任意の  $t \in [T_k^-, 0]$  に対して  $\varphi(t, [B^-]_k; [D_p]) \in D_L$  が成立すること。いずれの検証にも精度保証を用いる。

精度保証の結果、306 ケースが (I) を満たし、2928 ケースが (II) を満たした。152 ケースがどちらも満たさなかったが、これらのケースに関しても、 $[B^-]_k$  をさらに再分割し検証を行うことで、(I) が満たされることが確認できた。

5. 参照点として、

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1.0 \times 10^{-5} \\ -1.0 \times 10^{-4} \\ -5.7 \times 10^{-7} \end{pmatrix} \in \{\varphi(t, \boldsymbol{x}_0; \tilde{\boldsymbol{p}}) \mid t \in \mathbb{R}\} \cap B^- \cap L^-$$

をとり、行列  $Y$  の真の固有ベクトル  $\boldsymbol{v}_i$  を用いて、点  $\tilde{\boldsymbol{x}} \approx \hat{\boldsymbol{x}}$  を

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = 1.2199 \times 10^{-6} \boldsymbol{v}_1 - 7.9015 \times 10^{-5} \boldsymbol{v}_2 + 6.2091 \times 10^{-5} \boldsymbol{v}_3$$

により定義し、 $\tilde{\boldsymbol{x}} \in B^- \cap L^-$  となることを確認した。さらに、 $\nu$ 次元の部分集合  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  を

$$\Sigma = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^3 x_i \boldsymbol{v}_i, x_2 = -7.9015 \times 10^{-5}, x_3 = 6.2091 \times 10^{-5}\}$$

で定義する。

6.  $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$  を基底とする座標系を用いて、 $\Sigma$  上の一次元閉球 (線分)  $B_0$  を

$$B_0 = \begin{pmatrix} \langle 1.2199 \times 10^{-6}, 1.0 \times 10^{-8} \rangle \\ -7.9015 \times 10^{-5} \\ 6.2091 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

ととる (図 5.7)。 $B_0$  が  $D_L$  に含まれること、および  $L(B_0)$  が負の値となることを、 $[\boldsymbol{v}_i]$ ,  $i = 1, \dots, 3$  を用いた区間演算により検証した。ここで、具体的には  $L(B_0) \subset [-0.84174 \times 10^{-8}, -0.84169 \times 10^{-8}]$  となることが検証できた。したがって、 $B_0 \subset B^- \cap L^-$  が成立する。

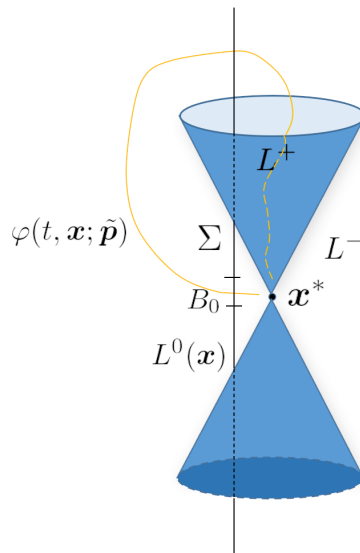


図 5.7: 3次元の例における  $\Sigma$  および  $B_0$

黄色い曲線が近似的なホモクリニック軌道で、黒い直線が  $\Sigma$  である。近似軌道と  $\Sigma$  は  $B_0$  上の点で交差している。

$B_0$  の境界  $\partial B_0$  を小領域に分割し、それらを包含する区間ベクトルを  $[\mathbf{b}]_k \subset \mathbb{R}^3$ ,  $k = 1, 2$  とする。今回の場合は、 $\partial B_0$  が二点なので分割の必要はなく、点区間を用いて

$$[\mathbf{b}]_1 = \begin{pmatrix} \langle 1.2099 \times 10^{-6}, 0 \rangle \\ -7.9015 \times 10^{-5} \\ 6.2091 \times 10^{-5} \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{b}]_2 = \begin{pmatrix} \langle 1.2299 \times 10^{-6}, 0 \rangle \\ -7.9015 \times 10^{-5} \\ 6.2091 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

と表現できる。各  $k = 1, 2$  に対して、 $L(\varphi(T_k^-, [\mathbf{b}]_k; [D_p])) < 0$  かつ  $0 \in L(\varphi(T_k^- - h, [\mathbf{b}]_k; [D_p]))$  を満たす負の時刻  $T_k^- < 0$  が存在することを精度保証により検証した。ここで、 $h$  は解軌道  $\{\varphi(\cdot, [\mathbf{b}]_k; [D_p])\}$  を精度保証する際の時間刻みを表す。さらに、 $j = 1, 2, \dots$  に対し、 $0 < L(\varphi(T_k^- - jh, [\mathbf{b}]_k; [D_p]))$  となるまで、精度保証付きの軌道計算を続けた。 $0 < L(\varphi(T_k^- - jh, [\mathbf{b}]_k; [D_p]))$  となる最初のステップを  $j = J_k$  とし、時刻  $T_k^+$  を  $T_k^+ = T_k^- - J_k h$  で定義する。さらに、集合  $[\mathbf{x}]_k$  を

$$[\mathbf{x}]_k = \bigcup_{j=1,2,\dots,J_k} \varphi([T_k^- - (j-1)h, T_k^- - jh], [\mathbf{b}]_k; [D_p])$$

で定義する。これは、初期点を  $[\mathbf{b}]_k$  として、微分方程式を逆向きに解いたときに、解軌道が  $L^0$  と交差する点を含んだ区間となっている。

7. 部分集合  $\Gamma^- \subset \mathbb{R}^3$  を  $\Gamma^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (A^-)^T \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$  で定義し、射影  $P^- : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Gamma^-$  を  $P^- = I - A^-(A^-)^T$  で定義する。ここで、 $I$  は  $\mathbb{R}^3$  の恒等写像であり、 $A^-$  は  $Y$  の真の固有ベクトルを用いて定義される。さらに、区間行列  $[P^-] \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$  を  $[P^-] = I - [A^-][A^-]^T$  により定義する。
8.  $k = 1, 2$  に対し、 $[P^-][\mathbf{x}]_k$  を区間演算を用いて計算した。 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$  を基底とした座標系を用いると、結果は以下の様になった (図 5.8 も参照されたい):

$$[P^-][\mathbf{x}]_1 = \begin{pmatrix} [-0.0039052, -0.0017490] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[P^-][\mathbf{x}]_2 = \begin{pmatrix} [0.0038809, 0.0059688] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

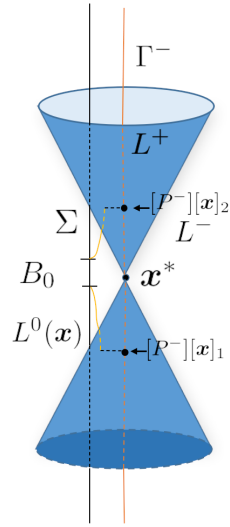


図 5.8:  $[P^-][\mathbf{x}]_k$  の模式図

今回の数値例の場合、 $\Gamma^-$  は直線であり、 $\partial B_0$  は二点から構成される。

これらの結果を用いて、Procedure 1 のステップ 8 の条件が満たされることを検証した。

9. 今回の状況では、 $B_0$  が一次元の閉球 (線分) であるので、定理 5.3.3 の代わりに中間値の定理を用いる事ができる。射影の結果、 $[P^-][\mathbf{x}]_1$  と  $[P^-][\mathbf{x}]_2$  は異なる符号であるので、区間ベクトル  $B_0$  は任意のパラメータ  $\mathbf{p} \in D_p$  に対する不安定多様体  $W^u(\mathbf{x}^*, \mathbf{p})$  上の点を含むことが示された。この結果と系 5.7.4 及び定理 5.4.3 より、連続写像  $F_1 : D_p \rightarrow \bigcup_{\mathbf{p} \in D_p} W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p}) \times D_p$  が構成できた。

次に、第 5.6 節の Procedure 2 に従い、ホモクリニック軌道の精度保証を行った。

1. 半径  $r^+ = 0.5$  の閉球  $B^+ = \{\mathbf{x} \in D_L \mid \|\mathbf{x}\| \leq r^+\}$  を考え、上記手順のステップ 4 と同様に極座標を用いて境界  $B^+$  の境界を分割し、分割された各境界を包み込む区間ベクトルを  $[B^+]_k$  とする。Procedure 2 のステップ 1 に対応する以下の条件のいずれかが成立することを検証した。

(I)'  $\partial B^+$  上の点  $\mathbf{x}$  における単位外向き法線ベクトルを

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{r^+}$$

としたときに、 $\mathbf{n}([B^+]_k)^T \mathbf{f}([B^+]_k; [D_p])$  を区間演算により算定した結果が負値であること。

- (II)'  $L(\varphi(T_k^+, [B^+]_k; [D_p])) < 0$  を満たす正の時刻  $T_k^+ > 0$  が存在すること。さらに、任意の  $t \in [0, T_k^+]$  に対して  $\varphi(t, [B^+]_k; [D_p]) \in D_L$  が成立すること。いずれの検証にも精度保証を用いる。

精度保証による検証の結果、すべての区間ベクトル  $[B^+]_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 936$  が条件 (I)' を満たすことが確認された。

2. パラメータ領域  $D_p$  を次の部分集合に分割する：

$$\begin{aligned} D_{p_1} &= \begin{pmatrix} [0.3798, 0.38] \\ [0.2994, 0.3] \end{pmatrix}, & D_{p_2} &= \begin{pmatrix} [0.38, 0.3803] \\ [0.2994, 0.3] \end{pmatrix}, \\ D_{p_3} &= \begin{pmatrix} [0.38, 0.3803] \\ [0.3, 0.3007] \end{pmatrix}, & D_{p_4} &= \begin{pmatrix} [0.3798, 0.38] \\ [0.3, 0.3007] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

初期点を区間  $B_0$  とし、 $T_2 = 73.18$  まで軌道計算を行うと、以下の様になった。

$$\begin{aligned} \varphi(T_2, B_0; [D_{p_1}]) &= \begin{pmatrix} [0.012273, 0.090006] \\ [-0.084161, 0.20077] \\ [0.32846, 0.36261] \end{pmatrix}, \\ \varphi(T_2, B_0; [D_{p_2}]) &= \begin{pmatrix} [0.025747, 0.12979] \\ [-0.23706, 0.11797] \\ [0.31959, 0.36163] \end{pmatrix}, \\ \varphi(T_2, B_0; [D_{p_3}]) &= \begin{pmatrix} [0.011696, 0.12392] \\ [-0.19519, 0.18993] \\ [0.32154, 0.36924] \end{pmatrix}, \\ \varphi(T_2, B_0; [D_{p_4}]) &= \begin{pmatrix} [-0.00031648, 0.084521] \\ [-0.041768, 0.27172] \\ [0.33120, 0.36974] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

これは、

$$\begin{aligned} L(\varphi(T_2, B_0; [D_{p_1}])) &= [0.054762, 0.16481], & L(\varphi(T_2, B_0; [D_{p_2}])) &= [0.032523, 0.18905], \\ L(\varphi(T_2, B_0; [D_{p_3}])) &= [0.045825, 0.20282], & L(\varphi(T_2, B_0; [D_{p_4}])) &= [0.018694, 0.16302] \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \|\varphi(T_2, B_0; [D_{p_1}])\| &= [0.32870, 0.42414], & \|\varphi(T_2, B_0; [D_{p_2}])\| &= [0.32063, 0.45146], \\ \|\varphi(T_2, B_0; [D_{p_3}])\| &= [0.32176, 0.43565], & \|\varphi(T_2, B_0; [D_{p_4}])\| &= [0.33120, 0.46656] \end{aligned}$$

を満たす。したがって、 $\varphi(T_2, B_0; [D_p]) \subset B^+ \cap L^+$  が成立する (図 5.9 参照)。

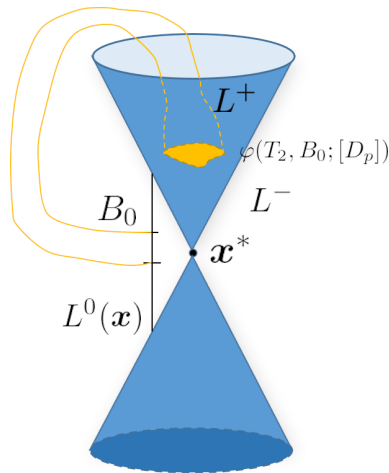


図 5.9:  $\varphi(T_2, B_0; [D_p])$

$L^+$  内の黄色い領域が  $\varphi(T_2, B_0; [D_p])$  の像であり、黄色い曲線は  $\partial B_0$  を初期点とする解軌道を表す。

3. パラメータ領域  $D_p$  の境界  $\partial D_p$  を 2200 の小領域に分割し、各小領域を包含する区間ベクトルを  $[d]_k \subset \mathbb{R}^3$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2200$  とする。全ての  $x \in B_0$ ,  $p_b \in [d]_k$  および  $k$  ( $k = 1, \dots, 2200$ ) に対して  $L(\varphi(T_3(x, p_b), x; p_b)) = 0$  を満たす時刻  $T_3(x, p_b) > T_2$  が存在することを検証した。さらに、各  $k = 1, 2, \dots, 2200$  毎に、任意の  $x \in B_0$  および  $p_b \in [d]_k$  に対し  $\varphi(T_3(x, p_b), x; p_b) \in [x']_k$  を満足する区間ベクトル  $[x']_k$  を同定した (図 5.10)。これらの検証、および同定は、上述の手順におけるステップ 6 と同様の手順で行うことができる。

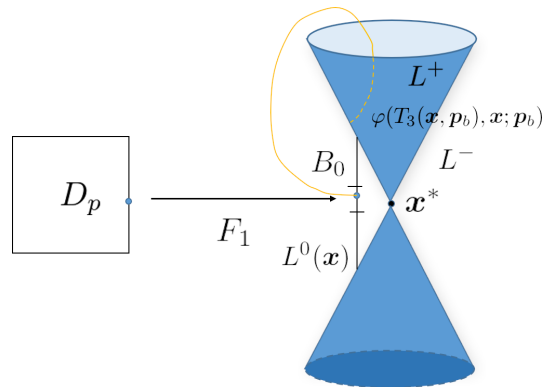


図 5.10:  $x \in B_0$ ,  $p_b \in \partial D_p$  に対する解軌道  $\varphi(T_3(x, p_b), x; p_b)$

近似的なホモクリニック軌道を与えるパラメータの適切な近傍を選べば、 $p_b \in \partial D_p$  に対して  $x \in B_0$  を初期点とした解軌道が  $L^0$  に到達する。

4. 部分集合  $\Gamma^+ \subset \mathbb{R}^3$  を  $\Gamma^+ = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (A^+)^T x = 0\}$  で定義し、射影  $P^+ : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Gamma^+$  を  $P^+ = I - A^+(A^+)^T$  で定義する。ここで、 $I$  は  $\mathbb{R}^3$  の恒等写像で

あり、 $A^+$  は行列  $Y$  の真の固有値ベクトルを用いて定義される行列である。さらに、区間行列  $[P^+] \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$  を  $[P^+] = I - [A^+][A^+]^T$  により定義する。

5. 射影  $[P^+][\mathbf{x}'_k]$ ,  $k = 1, \dots, 2200$  の結果は図 5.11 のようになった。

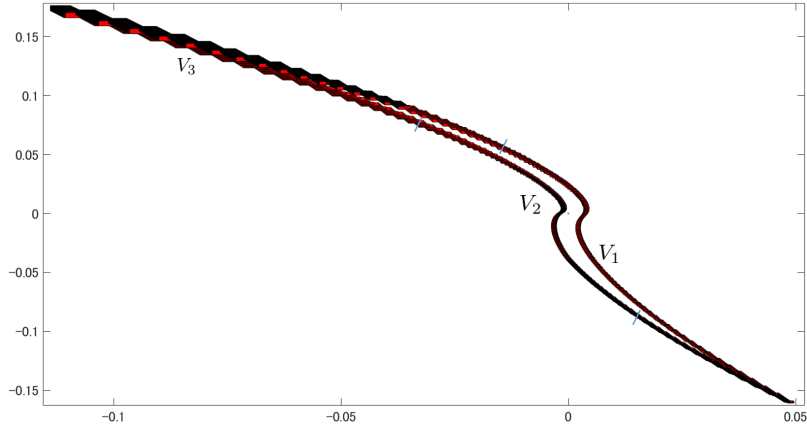


図 5.11:  $\Gamma^+$  上の  $P^+$   $\left( \bigcup_{(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in B_0 \times \partial D_p} \varphi(T_3(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \mathbf{x}; \mathbf{p}) \right)$  の包み込み  $[P^+][\mathbf{x}'_k]$  ( $k = 1, \dots, 2200$ )

原点 (図中の青点) は  $[P^+]\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^* \in \Gamma^+$  を表す。また、青い線は集合  $\{V_i\}_{i=1,2,3}$  の境界を表す線である。

これらの結果を用いる事で、Procedure 2 のステップ 5 の条件が満たされることを確認した。

6. 定理 5.3.3 の仮定が満たされることを以下の様に検証した。まず

$$\begin{aligned} V_1 &= \bigcup_{k=1, \dots, 733} [P^+][\mathbf{x}'_k], \\ V_2 &= \bigcup_{k=734, \dots, 1466} [P^+][\mathbf{x}'_k], \\ V_3 &= \bigcup_{k=1467, \dots, 2200} [P^+][\mathbf{x}'_k] \end{aligned}$$

とおき、 $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$  となることを確認した。これは、各  $\mathbf{x} \in B_0$  に対し、 $\partial D_p$  に関する写像度  $\deg(P^+ \circ \varphi(T_3(\mathbf{x}, \cdot), \mathbf{x}; \cdot))$  が 0 でないことを意味する。この結果と系 5.8.5 より、区間ベクトル  $D_p$  は原点から自身へと至るホモクリニック軌道を与えるパラメータ  $\mathbf{p}^*$  を含むことが示された。

### 5.9.2 4次元の数値例

次の自励系 ODE を考える [22] :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + x^2 + z - w, \\ \dot{y} = (2 - c)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy - z - w, \\ \dot{z} = a(-x + y) - 3z, \\ \dot{w} = b(x + y) + w. \end{cases} \quad (5.9.2)$$

これは、Sandstede[26] のモデルを出発点として、Glendinnig–Laing の方法 [8, 14] で拡張したものである。この系に対して、以下の事が成立する。

- 任意の係数  $a, b, c$  に対して、原点は平衡点である。
- 系 (5.9.2) 右辺の  $(x, y, z, w)$  に関する原点における Jacobi 行列  $D\mathbf{f}^*$  の固有ベクトルに関する解析の結果、 $a > 0$  かつ  $b > 0$  のとき、原点は 2次元の安定多様体と 2次元の不安定多様体を持つことがわかった [22]。以下の検証では、この範囲において係数を調整することにしたので、 $\nu = 2$  かつ  $n - \nu = 2$  とした。

第 5.6 の Procedure 1 に則り、以下の手順で連続写像  $F_1$  を構成した。

1. 係数を  $a = 5$ ,  $b = 1.116468586$ ,  $c = 0.060394705655$  ととり、初期点を

$$\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1.6448 \times 10^{-9} \\ 1.6289 \times 10^{-9} \\ -1.7060 \times 10^{-11} \\ 6.4714 \times 10^{-11} \end{pmatrix}$$

にとり数値計算を行った結果、近似的なホモクリニック軌道が観測された。

$c = 0.060394705655$  を固定し、係数  $a, b$  をパラメータとして採用し、 $\mathbf{p} = (a, b)$  とおいた。 $\tilde{\mathbf{p}} = (5.0, 1.116468586)$  とし、パラメータ領域を

$$D_{\mathbf{p}} = \left( \begin{array}{l} \langle 5, 5/3 \times 10^{-6} \rangle \\ \langle 1.116468586, 10^{-8} \rangle \end{array} \right)$$

ととった。

2.  $D\mathbf{f}^*$  の固有値および固有ベクトルを用いて、 $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  近傍における局所 Lyapunov 関数  $L$  を

$$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*),$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0.96152 & -2.0292 & 0.0086930 & -0.0085572 \\ -2.0292 & 0.98029 & -0.00039926 & -0.0057943 \\ 0.0086930 & -0.00039926 & 0.60001 & 0.0013527 \\ -0.0085572 & -0.00579423 & 0.0013527 & -0.94798 \end{pmatrix}$$



と構成した。さらに Stage 1 による検証の結果、

$$D_L = \begin{pmatrix} \langle 0, 1.0 \times 10^{-2} \rangle \\ \langle 0, 1.0 \times 10^{-2} \rangle \\ \langle 0, 1.0 \times 10^{-2} \rangle \\ \langle 0, 1.0 \times 10^{-2} \rangle \end{pmatrix}$$

が任意のパラメータ  $\mathbf{p} \in D_p$  に対する Lyapunov 領域となることが確認された。

3. 浮動小数点演算により、行列  $Y$  の固有値  $\tilde{\lambda}_i$  および固有ベクトル  $\tilde{\mathbf{v}}_i$  を計算した。

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= 3.0002, & \tilde{\lambda}_2 &= 0.60001, & \tilde{\lambda}_3 &= -0.94705, & \tilde{\lambda}_4 &= -1.0593, \\ \tilde{\mathbf{v}}_1 &= \begin{pmatrix} -0.70547 \\ 0.70873 \\ -0.0026727 \\ 0.00048797 \end{pmatrix}, & \tilde{\mathbf{v}}_2 &= \begin{pmatrix} 0.00062376 \\ 0.0043914 \\ 0.99998 \\ 0.00085397 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{v}}_3 &= \begin{pmatrix} 0.064072 \\ 0.064464 \\ 0.00052738 \\ -0.99586 \end{pmatrix}, & \tilde{\mathbf{v}}_4 &= \begin{pmatrix} 0.70583 \\ 0.70251 \\ -0.0036029 \\ 0.090885 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

さらに、INTLAB による精度保証付き数値計算により、行列  $Y$  の真の固有ベクトルが以下の区間ベクトルに含まれることを検証した。

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_1] &= \begin{pmatrix} [-0.70548, -0.70547] \\ [0.70873, 0.70874] \\ [-0.0026728, -0.0026727] \\ [0.00048797, 0.00048798] \end{pmatrix}, & [\mathbf{v}_2] &= \begin{pmatrix} [0.00062376, 0.00062377] \\ [0.0043914, 0.0043915] \\ [0.99998, 0.99999] \\ [0.00085397, 0.00085398] \end{pmatrix}, \\ [\mathbf{v}_3] &= \begin{pmatrix} [0.064072, 0.064073] \\ [0.064464, 0.064465] \\ [0.00052738, 0.00052739] \\ [-0.99587, -0.99586] \end{pmatrix}, & [\mathbf{v}_4] &= \begin{pmatrix} [0.70583, 0.70584] \\ [0.70251, 0.70252] \\ [-0.0036030, -0.0036029] \\ [0.090885, 0.090886] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

区間行列  $[A^+], [A^-]$  を  $[A^+] = ([\mathbf{v}_1] [\mathbf{v}_2])$  および  $[A^-] = ([\mathbf{v}_3] [\mathbf{v}_4])$  とおき、 $[A^-]^T Y [A^-]$  の負定値性、 $[A^+]^T Y [A^+]$  の正定値性を精度保証により検証した。

4. 半径  $r^- = 0.001$  の閉球  $B^- = \{\mathbf{x} \in D_L \mid \|\mathbf{x}\| \leq r^-\}$  を考える。極座標系を用いると、閉球  $B^-$  の境界  $\partial B^-$  上の点  $\mathbf{x}$  は

$$\begin{aligned} x &= r^- \cos \theta_1, \\ y &= r^- \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ z &= r^- \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ w &= r^- \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \end{aligned}$$

と書かれる。ここで、 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  の定義域は、 $0 \leq \theta_1 \leq \pi, 0 \leq \theta_2 \leq \pi$  および  $0 \leq \theta_3 \leq 2\pi$  である。区間  $[\theta_1], [\theta_2], [\theta_3]$  を  $[\theta_1] = [0, \pi], [\theta_2] = [0, \pi]$  および  $[\theta_3] = [0, 2\pi]$  ととる。区間  $[\theta_i]$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を 64 分割し、各小領域を包む区間を  $[\theta_i]_j, j = 1, 2, \dots, 64$  とする。このとき、 $[B^-]_k$  は区間  $[\theta_i]_j$  を用いて表現することができる。Procedure 1 のステップ 4 に対応する以下の条件のいずれかが成立することを検証した。

(I)  $\partial B^-$  上の点  $\mathbf{x}$  における単位外向き法線ベクトルを

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{r^-}$$

としたときに、 $\mathbf{n}([B^-]_k)^T \mathbf{f}([B^-]_k; [D_p])$  を区間演算により算定した結果が正值であること。

(II)  $L(\varphi(T_k^-, [B^-]_k; [D_p])) > 0$  を満たす負の時刻  $T_k^- < 0$  が存在すること。さらに、任意の  $t \in [T_k^-, 0]$  に対して  $\varphi(t, [B^-]_k; [D_p]) \in D_L$  が成立すること。いずれの検証にも精度保証を用いる。

精度保証の結果、50196 ケースが (I) を満たし、41752 ケースが (II) を満たすことが確認できた。

5. 参照点として、

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1.6448 \times 10^{-9} \\ 1.6289 \times 10^{-9} \\ -1.7060 \times 10^{-11} \\ 6.4714 \times 10^{-11} \end{pmatrix} \in \{\varphi(t, \mathbf{x}_0; \tilde{\mathbf{p}}) \mid t \in \mathbb{R}\} \cap (B^- \cap L^-)$$

をとり、行列  $Y$  の真の固有ベクトル  $\mathbf{v}_i$  を用いて、点  $\tilde{\mathbf{x}} \approx \hat{\mathbf{x}}$  を

$$\tilde{\mathbf{x}} = -5.8511 \times 10^{-12} \mathbf{v}_1 - 8.8255 \times 10^{-12} \mathbf{v}_2 + 1.4593 \times 10^{-10} \mathbf{v}_3 + 2.3112 \times 10^{-9} \mathbf{v}_4$$

により定義し、 $\tilde{\mathbf{x}} \in B^- \cap L^-$  となることを確認した。さらに、 $\nu$  次元の部分集合  $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$  を

$$\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^4 x_i \mathbf{v}_i, x_3 = 1.4593 \times 10^{-10}, x_4 = 2.3112 \times 10^{-9}\}$$

で定義する。

6.  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$  を基底とする座標系を用いて、 $\Sigma$  上の区間ベクトル  $B_0$  を

$$B_0 = \begin{pmatrix} \langle -5.8511 \times 10^{-12}, 1.0 \times 10^{-16} \rangle \\ \langle -8.8255 \times 10^{-12}, 1.0 \times 10^{-15} \rangle \\ 1.4594 \times 10^{-10} \\ 2.3112 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

ととる。\$B\_0\$ が \$D\_L\$ に含まれること、および \$L(B\_0)\$ が負の値となることを、\$[\mathbf{v}\_i], i = 1, \dots, 4\$ を用いた区間演算により検証した。ここで、具体的には \$L(B\_0) \subset [-0.56785 \times 10^{-17}, -0.56784 \times 10^{-17}]\$ となることが検証できた。したがって、\$B\_0 \subset B^- \cap L^-\$ が成立する。ここで、\$B\_0\$ は \$\Sigma\$ 上の二次元球と同相であることに注意。

\$B\_0\$ の境界 \$\partial B\_0\$ を小領域に分割し、それらを包含する区間ベクトルを \$[\mathbf{b}]\_k \subset \mathbb{R}^4, k = 1, \dots, 400\$ とする。各 \$k = 1, \dots, 400\$ に対して、\$L(\varphi(T\_k^-, [\mathbf{b}]\_k; [D\_p])) < 0\$ かつ \$0 \in L(\varphi(T\_k^- - h, [\mathbf{b}]\_k; [D\_p]))\$ を満たす負の時刻 \$T\_k^- < 0\$ が存在することを精度保証により検証した。ここで、\$h\$ は解軌道 \$\{\varphi(\cdot, [\mathbf{b}]\_k; [D\_p])\}\$ を精度保証する際の時間刻みを表す。さらに、\$j = 1, 2, \dots\$ に対し、\$0 < L(\varphi(T\_k^- - jh, [\mathbf{b}]\_k; [D\_p]))\$ となるまで、精度保証付きの軌道計算を続けた。\$0 < L(\varphi(T\_k^- - jh, [\mathbf{b}]\_k; [D\_p]))\$ となる最初のステップを \$j = J\_k\$ とし、時刻 \$T\_k^+\$ を \$T\_k^+ = T\_k^- - J\_k h\$ で定義する。さらに、集合 \$[\mathbf{x}]\_k\$ を

$$[\mathbf{x}]_k = \bigcup_{j=1,2,\dots,J_k} \varphi([T_k^- - (j-1)h, T_k^- - jh], [\mathbf{b}]_k; [D_p])$$

で定義する。これは、初期点を \$[\mathbf{b}]\_k\$ として、微分方程式を逆向きに解いたときに、解軌道が \$L^0\$ と交差する点を含んだ区間となっている。

7. 部分集合 \$\Gamma^- \subset \mathbb{R}^4\$ を \$\Gamma^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid (A^-)^T \mathbf{x} = \mathbf{0}\}\$ で定義し、射影 \$P^- : \mathbb{R}^4 \to \Gamma^-\$ を \$P^- = I - A^-(A^-)^T\$ で定義する。ここで、\$I\$ は \$\mathbb{R}^4\$ の恒等写像であり、\$A^-\$ は \$Y\$ の真の固有ベクトルを用いて定義される。さらに、区間行列 \$[P^-] \subset \mathbb{R}^{4 \times 4}\$ を \$[P^-] = I - [A^-][A^-]^T\$ により定義する。

8. \$[P^-][\mathbf{x}]\_k, k = 1, \dots, 400\$ の結果は図 5.12 のようになった。

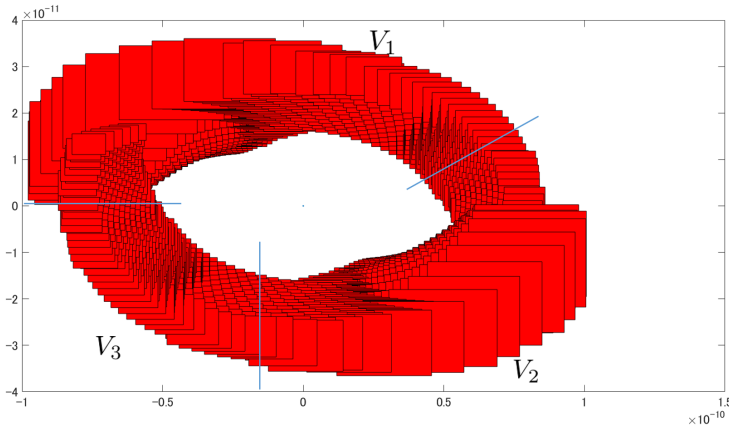


図 5.12: \$k = 1, \dots, 400\$ に対する \$\bigcup\_{j=1,2,\dots,J\_k} \varphi([T\_k^- - (j-1)h, T\_k^- - jh], [\mathbf{b}]\_k; [D\_p])\$ の \$P^-\$ による \$\Gamma^-\$ への射影の包み込み \$[P^-][\mathbf{x}]\_k\$。ただし、\$[\mathbf{b}]\_k \subset \partial B\_0\$ で \$\bigcup\_{k=1}^{400} [\mathbf{b}]\_k = \partial B\_0\$ とする。

原点 (青い点) は \$[P^-]\mathbf{x}^\* = \mathbf{x}^\* \in \Gamma^-\$ を表し、青い線は集合 \$\{V\_i\}\_{i=1,2,3}\$ の境界を表す線である。

これらの結果より、Procedure 1 のステップ 8 の条件が満足されることを確認した。

9. 定理 5.3.3 の仮定が満たされることを以下の様に検証した。まず、

$$\begin{aligned} V_1 &= \bigcup_{k=1, \dots, 133} [P^-][\mathbf{x}]_k, \\ V_2 &= \bigcup_{k=134, \dots, 266} [P^-][\mathbf{x}]_k, \\ V_3 &= \bigcup_{k=267, \dots, 400} [P^-][\mathbf{x}]_k \end{aligned}$$

とおき、 $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$  となることを確認した。これは、各  $\mathbf{p} \in D_p$  に対し、 $\partial B_0$  に関する写像度  $\deg(P^- \circ \varphi(T_1(\cdot, \mathbf{p}), \cdot; \mathbf{p}))$  が 0 でないことを意味する。この結果と補題 5.7.4 および定理 5.4.3 より、連続写像  $F_1 : D_p \rightarrow \bigcup_{\mathbf{p} \in D_p} W^u(\mathbf{x}^*; \mathbf{p}) \times D_p$  が構成できた。

次に、第 5.6 節の Procedure 2 に対応する以下の手順に従い、ホモクリニック軌道の存在検証を行った。

1. 半径  $r^+ = 0.001$  の閉球  $B^+ = \{\mathbf{x} \in D_L \mid \|\mathbf{x}\| \leq r^+\}$  を考え、上記手順のステップ 4 と同様に極座標を用いて境界  $B^+$  の境界を分割し、分割された各境界を包み込む区間ベクトルを  $[B^+]_k$  とする。Procedure 2 のステップ 1 に対応する以下の条件のいずれかが成立することを検証した。

(I)'  $\partial B^+$  上の点  $\mathbf{x}$  における単位外向き法線ベクトルを

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{r^+}$$

としたときに、 $\mathbf{n}([B^+]_k)^T \mathbf{f}([B^+]_k; [D_p])$  を区間演算により算定した結果が負値であること。

(II)'  $L(\varphi(T_k^+, [B^+]_k; [D_p])) < 0$  を満たす正の時刻  $T_k^+ > 0$  が存在すること。さらに、任意の  $t \in [0, T_k^+]$  に対して  $\varphi(t, [B^+]_k; [D_p]) \in D_L$  が成立すること。いずれの検証にも精度保証を用いる。

精度保証による検証の結果、148092 ケースが条件 (I)' を満足し、40777 ケースが条件 (II)' を満足すること、そして 223 ケースがどちらの条件も満足しないことが確認できた。条件を満足しなかった 223 ケースについては、 $[B^+]_k$  を更なる小領域に分割することで、条件 (I)' を満たすことが確認できた。

2.  $T_2 = 24$  まで精度保証付きの軌道計算を行った結果、次の結果を得た。

$$\varphi(T_2, [B_0]; [D_p]) = \begin{pmatrix} [-0.00039147, -0.00037869] \\ [0.00037335, 0.00038601] \\ [-0.00070541, -0.00070518] \\ [-2.9628 \times 10^{-5}, 3.0259 \times 10^{-5}] \end{pmatrix}.$$

これは、

$$L(\varphi(T_2, [B_0]; [D_p])) \subset [1.1505 \times 10^{-6}, 1.2114 \times 10^{-6}],$$

$$\|\varphi(T_2, [B_0]; [D_p])\| \subset [0.000883222, 0.000894852]$$

を満たす。よって、 $\varphi(T_2, [B_0]; [D_p]) \subset B^+ \cap L^+$  が成立する。今回のケースでは  $[D_p]$  が十分小さかったので、三次元の数値例のようなパラメータ領域の分割は不要であった。

3. パラメータ領域  $D_p$  の境界  $\partial D_p$  を 1200 の小領域に分割し、各小領域を包含する区間ベクトルを  $[\mathbf{d}]_k \subset \mathbb{R}^3$ ,  $k = 1, 2, \dots, 1200$  とする。全ての  $\mathbf{x} \in B_0$ ,  $\mathbf{p}_b \in [\mathbf{d}]_k$  および  $k$  ( $k = 1, \dots, 1200$ ) に対して  $L(\varphi(T_3(\mathbf{x}, \mathbf{p}_b), \mathbf{x}; \mathbf{p}_b)) = 0$  を満たす時刻  $T_3(\mathbf{x}, \mathbf{p}_b) > T_2$  が存在することを検証した。さらに、各  $k = 1, 2, \dots, 1200$  毎に、任意の  $\mathbf{x} \in B_0$  および  $\mathbf{p}_b \in [\mathbf{d}]_k$  に対し  $\varphi(T_3(\mathbf{x}, \mathbf{p}_b), \mathbf{x}; \mathbf{p}_b) \in [\mathbf{x}']_k$  を満足する区間ベクトル  $[\mathbf{x}']_k$  を同定した。これらの検証、および同定は、上述の手順におけるステップ 6 と同様の手順で行うことが出来る。
4. 部分集合  $\Gamma^+ \subset \mathbb{R}^4$  を  $\Gamma^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid (A^+)^T \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$  で定義し、射影  $P^+ : \mathbb{R}^4 \rightarrow \Gamma^+$  を  $P^+ = I - A^+(A^+)^T$  で定義する。ここで、 $I$  は  $\mathbb{R}^4$  の恒等写像であり、 $A^+$  は行列  $Y$  の真の固有値ベクトルを用いて定義される行列である。さらに、区間行列  $[P^+] \subset \mathbb{R}^{4 \times 4}$  を  $[P^+] = I - [A^+][A^+]^T$  により定義する。
5. 射影  $[P^+][\mathbf{x}']_k$ ,  $k = 1, \dots, 1200$  の結果は図 5.13 のようになった。

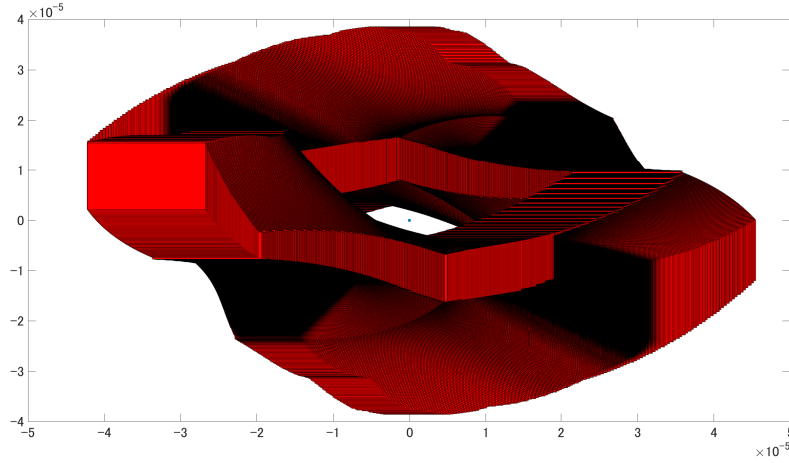


図 5.13:  $\Gamma^+$  上の  $P^+ \left( \bigcup_{(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in B_0 \times \partial D_p} \varphi(T_3(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \mathbf{x}; \mathbf{p}) \right)$  の包み込み  $[P^+][\mathbf{x}']_k$  ( $k = 1, \dots, 1200$ )

原点 (図中の青点) は  $[P^+]\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^* \in \Gamma^+$  を表す。また、図が見づらくなってしまうので分割線は省略した。

これらの結果を用いる事で、Procedure 2 のステップ 5 の条件が満たされることを確認した。

6. 射影  $[P^+][\mathbf{x}'_k]$ ,  $k = 1, \dots, 1200$  の結果を用いる事で、上記手順のステップ 9 と同様に、定理 5.3.3 の仮定が満たされることが確認された。よって、各  $\mathbf{x} \in B_0$  に対し、 $\partial D_p$  に関する写像度  $\deg(P^+ \circ \varphi(T_3(\mathbf{x}, \cdot), \mathbf{x}; \cdot))$  が 0 でないことがわかる。この結果と系 5.8.5 より、区間ベクトル  $D_p$  は原点から自身へと至るホモクリニック軌道を与えるパラメータ  $\mathbf{p}^*$  を含むことが示された。

## 第III部

# 精度保証付き数値計算による Lyapunov関数の展開

# 第6章 非双曲型平衡点に対する Lyapunov関数の構成

第II部で説明したように、力学系の双曲型平衡点近傍においては、精度保証を用いて Lyapunov 関数を構成する一般的な方法が提案されている。一方、平衡点为非双曲型である場合、一般的な方法は確立されてはいない。しかしながら、二次元の問題に限定することで、一定の成果が得られている [28, 40]。第III部では、非双曲型平衡点に対する Lyapunov 関数の精度保証付き数値計算による構成法について、[28, 40] の方法からの展開を論じる。また、その実際を数値例に従って示す。

## 6.1 問題設定

$\mathbf{v} = (v_1(t), v_2(t))^T \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  に対し、右辺が多項式で与えられる次の常微分方程式系を考える：

$$\dot{\mathbf{v}} = J\mathbf{v} + \mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{v}) + \mathbf{p}^{(3)}(\mathbf{v}) + \dots + \mathbf{p}^{(r-1)}(\mathbf{v}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{v}\|^r). \quad (6.1.1)$$

ここで、 $J$  は

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho \neq 0$$

のいずれかの行列とし、 $\mathbf{p}^{(i)}(\mathbf{v})$  ( $2 \leq i \leq r-1$ ) は  $\mathbf{p}^{(i)}(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2$  であって、各成分が  $v_1, v_2$  に関する  $m$  次同次式であるものを表す<sup>1</sup>。

いま、原点は式 (6.1.1) の平衡点になっているが、これは非双曲型であるので第4章の方法では原点近傍での Lyapunov 関数を構成することはできない。そこで、新たに以下の手順により Lyapunov 関数の構成を試みる：

1. 式 (6.1.1) に適当な (非線形) 変数変換を行う。
2. 変換後の系で二次形式による Lyapunov 関数  $\mathcal{L}$  を構成する。

<sup>1</sup>微分方程式右辺が (6.1.1) の形をしていない場合であっても、右辺が多項式であり非双曲型平衡点を持つのであれば、適当な平行移動と座標変換により (6.1.1) の形へと変形することが可能である。したがって、(6.1.1) はある程度の一般性を持っていることに注意されたい。



3.  $\mathcal{L}$  に対し逆変換を施し、元の変数に戻した関数を  $L$  とする。  $L$  が、元の系 (6.1.1) に対する Lyapunov 関数になっていることを精度保証を用いて確認する。

第1ステップで行う非線形変数変換の決め方は、力学系の理論で用いられている標準形変換から着想を得ている。

本手法で鍵となるのは、適切な変数変換を見つけることができるかどうかである。 [29, 40] では、非線形変数変換を三次までの多項式とすることで、各  $J$  毎に適切な変数変換が存在するための条件を導いた。

本論文では、

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix}$$

に限定することで、局所 Lyapunov 関数を構成することが可能な  $m$  次多項式による変数変換が存在するための条件を導出する。以下では、簡単のために  $\rho = 1$  とする。

## 6.2 非線形変換と変換後の Lyapunov 関数

次の変数変換を考える：

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \sum_{m=2}^M \mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{u}) \quad (2 \leq M \leq r-1). \quad (6.2.1)$$

ここで、 $\mathbf{u} = (u_1(t), u_2(t))^T \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  であり、 $\mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2$  は各成分が  $u_1, u_2$  に関する  $m$  次同次式である 2次元の縦ベクトルとする。 $\mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{u})$  の具体的な決め方は後述する。さらに (6.1.1) と (6.2.1) から  $\mathbf{u}$  に関する以下の微分方程式を得る。

$$\dot{\mathbf{u}} = J\mathbf{u} + \sum_{m=2}^M \mathbf{d}^{(m)}(\mathbf{u}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{u}\|^{M+1}). \quad (6.2.2)$$

ここで  $\mathbf{d}^{(m)}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2$  は各成分が  $u_1, u_2$  に関する  $m$  次同次式からなる 2次元縦ベクトルである。

(6.2.2) に対して、原点近傍で以下の形の局所 Lyapunov 関数を構成することを考える。

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T Y \mathbf{u}. \quad (6.2.3)$$

ただし、 $Y$  は 2 次の実対称行列とする。(6.2.3) の時間微分を考えると

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= 2\mathbf{u}^T Y \dot{\mathbf{u}} \\ &= 2\mathbf{u}^T Y \left( J\mathbf{u} + \sum_{m=2}^M \mathbf{d}^{(m)}(\mathbf{u}) \right) + \mathcal{O}(\|\mathbf{u}\|^{M+2}) \end{aligned}$$

となる。もし、 $d\mathcal{L}/dt$  の 2 次項が負定値であれば  $\mathcal{L}$  は原点近傍で Lyapunov 関数となる。 $d\mathcal{L}/dt$  の二次項は

$$2\mathbf{u}^T Y J \mathbf{u} = \mathbf{u}^T (Y J + J^T Y) \mathbf{u}^T$$

なので、 $Y J + J^T Y$  の負定値性を確認すればよい。

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

とおいて実際に計算すると、

$$Y J + J^T Y = \begin{pmatrix} 2b & c - a \\ c - a & -2b \end{pmatrix}$$

となり、固有値は  $\lambda = \pm \sqrt{4b^2 + (c - a)^2}$  で、これを負定値にすることはできない。そこで Lyapunov 関数を構成する際の邪魔にならないようにするため、 $d\mathcal{L}/dt$  の 2 次項を消すように  $a, b, c$  を定めたい。そのためには  $a = c$ ,  $b = 0$  と定めれば良いことがわかる。

さて、次に  $d\mathcal{L}/dt$  の 3 次項について考えるが、この項を定符号にすることはできないので、この項も消す必要がある。 $d\mathcal{L}/dt$  の 3 次項は

$$2\mathbf{u}^T Y \mathbf{d}^{(2)}(\mathbf{u}) = 2a\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(2)}(\mathbf{u})$$

である。 $\mathbf{d}^{(2)}(\mathbf{u})$  を具体的に計算すると、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \dot{\mathbf{v}} - D\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} + \mathcal{O}(\|\mathbf{u}\|^3) \\ &= J\mathbf{v} + \mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{v}) - D\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})\dot{\mathbf{v}} + \mathcal{O}(\|\mathbf{u}\|^3) \\ &= J\mathbf{u} + J\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u}) + \mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{u}) - D\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})J\mathbf{u} + \mathcal{O}(\|\mathbf{u}\|^3) \end{aligned}$$

であるから、

$$\mathbf{d}^{(2)}(\mathbf{u}) = J\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u}) + \mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{u}) - D\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})J\mathbf{u}$$

となる。ここに  $D\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})$  は、 $\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})$  の  $\mathbf{u}$  に関する Jacobi 行列を表す。

この右辺のうち、 $\mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{u})$  は既知の量であり、 $J\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})$ ,  $-D\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})J\mathbf{u}$  が調節できる項であることに注意すると、与えられた  $\mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{u})$  に対して、

$$\mathbf{u}^T (J\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u}) - D\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})J\mathbf{u}) = -\mathbf{u}^T \mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{u})$$

となる  $\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})$  を見つけることができれば  $\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(2)}(\mathbf{u}) = 0$  とできることがわかる。

実際に可能かはさておき、 $\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(2)}(\mathbf{u}) = 0$  が達成できたとしよう。このとき、 $a\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(3)}(\mathbf{u})$  が任意の原点近傍の  $\mathbf{u}$  に対して負値を取るなら  $\mathcal{L}$  は Lyapunov 関数となる。負値を取るようにできないならば、先ほどと同様に  $\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(3)}(\mathbf{u}) = 0$  を目指す。

具体的に  $\mathbf{d}^{(3)}(\mathbf{u})$  を計算すると

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{u}} &= \dot{\mathbf{v}} - D\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} - D\mathbf{q}^{(3)}(\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} + \mathcal{O}(\|\mathbf{u}\|^4) \\
&= J\mathbf{u} + J\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u}) + J\mathbf{q}^{(3)}(\mathbf{u}) + \mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{u} + \mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})) + \mathbf{p}^{(3)}(\mathbf{u}) \\
&\quad - D\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})(\dot{\mathbf{v}} - D\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}) - D\mathbf{q}^{(3)}(\mathbf{u})J\mathbf{u} + \mathcal{O}(\|\mathbf{u}\|^4) \\
&= J\mathbf{u} + J\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u}) + J\mathbf{q}^{(3)}(\mathbf{u}) + \mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{p}}^{(3)}(\mathbf{u}) + \mathbf{p}^{(3)}(\mathbf{u}) \\
&\quad - D\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})J\mathbf{u} - D\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})(J\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u}) + \mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{u}) - D\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})J\mathbf{u}) \\
&\quad - D\mathbf{q}^{(3)}(\mathbf{u})J\mathbf{u} + \mathcal{O}(\|\mathbf{u}\|^4) \\
&= J\mathbf{u} + \mathbf{d}^{(2)}(\mathbf{u}) + J\mathbf{q}^{(3)}(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{p}}^{(3)}(\mathbf{u}) + \mathbf{p}^{(3)}(\mathbf{u}) \\
&\quad - D\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})\mathbf{d}^{(2)}(\mathbf{u}) - D\mathbf{q}^{(3)}(\mathbf{u})J\mathbf{u} + \mathcal{O}(\|\mathbf{u}\|^4)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\tilde{\mathbf{p}}^{(3)}(\mathbf{u})$  は  $\mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{u} + \mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u}))$  の 3 次項を表す。 $\hat{\mathbf{p}}^{(3)}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}^{(3)}(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{p}}^{(3)}(\mathbf{u})$  とおき、実は  $\mathbf{d}^{(2)}(\mathbf{u}) = 0$  となるように  $\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})$  が決定可能であることを用いれば、

$$\mathbf{d}^{(3)}(\mathbf{u}) = J\mathbf{q}^{(3)}(\mathbf{u}) + \hat{\mathbf{p}}^{(3)}(\mathbf{u}) - D\mathbf{q}^{(3)}(\mathbf{u})J\mathbf{u}$$

となり、これは  $\mathbf{d}^{(2)}(\mathbf{u})$  とほぼ同じ形式である ( $\mathbf{d}^{(2)}(\mathbf{u}) = 0$  を用いない場合、 $\tilde{\mathbf{p}}^{(3)}(\mathbf{u})$  の形が少し変わるが同様の議論が行える)。また、 $\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})$  が決まっていることから  $\tilde{\mathbf{p}}^{(3)}(\mathbf{u})$  も計算できるので、 $\hat{\mathbf{p}}^{(3)}(\mathbf{u})$  は実質的に既知の量であることに注意。よって、与えられた  $\hat{\mathbf{p}}^{(3)}(\mathbf{u})$  に対して、

$$\mathbf{u}^T (J\mathbf{q}^{(3)}(\mathbf{u}) - D\mathbf{q}^{(3)}(\mathbf{u})J\mathbf{u}) = -\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(3)}(\mathbf{u})$$

となる  $\mathbf{q}^{(3)}(\mathbf{u})$  を見つけることができれば  $2a\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(3)}(\mathbf{u}) = 0$  とできることがわかる。以下同様に計算をしていく。すなわち、

1.  $m$  が偶数のとき

$\mathbf{u}^T \mathbf{d}^m(\mathbf{u})$  が 0 となるように  $\mathbf{q}^m(\mathbf{u})$  を決定する。

2.  $m$  が奇数のとき

$a\mathbf{u}^T \mathbf{d}^m(\mathbf{u})$  が任意の原点近傍の  $\mathbf{u}$  に対して負値を取るように  $a, \mathbf{q}^m(\mathbf{u})$  を選べるかどうかを確認する。もしそのような  $a, \mathbf{q}^m(\mathbf{u})$  が選べるならば  $\mathcal{L}$  は Lyapunov 関数となる。

選べないならば  $\mathbf{u}^T \mathbf{d}^m(\mathbf{u}) = 0$  となるように  $\mathbf{q}^m(\mathbf{u})$  を決定する。

上述の手順により、次数  $m$  の変数変換により Lyapunov 関数  $\mathcal{L}$  が得られたと仮定する。このとき、逆関数定理 [36] より、変数  $\mathbf{u}$  から変数  $\mathbf{v}$  への逆変換

$$\mathbf{u} = \mathbf{h}(\mathbf{v}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{v}\|^{m+1}) \quad (6.2.4)$$

が存在する。逆変換の具体的な形については数値例で述べる。式 (6.2.4) を式 (6.2.3) に代入し、 $m+1$  次以上の項を切り落とすことで得られる関数  $L(\mathbf{v})$  を元の系 (6.1.1)

の原点における局所 Lyapunov 関数の候補とする。\$L\$ が Lyapunov 関数となる領域の検証には精度保証を用いるが、\$L\$ は二次形式ではないので、第 4 章の方法を用いる事はできない。そこで、Lyapunov 領域の検証には、[29, 40] で考案された以下の方法を用いる。

**定理 6.2.1.** 係数 \$c\_\alpha \in \mathbb{R}\$ を持つ \$2m\$ 次同次式

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=2m} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

を考える。なお、\$\alpha\$ は全次数を表す。このとき

$$\forall \mathbf{y} \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}, f(\mathbf{y}) < 0 \Rightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}, f(\mathbf{x}) < 0$$

が成立する。

実際の検証においては、この定理から導かれる次の系を用いる。

**系 6.2.2.** 区間係数 \$[c\_\alpha] \in \mathbb{IR}\$ を持つ \$2m\$ 次同次式

$$f_I(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=2m} [c_\alpha] \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{IR}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

を考える。ここで、\$\mathbb{IR}\$ は実数上の区間全体からなる集合を表すものとする。このとき、

$$\forall \mathbf{y} \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}, \sup f_I(\mathbf{y}) < 0 \Rightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}, f_I(\mathbf{x}) < 0$$

が成立する。ただし、\$\sup\$ は区間値 \$f\_I(\mathbf{y})\$ に関するものである。

系 6.2.2 を用いて Lyapunov 関数の定義域の検証を行うには、以下の様にすればよい。

いま、\$m\$ 次多項式による変数変換を用いて Lyapunov 候補関数 \$L(\mathbf{v})\$ が得られているとする。このとき、\$m\$ は奇数であることに注意。\$L(\mathbf{v})\$ の時間微分 \$dL/dt\$ を考えると、変数変換の定め方より、\$dL/dt\$ は最低次数が \$m+1\$ である多項式となる。検証領域 \$D\_L\$ を区間

$$[D_{v_1}] = [v_1, \bar{v}_1], \quad [D_{v_2}] = [v_2, \bar{v}_2]$$

からなる区間ベクトル

$$D_L = \begin{pmatrix} [D_{v_1}] \\ [D_{v_2}] \end{pmatrix}$$

とする。また、\$D\_L\$ の境界 \$\partial D\_L\$ を

$$\begin{aligned} \partial D_L &= D_{L_1} \cup D_{L_2} \cup D_{L_3} \cup D_{L_4}, \\ D_{L_1} &= (v_1, [D_{v_2}]), \\ D_{L_2} &= ([D_{v_1}], v_2), \\ D_{L_3} &= (\bar{v}_1, [D_{v_2}]), \\ D_{L_4} &= ([D_{v_1}], \bar{v}_2) \end{aligned}$$

とする。このとき  $\text{norm}\|\cdot\|$  を

$$\|(v_1, v_2)\| = \max(v_1/\underline{v}_1, v_1/\overline{v}_1, v_2/\underline{v}_2, v_2/\overline{v}_2)$$

にとると、

$$\forall (v_1, v_2) \in \partial D_L, \|(v_1, v_2)\| = 1 \quad (6.2.5)$$

が成立する。さらに、 $dL/dt$  の  $m+2$  次以上の項の変数  $v_1, v_2$  を区間  $[D_{v_1}], [D_{v_2}]$  に置き換えることで、区間係数を持つ  $m+1$  次の同次式  $DL_I$  を構成する。このとき、

$$\forall (v_1, v_2) \in D_L, \frac{d}{dt}L(\mathbf{v}) \in DL_I(\mathbf{v}) \quad (6.2.6)$$

となることに注意。 $DL_I$  の構成法については、数値例を参照されたい。以上および系 6.2.2, 式 (6.2.5), (6.2.6) より、

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{y} \in \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \partial D\}, \sup DL_I(\mathbf{y}) < 0 &\Leftrightarrow \forall \mathbf{y} \in \{\mathbf{v} \mid \|\mathbf{v}\| = 1, \mathbf{v} \in D\}, \sup DL_I(\mathbf{y}) < 0 \\ &\Rightarrow \forall \mathbf{v} \in D_L \setminus \{\mathbf{0}\}, \sup DL_I(\mathbf{v}) < 0 \\ &\Rightarrow \forall \mathbf{v} \in D_L \setminus \{\mathbf{0}\}, \frac{d}{dt}L(\mathbf{v}) < 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、領域  $D_L$  の検証においては、得られた Lyapunov 関数の時間微分を用いて区間係数を持つ偶数次同次式  $DL_I$  を構成し、

$$\forall \mathbf{v} \in \partial D_L, \sup DL_I(\mathbf{v}) < 0$$

となることを確認すればよい。以上が非双曲型平衡点に対する Lyapunov 関数の構成方針である。

以下では、次のことについて考察していく。

1.  $\mathbf{d}^{(m)}(\mathbf{u})$  の計算に規則性があるか
2. 必ず  $\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(m)}(\mathbf{u}) = 0$  とできるか

### 6.3 変換後の微分方程式の $m$ 次項の計算について

まず、 $\mathbf{d}^{(m)}(\mathbf{u})$  の計算方法から考える。 $\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(k)}(\mathbf{u}) = 0$  ( $2 \leq k \leq m-1$ ) が成立していると仮定する。 $\mathbf{d}^{(m)}(\mathbf{u})$  は

- $\dot{\mathbf{v}}$  から出る  $m$  次項
- $-D\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}$  から出る  $m$  次項
- $\vdots$

- $-D\mathbf{q}^{(m-1)}(\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}$  から出る  $m$  次項
- $-D\mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}$  から出る  $m$  次項

の和により構成されていることに注意してそれぞれ考えていこう。

1.  $\dot{\mathbf{v}}$  から出る  $m$  次項について

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} &= J\mathbf{v} + \mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{v}) + \mathbf{p}^{(3)}(\mathbf{v}) + \dots + \mathbf{p}^{(m)}(\mathbf{v}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{v}\|^{m+1}) \\ &= J\left(\mathbf{u} + \sum_{j=2}^m \mathbf{q}^{(j)}(\mathbf{u})\right) + \mathbf{p}^{(2)}\left(\mathbf{u} + \sum_{j=2}^{m-1} \mathbf{q}^{(j)}(\mathbf{u})\right) + \mathbf{p}^{(3)}\left(\mathbf{u} + \sum_{j=2}^{m-2} \mathbf{q}^{(j)}(\mathbf{u})\right) \\ &\quad + \dots + \mathbf{p}^{(m-1)}(\mathbf{u} + \mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})) + \mathbf{p}^{(m)}(\mathbf{u}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{v}\|^{m+1})\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{p}}^{(m)} &= \left(\mathbf{p}^{(2)}\left(\mathbf{u} + \sum_{j=2}^{m-1} \mathbf{q}^{(j)}(\mathbf{u})\right) \text{ の } m \text{ 次項}\right) + \left(\mathbf{p}^{(3)}\left(\mathbf{u} + \sum_{j=2}^{m-2} \mathbf{q}^{(j)}(\mathbf{u})\right) \text{ の } m \text{ 次項}\right) \\ &\quad + \dots + \mathbf{p}^{(m)}(\mathbf{u})\end{aligned}$$

とおくと、 $\dot{\mathbf{v}}$  から出る  $m$  次項は

$$J\mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{p}}^{(m)}(\mathbf{u})$$

と書ける。仮定より、 $\mathbf{q}^{(k)}(\mathbf{u})$  ( $2 \leq k \leq m-1$ ) は決定しており、したがって  $\tilde{\mathbf{p}}^{(m)}(\mathbf{u})$  は実質的に既知の量であることに注意。

2.  $-D\mathbf{q}^{(k)}(\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}$  ( $2 \leq k \leq m-1$ ) から出る  $m$  次項について  
 $-D\mathbf{q}^{(k)}(\mathbf{u})$  が  $\mathbf{u}$  の  $k-1$  次項であることより、 $m$  次項は

$$-D\mathbf{q}^{(k)}(\mathbf{u})\mathbf{d}^{(m-(k-1))}(\mathbf{u})$$

により表される。仮定よりこれらの量は既知である。これらの和を

$$\tilde{\mathbf{d}}^{(m)}(\mathbf{u}) = -\sum_{k=2}^{m-1} D\mathbf{q}^{(k)}(\mathbf{u})\mathbf{d}^{(m-(k-1))}(\mathbf{u})$$

とおく。

3.  $-D\mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}$  から出る  $m$  次項について  
これは簡単な計算により、

$$-D\mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{u})J\mathbf{u}$$

となることが確認できる。

以上より、

$$\mathbf{d}^{(m)} = J\mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{p}}^{(m)}(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{d}}^{(m)}(\mathbf{u}) - D\mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{u})J\mathbf{u}$$

と書ける。さらに、 $\tilde{\mathbf{p}}^{(m)}(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{d}}^{(m)}(\mathbf{u})$  は既知の量であることに着目し、

$$\hat{\mathbf{p}}^{(m)}(\mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{p}}^{(m)}(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{d}}^{(m)}(\mathbf{u})$$

とおくと、

$$\mathbf{d}^{(m)}(\mathbf{u}) = J\mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{u}) - D\mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{u})J\mathbf{u} + \hat{\mathbf{p}}^{(m)}(\mathbf{u}) \quad (6.3.1)$$

と書ける。

## 6.4 変換後の微分方程式の $m$ 次項が満たすべき条件について

$P^{(m)}$  を各成分が  $u_1, u_2$  の  $m$  次同次式である 2 次元縦ベクトル全体からなる空間とし、写像  $N^{(m)} : P^{(m)} \rightarrow P^{(m)}$  を

$$N^{(m)}(\mathbf{q}) = J\mathbf{q} - D\mathbf{q}J\mathbf{u}, \quad \mathbf{q} \in P^{(m)} \quad (6.4.1)$$

により定義する。 $N^{(m)}$  は  $\mathbf{q}$  について線形であることに注意。

以下では  $P^{(m)}$  の基底として

$$\begin{aligned} \phi_0^{(m)}(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} u_1^m \\ 0 \end{pmatrix}, \phi_1^{(m)}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1^{m-1}u_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \phi_m^{(m)}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_2^m \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \phi_{m+1}^{(m)}(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ u_1^m \end{pmatrix}, \phi_{m+2}^{(m)}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1^{m-1}u_2 \end{pmatrix}, \dots, \phi_{2m+1}^{(m)}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を選ぶこととする。

$$\mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{2m+1} q_i \phi_i^{(m)}(\mathbf{u}), \quad q_i \in \mathbb{R}$$

とおくと、(6.3.1)、(6.4.1) および  $N^{(m)}$  の線形性より

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(m)}(\mathbf{u}) &= \mathbf{u}^T N^{(m)} \left( \sum_{i=0}^{2m+1} q_i \phi_i^{(m)}(\mathbf{u}) \right) + \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(m)}(\mathbf{u}) \\ &= \sum_{i=0}^{2m+1} \left( q_i \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_i^{(m)}(\mathbf{u})) \right) + \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(m)}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

である。いま、 $\mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_i^{(m)}(\mathbf{u}))$  は  $u_1, u_2$  に関する  $m+1$  次同次式であり、 $u_1, u_2$  に関する  $m+1$  次同次式の全体を  $\mathcal{P}^{(m)}$  とおくと、これは  $m+2$  次元のベクトル空間をなすことに注意する。

そこで、

$$Q^{(m)} = \text{span} \left\{ \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_0^{(m)}(\mathbf{u})), \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_1^{(m)}(\mathbf{u})), \dots, \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_{2m+1}^{(m)}(\mathbf{u})) \right\}$$

とおいたときに、 $Q^{(m)}$  の次元が  $m+2$  であれば、 $q_i$  を適当に選ぶことで、

$$\sum_{i=0}^{2m+1} \left( q_i \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_i^{(m)}(\mathbf{u})) \right) = -\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(m)}(\mathbf{u})$$

とすることができる。このことに関し、次の定理が成立する。

**定理 6.4.1.**  $Q^{(m)}$  の次元は、 $m$  が偶数のとき  $m+2$ 、 $m$  が奇数のとき  $m+1$  となる。

**証明.** まず、具体的に  $\mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_i^{(m)}(\mathbf{u}))$  を計算する。 $i = 0, 2m+1$  については、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_0^{(m)}(\mathbf{u})) &= (m+1)u_1^m u_2, \\ \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_{2m+1}^{(m)}(\mathbf{u})) &= -(m+1)u_1 u_2^m \end{aligned}$$

であり、 $1 \leq i \leq m$  については、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_i^{(m)}(\mathbf{u})) &= \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{m-i} u_2^i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} (m-i)u_1^{m-i-1}u_2^i & iu_1^{m-i}u_2^{i-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} (m-i)u_1^{m-i-1}u_2^{i+1} - iu_1^{m-i+1}u_2^{i-1} \\ u_1^{m-1}u_2^i \end{pmatrix} \\ &= (m-i+1)u_1^{m-i}u_2^{i+1} - iu_1^{m-i+2}u_2^{i-1}, \\ \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_{m+i}^{(m)}(\mathbf{u})) &= \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_1^{m-i+1}u_2^{i-1} \end{pmatrix} \\ &\quad - \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (m-i+1)u_1^{m-i}u_2^{i-1} & (i-1)u_1^{m-i+1}u_2^{i-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} -u_1^{m-i+1}u_2^{i-1} \\ (m-i+1)u_1^{m-i}u_2^i - (i-1)u_1^{m-i+2}u_2^{i-2} \end{pmatrix} \\ &= (m-i+1)u_1^{m-i}u_2^{i+1} - iu_1^{m-i+2}u_2^{i-1} \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} &\text{span} \{ \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_0^{(m)}), \dots, \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_{2m}^{(m)}), \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_{2m+1}^{(m)}) \} \\ &= \text{span} \{ \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_0^{(m)}), \dots, \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_m^{(m)}), \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_{2m+1}^{(m)}) \} \end{aligned}$$

が成立する。



次に、 $\mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_0^{(m)}), \dots, \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_m^{(m)})$  が一次独立であることを示す。

$$\sum_{i=0}^m q_m \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_i^{(m)}) = 0$$

とおき、各項  $u_1^{m+1}, u_1^m u_2, u_1^{m-1} u_2^2, \dots, u_1 u_2^m, u_2^{m+1}$  の係数を両辺比較することで、次の連立一次方程式を得る。

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ m+1 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m & 0 & -3 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 & -m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (6.4.2)$$

簡単な掃き出しにより、この係数行列の rank が  $m+1$  であることが確認できる。よって、 $\mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_0), \dots, \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_m)$  は一次独立である。

同様に、 $\mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_0), \dots, \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_m), \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_{2m+1})$  の一次独立性を考える。これは連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ m+1 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & -3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 & -(m+1) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \\ q_{2m+1} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.4.3)$$

の左辺に現れる行列が正則なら一次独立、特異なら一次従属となる。

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ m-1 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m-2 & 0 & -3 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 2 & 0 & -(m-1) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \\ q_{2m+1} \end{pmatrix}$$

とおくと、(6.4.3) は

$$A_{m+2} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (6.4.4)$$

と書ける。後述する定理 6.5.3 より  $A_m$  について以下が成立する。

$i$  を虚数単位とする。

- $m$  が偶数のとき

$A_m$  の固有値は  $\pm i, \pm 3i, \pm 5i, \dots, \pm(m-1)i$  である。

- $m$  が奇数のとき

$A_m$  の固有値は  $0, \pm 2i, \pm 4i, \dots, \pm(m-1)i$  である。

よって、 $m$  が偶数の時には  $A_{m+2}$  は 0 固有値を持たず正則、 $m$  が奇数の時には  $A_{m+2}$  が 0 固有値を持ち、その rank は  $m+1$  となる。

以上より、 $Q^{(m)}$  の次元は、 $m$  が偶数のとき  $m+2$ 、 $m$  が奇数のとき  $m+1$  となることが示された。□

定理 6.4.1 より、 $m$  が偶数の時には  $\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(m)}(\mathbf{u}) = 0$  を満たす  $\mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{u})$  が必ず存在することがわかる。

$m$  が奇数の場合には、Lyapunov 関数の構成可能性に関わる次の定理が成立する。

**定理 6.4.2.**  $m$  を奇数とする。もし、 $\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(m)}(\mathbf{u}) \notin Q^{(m)}$  であれば、0 でない任意の  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$  に対して  $a\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(m)}(\mathbf{u}) < 0$  を満たす  $\mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{u}) \in P^{(m)}$  および  $a \in \mathbb{R}$  が存在する。もし、 $\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(m)}(\mathbf{u}) \in Q^{(m)}$  であれば、 $\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(m)}(\mathbf{u}) = 0$  を満たす  $\mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{u}) \in P^{(m)}$  が存在する。

**証明.**  $\mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{2m+1} q_j \phi_j^{(m)}$  とおくと、

$$a\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(m)}(\mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{2m+1} a q_j \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_j^{(m)}) + a\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(m)}(\mathbf{u})$$

と変形できる。 $\mathcal{P}^{(m)}$  の次元は  $m+2$  であり、 $Q^{(m)} \subset \mathcal{P}^{(m)}$  の次元が  $m+1$  であることに注意すると、もし

$$\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(m)}(\mathbf{u}) \notin Q^{(m)}$$

であれば、

$$\mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_0^{(m)}), \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_1^{(m)}), \dots, \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_m^{(m)}), \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(m)}(\mathbf{u})$$

を  $Q^{(m)}$  の基底として選ぶことが可能である。よって、適切に  $a$  および  $q_j$  を選ぶことで、

$$a\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(m)}(\mathbf{u}) < 0$$

とすることができる。特に、

$$a\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(m)}(\mathbf{u}) = -(u_1^{m+1} + u_2^{m+1})$$

となるように選べる。これは以下の様に示される。

まず、 $-(u_1^{m+1} + u_2^{m+1}) \notin Q^{(m)}$  を示そう。 $g = -(u_1^{m+1} + u_2^{m+1})$  とおき、一次関係式

$$c_0 \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_0^{(m)}) + c_1 \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_1^{(m)}) + \dots + c_m \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_m^{(m)}) + c_{m+1} g = 0$$

を考える。各項  $u_1^{m+1}, u_1^m u_2, u_1^{m-1} u_2^2, \dots, u_1 u_2^m, u_2^{m+1}$  の係数を両辺比較することで、次の連立一次方程式を得る。

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \\ m+1 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & -3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_m \\ c_{m+1} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

掃き出し法を適用することにより、この係数行列の rank が  $m+2$  であることが確認できる。よって、 $\mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_0^{(m)}), \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_1^{(m)}), \dots, \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_m^{(m)}), g$  は一次独立であり、したがって  $g \notin Q^{(m)}$  となる。

この事実と  $g \in \mathcal{P}^{(m)}$  および

$$\mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_0^{(m)}), \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_1^{(m)}), \dots, \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_m^{(m)}), \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(m)}(\mathbf{u})$$

を  $Q^{(m)}$  の基底として選ぶことが可能であることを用いると、ある  $a$  および  $q_j$  が存在し、

$$g = \sum_{j=0}^m a q_j \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_j^{(m)}) + a \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(m)}(\mathbf{u}) \quad (6.4.5)$$

が成り立つ。ここで、 $g \notin Q^{(m)}$  より、 $a \neq 0$  であることに注意。よって、(6.4.5) を満たすように  $a$  および  $q_j$  を定めることで、

$$a \mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(m)}(\mathbf{u}) = -(u_1^{m+1} + u_2^{m+1}) < 0$$

とすることが出来る。

次に、

$$\mathbf{u}^T \mathbf{p}^{(m)} \in Q^{(m)}$$

を仮定する。このとき、適当に  $q_j$  を選ぶことにより、

$$\sum_{j=0}^{2m+1} q_j \mathbf{u}^T N^{(m)}(\phi_j^{(m)}) = -\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(m)}(\mathbf{u})$$

とすることが可能であり、これは

$$\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(m)}(\mathbf{u}) = 0$$

を意味する。 □

## 6.5 行列 $A_m$ の固有値について

本節では行列

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ m-1 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m-2 & 0 & -3 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 2 & 0 & -(m-1) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (m \geq 2)$$

について、

- $m$  が偶数のとき

$A_m$  の固有値は  $\pm i, \pm 3i, \pm 5i, \dots, \pm(m-1)i$

- $m$  が奇数のとき

$A_m$  の固有値は  $0, \pm 2i, \pm 4i, \dots, \pm(m-1)i$

が成立することを示す。

まず、以下の補題が成り立つ。

**補題 6.5.1.**  $\lambda_m$  を行列  $A_m$  の固有値、 $\mathbf{v}_m$  を対応する固有ベクトルとする。このとき、 $\lambda_m$  は行列  $A_{m+2}$  の固有値でもあり、対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{v}_m \end{pmatrix}$$

となる。

**証明.**  $A_{m+2}$  について、直接計算により次が成立する。

$$A_{m+2} = \left( \begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & -m & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & -(m+1) \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) + \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 2 & 0 & & & O \\ & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ O & & & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.5.1)$$

さらに、 $A_{m+2}$  は以下のように書くこともできる。

$$A_{m+2} = \left( \begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & m & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & \end{array} \right) + \left( \begin{array}{cccc} 0 & -2 & & \\ & 0 & -2 & \mathbf{O} \\ & & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{O} & & \ddots & -2 \\ & & & & 0 \end{array} \right). \quad (6.5.2)$$

(6.5.1) より

$$A_{m+2} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_m \mathbf{v}_m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_m \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.5.3)$$

が、(6.5.2) より

$$A_{m+2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{v}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_m \mathbf{v}_m \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_m \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.5.4)$$

が成立する。(6.5.3)、(6.5.4) より、

$$A_{m+2} \left( \begin{pmatrix} \mathbf{v}_m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{v}_m \end{pmatrix} \right) = \lambda_m \left( \begin{pmatrix} \mathbf{v}_m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{v}_m \end{pmatrix} \right)$$

が成り立つ。よって、補題が示された。  $\square$

この補題は、 $A_{m+2}$  の固有値のうち  $m$  個については  $A_m$  の固有値からわかるということを意味している。

さらに残りの固有値について、次の補題が成立する。

**補題 6.5.2.**  $i$  を虚数単位とする。行列  $A_{m+2}$  について、 $-(m+1)i$  は  $A_{m+2}$  の固有値であり、対応する固有ベクトル  $\mathbf{v}$  の第  $k$  成分は

$$v_k = i^{k-1} {}_{m+1}C_{k-1}$$

により表される。また、 $A_{m+2}$  は実行列なので、 $(m+1)i$  も固有値となり、対応する固有ベクトルは  $\bar{\mathbf{v}}$  である。

**証明.**  $-(m+1)i$  が  $A_{m+2}$  の固有値であることを示す。

$$(A_{m+2} + (m+1)iI) = \left( \begin{array}{cccc} (m+1)i & -1 & & \\ (m+1) & (m+1)i & -2 & \mathbf{O} \\ & m & (m+1)i & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{O} & & -2 & (m+1)i & -(m+1) \\ & & & & -1 & (m+1)i \end{array} \right)$$



以上の補題を用いて、次の定理を証明する。

**定理 6.5.3.**  $m$  を 2 以上の整数とする。このとき、行列  $A_m$  の固有値  $\lambda$  は

- $m$  が偶数のとき

$$\lambda = \pm i, \pm 3i, \dots, \pm(m-1)i$$

- $m$  が奇数のとき

$$\lambda = 0, \pm 2i, \pm 4i, \dots, \pm(m-1)i$$

となる。

**証明.** 帰納法で証明する。

$m = 2$  の場合については、固有方程式を解くことにより、 $\lambda = \pm i$  となる。

同様に、 $m = 3$  の場合については、 $\lambda = 0, \pm 2i$  となる。

次に  $m \geq 2$  を偶数として、 $A_m$  の固有値が  $\lambda = \pm i, \pm 3i, \dots, \pm(m-1)i$  であることを仮定する。

このとき、補題 1 より、 $\lambda = \pm i, \pm 3i, \dots, \pm(m-1)i$  は  $A_{m+2}$  の固有値でもある。

また、補題 2 より、 $\lambda = \pm(m+1)i$  も  $A_{m+2}$  の固有値である。これらより、 $A_{m+2}$  の固有値は

$$\lambda = \pm i, \pm 3i, \dots, \pm(m+1)i$$

となる。

$m$  が奇数の場合も同様の議論により  $A_{m+2}$  の固有値が

$$\lambda = 0, \pm 2i, \pm 4i, \dots, \pm(m+1)i$$

となることが示される。

以上より、行列  $A_m$  の固有値  $\lambda$  は

- $m$  が偶数のとき

$$\lambda = \pm i, \pm 3i, \dots, \pm(m-1)i$$

- $m$  が奇数のとき

$$\lambda = 0, \pm 2i, \pm 4i, \dots, \pm(m-1)i$$

となることが示された。

□

## 6.6 数値例

本節では数値例として次の問題を考える：

$$\dot{\mathbf{v}} = J\mathbf{v} + \begin{pmatrix} v_1v_2 \\ v_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1^3 \\ -v_2^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}v_1^5 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.6.1)$$

問題 (6.6.1) の非双曲型平衡点  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  に対して、Lyapunov 関数を構成することを目指す。以下の計算では、MATLAB における数式処理も援用した。また、精度保証付き数値計算を行うプログラムは、MATLAB 上で動作する精度保証ライブラリである INTLAB[25] を用いて作成した。また、計算機環境は次の通りである。

- CPU: Intel Core i5-8500
- メモリ: 16GB
- MATLAB 2019a
- INTLAB version 11

まず、 $\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(2)}(\mathbf{u}) = 0$  となるように  $\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u})$  を決定すると、

$$\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -u_1 - u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となった。これを用いて  $\hat{\mathbf{p}}^{(3)}(\mathbf{u})$  を計算すると、

$$\hat{\mathbf{p}}^{(3)}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1^3 - u_1^2u_2 - u_2^3 \\ -u_2^3 \end{pmatrix}$$

が得られた。このとき、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(3)} &= -u_1^4 + u_1^3u_2 + u_1u_2^3 + u_2^4 \\ &= \frac{1}{4}\mathbf{u}^T N^{(3)}(\phi_0^{(3)}) + \mathbf{u}^T N^{(3)}(\phi_1^{(3)}) + \mathbf{u}^T N^{(3)}(\phi_3^{(3)}) - \frac{1}{4}\mathbf{u}^T N^{(3)}(\phi_7^{(3)}) \end{aligned}$$

であり、これは  $\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(3)} \in Q^{(3)}$  を意味する。よって、この問題は三次多項式による変数変換では Lyapunov 関数を構成することができない、つまり [29, 40] の方法では Lyapunov 関数が構成できない問題となっている。

そこで、 $\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(3)}(\mathbf{u}) = 0$  となるように  $\mathbf{q}^{(3)}(\mathbf{u})$  を決定すると、

$$\mathbf{q}^{(3)}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}u_1^3 + u_1^2u_2 + u_2^3 \\ -\frac{1}{4}u_2^3 \end{pmatrix}$$

となった。これらを用いて  $\hat{\mathbf{p}}^{(4)}(\mathbf{u})$  を計算すると、

$$\hat{\mathbf{p}}^{(4)}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -2u_1^4 - \frac{1}{2}u_1^3u_2 - u_1^2u_2^2 - \frac{1}{4}u_1u_2^3 + u_2^4 \\ -\frac{3}{4}u_1^2u_2^2 - \frac{1}{2}u_2^4 \end{pmatrix}$$



が得られた。 $\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(4)}(\mathbf{u}) = 0$  となるように  $\mathbf{q}^{(4)}(\mathbf{u})$  を決定すると、

$$\mathbf{q}^{(4)}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_1^4 - 2u_1^3u_2 + u_1^2u_2^2 - 3u_1u_2^3 + \frac{1}{2}u_2^4 \\ -u_2^4 \end{pmatrix}$$

となった。次に、 $\hat{\mathbf{p}}^{(5)}(\mathbf{u})$  を計算すると、

$$\hat{\mathbf{p}}^{(5)}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1^5 + \frac{43}{16}u_1^4u_2 + \frac{3}{4}u_1^3u_2^2 + \frac{61}{16}u_1^2u_2^3 + \frac{5}{4}u_1u_2^4 + \frac{3}{4}u_2^5 \\ \frac{3}{16}u_1^3u_2^2 - \frac{13}{4}u_1^2u_2^3 + \frac{9}{16}u_1u_2^4 - \frac{5}{4}u_2^5 \end{pmatrix}$$

となった。これより、

$$\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(5)}(\mathbf{u}) = u_1^6 + \frac{43}{16}u_1^5u_2 + \frac{3}{4}u_1^4u_2^2 + 4u_1^3u_2^3 - 2u_1^2u_2^4 + \frac{21}{16}u_1u_2^5 - \frac{5}{4}u_2^6$$

が得られた。この  $\hat{\mathbf{p}}^{(5)}(\mathbf{u})$  について  $\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(5)}(\mathbf{u}) \in Q^{(5)}$  となるかどうかを確認する。そのためには、

$$\sum_{j=0}^{11} q_j \mathbf{u}^T N^{(5)}(\phi_j^{(5)}) = -\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(5)}(\mathbf{u})$$

が解を持つかどうかを確認すればよい。これは、次の連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{43}{16} \\ -\frac{3}{4} \\ -4 \\ 2 \\ -\frac{21}{16} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

が解を持つかどうかには帰着される。簡単な掃き出しにより、この連立一次方程式は解を持たないことが確認できるので、 $\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(5)}(\mathbf{u}) \notin Q^{(5)}$  となる。そこで、原点以外で  $a\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(5)}(\mathbf{u}) < 0$  となるように  $a$  および  $\mathbf{q}^{(5)}$  を定めよう。ここでは特に、

$$2a\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(5)}(\mathbf{u}) = -u_1^6 - u_2^6 \quad (6.6.2)$$

となるように  $a, \mathbf{q}^{(5)}(\mathbf{u})$  を決定する。

$$2a\mathbf{u}^T \mathbf{d}^{(5)}(\mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{11} 2aq_j N^{(5)}(\phi_j^{(5)}) + 2a\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(5)}(\mathbf{u})$$

を用いると、式(6.6.2)は

$$\sum_{j=0}^{11} 2aq_j N^{(5)}(\phi_j^{(5)}) = -2a\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}}^{(5)}(\mathbf{u}) - u_1^6 - u_2^6$$

となり、これは、次の連立一次方程式に変形できる。

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aq_0 \\ aq_1 \\ aq_2 \\ aq_3 \\ aq_4 \\ aq_5 \\ aq_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a - \frac{1}{2} \\ -\frac{43}{16}a \\ -\frac{3}{4}a \\ -4a \\ 2a \\ -\frac{21}{16}a \\ \frac{5}{4}a - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

これは、式の本数に対して変数の数が多いので、解は一意には定まらない。実際、拡大係数行列に対し掃き出しを行うと、

$$\left( \begin{array}{cccccccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a - \frac{1}{2} \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{43}{16}a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10}{4}a - 5 \\ 6 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & 0 & -4a \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & \frac{33}{4}a - \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -6 & -\frac{21}{5}a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4}a - \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

が得られる。これから、 $a, q_1, q_3, q_5$  については

$$a = 2, \quad q_1 = \frac{5}{4}, \quad q_3 = \frac{7}{3}, \quad q_5 = 1$$

となる。残る変数については、

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_2 \\ q_4 \\ q_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{43}{16} \\ -4 \\ -\frac{21}{16} \end{pmatrix}$$

を解けばよい。ここでは、 $q_2 = 1$  とすることにより、

$$q_0 = -\frac{11}{96}, \quad q_2 = 1, \quad q_4 = 2, \quad q_{11} = \frac{85}{96}$$

が得られた。以上より、

$$\mathbf{q}^{(5)}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\frac{11}{96}u_1^5 + \frac{5}{4}u_1^4u_2 + u_1^3u_2^2 + \frac{7}{3}u_1^2u_2^3 + 2u_1^4u_2^2 + u_2^5 \\ \frac{85}{96}u_2^5 \end{pmatrix}$$

となった。

次に、逆変換について考える。式 (6.2.1) より

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{u}) - \mathbf{q}^{(3)}(\mathbf{u}) - \mathbf{q}^{(4)}(\mathbf{u}) - \mathbf{q}^{(5)}(\mathbf{u})$$

が得られ、この式を再帰的に用いる事で、次の逆変換が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & \mathbf{v} - \mathbf{q}^{(5)}(\mathbf{v}) - \mathbf{q}^{(4)}(\mathbf{v} - \mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{v})) - \mathbf{q}^{(3)}(\mathbf{v} - \mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{v} - \mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{v}))) \\ & - \mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{v} - \mathbf{q}^{(4)}(\mathbf{v}) - \mathbf{q}^{(3)}(\mathbf{v} - \mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{v})) - \mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{v} - \mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{v} - \mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{v}))) - \mathbf{q}^{(3)}(\mathbf{v})) \\ & + \mathcal{O}(\|\mathbf{v}\|^6). \end{aligned} \quad (6.6.3)$$

なお、より高次の変数変換に対する逆変換も同様にして考えることができる。 $\mathbf{u}$ に関する Lyapunov 関数

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T Y \mathbf{u}$$

に式 (6.6.3) を代入し、7次以上の項を打ち切ることで、(6.6.1) に対する局所 Lyapunov 関数の候補として

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}) = & \frac{130}{3}v_1^6 - 35v_1^5v_2 + 20v_1^5 + 86v_1^4v_2^2 - 12v_1^4v_2 + 9v_1^4 \\ & - \frac{139}{3}v_1^3v_2^3 + 32v_1^3v_2^2 - 4v_1^3v_2 + 4v_1^3 + 46v_1^2v_2^4 \\ & - 12v_1^2v_2^3 + 12v_1^2v_2^2 + 2v_1^2 - 11v_1v_2^5 + 12v_1v_2^4 \\ & - 4v_1v_2^3 + 4v_1v_2^2 + \frac{10}{3}v_2^6 + 3v_2^4 + 2v_2^2 \end{aligned} \quad (6.6.4)$$

が得られた。式 (6.6.4) を時間で微分することで、

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} = & 260v_1^5\dot{v}_1 - 175v_1^4v_2\dot{v}_1 - 35v_1^5\dot{v}_2 + 100v_1^4\dot{v}_1 + 344v_1^3v_2^2\dot{v}_1 \\ & + 172v_1^4v_2\dot{v}_2 - 48v_1^3v_2\dot{v}_1 - 12v_1^4\dot{v}_2 + 36v_1^3\dot{v}_1 - 139v_1^2v_2^3\dot{v}_1 \\ & - 139v_1^3v_2^2\dot{v}_2 + 96v_1^2v_2^2\dot{v}_1 + 66v_1^3v_2\dot{v}_2 - 12v_1^2v_2\dot{v}_1 - 4v_1^3\dot{v}_2 \\ & + 12v_1^2\dot{v}_1 + 92v_1v_2^4\dot{v}_1 + 184v_1^2v_2^3\dot{v}_2 - 24v_1v_2^3\dot{v}_1 - 36v_1^2v_2^2\dot{v}_2 \\ & + 24v_1v_2^2\dot{v}_1 + 24v_1^2v_2\dot{v}_2 + 4v_1\dot{v}_1 - 11v_2^5\dot{v}_1 - 55v_1v_2^4\dot{v}_2 \\ & + 12v_2\dot{v}_1 + 48v_1v_2^3\dot{v}_2 - 4v_2^3\dot{v}_1 - 12v_1v_2^2\dot{v}_2 + 4v_2^2\dot{v}_1 \\ & + 8v_1v_2\dot{v}_2 + 20v_2^5\dot{v}_2 + 12v_2^3\dot{v}_2 + 4v_2\dot{v}_2 \end{aligned} \quad (6.6.5)$$

が得られた。

$$\dot{v}_1 = -v_2 + v_1v_2 + v_1^3 - \frac{1}{2}v_1^5, \quad \dot{v}_2 = v_1 + v_2^2 - v_2^3$$

を (6.6.5) に代入することで、最低次の項が  $-v_1^6, -v_2^6$  である  $v_1, v_2$  に関する以下の多項式が得られた。

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} = & -\frac{1687805}{4608}v_1^{14} + \frac{8715}{16}v_1^{13}v_2 - \frac{22659}{64}v_1^{13} - \frac{3505}{3}v_1^{12}v_2^2 + \frac{1361}{3}v_1^{12}v_2 \\
& + \frac{1102685}{2304}v_1^{12} + \frac{319543}{288}v_1^{11}v_2^3 - \frac{183379}{192}v_1^{11}v_2^2 - \frac{37975}{48}v_1^{11}v_2 + \frac{52199}{96}v_1^{11} \\
& - \frac{36033}{32}v_1^{10}v_2^4 + \frac{6049}{8}v_1^{10}v_2^3 + \frac{5195}{3}v_1^{10}v_2^2 - \frac{77827}{2304}v_1^{10}v_2 + \frac{2055}{8}v_1^{10} \\
& + \frac{40365}{64}v_1^9v_2^5 - \frac{11805}{16}v_1^9v_2^4 - \frac{117749}{72}v_1^9v_2^3 + \frac{36469}{96}v_1^9v_2^2 + \frac{116923}{2304}v_1^9v_2 \\
& + \frac{3967}{24}v_1^9 - \frac{3091}{9}v_1^8v_2^6 + \frac{1979}{6}v_1^8v_2^5 + \frac{60935}{48}v_1^8v_2^4 + \frac{5120}{3}v_1^8v_2^3 + \frac{7469}{48}v_1^8v_2^2 \\
& + \frac{2803}{32}v_1^8v_2 + \frac{3763}{24}v_1^8 + \frac{317}{4}v_1^7v_2^7 - \frac{1351}{8}v_1^7v_2^6 - \frac{13249}{96}v_1^7v_2^5 - \frac{345487}{144}v_1^7v_2^4 \\
& + \frac{81617}{96}v_1^7v_2^3 + \frac{184}{3}v_1^7v_2^2 + \frac{441}{8}v_1^7v_2 + 47v_1^7 - \frac{391}{24}v_1^6v_2^8 + \frac{337}{12}v_1^6v_2^7 \\
& - \frac{63203}{72}v_1^6v_2^6 + \frac{187067}{48}v_1^6v_2^5 - \frac{277411}{288}v_1^6v_2^4 + \frac{55037}{96}v_1^6v_2^3 + \frac{133}{3}v_1^6v_2^2 \\
& + \frac{3341}{24}v_1^6v_2 - v_1^6 \\
& - \frac{13}{8}v_1^5v_2^9 - 6v_1^5v_2^8 + \frac{35533}{32}v_1^5v_2^7 - \frac{54049}{16}v_1^5v_2^6 + \frac{79213}{48}v_1^5v_2^5 - \frac{8839}{12}v_1^5v_2^4 \\
& + \frac{9133}{24}v_1^5v_2^3 - 111v_1^5v_2^2 - \frac{3991}{4}v_1^4v_2^8 + \frac{89483}{36}v_1^4v_2^7 - \frac{40411}{32}v_1^4v_2^6 + \frac{7807}{8}v_1^4v_2^5 \\
& - \frac{9017}{24}v_1^4v_2^4 + \frac{6917}{24}v_1^4v_2^3 + \frac{4477}{12}v_1^3v_2^9 - \frac{7151}{6}v_1^3v_2^8 + \frac{18293}{18}v_1^3v_2^7 - \frac{3421}{4}v_1^3v_2^6 \\
& + \frac{2719}{6}v_1^3v_2^5 - \frac{592}{3}v_1^3v_2^4 - \frac{391}{3}v_1^2v_2^{10} + \frac{719}{2}v_1^2v_2^9 - 445v_1^2v_2^8 + \frac{6019}{12}v_1^2v_2^7 \\
& - \frac{3307}{12}v_1^2v_2^6 + 144v_1^2v_2^5 - \frac{117}{4}v_1v_2^{11} - \frac{127}{2}v_1v_2^{10} + \frac{441005}{2304}v_1v_2^9 - \frac{5519}{24}v_1v_2^8 \\
& + \frac{487}{4}v_1v_2^7 - \frac{100}{3}v_1v_2^6 - \frac{25325}{2304}v_2^{12} + \frac{62477}{2304}v_2^{11} - \frac{907}{24}v_2^{10} + \frac{245}{12}v_2^9 - 19v_2^8 \\
& - 5v_2^7 - v_2^6.
\end{aligned}$$

上式の7次以上の項に対して、変数  $v_1, v_2$  を区間  $[v_1], [v_2]$  に置き換えることで、区間係数を持つ  $v_1, v_2$  に関する6次の同次式への変形を行う。変形の結果、以下が得られた。

$$\begin{aligned}
DL_I = & \left( -\frac{1687805}{4608}[v_1]^8 + \frac{8715}{16}[v_1]^7[v_2] - \frac{22659}{64}[v_1]^7 - \frac{3505}{3}[v_1]^6[v_2]^2 \right. \\
& + \frac{1361}{3}[v_1]^6[v_2] + \frac{1102685}{2304}[v_1]^6 + \frac{319543}{288}[v_1]^5[v_2]^3 - \frac{183379}{192}[v_1]^5[v_2]^2 \\
& - \frac{37975}{48}[v_1]^5[v_2] + \frac{52199}{96}[v_1]^5 - \frac{36033}{32}[v_1]^4[v_2]^4 + \frac{6049}{8}[v_1]^4[v_2]^3 \\
& + \frac{5195}{3}[v_1]^4[v_2]^2 - \frac{77827}{2304}[v_1]^4[v_2] + \frac{2055}{8}[v_1]^4 + \frac{40365}{64}[v_1]^3[v_2]^5 \\
& - \frac{11805}{16}[v_1]^3[v_2]^4 - \frac{117749}{72}[v_1]^3[v_2]^3 + \frac{36469}{96}[v_1]^3[v_2]^2 + \frac{116923}{2304}[v_1]^3[v_2] \\
& + \frac{3967}{24}[v_1]^3 - \frac{3091}{9}[v_1]^2[v_2]^6 + \frac{1979}{6}[v_1]^2[v_2]^5 + \frac{60935}{48}[v_1]^2[v_2]^4 \\
& + \frac{5120}{3}[v_1]^2[v_2]^3 + \frac{7469}{48}[v_1]^2[v_2]^2 + \frac{2803}{32}[v_1]^2[v_2] + \frac{3763}{24}[v_1]^2 \\
& + \frac{317}{4}[v_1][v_2]^7 - \frac{1351}{8}[v_1][v_2]^6 - \frac{13249}{96}[v_1][v_2]^5 - \frac{345487}{144}[v_1][v_2]^4 \\
& + \frac{81617}{96}[v_1][v_2]^3 + \frac{184}{3}[v_1][v_2]^2 + \frac{441}{8}[v_1][v_2] + 47[v_1] - \frac{391}{24}[v_2]^8 \\
& + \frac{337}{12}[v_2]^7 - \frac{63203}{72}[v_2]^6 + \frac{187067}{48}[v_2]^5 - \frac{277411}{288}[v_2]^4 + \frac{55037}{96}[v_2]^3 \\
& \left. + \frac{133}{3}[v_2]^2 + \frac{3341}{24}[v_2] - 1 \right) v_1^6 \\
& + \left( -\frac{13}{8}[v_1][v_2]^7 - 6[v_1][v_2]^6 + \frac{35533}{32}[v_1][v_2]^5 - \frac{54049}{16}[v_1][v_2]^4 \right. \\
& + \frac{79213}{48}[v_1][v_2]^3 - \frac{8839}{12}[v_1][v_2]^2 + \frac{9133}{24}[v_1][v_2] - 111[v_1] - \frac{3991}{4}[v_2]^6 \\
& \left. + \frac{89483}{36}[v_2]^5 - \frac{40411}{32}[v_2]^4 + \frac{7807}{8}[v_2]^3 - \frac{9017}{24}[v_2]^2 + \frac{6917}{24}[v_2] \right) v_1^4 v_2^2 \\
& + \left( \frac{4477}{12}[v_1][v_2]^5 - \frac{7151}{6}[v_1][v_2]^4 + \frac{18293}{18}[v_1][v_2]^3 - \frac{3421}{4}[v_1][v_2]^2 \right. \\
& + \frac{2719}{6}[v_1][v_2] - \frac{592}{3}[v_1] - \frac{391}{3}[v_2]^6 + \frac{719}{2}[v_2]^5 - 445[v_2]^4 + \frac{6019}{12}[v_2]^3 \\
& \left. - \frac{3307}{12}[v_2]^2 + 144[v_2] \right) v_1^2 v_2^4 \\
& + \left( -\frac{117}{4}[v_1][v_2]^5 - \frac{127}{2}[v_1][v_2]^4 + \frac{441005}{2304}[v_1][v_2]^3 - \frac{5519}{24}[v_1][v_2]^2 \right. \\
& + \frac{487}{4}[v_1][v_2] - \frac{100}{3}[v_1] - \frac{25325}{2304}[v_2]^6 + \frac{62477}{2304}[v_2]^5 - \frac{907}{24}[v_2]^4 + \frac{245}{12}[v_2]^3 \\
& \left. - 19[v_2]^2 - 5[v_2] - 1 \right) v_2^6.
\end{aligned}$$

$dL/dt$  から  $DL_I$  への変形は一意ではなく、任意性があることを注意しておく。区間

$$[D_{v_1}] = [D_{v_2}] = [-0.001, 0.001]$$

を用いて、検証領域  $D_L$  を

$$D_L = \begin{pmatrix} [D_{v_1}] \\ [D_{v_2}] \end{pmatrix}$$

と設定する。 $DL_I$  に対して

$$[v_1] = [D_{v_1}], \quad [v_2] = [D_{v_2}]$$

を代入し、系 6.2.2 を用いて Lyapunov 領域の検証を行った結果、式 (6.6.4) は少なくとも  $D_L$  で Lyapunov 関数となることが検証された。

## 第7章 まとめと今後の展望

本章では、本論文の3つの部それぞれに対するまとめと、第II部、および第III部に関しては今後の展望についても述べる。

### 7.1 第I部のまとめ

第I部では、精度保証付きに関する基本的な技術として、区間や区間演算、二つの不動点定理などについての説明を行った。また、連続力学系の解析を精度保証を用いて行うときに必須となる常微分方程式の初期値問題に関する精度保証法に関する説明も行った。連立一次方程式や非線形方程式、偏微分方程式に関する精度保証などについては、重要ではあるが以降の章で扱わないため、本論文では解説を行っていない。これらについて興味がある場合は、例えば [23, 42] などを参照されたい。

### 7.2 第II部のまとめと今後の展望

第II部では、連続力学系の双曲型平衡点における Lyapunov 関数を精度保証付き数値計算により構成する方法を [19] に基づき説明した。また、精度保証による Lyapunov 関数の応用例として、Lyapunov 関数を用いてホモクリニック軌道を検証する方法を提案し、二つの数値例によりその有用性を確認した。提案手法は既存手法と比べて、初等的な理論により構成されており、数学的に高度な議論を用いなくてもホモクリニック軌道の検証が行える可能性があることを示唆している。

提案手法では、平衡点がパラメータに関して変化しないということを仮定している。まだ数学的な議論が完全ではなく、この制限を取り払うことはできていないが、恐らくこの仮定は排除することが可能だと考えている。今後の展望としては、この制限を取り払い、パラメータに依存して変化する平衡点を持つ問題に対して本手法を適用したいと考えている。

### 7.3 第III部のまとめと今後の展望

第III部では、精度保証付き数値計算による Lyapunov 関数構成の展開として、二次元連続力学系の非双曲型平衡点に関する Lyapunov 関数の構成法について説明した。これは力学系における標準形理論から着想を得た非線形変換を利用して

おり、系の線形部分が特定の形をしている場合には、変数変換の次数を任意に上げることができることを示した。

非双曲型平衡点における Lyapunov 関数に関する今後の展望としては、高次の系に対する Lyapunov 関数の構成法を与えることが挙げられる。

また、これはもはや Lyapunov 関数に関する展望ではないが、Lyapunov 関数が構成できない系に対する精度保証付き数値計算による解析手法に関しても研究していきたいと思っており、既にいくつかのケースについては結果が得られている。

## 謝辞

本論文をまとめるにあたり、多くの方々に協力していただきました。ありがとうございました。全ての方の名前を挙げることは不可能ですが、以下では特にお世話になった方々に対する感謝を改めて述べたいと思います。

まずは、指導教員である山本野人先生には学部生時代から合わせて7年にも渡りご指導をしていただきました。研究面のみならず本当に色々なことを学ばせていただきありがとうございました。山本研究室での経験は自分にとって本当に大切なものであり、この経験を今後の人生にも活かしていこうと思います。

続いて、京都大学の宮路智行先生には、力学系の専門家として、何度も有意義な助言をしていただきました。また、本論文第5.9節の四次元の数値例を提供していただきました。ありがとうございました。

九州大学の松江要先生にも力学系の専門家として多くの助言をいただき、また有意義な議論もしていただきました。さらに、投稿論文に対する丁寧なチェックもしていただきました。ありがとうございました。

早稲田大学の久藤衡介先生には、定理5.4.3の証明について本質的な協力をしていただきました。ありがとうございました。

審査員を引き受けてくださった伊東裕也先生、山本有作先生、渡部善隆先生、緒方秀教先生には、お忙しい中博士論文の査読をしていただきました。ありがとうございました。

また、山本研究室をはじめとした西4号館6階のメンバーには、研究に関する相談からプライベートに関することまで色々とお世話になりました。彼らのおかげで充実した研究室生活を送ることができました。その中でも特に、中山大輔氏、山野駿氏、園田大二郎氏、寺坂元氏、鎌田彬史氏にはお世話になりました。改めてありがとうございました。

そして最後に、経済的にも精神的にも自分を支えてくれた家族に対し感謝したいと思います。自分が長年に渡り学生生活を送ることができたのは間違いなく家族の理解と協力があったからです。本当にありがとうございました。



## 参考文献

- [1] O. Aberth. Computation of topological degree using interval arithmetic, and applications. *Math. Comp.*, Vol. 62, pp. 171–178, 1994.
- [2] D. Ambrosi, G. Arioli, and H. Koch. A homoclinic solution for excitation waves on a contractile substratum. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, Vol. 11, No. 4, pp. 1533–1542, 2012.
- [3] G. Arioli and H. Koch. Existence and stability of traveling pulse solutions of the Fitzhugh–Nagumo equation. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, Vol. 113, pp. 51–70, 2015.
- [4] G. Arioli and P. Zgliczyński. Symbolic dynamics for the Hénon–Heiles hamiltonian on the critical energy level. *J. Differ. Equ.*, Vol. 171, No. 1, pp. 173–202, 2001.
- [5] M. Breden and J-P. Lessard. Polynomial interpolation and a priori bootstrap for computer-assisted proofs in nonlinear ODEs. *Discrete continuous dyn. syst., Ser. B.*, Vol. 23, No. 7, pp. 2825–2858, 2018.
- [6] J. Cyranka and T. Wanner. Computer-assisted proof of heteroclinic connections in the one-dimensional Ohta–Kawasaki model. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, Vol. 17, No. 1, pp. 694–731, 2018.
- [7] R. A. Fisher. The wave of advance of advantageous genes. *Ann. Eugenics*, Vol. 7, No. 4, pp. 355–369, 1937.
- [8] P. Glendinning and C. Laing. A homoclinic hierarchy. *Phys. Lett. A*, Vol. 211, No. 3, pp. 155–160, 1996.
- [9] M. Kashiwagi. Power series arithmetic and its application to numerical validation. In *Proceedings of NOLTA '95 Symposium*, pp. 251–254, 1995.
- [10] M. Kashiwagi and S. Oishi. Numerical validation for ordinary differential equations iterative method by power series arithmetic. In *Proceedings of the NOLTA '94 Symposium*, pp. 243–246, 1994.
- [11] R. B. Kearfott, J. Dian, and A. Neumaier. Existence Verification for Singular Zeros of Complex Nonlinear Systems. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 38, No. 2, pp. 360–379, 2000.

- [12] K. Kuto, N. Yamamoto, and K. Nitta. private communications.
- [13] Y. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2004.
- [14] C. Laing and P. Glendinning. Bifocal homoclinic bifurcations. *Physica. D*, Vol. 102, No. 1, pp. 1–14, 1997.
- [15] J-P. Lessard and C. Reinhardt. Rigorous numerics for nonlinear differential equations using Chebyshev series. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 52, No. 1, pp. 1–22, 2014.
- [16] K. Makino. *Rigorous analysis of nonlinear motion in particle accelerators*. PhD thesis, Michigan State Univ., East Lansing, Michigan, USA, 1998.
- [17] K. Makino and M. Berz. Remainder differential algebras and their applications. In M. Berz, C. Bischof, G. Corliss, and A. Griewank, editors, *Computational Differentiation: Techniques, Application, and Tools*, pp. 63–74. SIAM, 1996.
- [18] K. Matsue. Rigorous numerics for fast-slow systems with one-dimensional slow variable: Topological shadowing approach. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, Vol. 50, No. 2, pp. 357–468, 2017.
- [19] K. Matsue, T. Hiwaki, and N. Yamamoto. On the construction of Lyapunov functions with computer assistance. *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 319, pp. 385–412, 2017.
- [20] K. Matsue, T. Hiwaki, and N. Yamamoto. Errata to "On the construction of Lyapunov functions with computer assistance". *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 384, p. 113175, 2021.
- [21] K. Matsue and A. Takayasu. Rigorous numerics of blow-up solutions for ODEs with exponential nonlinearity. *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 374, p. 112607, 2020.
- [22] T. Miyaji, N. Yamamoto, and K. Nitta. private communications.
- [23] M. T. Nakao, M. Plum, and Y. Watanabe. *Numerical Verification Methods and Computer-Assisted Proofs for Partial Differential Equations*. Springer Nature, Singapore, 2019.
- [24] S. Oishi. Numerical verification method of existence of connecting orbits for continuous dynamical systems. *J. Univers. Comput. Sci.*, Vol. 4, No. 2, pp. 193–201, 1998.

- [25] S. M. Rump. INTLAB – INTerval LABoratory. <https://www.tuhh.de/ti3/rump/intlab/>.
- [26] B. Sandstede. Constructing dynamical systems having homoclinic bifurcation points of codimension two. *J. Dyn. Diff. Equat.*, Vol. 9, pp. 269–288, 1997.
- [27] E. H. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer, New York, 1966.
- [28] A. Takayasu, K. Matsue, T. Sasaki, K. Tanaka, M. Mizuguchi, and S. Oishi. Numerical validation of blow-up solutions of ordinary differential equations. *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 314, pp. 10–29, 2017.
- [29] G. Terasaka, M. Nakamura, K. Nitta, and N. Yamamoto. Construction of local Lyapunov functions around non-hyperbolic equilibria by verified numerics for two dimensional cases. *JSIAM Letters*, Vol. 12, pp. 37–40, 2020.
- [30] J. B. van den Berg, M. Breden, J-P. Lessard, and M. Murray. Continuation of homoclinic orbits in the suspension bridge equation: a computer-assisted proof. *J. Differ. Equ.*, Vol. 264, No. 5, pp. 3086–3130, 2018.
- [31] J. B. van den Berg, J. D. Mireles-James, J-P. Lessard, and K. Mischaikow. Rigorous numerics for symmetric connecting orbits: even homoclinics of the Gray-Scott equation. *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 43, No. 4, pp. 1557–1594, 2011.
- [32] D. Wilczak. Symmetric heteroclinic connections in the Michelson system: a computer assisted proof. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, Vol. 4, No. 3, pp. 489–514, 2005.
- [33] D. Wilczak. The existence of Shilnikov homoclinic orbits in the Michelson system: A computer assisted proof. *Found. Comput. Math.*, Vol. 6, pp. 495–535, 2006.
- [34] N. Yamamoto. A Numerical Verification Method for Solutions of Boundary Value Problems with Local Uniqueness by Banach’s Fixed-Point Theorem. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 35, No. 5, pp. 2004–2013, 1998.
- [35] P. Zgliczyński. Covering relations, cone conditions and the stable manifold theorem. *J. Differ. Equ.*, Vol. 246, No. 5, pp. 1774–1819, 2009.
- [36] C. ロビンソン. 力学系 (上・下). シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社, 2001.
- [37] 柏木雅英. kv — c++による精度保証付き数値計算ライブラリ. <http://verifiedby.me/kv/>.

- [38] 二宮広和, 森田善久. 反応拡散方程式における進行波解と全域解. 数学, Vol. 59, No. 3, pp. 264–282, 2007.
- [39] 山野駿. 連続力学系におけるホモクリニック軌道の精度保証による検証について. Master's thesis, 電気通信大学, 2016.
- [40] 寺坂元. 非双曲型平衡点近傍における局所 Lyapunov 関数の精度保証による構成. Master's thesis, 電気通信大学, 2019.
- [41] 中尾充宏, 渡部善隆. 実例で学ぶ精度保証付き数値計算. サイエンス社, 2011.
- [42] 中尾充宏, 山本野人. 精度保証付き数値計算. 日本評論社, 1998.
- [43] 大石進一. 精度保証付き数値計算の基礎. コロナ社, 2018.
- [44] 樋脇知広. 力学系の不動点近傍解析のための精度保証法の展開. PhD thesis, 電気通信大学, 2017.
- [45] 樋脇知広, 山本野人. 力学系における閉軌道の存在領域の精度保証法による同定 (理論). 日本応用数理学会論文誌, Vol. 22, No. 4, pp. 269–276, 2012.
- [46] 小川知之, 宮路智行. 数理モデルとシミュレーション. サイエンス社, 2020.
- [47] 山本野人. 常微分方程式の解の精度保証法. シミュレーション, Vol. 31, No. 3, pp. 19–23.
- [48] 西浦廉政. 数学と化学・生物学—自己複製と自己崩壊のダイナミクスをめぐって. 数学, Vol. 52, No. 4, pp. 404–416, 2000.
- [49] 西浦廉政. 散逸系における粒子パターンの複製・崩壊・散乱のダイナミクス. 数学, Vol. 55, No. 2, pp. 113–127, 2003.
- [50] 西浦廉政. 非平衡ダイナミクスの数理. 岩波書店, 2009.

## 関連論文の印刷公表の方法及び時期

全著者名：Koki Nitta・Nobito Yamamoto・Kaname Matsue

論文題目：A numerical verification method to specify homoclinic orbits as application of local Lyapunov functions

印刷公表の方法及び時期：雑誌 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics

2021年11月 採録決定済（本文5章との関連）

## 参考論文の印刷公表の方法及び時期

全著者名：Gen Terasaka・Masao Nakamura・Koki Nitta・Nobito Yamamoto  
論文題目：Construction of local Lyapunov functions around non-hyperbolic equilibria by verified numerics for two dimensional cases  
印刷公表の方法及び時期： *JSIAM Letters*, Vol. 12, pp.37–40, 2020.

# 著者略歴

2022年3月現在

新田 光輝

1992年5月14日	東京都に生まれる
2016年3月	電気通信大学情報理工学部情報・通信工学科卒業
2016年4月	電気通信大学大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻修士課程入学
2018年3月	電気通信大学大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻修士課程修了
2018年4月	電気通信大学大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻博士課程入学
2022年3月	電気通信大学大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻博士課程修了予定