電気通信大学紀要 34 巻第 1 号 pp.7-16（340102）〔論文〕

建部賢弘『研幾算法』による弓形の弧長の導出式の復元について（続）

佐　藤　賢　一

An Introduction of Katahiro Takebe's Usage of Polynomial Interpolation for a Problem of Area of Segment in *Kenki Sanpo* (Part 2)

Kenichi SATO

Abstract

This paper once again introduces one traditional Japanese mathematical book, *Kenki Sanpo* (1683) by Katahiro Takebe (1664 - 1739). In this book Takebe solved a problem of area of segment utilizing the approximate formula for the length of arc reduced as a result of polynomial interpolation. The author poses the hypothesis to reconstruct Takebe's formula, which the formula has close resemblance to the minimax approximation polynomial.

Key Words : Katahiro Takebe, *Kenki Sanpo*, Takakazu Seki, minimax approximation polynomial

1. はじめに

本稿は、既報の拙稿[*1]の続編である。前稿で提示した今後の検討課題について、新たに仮説を構築する進展が得られたので本稿ではこれを紹介する。[*2]

本稿で議論する主題は、和算家、建部賢弘（1664－1739）の著作『研幾算法』（1683年）で紹介される、弓形の弧長の近似式の構成法である。結果しか示されていない『研幾算法』の本文の情報から、５次多項式となる近似式が多項式補間に基づいて構成されていることを前稿では明らかにした。しかしながら、その係数を子細に調べると、想定される計算値と僅かながら異なっていることも判明した。これを承けて本稿では、この近似多項式の各係数がどのような方法で決定されたのかについて、１つの仮説を提示する。

『研幾算法』の当該近似多項式の構成法については、建部以降の和算家は全く言及しておらず、その背後にあったはずのアルゴリズムや数値計算法は完全に不明のまま現在に至っている。建部賢弘とその師であった関孝和（?－1708）は、『研幾算法』の近似式とは全く異なる近似式を『括要算法』（1712年）や『大成算経』（1711年）で発展的に開発し、それが後世に普及したことから『研幾算法』の近似式は忘却されたと推定される。『研幾算法』に記される近似式の構成法を仮説として提示するのは、本稿が初めての試みとなる。この近似式を巡る課題を解明することは、関と建部の数学研究の履歴と展開を跡付けるためにも必須の作業である。本稿ではこのような問題意識から、『研幾算法』が紹介する近似式の構造的特徴を明らかにし、それを構成するアルゴリズムが当時の和算家の発想から飛躍した新機軸を伴っていた可能性をも示唆する。

以下、次の構成で本文の叙述を進める。第２章では前稿の概要を提示し、本稿が解くべき問題を再確認する。第３章では、本稿が提示する仮説の方法について説明を行う。第４章では、この仮説の方法論に基づき、『研幾算法』の近似式を復元、再構成できることを示す。第５章ではこの近似式を、関孝和や建部賢弘の数学的業績として新たな歴史的位置付けとともに再評価する。

Received on September 3, 2021.
共通教育部　総合文化部会

*1　文献［1］

*2　文献［1］の本文には以下の誤記があったので訂正をする。p.2の左欄の「古郡彦左衛門」は「池田昌意」の、p.5の連立方程式の係数行列の成分のうち、(6,6)成分の$\left(\frac{1}{4}\right)^5$は$\left(\frac{1}{2}\right)^5$の誤記である。

2. 前稿の概要と課題の確認

本章では前稿の概要を提示し、本稿で解くべき課題を確認する。

『研幾算法』は、これに先行する和算書『数学乗除往来』（1674年）に収録された全49問に対する解答を収録した和算書である。関と建部のこの時期の数学研究の到達点を示す史料として貴重である。

本書の凡例には、それら問題の解答に用いられた特徴的な算術の名称が示されている。すなわち、「弧法」（第１問、第48問）「環矩術」（第４問）「零約術」（第４問）「円率」（第13問）「遍約術」（第13問）「翦管術」（第49問）であるが、[*3]これらの技法に続いて、「右師伝之秘訣也」と一括されている。建部にとっての師伝ということから、これらの技法が関孝和に由来するものであることがうかがえる。『研幾算法』の編著者名は建部一人となっているが、関孝和が1683年当時に有していた算術の知識が本書に反映されていたと見なしてよいであろう。本稿ではこのような事情を考慮して『研幾算法』に用いられている算術の知識を関・建部が共有していたものとして議論を進める。

本稿で主題とする近似式は、『研幾算法』第１問の解答に用いられている。問題の本文は以下のとおりである。（原文の漢字の旧字体は新字体にあらためた。）

今有弧形只云矢（若干）弦（若干）問積幾何（乃円率用周三百五十五尺径一百一十三尺）〇答曰得積

術曰立天元一為積以矢相乗得数以一十六乗之得数寄甲位〇列矢自之得数四之加入弦冪共得数寄乙位〇亦列矢自之得数八之以減乙位余以弦相乗加入甲位共得数自之寄丙位〇矢七乗冪乙位相乗（一億八千三百二十七万五千五百二十段）乙位四自乗（八十一段）右二位相併共得数寄丁位〇矢九自乗（五十七億三千三百六十一万三千五百六十八段）矢五乗冪乙位冪相乗（二億六千一百二十一万七千五百三十六段）矢三乗冪乙位再乗冪相乗（九千六百三十三万七千六百六十四段）矢冪乙位三乗冪相乗（七千三百五十七万三千零六十八段）右四位相併共得内減丁位余寄左〇列矢三自乗之以乙位相乗亦以丙位相乗得数以七千三百五十四万九千四百四十乗之与寄左相消得開方式平方開之得積合問[*4]

この問題を現代的な表現に置き換えて説明する。[*5]弓形の矢をx、弦をa、弧長をLとするとき、この弓形の面積Sを求めるのが題意である。これに対して建部は、上に掲げた本文としてSの２次方程式

$$
\begin{aligned}
&-34180225024x^{10}-20658110208a^2x^8\\
&\quad-9657023232a^4x^6-1567691552a^6x^4\\
&\qquad-22008a^8x^2+81a^{10}-2353582080ax^3(16x^4-a^4)S+\\
&\qquad\quad 18828656640x^4(4x^2+a^2)S^2=0
\end{aligned}
$$

を提示する。『研幾算法』はこの方程式を記すだけで、

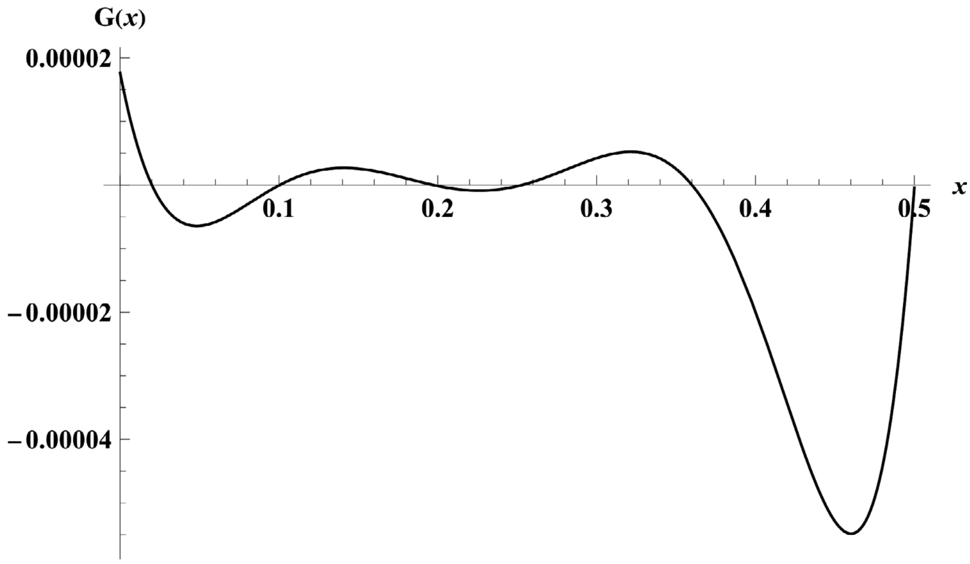

図1　$G(x)=arccos^2(1-2x)-F(x)$

*3　弧法は弓形の弧長を求める技法で本稿の主題となる。環矩術は円周あるいは弧長を求めるために、それらを等分してできる各弦の長さを求めて弧長に漸近させる技法。零約術は分数列を構成して所与の実数に近似させる技法。円率は零約術を用いて得られた円周率のことで、関と建部は$\frac{355}{113}$を用いる。遍約術は自然数の組をそれらの最大公約数で割る操作。翦管術は連立１次合同式の解法である。

*4　文献［2］、第３丁表－裏。

*5　文献［1］から進展した仮説を提示する必要から、前稿で用いた記号を一部変更する。

他の説明を一切加えていない。

この式は、弓形を切り取った元の円の直径をD(本稿ではこれを1とする)としたとき、$S=\frac{LD}{4}-\frac{a(D-2x)}{4}$となることから、これを代入して整理すると、$L^2=\mathrm{F}(x)$という次の形の式に変形される。

$$\mathrm{F}(x)=\frac{1}{113^2}\left(-\frac{9}{40}+\frac{6131089x}{120}+\frac{752638x^2}{45}+\frac{340127x^3}{30}-\frac{5966x^4}{3}+\frac{699904x^5}{45}\right)$$

弧長Lは$arccos\ (1-2x)$と表現されるので、$arccos^2(1-2x)$と$\mathrm{F}(x)$の差$\mathrm{G}(x)$を取ることで誤差を評価できる。$\mathrm{G}(x)$のグラフ 図1を作ると、$\mathrm{G}(x)=0\,(0\leqq x\leqq 0.5)$となる零点を6個確認できる。($x=\frac{1}{50},\frac{1}{10},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{9}{25},\frac{1}{2}$.以下、これらを小さい順に$x_1,\cdots\cdots,x_6$とする。)

これら零点を用いて$\mathrm{F}(x)$を構成する方法を前稿では明らかにした。すなわち、$\mathrm{F}(x)$の係数を$\frac{a_0}{113^2},\cdots\cdots\frac{a_5}{113^2}$とおき、これらから列ベクトル$\boldsymbol{a}=(a_0,\cdots\cdots,a_5)^t$を作り、各零点$x_i$から得られる$\{1,x_i,x_i^2,x_i^3,x_i^4,x_i^5\}$を各行とするファンデルモンド行列$A_6$を作る。このとき、次の式が成立していることが確認される。右辺のベクトル$\mathbf{y}$は$y_i=113^2\cdot\mathrm{F}(x_i)$から作った列ベクトルである。

$$A_6\boldsymbol{a}=\mathbf{y}$$

この式の成分をすべて書き下すと、下記のように表現される。

$$\begin{pmatrix}1&\frac{1}{50}&\left(\frac{1}{50}\right)^2&\left(\frac{1}{50}\right)^3&\left(\frac{1}{50}\right)^4&\left(\frac{1}{50}\right)^5\\1&\frac{1}{10}&\left(\frac{1}{10}\right)^2&\left(\frac{1}{10}\right)^3&\left(\frac{1}{10}\right)^4&\left(\frac{1}{10}\right)^5\\1&\frac{1}{5}&\left(\frac{1}{5}\right)^2&\left(\frac{1}{5}\right)^3&\left(\frac{1}{5}\right)^4&\left(\frac{1}{5}\right)^5\\1&\frac{1}{4}&\left(\frac{1}{4}\right)^2&\left(\frac{1}{4}\right)^3&\left(\frac{1}{4}\right)^4&\left(\frac{1}{4}\right)^5\\1&\frac{9}{25}&\left(\frac{9}{25}\right)^2&\left(\frac{9}{25}\right)^3&\left(\frac{9}{25}\right)^4&\left(\frac{9}{25}\right)^5\\1&\frac{1}{2}&\left(\frac{1}{2}\right)^2&\left(\frac{1}{2}\right)^3&\left(\frac{1}{2}\right)^4&\left(\frac{1}{2}\right)^5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{200860100457}{195312500}\\\frac{2974254163}{562500}\\\frac{686235249}{62500}\\\frac{126025}{9}\\\frac{4130907926451}{195312500}\\\frac{126025}{4}\end{pmatrix}$$

これを解くと、

$$a_0=-\frac{9}{40},\ a_1=\frac{6131089}{120},$$
$$a_2=\frac{752638}{45},\ a_3=\frac{340127}{30},$$
$$a_4=-\frac{5966}{3},a_5=\frac{699904}{45}$$

が得られる。(以下、この$a_0,\cdots\cdots,a_5$を近似分数と呼ぶことにする。)

すなわち、近似式$\mathrm{F}(x)$は6個の零点$(x_i,\mathrm{F}(x_i))$にもとづく5次の多項式補間によって得られる。なお、この連立方程式を用いて補間多項式を構成する発想自体は、関・建部以外の同時代の和算家、田中由真にも存在していたことを前稿では明らかにした。

この$\mathrm{F}(x)$を構成するには、最初に6個の零点$(x_1,\cdots\cdots,x_6)$に対応する弧長の自乗の値 $y_1',\cdots\cdots,y_6'$ が必要となる。これら y_i' の求め方として、関と建部が有していた技法は「環矩術」である。これは、弧を2等分、4等分、……、2^n等分して、そこにできる各弦の長さを三平方の定理で求めて総和を算出し、弧長に漸近させる技法である。各零点のデータx_iについて、その2^n等分に分割して得られる弦$c_{n,i}$の和として、弧長の自乗の近似値は$L_{n,i}{}^2=(2^n\cdot c_{n,i})^2$となる。ここで$c_{n,i}$は次の漸化式によって得られる。すなわち、初項を$c_{1,i}=\sqrt{x_i}$として、第$n$項は$c_{n,i}=\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-c_{n-1,i}^2}}}{\sqrt{2}}$となる。この環矩術は『研幾算法』第1問では明示的に記されていないものの、序文で術名が言及されていることから、関・建部はこれを用いていたと仮定してよいであろう。

環矩術を用いて得られるデータ$y_1',\cdots\cdots,y_6'$(以下、これを理論値とする)を筆者が小数点以下18 桁まで求めた値は、以下のようになる。なお、y_4' とy_6' は3分円と半円に相当し、円周率の近似分数から直接計算されるので分数表記のままとする。

$y_1'=0.080539096421348311$
$y_2'=0.414093677018186428$
$y_3'=0.859876421328657554$
$y_4'=\frac{355^2}{9\cdot 113^2}$
$y_5'=1.656374708072745713$
$y_6'=\frac{355^2}{4\cdot 113^2}$

ところが、素朴な予想に反してこれら理論値(x_i,y_i')から直接、近似式$\mathrm{F}(x)$は求められない。詳細に観察を行うと、環矩術による理論値y_i'の一部と、実際に近似式で用いられている数値$\mathrm{F}(x_i)$(以下、これを近似値とする)の間には差違がある。近似値と理論値を対比すると次のようになる。(両者の数値が一致しない最初の桁に下線を引く。)

$$\begin{aligned} y_1' &= 0.080539096\underline{6}4213\cdots\cdots \\ \mathrm{F}(x_1) &= 0.080539095\underline{8}054\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2' &= 0.414093\underline{6}7701\cdots\cdots \\ \mathrm{F}(x_2) &= 0.414093\underline{7}3924\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3' &= 0.859876\underline{4}2132\cdots\cdots \\ \mathrm{F}(x_3) &= 0.859876\underline{5}7482\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_5' &= 1.65637470\underline{8}0727\cdots\cdots \\ \mathrm{F}(x_5) &= 1.65637470\underline{3}0643\cdots\cdots \end{aligned}$$

これら２組の数値の間に微小な差が生じた理由を前稿では明らかにすることができず、今後の課題とした。本稿ではここから議論を再開し、$\mathrm{F}(x)$の近似分数と近似値が如何なるアルゴリズムによって導かれたか、仮説を提示してその再構成を試みる。

3. 弧長の近似式を導出する仮説について

本章ではあらためて、環矩術による理論値と$\mathrm{F}(x)$から得られる近似値の比較を行い、本稿が提示する仮説の概要を紹介する。

既に見たとおり、理論値y_i'と近似値$\mathrm{F}(x_i)$の差は非常に小さい。ところがこの微小な差であっても、理論値から近似式を構成し、その係数$\boldsymbol{b}=(b_0,\ \cdots\cdots,\ b_5)^{\mathrm{t}}$を求めると、$\mathrm{F}(x)$の近似分数とは全く異なり、非常に桁数の多い分数となる。以下は、小数点以下11桁まで算出した理論値による$A_6\boldsymbol{b}=113^2\cdot\boldsymbol{y}'$ の行列表記である。（比較のために、理論値の有理数表現は『研幾算法』の分母と同じ値に揃える。以下、$\mathrm{Q}(x_i)=113^2\cdot y_i'$とする。）

$$Q(x_1)=\frac{200860101993}{195312500},\qquad Q(x_2)=\frac{2974253716}{562500},$$
$$Q(x_3)=\frac{686235126}{62500},\qquad Q(x_5)=\frac{4130907938941}{195312500}$$

$$A_6\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q(x_1) \\ Q(x_2) \\ Q(x_3) \\ \dfrac{355^2}{9} \\ Q(x_5) \\ \dfrac{355^2}{4} \end{pmatrix}$$

これを解いて、以下を得る。

$$b_0=-\frac{557551333}{2446193750},$$

$$b_1=\frac{8998735507996471}{176125950000},$$

$$b_2=\frac{2945154686123077}{176125950000},$$

$$b_3=\frac{1961127738511}{172672500},$$

$$b_4=-\frac{3585742125059}{1761259500},$$

$$b_5=\frac{274620902323}{17612595}$$

この観察から簡単に予想できることであるが、『研幾算法』の小さな分母を持つ近似分数は、偶然の結果や何らかの計算間違いとして得られたものでないはずである。そこで、理論値より得られる分数$b_0,\ \cdots\cdots,\ b_5$に対して、何らかの変換操作が行われることで、近似式$\mathrm{F}(x)$の近似分数$a_0,\ \cdots\cdots,a_5$が得られたという推定が導かれる。[*6] 本稿で提示する仮説によれば、$\mathrm{F}(x)$の近似分数が一貫した方法論（アルゴリズム）によって導出できることを示す。

以下で紹介をする仮説は条件として、（Ⅰ）当時の和算家が有していた知識や計算法、アルゴリズムを用いて構成できること、さらに（Ⅱ）数値計算はそろばんと和算式の筆算によって処理できる範囲に留めること、を念頭に置いて構成する。これらは17世紀後半の江戸時代の歴史的文脈で議論をする以上、必要な条件となる。

仮説を用いた$\mathrm{F}(x)$の復元と再構成については次章で話題とし、ここではその方法論（アルゴリズム）の概略を提示する。

[1] ある理論値$\boldsymbol{y}'$より連立方程式$A_6\boldsymbol{a}'=113^2\cdot\boldsymbol{y}'$ を構成し、解$\boldsymbol{a}'$を求める。この解より得られる近似式を$\mathrm{F}_0(x)=a_0'+a_1'\,x+\cdots\cdots+a_5'\,x^5$とする。以後の仮説では、$a_0',\ \cdots\cdots,\ a_5'$を一度に変換するのではなく、$a_0'$から順番に変換を行う。

[2] 分数a_0'を近似分数a_0に変換する方法は、a_0'の分子に適当な自然数sを加減して約分することでa_0を導く。この自然数sが小さければ小さいほど、a_0と理論値で得られる分数a_0'との差が小さくなる。すなわち、近

*6　本文では詳説しないが、近似式$\mathrm{F}(x)$を得る操作のもう一つの可能性として、連立方程式の右辺に相当する理論値$\boldsymbol{y}'$に何らかの変換操作を行うという選択肢がある。しかし、実際に計算を試みると明らかとなるが、特定の理論値の組を出発点として、小さな値の分母を持つ近似分数を生成するのは非常に困難で、和算家にも可能な計算手順を筆者はいまだに構成できない。そこで理論値ではなく、左辺の列ベクトル（近似式の係数）を変換するという選択肢が残る。こちらの手順ならば17世紀当時の和算の知識で十分計算可能なアルゴリズムを構築でき、これが本文で説明する仮説となる。

似の精度が高くなる。

[3] 自然数sを次のように決定する。分数a_0'から整数部分を引き去った真分数を$\frac{q_0'}{p_0'}$とし、近似分数a_0の真分数部分を$\frac{t}{d}$とする。このdは分母p_0'の約数で$p_0'=md$とする。このように決めるとq_0'にsを加減した値をmの倍数mtとすることができて、不定方程式$q_0'\pm s=mt$が得られる。以下の本文ではこれを$s-mt=-q_0'$の形式に統一して表記する。

[4] この不定方程式を解いて整数解（s, t）を決定する。この解はパラメーター k（$k\in\mathrm{Z}$）を用いて$s=s_0+mk$, $t=t_0+k$の形（s_0は方程式を満たす最小の自然数）となるので、適当なkを選ぶことで、近似分数a_0の真分数部分$\frac{t}{d}$を構成する整数解（s, t）が確定する。

[5] 近似分数a_0を確定した後、a_1を求める。a_0'が定数a_0に変換されたことから、これと連動して、既に求めたa_1', ……, a_5'も変化を受ける。そこで$\mathrm{F}_1(x)=\frac{F_0(x)-a_0}{x}=a_1''+a_2''x+\cdots\cdots+a_5''x^4$とすることで、$\mathrm{F}_0(x)$を4次式$\mathrm{F}_1(x)$に置き換える。この$\mathrm{F}_1(x)$の係数$\boldsymbol{a}''$を決定するために、最初の理論値の6つの零点（$x_1$, ……, x_6）から1つ取り除いた5つの零点を$\mathrm{F}_1(x)$に代入して、連立方程式$A_5\boldsymbol{a}''=\boldsymbol{y}''$を解く。（$y_i''=\mathrm{F}_1(x_i)$とする。）

[6] a_1''を得た後、[2]～[4]と同様の操作を行ってa_1を確定する。

[7] a_2, a_3の決定もここまでと同様の操作を行う。以下、次の記号を用いる。連立方程式 $A_4\boldsymbol{a}^{(3)}=\boldsymbol{y}^{(3)}$, $A_3\boldsymbol{a}^{(4)}=\boldsymbol{y}^{(4)}$, 近似式

$$F_2(x)=\frac{F_1(x)-a_1}{x}=a_2{}^{(3)}+a_3{}^{(3)}x+a_4{}^{(3)}x^2+a_5{}^{(3)}x^3,\ F_3(x)=\frac{F_2(x)-a_2}{x}=a_3{}^{(4)}+a_4{}^{(4)}x+a_5{}^{(4)}x^2.$$

[8] a_4, a_5については、最後に残る2元連立方程式を解いて確定する。

以上が、$\mathrm{F}(x)$を再構成するための仮説の概要である。具体的な数値に基づいて、これを確認する作業を次章で行う。

4.『研幾算法』の近似式の復元について

本章では、前述した仮説に基づいて近似式$\mathrm{F}(x)$が実際に復元できることを示し、必要な補足説明を行う。以下、前章で示した手順の番号に沿って解説を行う。

[1] ある理論値$\boldsymbol{y}'$を環矩術によって導き、それを用いた連立方程式$A_6\boldsymbol{a}'=113^2\cdot\boldsymbol{y}'$を解いて$\boldsymbol{a}'$を得る。これより$\mathrm{F}_0(x)=a_0'+a_1'x+a_2'x^2+\cdots\cdots+a_5'x^5$を構成する。

ここでは、有効数字を11桁とした理論値y_1', y_2', y_3', y_5'を用意する。それらの分数表記をQ_1, Q_2, Q_3, Q_5とする。（以下の記号［w］は実数wの整数部分を意味するガウスの記号とする。）そこで、

$$Q_1=\frac{[y_1'\cdot 10^{11}]}{10^{11}}=\frac{8053909642}{10^{11}}$$

$$Q_2=\frac{[y_2'\cdot 10^{11}]}{10^{11}}=\frac{41409367701}{10^{12}}$$

$$Q_3=\frac{[y_3'\cdot 10^{11}]}{10^{11}}=\frac{85987642132}{10^{12}}$$

$$Q_5=\frac{[y_5'\cdot 10^{11}]}{10^{11}}=\frac{165637470807}{10^{11}}$$

が得られる。この4つの分数に$y_4'=\frac{355^2}{9\cdot 113^2}$と$y_6'=\frac{355^2}{4\cdot 113^2}$を補って列ベクトル$\boldsymbol{y}'$とする。そこで連立方程式 $A_6\boldsymbol{a}'=113^2\cdot\boldsymbol{y}'$ を構成して解くと次のa_0'を得る。

$$A_6\begin{pmatrix}a_0'\\a_1'\\a_2'\\a_3'\\a_4'\\a_5'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_1\cdot 113^2\\Q_2\cdot 113^2\\Q_3\cdot 113^2\\\frac{355^2}{9}\\Q_5\cdot 113^2\\\frac{355^2}{4}\end{pmatrix}$$

$$a_0'=-\frac{995509707119}{4368000000000}$$

[2]・[3] 最初に、$a_0'=\frac{q_0'}{p_0'}$とし、dを近似分数a_0の分母40として設定する。[*7] このとき分母は$p_0'=40m=4368000000000$であるので約数$m=109200000000$を得る。変換後に目標とする近似分数は$a_0=-\frac{9}{40}$である。

[4] 以上の準備に基づいて、次に解くべき不定方程式は

$s-109200000000\ t=995509707119$

となる。これより整数解（s, t）を求めると、

$s=12709707119+109200000000\ k$,

*7　ここではdを『研幾算法』が用いた値40として設定するが、一般に近似式を構成する目的であれば、dは他の約数でもよい。その場合にも、これ以後の操作を同様に進めることができて、$\mathrm{F}(x)$とは係数が異なる近似式が構成される。関・建部がdとして40を選択した理由は不明で、本稿の仮説でもその選択の理由は推測できない。以下a_1, ……, a_5を求める操作においても、同様に各dの値を選択した理由は不明である。ともあれ、特定の値としてdを選択することによって、近似分数を構成できる方法論の存在を示すことが、本稿の仮説の主眼となる。

$t=-9+k \quad (k \in \mathrm{Z})$

を得る。ここで $k=0$ を選択すれば $s=12709707119$, $t=-9$となることから、たしかに目標である$a_0=-\frac{9}{40}$が得られる。

［5］次にa_1を決定する。最初の手順として、$F_1(x)=\frac{F_0(x)-a_0}{x}$の係数$a_1''$, ……, a_5''を未知数とする5元連立方程式$A_5\boldsymbol{a}''=\boldsymbol{y}''$を構成して$a_1''$を解として導く。これに代入するデータは6個から1個を削除した5個となる。結論を先取りすると、最後にa_4とa_5の決定のために使う2元連立方程式にはx_4とx_6のデータが用いられるので、ここで削除されるデータは残りの4つのx_1, x_2, x_3, x_5の中から選ぶ1個となる。

計算を形式的に進めるならば、これら4個のデータのどれを選択したとしても、dを分母の約数として持つ限り、不定方程式の解のパラメーターkの値を適当に選択することで『研幾算法』の近似分数を構成することができる。但し、kの絶対値｜k｜ が大きくなると近似操作としての意義は小さくなるので、これ以降の操作の組合せをすべて確認し、できる限り｜k｜が小さくなる組合せを選ぶ。その組合せは、次のようにして決定される。

最初に削除すべきデータを決定した後、引き続くa_2, a_3を決定する操作でも、データの個数を順次1個ずつ減らした連立方程式が構成される。その削除するデータの順番に応じて、各段階でのkの値も変化する。データを選択する順番に対応する k と各｜k｜の和を一覧にした表が、下記の表1である。

例えばx_1, x_3, x_2の順番にデータを削除したとすると、「削除の順番」の1からx_1、2からx_3、3からx_2を選択する。これに対応する「kの値」をそれぞれ $k=-17$, $k=10$, $k=0$，(各｜k｜の和は27)とすることで目標の分数の分子tを得る。理論値の選択によっては d が分母の約数とならない場合が生じる。このときは近似式の復元が成立しないので、そこで操作を止める。例えば、有効数字11桁で計算した場合、1番最初にx_2を削除しようとすると、分母が120で割りきれないのでx_2を1番目に削除する可能性を棄却する。

さて、表1からx_3, x_2, x_1の順番で削除をする組合せを選ぶと全ての｜k｜が2以下となり、｜k｜の和が最小値3となる最適の組合せとなる。すなわち、a_1を決定する際にはx_3に対応するデータを削除して連立方程式を構成する場合が最適となる。

そこでx_3を除外したデータを$\mathrm{F}_1(x)$に代入して得られる連立方程式$A_5\boldsymbol{a}''=\boldsymbol{y}''$ は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{50} & \left(\frac{1}{50}\right)^2 & \left(\frac{1}{50}\right)^3 & \left(\frac{1}{50}\right)^4 \\ 1 & \frac{1}{10} & \left(\frac{1}{10}\right)^2 & \left(\frac{1}{10}\right)^3 & \left(\frac{1}{10}\right)^4 \\ 1 & \frac{1}{4} & \left(\frac{1}{4}\right)^2 & \left(\frac{1}{4}\right)^3 & \left(\frac{1}{4}\right)^4 \\ 1 & \frac{9}{25} & \left(\frac{9}{25}\right)^2 & \left(\frac{9}{25}\right)^3 & \left(\frac{9}{25}\right)^4 \\ 1 & \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{2}\right)^3 & \left(\frac{1}{2}\right)^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1'' \\ a_2'' \\ a_3'' \\ a_4'' \\ a_5'' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 50\left(Q_1+\frac{9}{40}\right) \\ 10\left(Q_2+\frac{9}{40}\right) \\ 4\left(\frac{355^2}{9}+\frac{9}{40}\right) \\ \frac{25}{9}\left(Q_5+\frac{9}{40}\right) \\ 2\left(\frac{355^2}{4}+\frac{9}{40}\right) \end{pmatrix} \quad \left[= \begin{pmatrix} Q_1'' \\ Q_2'' \\ Q_4'' \\ Q_5'' \\ Q_6'' \end{pmatrix} \right]$$

［6］この連立方程式を解いて

$a_1''=\frac{22317166705900889}{436800000000}$を得る。これより整数部分51092を減じて$\frac{q_1''}{p_1''}=\frac{181105900889}{436800000000}$とする。$\mathrm{F}(x)$の近似分数$a_1$についても同様に整数部分51092を減じると

表1　削除するデータの順番とkの値

削除の順番 1	削除の順番 2	削除の順番 3	**kの値** 1	**kの値** 2	**kの値** 3	各｜k｜の和
x_1	x_2	x_3	−17	−4	0	21
		x_5			4	25
	x_3	x_2		10	0	27
		x_5			−11	38
	x_5	x_2		−4	1	22
		x_3			−11	32
x_2	x_1	x_3	−3	−4	0	7
		x_5			1	8
	x_3	x_1		−2	0	5
		x_5			−4	9
	x_5	x_1		−4	1	8
		x_3			−4	11

削除の順番 1	削除の順番 2	削除の順番 3	**kの値** 1	**kの値** 2	**kの値** 3	各｜k｜の和
$\boldsymbol{x_3}$	x_1	x_2	**−1**	10	0	11
		x_5			−11	22
	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_1}$		**−2**	**0**	**3**
		x_5			−4	7
	x_5	x_1		−4	−11	16
		x_2			−4	9
x_5	x_1	x_2	0	−4	1	5
		x_3			−11	15
	x_2	x_1		−4	1	5
		x_3			−4	8
	x_3	x_1		−4	−11	15
		x_2			−4	8

$\frac{t}{d}=\frac{49}{120}$ となり、これが変換後の目標の分数となる。

以下の操作はa_0と同様である。a_1の分母から$d=120$として次の不定方程式を解く。

$s-3640000000\ t=-181105900889$

これより$t=50+k$を得る。そこで$k=-1$とすると$t=49$となり、結果として、$\frac{t}{d}=\frac{49}{120}$すなわち、$a_1=\frac{6131089}{120}$が得られる。

[7] 以下、同様の操作によってa_2、a_3を順次決定する。決定のために必要な情報を列挙すると次のようになる。

［$\boldsymbol{a}_2$の決定］変換した近似式：$F_2(x)=\frac{F_1(x)-a_1}{x}=a_2{}^{(3)}+a_3{}^{(3)}x+a_4{}^{(3)}x^2+a_5{}^{(3)}x^3$

削除するデータ：$(x_2, \mathrm{F}_1(x_2))$

４元連立方程式：$A_4\boldsymbol{a}^{(3)}=\boldsymbol{y}^{(3)}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{50} & \left(\frac{1}{50}\right)^2 & \left(\frac{1}{50}\right)^3 \\ 1 & \frac{1}{4} & \left(\frac{1}{4}\right)^2 & \left(\frac{1}{4}\right)^3 \\ 1 & \frac{9}{25} & \left(\frac{9}{25}\right)^2 & \left(\frac{9}{25}\right)^3 \\ 1 & \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{2}\right)^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2^{(3)} \\ a_3^{(3)} \\ a_4^{(3)} \\ a_5^{(3)} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 50\left(Q_1^{"}-\frac{6131089}{120}\right) \\ 4\left(Q_4^{"}-\frac{6131089}{120}\right) \\ \frac{25}{9}\left(Q_5^{"}-\frac{6131089}{120}\right) \\ 2\left(Q_6^{"}-\frac{6131089}{120}\right) \end{pmatrix}\left[=\begin{pmatrix} Q_1^{(3)} \\ Q_4^{(3)} \\ Q_5^{(3)} \\ Q_6^{(3)} \end{pmatrix}\right]$$

解：$a_2^{(3)}=\frac{809237526929}{48384000}$

$a_2{}^{(3)}$の真分数部分：$\frac{q_2^{(3)}}{p_2^{(3)}}=\frac{15126929}{48384000}$

目標とする近似分数の真分数：$\frac{t}{d}=\frac{13}{45}$

不定方程式：

$s-1075200\ t=-15126929$

整数解t：$t=15+k$

パラメーター：$k=-2$

これより $a_2=\frac{752638}{45}$ が決定される。

［$\boldsymbol{a}_3$の決定］変換した近似式：

$F_3(x)=\frac{F_2(x)-a_2}{x}=a_3{}^{(4)}+a_4{}^{(4)}x+a_5{}^{(4)}x^2$

削除するデータ：$(x_1, \mathrm{F}_2(x_1))$

３元連立方程式：$A_3\boldsymbol{a}^{(4)}=\boldsymbol{y}^{(4)}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ 1 & \frac{9}{25} & \left(\frac{9}{25}\right)^2 \\ 1 & \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_3^{(4)} \\ a_4^{(4)} \\ a_5^{(4)} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 4\left(Q_4^{(3)}-\frac{752638}{45}\right) \\ \frac{25}{9}\left(Q_5^{(3)}-\frac{752638}{45}\right) \\ 2\left(Q_6^{(3)}-\frac{752638}{45}\right) \end{pmatrix}\left[=\begin{pmatrix} Q_4^{(4)} \\ Q_5^{(4)} \\ Q_6^{(4)} \end{pmatrix}\right]$$

解：$a_3^{(4)}=\frac{197480263529}{17418240}$

$a_3{}^{(4)}$の真分数部分：$\frac{q_3^{(4)}}{p_3^{(4)}}=\frac{9676649}{17418240}$

目標とする近似分数の真分数：$\frac{t}{d}=\frac{17}{30}$

不定方程式：$s-580608\ t=-9676649$

整数解t：$t=17+k$

パラメーター：$k=0$

これより$a_3=\frac{340127}{30}$が決定される。

[8] 以上のアルゴリズムによって、$\mathrm{F}(x)$の近似分数の内a_0からa_3までを一貫した方法論に基づいて構成できた。最後にa_4とa_5は、x_4とx_6に基づく次の２元連立方程式を解くことで得られる。

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\left(Q_4^{(4)}-\frac{340127}{30}\right) \\ 2\left(Q_6^{(4)}-\frac{340127}{30}\right) \end{pmatrix}$$

$$a_4=-\frac{5966}{3},\ a_5=\frac{699904}{45}$$

ここまで求めたa_0, ……, a_5を用いて、最初に設定した行列A_6との積を取ると、$A_6\boldsymbol{a}=\boldsymbol{y}$の関係が成立し、『研幾算法』が提示する近似値$\mathrm{F}(x_1)$, ……, $\mathrm{F}(x_6)$も得られる。以上の操作からa_0, ……, a_5を求めることができて、$\mathrm{F}(x)$が復元された。

次に、この仮説で用いられている技法である不定方程式の解法を、関・建部が熟知していたことを確認する。近似分数を求める際に用いられた $s-mt=q$ の形の不定方程式の解法は、合同式 $s\equiv q\ (mod\ m)$ を解くことに等しい。関･建部は既に『研幾算法』第49問で、以下の合同式を連立させて解を導く操作を実践している。

$979\ x\ \equiv\ 10494\ (mod\ 11200)$

$91371\ x\ \equiv\ 1031\ (mod\ 248057)$

$1969951\ x\ \equiv\ 2595474\ (mod\ 7715273)$

$60300334\ x\ \equiv\ 26425643\ (mod\ 142864157)$

$x=7070986$

この連立合同式を解く技法が「翦管術」である。[*8]これを前提とするならば、本稿の仮説で用いた不定方程式の解法を関・建部は熟知していたはずである。

以上が、本稿で提示する仮説の補足説明である。次章では、この仮説が妥当ならば関・建部の数学についてどのような歴史的評価が新たに導かれるかを検討する。

5. 『研幾算法』による近似式の歴史的な位置付け

本章では、『研幾算法』が提示する近似式を和算の歴史の中でどのように評価できるかをまとめ、さらに関孝和の数学全体の中での位置付けを検討する。

最初に、この仮説で用いられている方法論を現代数学の用語で言い換えることで議論の整理をしておこう。

近似式F(x)は、環矩術で得られた理論値を近似操作によって改変し、その新しいデータ群(理論値の近傍)を通過する近似曲線として構成したものである。この近似多項式と元の関数($arccos^2(1-2x)$)との間の誤差に着目し、閉区間[0, 0.5]での最大誤差を最小にすることを目標としてF(x)を構成するならば、これは現代数学の最良近似多項式(minimax approximative polynomial)となる。現代の最良近似多項式と『研幾算法』のF(x)が決定的に異なる点は、これを作った関や建部の意識に「誤差」の概念が無かったことであろう。(そもそも17世紀後半において、世界のどこを探しても誤差論に相当する理論はなかったことは注意しておきたい。)

なお$arccos^2(1-2x)$ に関する『研幾算法』と同じ6個の零点を用いた5次の最良近似多項式K(x)は、次の式になる。[*9]

$$
\begin{aligned}
\mathrm{K}(x) &= -0.0000175585+4.00128\,x \\
&\quad +1.30989x^2+0.887497x^3-0.154597x^4 \\
&\quad +1.21696\,x^5
\end{aligned}
$$

F(x)とK(x)の差S(x)は以下のグラフ図2のようにごくわずかであり、関・建部による厳密な定義の欠落を不問にすれば『研幾算法』による近似式は、最良近似多項式に充分に近接していたと見なしてよいであろう。

このように誤差概念を欠いていた『研幾算法』の近似式F(x)であるが、そのことを差し引いても、当時の和算には類例の無いアルゴリズムが採用されたと評価できる。すなわち、初期条件として得られた理論値を近似操作によって変更し、新しい数学的対象(近似式)を生成するというプロセスを関・建部は生み出したことになる。この発想は和算史において『研幾算法』以前にも以後にも現れなかったものである。もしこの時点で彼らから誤差の概念が生まれていたならば、新しい和算の一分野が開拓された可能性を夢想することもできようが、結局、関自身はこれ以後の成果をまとめた『括要算法』において、全く異なる方法論(後述)で弓形の求積公式を構成し、『研幾算法』で求めたF(x)を棄却することになる。

次に、『研幾算法』の近似式の構成とその復元法に関する仮説を考慮することによって、従来の関孝和の数学に対する評価がどのような変更を受けることになるのか。この点について吟味する。

本稿で話題とした弓形の求積に関する問題は、当時の和算家が有していた算術の知識を総動員して解決を試みたと言うべきものとなっている。この1問のためにどの

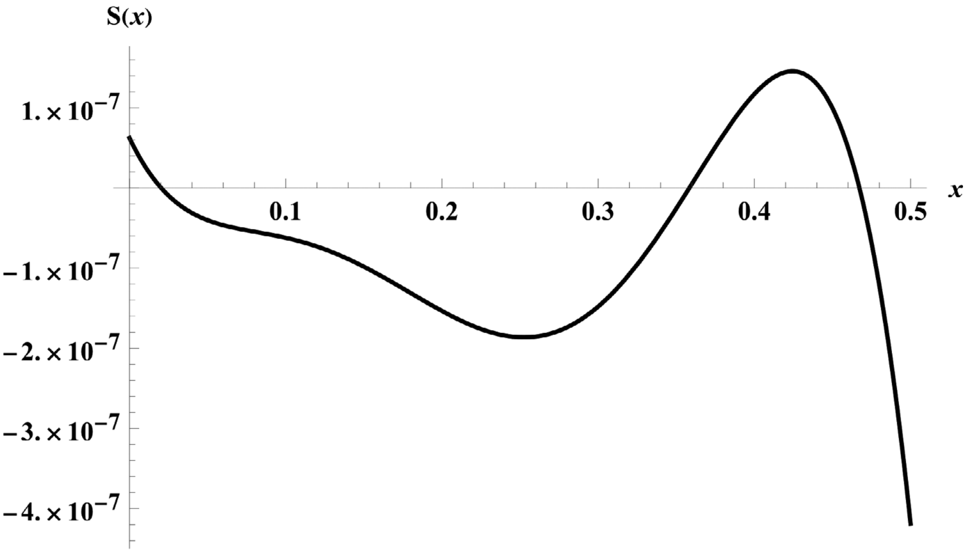

図2　S(x)=K(x)−F(x) (0≦x≦0.5)

*8　文献[2]、第38丁裏−第39丁裏。
*9　Mathematica ver.12.3により算出した。

ような技法、算術が用いられていたかを列挙すると、次のようになる。

- 多項式補間（前稿での結論）
- １次の合同式と同等な不定方程式の解法（本稿による仮説）
- 零約術（分数の近似法、円周率355/113はこれによって求められた）
- 環矩術（三平方の定理と開平計算）

以上を一覧して気が付くことがある。それは、関孝和没後に刊行された『括要算法』全４巻（1712）の内容が、弓形の求積問題に使われたこれらの技法とほぼ一致する、あるいは関連性の強いことである。（『研幾算法』以後、さらに発展した技法も含まれている。）その対比を示すと次のようになる。

- 第１巻　招差法（多項式補間）、ベルヌーイ数の提示、他
- 第２巻　約数、倍数などの整数に関わる問題、零約術、翦管術
- 第３巻　角術（正多角形に関する問題）
- 第４巻　円理（環矩術と零約術による円周率算出、弓形の弧長、球の体積）

これを見ると、第４巻はまさに円や弓形に関する求積（円理と称する分野）が主題となるので『研幾算法』第１問の内容と一致しているのは当然として、第１巻は補間法を扱うことで『研幾算法』第１問の中核をなす技法と関わっている。さらに第２巻には零約術と翦管術や約数の問題が収録されている。一見すると無関係に見えるのが第３巻の角術であるが、これもまた円周率を求めるために必要な環矩術の準備的理論と見なすことができる。すなわち、環矩術では円に内接する正多角形の周長の計算が本質をなしているので、角術は円理計算に必須の要素となる。以上をまとめると、『研幾算法』第１問に必要な算術の技法が発展的に再編集されたものが『括要算法』だという見方も可能となる。本稿で提示した近似式F(x)の構成法の仮説をさらに追加するならば、不定方程式（合同式）の解法が第２巻に収録されているので、『括要算法』がさらに円理の問題の解法の完成に向けて首尾一貫した内容となる。このように『括要算法』に対する新しい歴史的評価に向けた展望が広がるのである。

さて、『研幾算法』で用いられた多項式補間をはじめとするF(x)の構成技法は、1683年時点の成果である。関・建部はその後も研究を進め、前述した『括要算法』第４巻では改良した弓形の弧長の近似式（下記のH(x)）を提示している。従来、このH(x)は多項式補間ではなく、ニュートン補間として説明されてきた。[*10]

$$\mathrm{H}(x) = \frac{1}{1276900(1-x)^5}\ (5107600x$$
$$-23835413x^2 + 43470240x^3$$
$$-37997429x^4 + 15047062x^5$$
$$-1501025x^6 - 281290x^7)$$

近似式H(x)は、F(x)よりも格段に近似の精度を高めている。２つの式の精度（$\mathrm{D}_1(x)$と$\mathrm{D}_2(x)$）を同じグラフの中で対比すると次の図３となる。

『括要算法』の近似式を現代的に再構成すると、データと係数の関係はファンデルモンド行列ではなく、下三

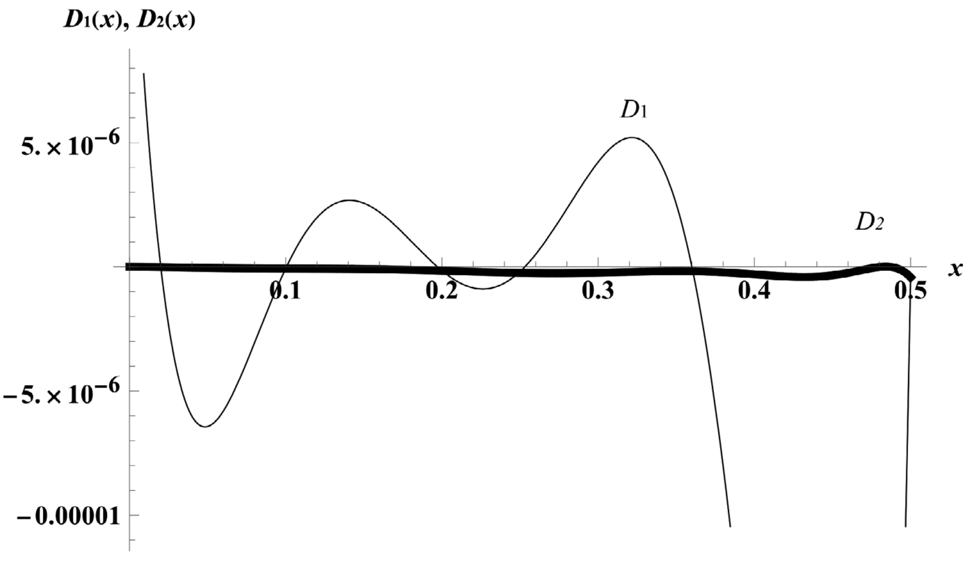

図３　$\mathrm{D}_1(x) = arccos^2(1-2x) - \mathrm{F}(x)$と$\mathrm{D}_2(x) = arccos^2(1-2x) - \mathrm{H}(x)$の対比

*10　文献[3]では関の近似式H(x)のことを指して「要するにその考はニュートンの補間公式の考と同一であって」と評価する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & \dfrac{(x_2-x_1)x_2}{1-x_2} & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & \dfrac{(x_3-x_1)x_3}{1-x_3} & \dfrac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)x_3}{(1-x_3)^2} & 0 \\ 1 & x_4 & \dfrac{(x_4-x_1)x_4}{1-x_4} & \dfrac{(x_4-x_1)(x_4-x_2)x_4}{(1-x_4)^2} & \dfrac{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)x_4}{(1-x_4)^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

図4　$x_0=0, x_1, \cdots\cdots, x_4$のデータとH($x$)の係数の関係を示す行列表現

角行列の形で表現される。(上に掲げた行列表現 図4は、H(x)の構成から一部データを抽出して模式的に示したものである。)『括要算法』では下三角行列を採用していることから、データをn個から$n+1$個に追加しても、近似式を得るために必要となる計算の量は『研幾算法』の場合と比較して非常に小さくなる。『研幾算法』の場合はデータを1個追加するたびに、行列の全行・全列の計算をやり直す必要があるが、『括要算法』では新たに1個増える係数に対応する計算のみを行えばよい。このように見ると、『括要算法』の近似式は『研幾算法』のものから計算量を大幅に省略し、さらにその精度をも飛躍的に高めたことになる。

6. まとめと今後の課題

本稿で提示した仮説と、関連する議論をまとめると次のようになる。

- (仮説)『研幾算法』の弓形の弧長を求める近似式はファンデルモンド行列を用いた多項式補間によって与えられるが、その係数は環矩術による理論値から得た係数分数に変換操作を施すことによって導くことが可能である。
- (仮説)係数分数の変換操作は、分子に適当な自然数を加減して約分をすることで得られる。その自然数の決定には2元1次不定方程式の解法が用いられる。
- (仮説)係数を1つ決定するごとに、1行1列分を減じたファンデルモンド行列を構成し直して、同様の変換操作を繰り返す。
- 関孝和の遺著『括要算法』全4巻には、円理問題の解法に必要な技法が集成されており、『研幾算法』以後の研究成果をも取り込んでいるという解釈も成り立つことを示した。
- 『括要算法』の弧長を求める近似式はファンデルモンド行列に由来する多項式補間ではなく、下三角行列に由来するニュートン補間を用いた有理関数によって構成されている。その精度は『研幾算法』の近似式を遙かに上回る。

最後に、今後の課題を挙げておきたい。本稿では最後に『括要算法』の近似式H(x)を紹介したが、この近似関数は因数$(1-x)^5$を分母に持つ有理関数であった。『研幾算法』の多項式近似から、どのような発想の飛躍が生じて有理関数近似に関はたどり着いたのか。この点については、いまだ確たる仮説は得られていないので、今後の課題とする。

文献

[1] 佐藤賢一：建部賢弘『研幾算法』による弓形の弧長の導出式の復元について，電気通信大学紀要，30-1, pp. 1–10(2018).
[2] 建部賢弘：研幾算法，1683；本稿では日本学士院本と九州大学所蔵本を参照した
[3] 日本学士院編：明治前日本数学史 第2巻，岩波書店，1956, p.188