

精度保証による Lyapunov 関数の構成とその拡張

平成 29 年 3 月 2 日

情報数理工学コース

学籍番号 1531098

三宅 智大

主任指導教員 山本 野人

指導教員 小山大介

目次

1	はじめに	2
2	精度保証付き数値計算の技法	4
2.1	区間演算	4
2.2	Dependency problem と Wrapping Effect	5
2.3	平均値形式	5
3	Lyapunov 関数	6
3.1	連続力学系の Lyapunov 関数	6
3.2	Lyapunov 候補関数となる 2 次形式の導出	7
3.3	$L(x)$ の妥当性	8
3.4	Lyapunov 関数の定義域の検証	10
4	Radial Basis Function(RBF) による近似解の構成	12
4.1	時間微分に対する RBF	12
4.2	Wendland 関数	14
5	RBF による Lyapunov 関数の構成	16
5.1	構成手順	16
5.2	平均値形式の適用	18
6	数値例	19
6.1	二次形式の Lyapunov 関数	19
6.2	RBF による Lyapunov 関数	23
6.2.1	$\mathbf{R}(x)$	24
6.2.2	c	27
6.2.3	X_N	29
6.2.4	定義域の拡張	31
7	まとめ	37
8	今後の展望	37

1 はじめに

連続力学系における Lyapunov 関数の構成および定義域の検証に関する手法に対する考察と提案を行う。Lyapunov 関数は位相空間上の点の位置で決まるスカラー値関数であり、力学系に従って点が動く際にその値が減少するという性質を持つものである。その性質から力学系の解の解析の強力なツールである。これの構成法はいくつか提案されている。その中で精度保証を適用しているものを次に上げる。

手法 1 として区間演算に基づく精度保証法を用いた Lyapunov 関数の構成法が存在する。これについては、松江・樋脇・山本による方法 [4] が知られている。この手法では Lyapunov 関数を平衡点におけるヤコビ行列の固有値より構成し、定義域の検証を行うものである。この手法は平衡点が漸近安定な場合と saddle 型の場合のどちらにも対応している。しかしこれは Lyapunov 関数の形が二次形式に限定された手法であり、また適用できる範囲は平衡点の比較的小さな近傍に限られる、という制約がある。

手法 2 として [5][6] で提案されている Radial Basis Function(RBF) と Continuous Piecewise Affine(CPA) 法を組み合わせたものがある。こちらは上記の手法 1 に対して平衡点からより遠い点にも適用できる手法である。ただし、これらは漸近安定となる平衡点に対する Lyapunov 関数のみを扱っていて、saddle 型の平衡点は考慮していない。

本論文では、手法 1 [4] が平衡点が漸近安定な場合も saddle 型の場合も統一的に扱える手法であることに注目して、[5][6] で用いられた RBF(Radial Basis Function) と [4] で用いられている区間演算による精度保証を組み合わせた手法 3 を提案する。これにより平衡点の種類にかかわらず平衡点から遠い点における Lyapunov 関数を構成できることが期待される。

なお、手法 2 [6] は数学的に厳密な Lyapunov 関数を与えているが、こちらは RBF によって構築した Lyapunov 関数の候補に対し CPA による補間を行った後、不等式評価によって精度保証を行っている。この CPA 補間の際に三角形分割を行う必要があるが、これに対して今回提案する手法 3 では区間演算を用いてより直接的な精度保証を行うため、三角形分割の必要はない。そのため前準備として必要なことは計算機に区間演算による精度保証を行える環境を整えるだけなので導入は容易である。また、区間演算の特徴として誤差の様相を直感的に捉えることができるため、それを Lyapunov 関数の構成失敗時の原因究明や構成効率化を考察する際に役立てることができる。もう 1 つの手法 3 の利点として、手法 2 [6] では不等式評価を行うために RBF によって Lyapunov 関数の候補を構

成する際に与える偏微分方程式の形を限定しているが、今回の手法3では比較的限定の度合いが低い。

本論文の構成は、まず精度保証に関する基本的な技法を解説した後、手法1およびRBFの説明を行う。次にこれらを組み合わせた手法3を説明し、実際において与える偏微分方程式の形やRBF構成時の各種パラメータが区間演算による精度保証にどのような影響を与えるかを数値例を交えて検証する。

2 精度保証付き数値計算の技法

ここでは精度保証付き数値計算における基本的な技法を文献 [1] に基づいて紹介する。

2.1 区間演算

区間演算は現在の精度保証付き数値計算において非常に重要な技法である。

実数の区間 $[a, b]$ とは次のような \mathbf{R}^1 (実数) の閉じた集合である。

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}.$$

2つの区間 $X = [a, b], Y = [c, d]$ に対し、記号*を+, -, \cdot , /の何れかとするとき、二項演算「*」を次で定義する。

$$X * Y = \{x * y | x \in X, y \in Y\}. \quad (2.1)$$

ただし、*が/の場合はYが0を含まないものとする。(2.1)で定義される実数の集合はまた区間となり、区間全体の集合を IR と書くとき、 IR は演算*に関して閉じている。実際に (2.1) は次の形に表現できる。

$$X + Y = [a + c, b + d],$$

$$X - Y = [a - d, b - c],$$

$$X \cdot Y = [x, y].$$

ここで $x = \min\{ac, ad, bc, bd\}, y = \max\{ac, ad, bc, bd\}$. また

$$X/Y = [a, b] \cdot [1/d, 1/c].$$

また区間演算に関しては分配律が成り立たず、成り立つのは以下の半分配律である。

$A, B, C \in IR$ に対し

$$A(B + C) \subset AB + AC. \quad (2.2)$$

また、成分が区間であるようなベクトルや行列を区間ベクトル、区間行列と言い、これに関しては積に関する結合律が成り立たない。なお実際

の計算機での計算では有限桁ゆえの丸め誤差が生じるので、丸め方向制御により演算結果が必ず含まれるような区間を取る。

区間値の表現方法として、上限下限をそのまま $[a, b]$ と表記するもの他に中心半径形式がある。

$$\langle \hat{x}, r \rangle = \{x | \hat{x} - r \leq x \leq \hat{x} + r\}$$

場合によってはこちらの表記のほうが使いやすいことがある。

2.2 Dependency problem と Wrapping Effect

区間演算において区間値の過大評価を起こす問題が大きく2つある。

ひとつは Dependency problem である。これは区間値に関する分配則が成立しないことに起因する区間拡大であり、特に区間値に対する非線型関数の包含ではしばしば顕著にみられる。これを軽減する伝統的な手法に、後述の平均値形式およびそのバリエーションがある。

もうひとつは Wrapping Effect(W.E.) と呼ばれる現象である。これは、区間ベクトルと行列の掛け算によって区間値ベクトルが歪み・回転作用を受けてしまい、その値を再び区間値として区間包囲する際に生じる余計な区間拡大である。この区間拡大は、行列ベクトル積の反復により指数関数的に増大し、区間爆発を引き起こすこともある。

2.3 平均値形式

区間ベクトル $[u]$ について関数 g の値域 $g([u]) = \{g(u) | u \in [u]\}$ を包含する区間を $[g([u])]$ と書く。このような区間の一つとして次式の右辺で得られるものが考えられる。

$$g([u]) \subset g(\hat{u}) + [g'([u])]([u] - \hat{u}), \quad \hat{u} \in [u] \quad (2.3)$$

\hat{u} は $[u]$ に属する任意のベクトルとすることができるが、通常はその中心ベクトルを取る。この (2.3) 式右辺の区間包囲を $g([u])$ の \hat{u} における「平均値形式」という。これにより $[u]$ に関する一次項をまとめることができ、Dependency problem を抑えることができる。

3 Lyapunov 関数

Lyapunov 関数はその性質から力学系の解の挙動の解析に使われるツールとなる。連続力学系と離散力学系どちらに対しても定義することができるが、ここでは連続力学系を扱う。

3.1 連続力学系の Lyapunov 関数

ここでは連続力学系における Lyapunov 関数の構成法を [4] に基づいて説明する。扱う対象は自励系連立常微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} &\in D \subset \mathbf{R}^n \\ \mathbf{f} : D &\rightarrow \mathbf{R}^n\end{aligned}$$

によって記述される連続力学系とする。 $D \subset \mathbf{R}^n$ は閉集合で、 $\mathbf{f} \in [C^1(D)]$ である。任意の $\mathbf{x} \in D$ を初期ベクトルとする解 $\mathbf{x}(t)$ が $-\infty < t < \infty$ で存在することを仮定すると、 $\mathbf{x}(t)$ は \mathbf{x}_0 を始点とする解軌道 $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ と表すことができる。

ここで、任意の $\mathbf{x}_0 \in D$ について

$$\varphi(t, \mathbf{x}_0) \in D, \quad -\infty < t < \infty,$$

となるとき、 $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ は D において連続力学系をなす。自励系のため解軌道は初期点にのみ依存し、任意の $t_1 \in \mathbf{R}$ に対して、

$$\mathbf{x}_1 = \varphi(t_1, \mathbf{x}_0)$$

としたとき、任意の $t \in \mathbf{R}$ で

$$\varphi(t, \mathbf{x}_0) = \varphi(t - t_1, \mathbf{x}_1)$$

が成り立つ。また、相異なる2点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ から出発した解軌道は、その2つが同一直線上の点でない限り交わることはない。

$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ となる点 \mathbf{x}^* は平衡点という。なお平衡点は双曲型平衡点に限定する。双曲型平衡点とは、平衡点におけるヤコビ行列 $D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ の固有値の実部が0にならないものである。双曲型平衡点には時間 ∞ で収束

する漸近安定なもの、発散する不安定なもの、不安定収束の方向と発散の方向の両方を持つ saddle 型平衡点（鞍点）が存在する。

Lyapunov 関数とは平衡点 \mathbf{x}^* の近傍で定義される関数であり、領域 $D_L \subset \mathbf{R}^n$ を定義域とすると、

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}^*) &= 0, \\ L(\mathbf{x}) &> 0, \forall \mathbf{x} \in D_L / \{\mathbf{x}^*\} \end{aligned}$$

かつ

$$\frac{dL}{dt}(\mathbf{x}) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) < 0, \forall \mathbf{x} \in D_L / \{\mathbf{x}^*\}$$

を満たす関数 L である。これにより微分方程式の解は L の等位面を通過するように動く。

この Lyapunov 関数の定義は平衡点が漸近安定なものに限るという条件がある。そこで [4] ではこれを拡張し、不安定な平衡点に対しても適用できる Lyapunov 関数を

$$L(\mathbf{x}^*) = 0,$$

かつ

$$\frac{dL}{dt}(\mathbf{x}) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) < 0, \forall \mathbf{x} \in D_L / \{\mathbf{x}^*\}$$

と定義している。これを拡張 Lyapunov 関数と定義し、本論文ではこれを Lyapunov 関数として扱う。

なお、 $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \langle \nabla L, f(\mathbf{x}) \rangle$ と表記する。これは ∇L と $f(\mathbf{x})$ の内積を表す。

3.2 Lyapunov 候補関数となる 2 次形式の導出

平衡点の近くでは二次形式の Lyapunov 関数が存在することが知られている。Lyapunov 関数の候補関数として、次の二次形式を定める。

$$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

実対称行列 Y は平衡点における f のヤコビ行列 $Df(\mathbf{x}^*)$ の固有値より構成する。

1. 平衡点 \mathbf{x}^* における \mathbf{f} のヤコビ行列 $Df(\mathbf{x}^*)$ を対角化する。すなわち、 Λ を $Df(\mathbf{x}^*)$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ を並べた対角行列、 X を対応する固有ベクトルを並べた正則行列として、

$$\Lambda = X^{-1}Df(\mathbf{x}^*)X.$$

これらの算定には通常の浮動小数点演算を用いればよい。

2. 行列 I^* を、ベクトル (i_1, i_2, \dots, i_m) を対角成分とする対角行列とする。 i_k は以下のように設定する。

$$i_k = \begin{cases} 1, & \text{if } \operatorname{Re}(\lambda_k) < 0, \\ -1 & \text{if } \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0, \end{cases}$$

なお、双曲型の仮定から $\operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$ とはならないことに注意。

3. 実対称行列 Y を以下のように算定する

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= X^{-H}I^*X^{-1} \\ Y &= \operatorname{Re}(\hat{Y}) \end{aligned}$$

ただし、 X^{-H} は行列 X の共役転置の逆行列である。この算定も浮動小数点演算を用いてよい。

4. Lyapunov 関数となる 2 次形式として、次のものを定める。

$$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

ただし、これを精度保証計算で扱う場合には、 Y の対称性を確保するために、 $Y_{ij} = Y_{ji}$ とおく操作を行う必要がある。

3.3 $L(x)$ の妥当性

ここでは、上で導いた $L(x)$ が平衡点を含む領域で Lyapunov 関数の要件を満たすための十分条件を導き、また平衡点の十分小さな近傍ではこの条件を満たしていることを示す。

解軌道 $\mathbf{x}(t)$ を引数に代入して $L(\mathbf{x}(t))$ を t で微分すると、

$$\frac{d}{dt}L(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T Y(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

ここで

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))$$

を考える。

$$\frac{d}{ds}\mathbf{g} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

および $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ となることから、

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \int_0^1 D\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))ds(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

を得る。ただし $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ は \mathbf{f} の \mathbf{x} におけるヤコビ行列である。これより、 $L(\mathbf{x}(t))$ の t 微分は、実二次形式

$$\frac{d}{dt}L(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T \int_0^1 (D\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))^T Y + Y D\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)))ds(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

で表されることになる。

いま、 $\mathbf{z} = \mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$ とおき、実対称行列 $A(\mathbf{z})$ を

$$A(\mathbf{z}) = D\mathbf{f}(\mathbf{z})^T Y + Y D\mathbf{f}(\mathbf{z})$$

で定める。 \mathbf{x}^* と \mathbf{x} を結ぶ線分上の任意の点 \mathbf{z} について $A(\mathbf{z})$ が負定値であれば $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ に対して $\frac{d}{dt}L(\mathbf{x}) < 0$ となる。

以上を踏まえると、平衡点 \mathbf{x}^* に関する星型領域 $D_L \subset \mathbf{R}^n$, すなわち

- $\mathbf{x}^* \in D_L$
- $\mathbf{x} \in D_L$ に対し任意の $0 \leq s \leq 1$ について $\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \in D_L$

をみたす領域においては、任意の $\mathbf{z} \in D_L$ に対し $A(\mathbf{z})$ が負定値であることが $L(\mathbf{x})$ が D_L で Lyapunov 関数となるための十分条件となる。

次に、 \mathbf{z} が平衡点 \mathbf{x}^* の十分小さな近傍にある場合の $A(\mathbf{z})$ の負定値性を示す。二次形式 $y = \mathbf{x}^T A(\mathbf{z}) \mathbf{x}$ は \mathbf{x} を固定することに \mathbf{z} について連続なので、 $y = \mathbf{x}^T A(\mathbf{x}^*) \mathbf{x}$ が任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して負であることを示せばよ

い。したがって、 $A(\mathbf{x}^*)$ が負定値、すなわち全ての固有値が負であることを示す。

一般に、エルミート行列 H の二次形式は実数値を取る。特に、実ベクトル \mathbf{z} については、

$$\mathbf{z}^T H \mathbf{z} = \mathbf{z}^T \operatorname{Re}(H) \mathbf{z}$$

となる。したがって、 $A(\mathbf{x}^*)$ の代わりにエルミート行列

$$A^* = (Df(\mathbf{x}^*))^H \hat{Y} + \hat{Y} Df(\mathbf{x}^*)$$

の負定値性を調べればよいことに注意する。 \hat{Y} の定義を用いれば

$$\begin{aligned} A^* &= (Df(\mathbf{x}^*))^H X^{-H} I^* X^{-1} + X^{-H} I^* X^{-1} Df(\mathbf{x}^*) \\ &= X^{-H} \Lambda^H I^* X^{-1} + X^{-H} I^* \Lambda X^{-1} \\ &= X^{-H} (2\operatorname{Re}(\Lambda) I^*) X^{-1} \\ &= -2X^{-H} |\operatorname{Re}(\Lambda)| X^{-1} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで $|\operatorname{Re}(\Lambda)|$ は行列 $\operatorname{Re}(\Lambda)$ の各成分の絶対値を取った行列を表している。これより A^* は負定値のエルミート行列であることが分かる。したがって \mathbf{x}^* の十分小さな近傍では、

$$\frac{d}{dt} L(\mathbf{x}) < 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$$

となる。一方、 $\frac{d}{dt} L(\mathbf{x}^*) = 0$ なので、 $L(\mathbf{x})$ はこの近傍で Lyapunov 関数の要件を満たす。

3.4 Lyapunov 関数の定義域の検証

上述のように、平衡点を含む領域 D_L で実対称行列 $A(\mathbf{z})$ が負定値であれば、 $L(\mathbf{x})$ は D_L で Lyapunov 関数となる。また、条件の導出過程より、負定値性の検証は領域 D_L を小領域に分割して行ってよい。しかしながら、行列 $A(\mathbf{z})$ の負定値性は $\frac{d}{dt} L(\mathbf{x}) < 0$ となるための十分条件に過ぎないため、分割した小領域が平衡点を含まない場合は、

$$\frac{d}{dt} L(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T Y (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y \mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0$$

であることを区間演算で直接確認することができる。具体的には、その小領域を包含する区間ベクトル $[\mathbf{x}]$ を取って $\frac{d}{dt}L([\mathbf{x}])$ を精度保証法で算定し、負であることを確認する。この方法を stage2 とする。

実際には小領域が平衡点を含まない場合でも、平衡点近くになると精度保証計算の結果に 0 を含んでしまうことがある。このような場合に対しては行列 $A(\mathbf{z})$ の負定値性の確認による検証法を適用する。この方法を stage1 とする。

負定値性とは固有値の負値性のことである。検証法の 1 つにゲルシュゴリンの定理を利用したものがあるのでそれを紹介する。分割した小領域のうち平衡点を含むものや平衡点に近いものについて、まずこれを区間ベクトル $[\bar{\mathbf{x}}]$ で包含する。 $[\bar{\mathbf{x}}]$ の中心を $\bar{\mathbf{x}}$ と置き、

1. 行列 $A(\bar{\mathbf{x}})$ を浮動小数点演算で算定し、必要であれば対称性を確保したあと、その対角化を近似的に行っておく。すなわち、

$$\bar{\Lambda} = \bar{X}^{-1}A(\bar{\mathbf{x}})\bar{X}$$

となる行列 \bar{X} を算定する。

2. 精度保証法によって区間行列 $\bar{X}^{-1}A([\bar{\mathbf{x}}])\bar{X}$ を算定し、その成分を区間 $[a]_{ij}$ と置く。
3. この区間行列にゲルシュゴリンの定理を適用する。すなわち各 $i = 1, \dots, n$ について、

$$[a]_{ii} + \sum_{j \neq i} |[a]_{ij}| < 0$$

を精度保証で検証する。

このほか、S.M.Rump によるコレスキー分解を用いたより効率的な検証法があり、Intlab 上で利用できる [7]。

以上で領域 D_L で Lyapunov 関数が定義できることが検証される。平衡点が漸近安定の場合には、Lyapunov 関数 $L(\mathbf{x})$ の等位面は楕円もしくは楕円球体となるが、注意点として、領域 D_L のうちで不変集合となるのはこの楕円球体の内部のみである。

また、平衡点が saddle 型の場合には Lyapunov 関数の等位面は双曲線もしくは双曲面となる。軌道の接近・離脱の様相を解析するためには Lyapunov 関数からの情報と流れ場の情報とを組み合わせる利用することになる。これに関しては [8] に数学的な設定の詳細と数値例がある。

4 Radial Basis Function(RBF) による近似解の構成

前節で構成した二次形式の Lyapunov 関数では定義域として確認できなかった領域での Lyapunov 関数を構成することを考える。その構成を RBF によって行う。ここでは RBF の手法の説明を [5] に基づいて行う。

4.1 時間微分に対する RBF

RBF は与えられた偏微分方程式を近似的に解く手法のひとつである。特徴としてメッシュフリーの選点法であることがあり、すなわち三角形分割の必要がない。

Lyapunov 関数の構成を目指すため、ここでは次の形の偏微分方程式のみを扱う。

$$\begin{aligned} \text{find } Q \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \\ DQ(\mathbf{x}) = -R(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} DQ(\mathbf{x}) = Q'(\mathbf{x}) = \langle \nabla Q(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \rangle, \\ R(\mathbf{x}) \in C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), \text{ は与えられた正值関数。} \end{aligned}$$

この偏微分方程式より Q の近似関数 $q \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ を適当な相異なる点の集合 $X_N = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \subset \mathbf{R}^n$ より以下のように構成する。

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N \beta_k D_y \Psi(\mathbf{x} - \mathbf{y})|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}_k} \quad (4.1)$$

ここで D_x は \mathbf{x} について ∇ をとるという意味である。 $\Psi(\mathbf{x})$ はある関数 $\psi \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ によって $\Psi(\mathbf{x}) = \psi(\|\mathbf{x}\|)$ と定められている点間の距離に依る関数である。 $\psi(\|\mathbf{x}\|)$ の与え方は後述する。

係数 β_k は全ての点 $\mathbf{x}_j \in X_N$ において、

$$\begin{aligned} D_x Q(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j} &= D_x q(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j} \\ &= -R(\mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (4.2)$$

を満たすように定める。(4.2)に(4.1)を入れると、 $j = i, \dots, N$ において、

$$\begin{aligned} D_x Q(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j} &= D_x q(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j} \\ &= \sum_{k=1}^N D_x D_y \Psi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \beta_k |_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j, \mathbf{y}=\mathbf{x}_k} \end{aligned}$$

となる。これは行列 A を係数行列とした β に関する一次方程式とみなすことができる。すなわち、

$$\begin{aligned} A\beta &= \alpha \\ \text{ここに } A &= (a_{jk})_{j,k=1\dots N}, \\ a_{jk} &= D_x D_y \Psi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \beta_k |_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j, \mathbf{y}=\mathbf{x}_k}, \\ \alpha &= (\alpha_j)_{j=1\dots N}, \\ \alpha_j &= -R(\mathbf{x}_j). \end{aligned}$$

α に各点における偏微分方程式の右辺の値が入ることになる。

係数ベクトル $\beta = (\beta_k)_{k=1\dots N}$ は β に関する連立一次方程式 $A\beta = \alpha$ を解くことで求める。 β を一意に定めるには A がフルランクになるようにしたい。そのために X_N に平衡点を含まないようにする必要がある。

$\psi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ に対し、 ψ_1, ψ_2 を以下のように定める。

$$\begin{aligned} \psi_1(r) &= \frac{\frac{d}{dr}\psi(r)}{r} \text{ for } r > 0 \\ \psi_2(r) &= \begin{cases} \frac{\frac{d}{dr}\psi_1(r)}{r} & \text{for } r > 0, \\ 0 & \text{for } r = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

これを用いることで a_{jk} は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} a_{jk} &= \psi_2(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|) \langle \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, f(\mathbf{x}_j) \rangle \langle \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j, f(\mathbf{x}_k) \rangle \\ &\quad - \psi_1(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|) \langle f(\mathbf{x}_j), f(\mathbf{x}_k) \rangle. \end{aligned}$$

これによって定まる行列 A が正則であれば、 $\beta \in \mathbf{R}^N$ が一意に定まり、近

似解 $q(\mathbf{x})$ および $q'(\mathbf{x}) = \langle \nabla q(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \rangle$ が、

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N \beta_k \langle \mathbf{x}_k - \mathbf{x}, f(\mathbf{x}_k) \rangle \psi_1(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|),$$

$$q'(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N \beta_k [\psi_2(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|) \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_k, f(\mathbf{x}) \rangle \langle \mathbf{x}_k - \mathbf{x}, f(\mathbf{x}_k) \rangle - \psi_1(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|) \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_k) \rangle]$$

と算定される。

4.2 Wendland 関数

ψ の一例として Wendland 関数を紹介する [5]。この関数の特徴として、まず正值である。そしてそのサポート $\{r \in \mathbf{R}^+ | \psi(r) > 0\}$ が有界である。これにより $A\beta = \alpha$ における A が疎行列 (sparse) になることが期待できる。次に多項式であることがあげられる。これにより計算が単純になる。さらに Wendland 関数を $\psi(r)$ としたとき ψ_1, ψ_2 が特異にならないような形になっている。最後に A が正定値になることが ([5], section 3.2.2) で示されている。これにより $A\beta = \alpha$ が解を持つ。

n 次元において、 $l = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + k + 1 \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{N}_0$ とする。 \mathbf{N} は自然数、 \mathbf{N}_0 は 0 以上の整数の集合を表す。このとき Wendland 関数は

$$\psi_{l,0}(r) = (1-r)_+^l$$

および

$$\psi_{l,k+1}(r) = \int_r^1 t \psi_{l,k}(t) dt$$

によって再帰的に定義される。

r は 0 以上の実数であり、添え字の $+$ は、

$$(1-r)_+ = \begin{cases} 1-r & 0 \leq r < 1, \\ 0 & r \geq 1. \end{cases}$$

を意味する。

実際に使用する際は $\psi_{l,k}(cr)$ の形にして、正定数 c で $(1-cr)_+ > 0$ となる領域を調節している。

例

表 1: Wendland 関数 $\psi_{5,3}(cr)$

	$\psi_{5,3}(cr)$
$\psi(cr)$	$(1 - cr)_+^8 [32(cr)^3 + 25(cr)^2 + 8cr + 1]$
$\psi_i(cr)$	$-22c^2(1 - cr)_+^7 [16(cr)^2 + 7cr + 1]$
$\frac{d}{dt}\psi_1(cr)$	$528c^4r(1 - cr)_+^6 [6cr + 1]$
$\psi_2(cr)$	$528c^4(1 - cr)_+^6 [6cr + 1]$

5 RBFによるLyapunov関数の構成

平衡点近傍 D_L で二次形式の Lyapunov 関数 L が構成されているものとする。 D_L の外側に $\frac{d}{dt}L_q(\mathbf{x}(t)) < 0$ が成立するような関数 L_q を RBF によって構成する。その定義域を D_{L_q} とする。 $\mathbf{x}_0 \in D_L \cup D_{L_q}$ に対し、解軌道 $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ が $\varphi(t, \mathbf{x}_0) \in D_L \cup D_{L_q}$ である限りにおいて、

$$\frac{d}{dt}L(\varphi(t, \mathbf{x}_0)) < 0, \text{ または } \frac{d}{dt}L_q(\varphi(t, \mathbf{x}_0)) < 0 \quad (*)$$

が成立する。 $D_L \cap D_{L_q} \neq \emptyset$ ならば、 $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ は Lyapunov 関数として L_q と L を「乗り換えて」いることになり、等位面を通過するという性質を保っている。

ここで、 $\mathbf{x}^* \notin D_{L_q}$ であっても $D_L \cap D_{L_q} \neq \emptyset$ かつ $(*)$ が成立するとき、 L_q を D_{L_q} における Lyapunov 関数と呼ぶことにする。これにより Lyapunov 関数を拡張する。

目的として、RBF で作る Lyapunov 関数 L_q の定義域となる D_{L_q} をより広いところで、低コストで検証したい。ここでは実際に RBF を用いて Lyapunov 関数を構成する際の手順をまとめ、定義域 D_{L_q} の検証法についても説明する。その後、検証が失敗する原因およびその回避法についての提案を行う。

L_q の候補関数として偏微分方程式 $DQ(\mathbf{x}) = -R(\mathbf{x})$ から RBF によって構成される Q の近似関数 q を使用する。

平衡点の近くでは章 3.2 の二次形式の Lyapunov 関数が存在しているので、RBF によって構成する Lyapunov 関数は平衡点からある程度離れた領域におけるものとする。

5.1 構成手順

必要なものは

- 力学系を表す常微分方程式 $\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ と平衡点 $\mathbf{x}^* \in \mathbf{R}^n$
- 相異なる点の集合 $X_N \subset \mathbf{R}^n$
- Lyapunov 関数に関する偏微分方程式 $DQ(\mathbf{x}) = -R(\mathbf{x})$

- $\psi(\|\mathbf{x}\|)$ として与える Wendland 関数 $\psi_{l,k}(cr)$ と r の補正定数 c

である。

$R(\mathbf{x})$ は正值関数である。例としては以下のようなものがあげられる。

- $R(\mathbf{x}) = 1$ (正定数)
単純な形であり、平衡点や力学系に左右されずに常に一定。
- $R(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2$
平衡点からの距離。対象としている平衡点に近いところでは 0 に近づく。
- $R(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2$
 $DQ(\mathbf{x}) = \langle \nabla Q(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle < 0$ となるシンプルな形。値が力学系に左右される。全ての平衡点の近くでは 0 に近づく。
- $R(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2(1 + \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2)$
[6] において使用されていた形。上二つを組み合わせた形になっている。

r の補正定数 c は q および q' を構成する際に X_N の中から参照する点の数に関係しており、 c が大きければ参照点数は少なくなり、小さいと多くなる。

これらを元に Lyapunov 候補関数となる q とその時間微分 q' を浮動少数点演算によって求める。ここで q や q' の構成に精度保証は必要ない。[6] によると [5] では偏微分方程式の精度保証を行うことで厳密な Lyapunov 関数を構成しようとしているが、まだ成功には至っていない。[6] では RBF と CPA によって近似で構成したものが Lyapunov 関数の要件を満たしているかを不等式による精度保証で検証するという手法を取っている。本論文のこの手法も RBF で構成された近似関数 q や q' が Lyapunov 関数となっているかを区間演算による精度保証で検証するという手法をとるため、構成の段階では精度保証の必要はない。

構成した q が Lyapunov 関数として成立している領域、つまり定義域はどこかの検証は章 3.4 の小領域に平衡点を含まない場合の検証法と同様に行う。つまり、検証したい小領域を含む区間ベクトル $[\mathbf{x}]$ に対し、

$$\frac{d}{dt}q([\mathbf{x}]) = q'([\mathbf{x}]) < 0$$

を精度保証法で直接確認する。これを満たすところで $L_q(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x})$ となるので、 q および q' は近似でよい。

$DQ(\mathbf{x}) = -R(\mathbf{x}) < 0$ なので、検証が失敗する原因としては、

- 近似 q' の精度が悪く、0 より大きくなってしまう。
- 区間幅が大きくなり、 $[q'([\mathbf{x}])]$ に 0 を含んでしまう ($0 \in [q'([\mathbf{x}])]$)。

が考えられる。 $DQ(\mathbf{x})$ の値と $q'(\mathbf{x})$ の値は X_N の点の上では一致するようになっているため、近似の精度が悪いとそれは $q'(\mathbf{x})$ の値の振動という形で表れる。この振動が激しいと $q'([\mathbf{x}])$ がとる値の幅が広くなり、区間拡大につながる。逆に振動が穏やかであれば、区間拡大の抑制につながる。

より広い範囲で低コストで D_{L_q} であるかの検証を行うには上記の2つの失敗原因が起きにくくなるよう $R(\mathbf{x}), c, X_N$ を取る、もしくは他の区間拡大抑制のための工夫をする必要がある。

5.2 平均値形式の適用

q' の形上、項数が多くなり区間演算を行う上で大きな区間拡大を起こす可能性がある。そこで区間拡大の抑制のために q' への平均値形式 (2.3) の適用を考える。 $[\mathbf{x}]$ の中心ベクトルを $\hat{\mathbf{x}}$ とおいて

$$q'([\mathbf{x}]) \subset q'(\hat{\mathbf{x}}) + \left[\frac{d}{dt}q'([\mathbf{x}])\right](\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\mathbf{x}} \in [\mathbf{x}]$$

とする。右辺を $[q'([\mathbf{x}])]$ として用いることにより $[\mathbf{x}]$ に関する1次項を括り出すことができ、加算による区間拡大の抑制が期待できる。

6 数値例

計算は PC(Intel(R) Core(TM)i7-3770CPU@3.40GHz 16GB RAM) で行い、計算ソフトは MATLAB2016a, 区間演算用ソフトに Intlab-version9 を用いた。

今回扱う力学系は ([5],p135) に掲載されている Speed-control と呼ばれる問題である。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -K_d y - x - g x^2 \left(\frac{y}{K_d} + x + 1 \right) \end{cases}$$

$$K_d = 1, g = 6$$

平衡点 : (-0.2113,0) saddle 型
(0,0) 漸近安定
(-0.7887,0) 漸近安定

6.1 二次形式の Lyapunov 関数

saddle 型平衡点 (-0.2113,0) に対して二次形式の Lyapunov 関数を構成したところ以下のようなになった。

$$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$
$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -0.343695094330113 \\ -0.343695094330113 & 0.595356594562018 \end{pmatrix}$$

等高線を描くと次の図 1 のようになる

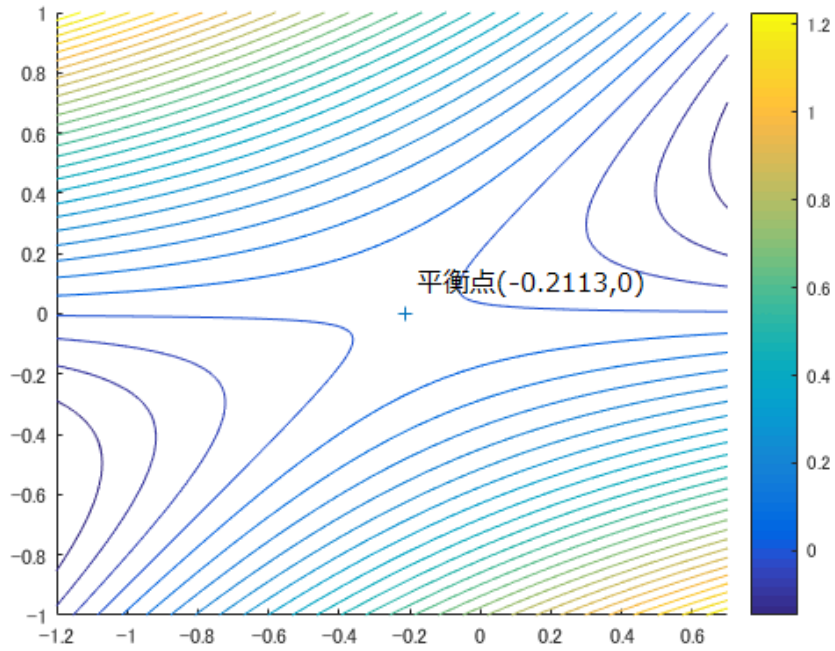


図 1: L の平衡点 $(-0.2113, 0)$ 周りのの等高線

図 1 よりこの平衡点が saddle 型になっていることが確認できる。

次に定義域を検証を行った。

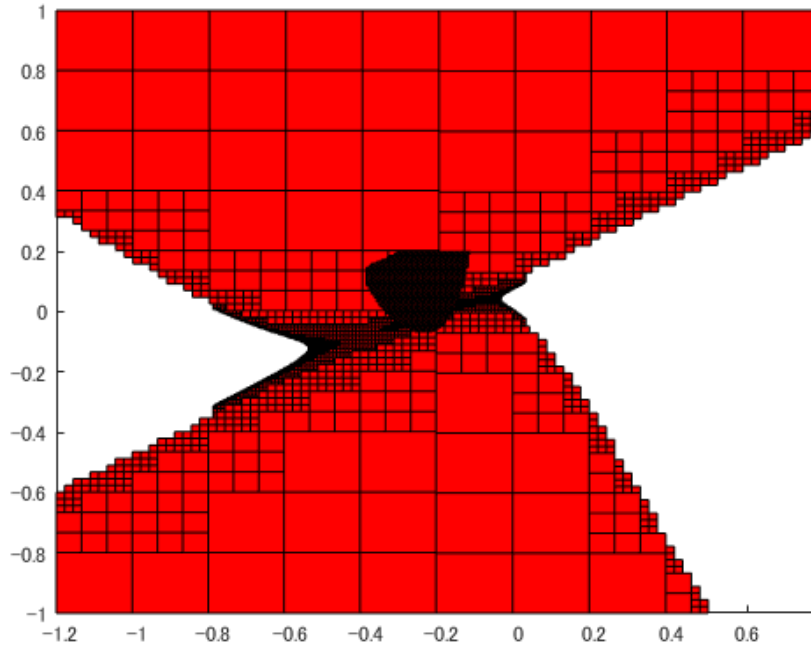


図 2: L の定義域

図 2 において、平衡点周りの黒い部分が $A([\bar{x}])$ の負定値性が確認できた部分。周りの赤い部分が $\frac{d}{dt}L([\mathbf{x}]) < 0$ を精度保証で直接確認した部分である (stage2)。

平衡点付近を拡大すると、stage2 のみで検証したものが図 3 である。

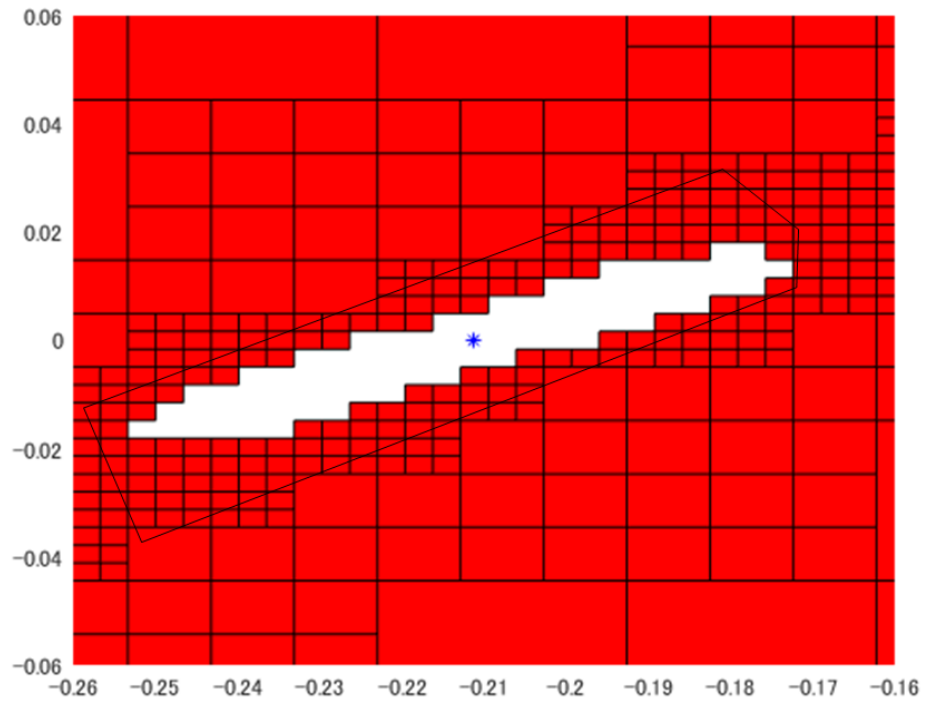


図 3: L の定義域 : stage2

白い部分が検証失敗した領域である。ここを stage1 で覆うことを考えて、白い領域を包含する平衡点に関する星型領域となる凸多角形を用意した (図 3 の黒の実線)。そこで $A([\bar{x}])$ の負定値性が確認できた部分を図 3 の上に描写したものが図 4 である。

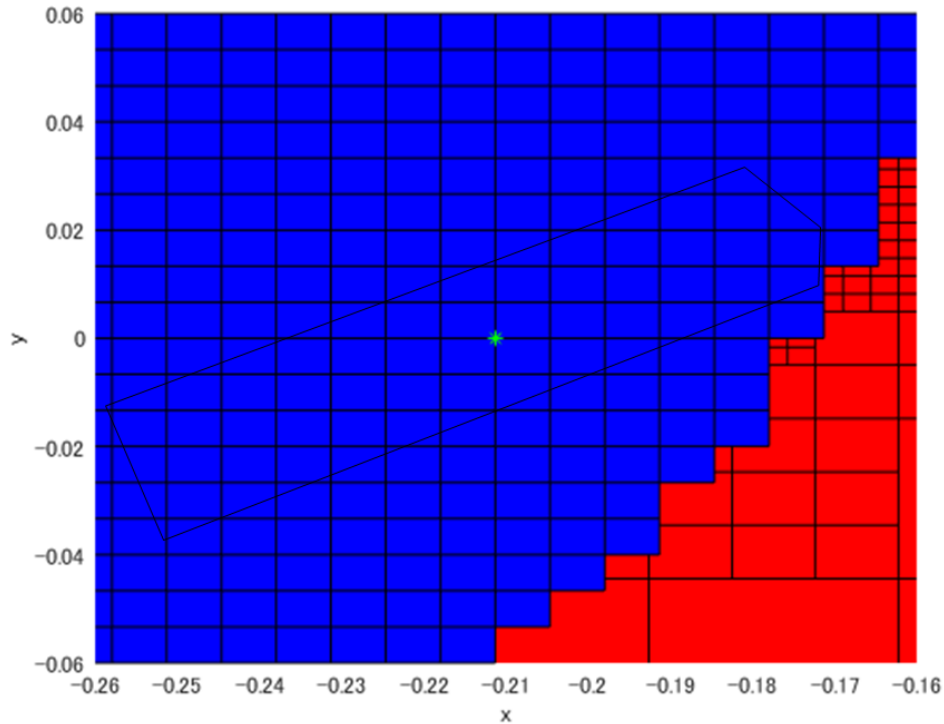


図 4: L の定義域:stage1 と stage2

青い部分が $A([\mathbf{x}])$ の負定値性が確認できた所である (図 2 の平衡点周りの黒い部分)。青い部分が平衡点に関する星型領域となる凸多角形を包含しているので凸多角形内は Lyapunov 関数の定義域とみなすことができる。これで stage1 と stage2 によって図 2 の色が塗られた部分は二次形式の Lyapunov 関数 L の定義域であることが確認できた。

6.2 RBF による Lyapunov 関数

二次形式では定義域として認められなかった領域を含む領域での Lyapunov 関数を RBF を用いて構成することを試みる。また、構成する際に用意する $X_N, R(\mathbf{x}), c$ と区間演算との間にどのような関係があるのかを調べる。

二次形式の Lyapunov 関数では平衡点における $f(\mathbf{x})$ のヤコビ行列が必要のため、どの平衡点に対して作るのかが重要であったが、RBF では $R(\mathbf{x})$

に平衡点に関係しない限り構成に平衡点は関わってこないためどの平衡点に対しての Lyapunov 関数であるかは重要ではない。

Wendland 関数は $\psi_{5,3}(cr)$ を使用する。

6.2.1 $R(\mathbf{x})$

$R(\mathbf{x})$ と振動の関係をまとめる。 $R(\mathbf{x})$ は章 5.1 で紹介した 4 種類の形を用いる。 c は 3.75 で固定、 X_N は平衡点 $(-0.2113, 0)$ から徐々に離れるように $(1, -1)$ 方向に $\|(0.15, 0.15)\|$ ずつ離れた点を中心にした半径 0.4 の矩形領域を一辺 15 分割したグリッド点の集合 X_{Ni} ($i = 1 \dots 5$) を用意し (図 5)、それぞれの $R(\mathbf{x}), c, X_N$ の組に対して $q'(\mathbf{x})$ を構成した。

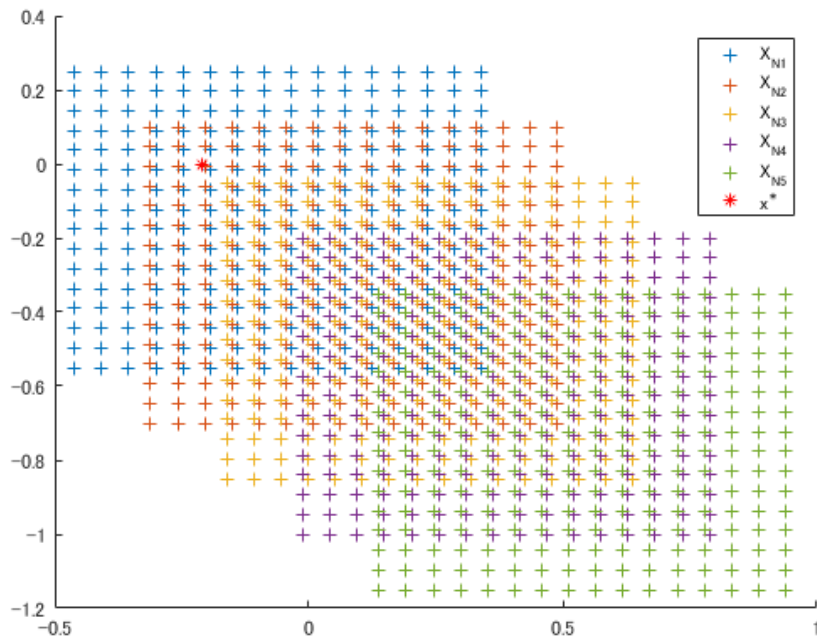


図 5: $X_{N1 \sim 5}$

また、振動の指標として X_{Ni} それぞれの中心点から半径 0.1 の矩形領域を一辺 50 分割したグリッド点 (2601 点) の集合 Y_i を用意し、各点での $q'(\mathbf{x})$ と $-R(\mathbf{x})$ との差 $q'(\mathbf{x}) + R(\mathbf{x})$ を $R(\mathbf{x})$ で割ったものの絶対値の

平均、

$$S_i = \frac{1}{2601} \sum_{s=1}^{2601} \left| \frac{q'(\mathbf{x}_s) + R(\mathbf{x}_s)}{R(\mathbf{x}_s)} \right|$$

$$\mathbf{x}_s \in Y_i \quad (i = 1 \dots 5)$$

を用いる。これらから $R(\mathbf{x})$ と振動の関係を距離ごとに見る。

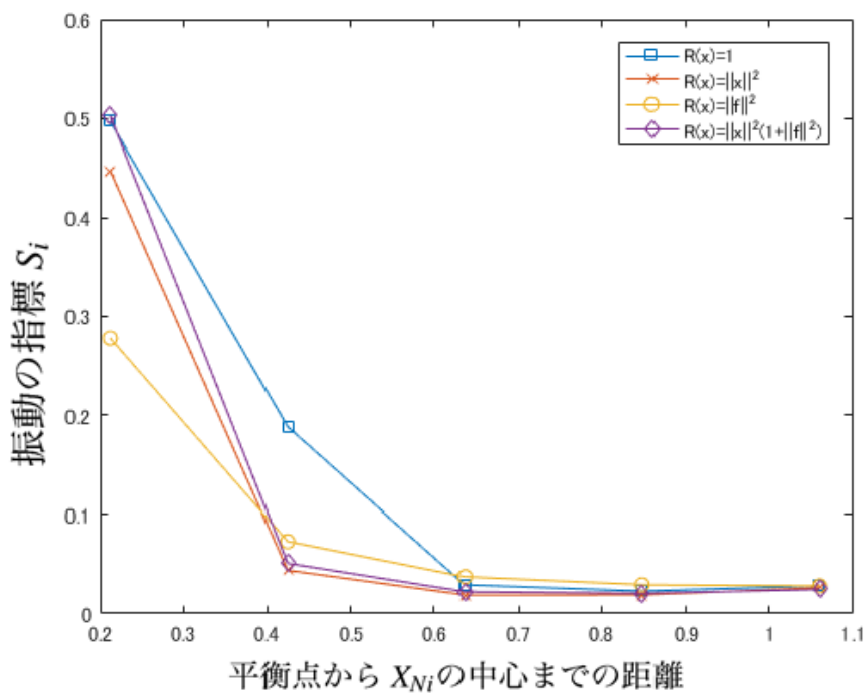


図 6: $R(\mathbf{x})$ ごとによる距離と振動の関係

図 6 より全体的に平衡点から離れるにつれて振動は小さくなるのがわかる。平衡点の近くでは $R(\mathbf{x})$ ごとに大きな差があるが、離れるとあまり差がなくなる。よって平衡点の近くで Lyapunov 関数を構成する場合は $R(\mathbf{x})$ の形によって精度が大きく変わるので、その場合における最適なものを選択するのが望ましい。遠い場合はそこまで重視する必要はない。

図 6 を見ると平衡点近くでは $R(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2$ が一番振動が穏やかで最適に思えるが、 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2$ は平衡点近くで 0 に近づくという特性がある。そのため $[q'([\mathbf{x}]])$ に 0 を含みやすくなり、 $[q'([\mathbf{x}]]) < 0$ となるには都

合が悪い。一例として $R(\mathbf{x}) = 1$ では $[q'([\mathbf{x}])] < 0$ の確認に成功したが $R(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2$ では失敗した例を載せる。

$$[\mathbf{x}] = \begin{pmatrix} \langle -0.05, 0.0003 \rangle \\ \langle -0.05, 0.0003 \rangle \end{pmatrix}$$

表 2: $R(\mathbf{x})$ と $[q'([\mathbf{x}])]$

$R(\mathbf{x})$	$[q'([\mathbf{x}])]$	区間半径
1	$[-2.6568, -1.1602]$	0.7482
$\ \mathbf{f}(\mathbf{x})\ ^2$	$[-0.0367, 0.0169]$	0.0268

区間半径だけでいえば $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2$ のほうが小さいが、中心が 0 に近いゆえに区間 $[q'([\mathbf{x}])]$ は 0 をまたいでしまっている。

次に $R(x)$ を定数倍したらどうなるかについて調べた。

- $c=3.75$
- $X_N : X_{N5}$ を使用。

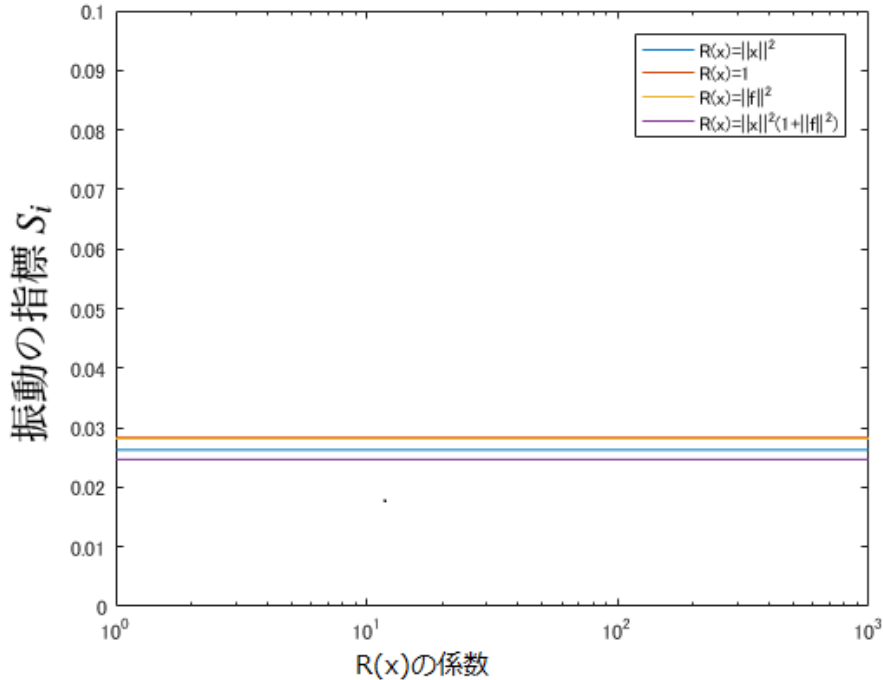


図 7: $R(x)$ の係数と振動の関係

図7から $R(\mathbf{x})$ の係数を変えても振動の指標は一定、つまり $R(\mathbf{x})$ の係数と振動は線形関係であることが分かる。よって $q'(\mathbf{x})$ の値を小さくしようと思って、その近似元 $-R(\mathbf{x})$ を定数倍によって負の方向に大きくしてもそれに伴って振動も大きくなる。振動が2倍になれば区間で取りうる値も2倍になるため、係数が区間演算に与える影響も線形となる。よって $[q([\mathbf{x}])] < 0$ の検証には良い影響を及ぼさないと考えられる。

6.2.2 c

Wendland 関数 $\psi_{l,k}(cr)$ の c と区間幅の関係をまとめる。 c は参照点数を決める数であり、 c が大きいと参照点数が少なくなり、近似の精度が悪くなることで振動が激しくなるが、 $q'(\mathbf{x})$ を構成する項の数が少なくなるので区間拡大が少ない。 c が小さいと参照点数が多いので、近似の精度は上がり振動は穏やかになるが、項の数が増えるので区間拡大が大きい。よって最適な c が存在する。

$R(x), X_N, [\mathbf{x}]$ を、

- $R(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2(1 + \|f(\mathbf{x})\|^2)$,
- X_N : 点 $(0.15, -0.15)$ を中心にした半径 0.4 の矩形領域を一辺 $1/5$ 分割したグリッド点の集合 (図 8)。
- $[\mathbf{x}] = \begin{pmatrix} \langle 0.18, 0.001 \rangle \\ \langle -0.15, 0.001 \rangle \end{pmatrix}$

と定めて c と $[q'([\mathbf{x}])]$ の区間半径との関係を見る (図 9)。

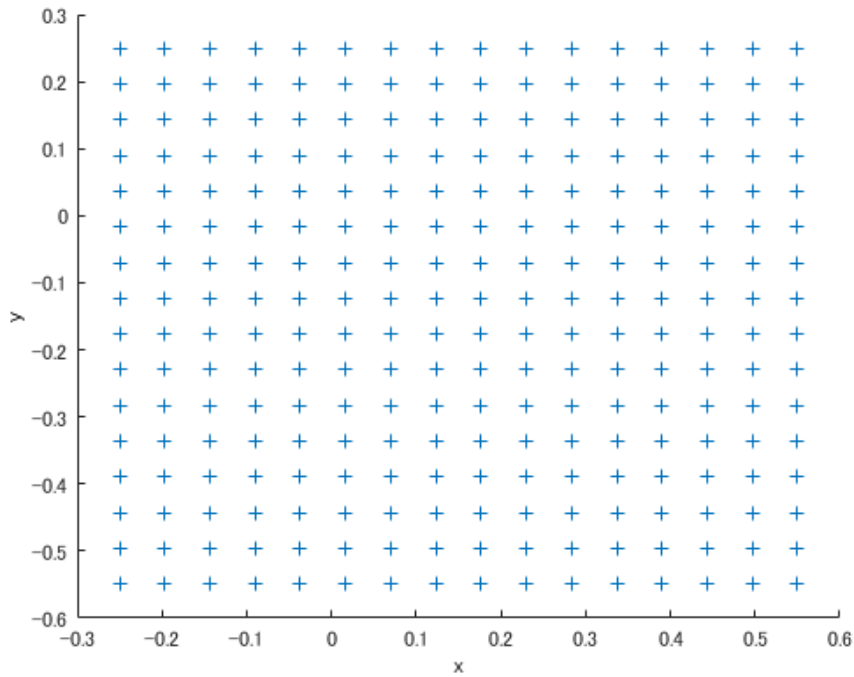


図 8: X_N

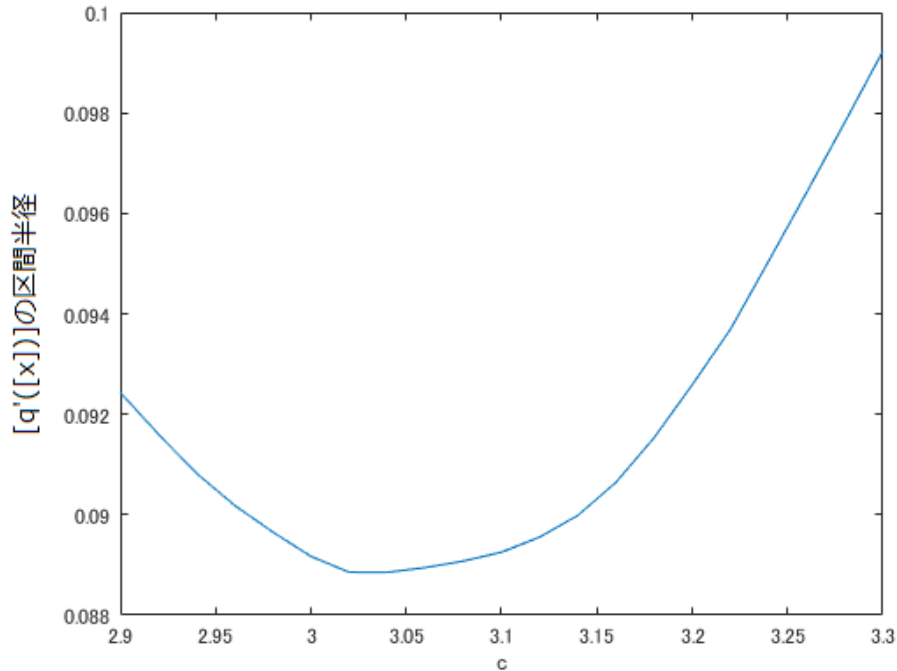


図 9: c と区間の関係

図9では $c = 3.02$ 付近が最適値となっていることが分かる。 X_N や $R(\mathbf{x})$ によって最適な c は変わるため $q'(\mathbf{x})$ を構成する時の条件に合わせて最適な c を選ぶ必要がある。

6.2.3 X_N

参照点数を変えずに X_N を狭い範囲で取るか広い範囲で取るか、つまり点の密度をどうするかが区間幅に及ぼす影響をまとめる。広すぎると精度が悪くなり振幅が大きくなる、狭すぎると点間隔が狭くなり振動が激しくなり区間にしたとき幅が大きくなることが考えられる。 X_N の半径と c は参照点数をほぼ変えないように連動して変化させ、区間との関係を見る。区間を扱うので参照点数が若干上下することがある。 $[q'([\mathbf{x}])]$ の区間幅の指標としては「 $[q'([\mathbf{x}])]$ の区間半径/区間中心の絶対値」を見ることにする。この値が1を超えると $[q'([\mathbf{x}])] < 0$ にならなくなる。

- $R(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2(1 + \|f(\mathbf{x})\|^2),$

- X_N : 点 $(0.1, -0.15)$ を中心にした矩形領域を一辺 1.5 分割したグリッド点の集合。半径は変化させる。例として半径 0.4 と 0.8 のものを図 10 に載せた。
- c : X_N の半径に反比例させて参照点数がほぼ変化しないよう変更する。半径 0.4 のときに $c=3.02$ 、参照点数約 120
- $[\mathbf{x}] = \begin{pmatrix} < 0.15, 0.001 > \\ < -0.15, 0.001 > \end{pmatrix}$

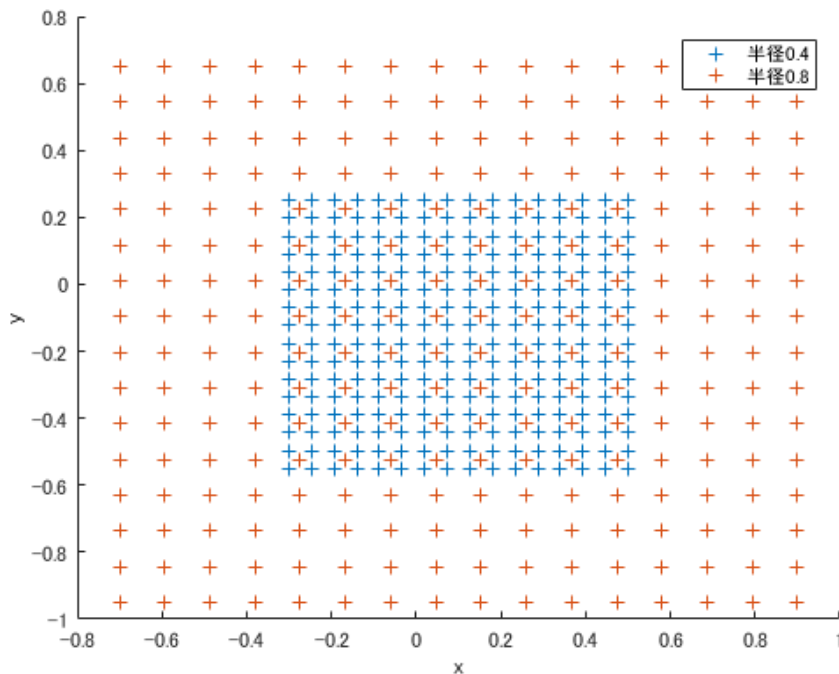


図 10: 半径 0.4 と 0.8 の X_N

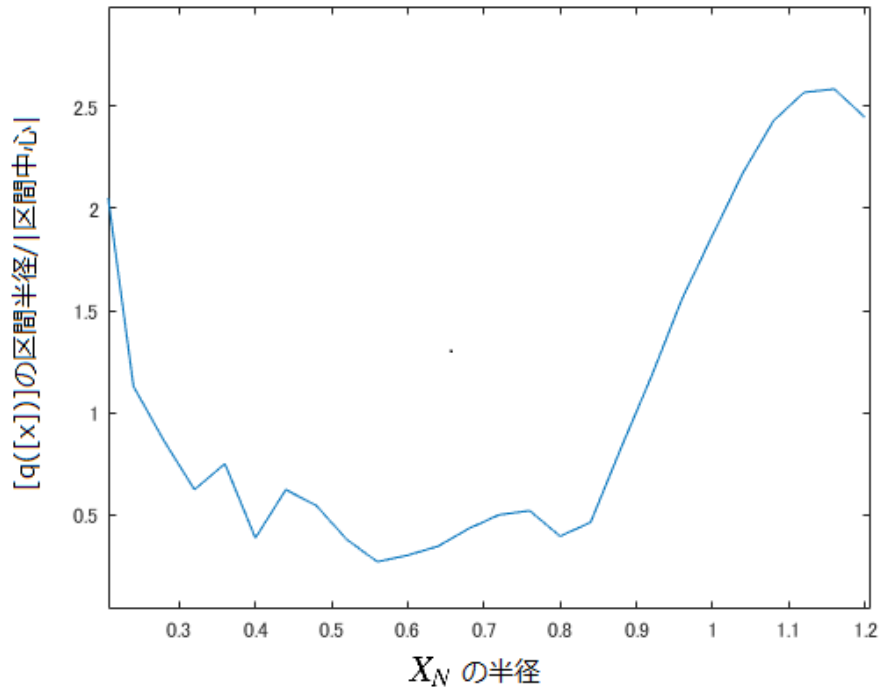


図 11: 密度と区間の関係

この図 11 では、 X_N 半径が 0.4 から 0.8 までのところが区間幅指標の値が小さくなっており、1 も下回っている。逆にその外では指標の値が大きくなり、1 を超えてしまっているところもある。よって他の条件に合わせて X_N の密度も適したものを選択する必要がある。

6.2.4 定義域の拡張

これまでの調査から適当な $c, X_N, R(\mathbf{x})$ を選び RBF による Lyapunov 関数を実際に構成する。領域は二次形式のものでは定義域として認められなかった領域を含む領域を対象とし、そこが RBF による Lyapunov 関数の定義域となっているかを検証する。

- $R(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2(1 + \|f(\mathbf{x})\|^2)$,
- X_N : 点 (0.1, -0.15) を中心にした半径 0.4 の矩形領域を一辺 1/5 分割したグリッド点の集合 (図 12)。

- $c=3.02$

検証領域 $\begin{pmatrix} [0.06, 0.26] \\ [-0.3, -0.1] \end{pmatrix}$ を区間半径 0.002 の小領域に分割して検証。
 検証失敗した領域の一部はさらに細かい小領域に分割して再検証を行った (図 13)。

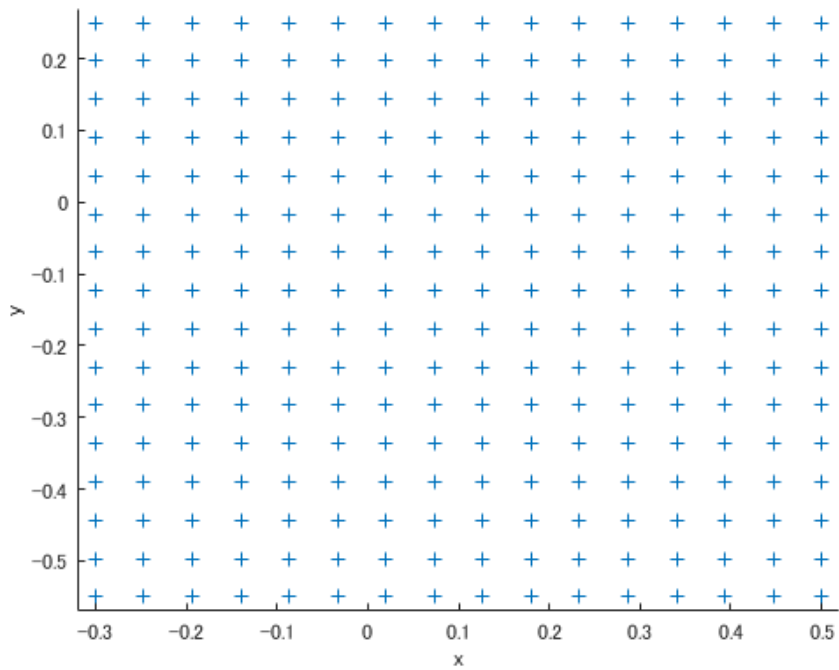


図 12: X_N

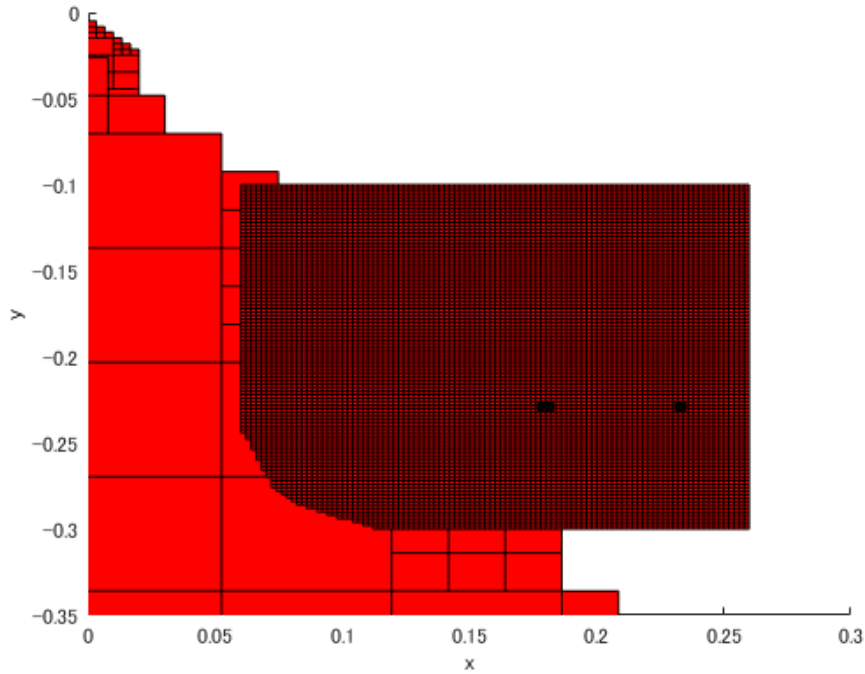


図 13: RBF による Lyapunov 関数の定義域

計算時間：3 時間 4 分 (11033.9078 秒)

図 13 の赤い部分が二次形式のもので定義域として認められた領域 D_L 、赤黒い部分が RBF によるもので定義域 D_q として認められた部分である。二次形式のもので定義域と認められなかった領域が RBF による Lyapunov 関数の定義域として認めることができ、ここで $L_q(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x})$ となっている。

RBF による Lyapunov 候補関数 $q(\mathbf{x})$ の等高線は以下の図 14 のようになる。また、そこに今回の力学系の流れ図を重ねると図 15 のようになる。

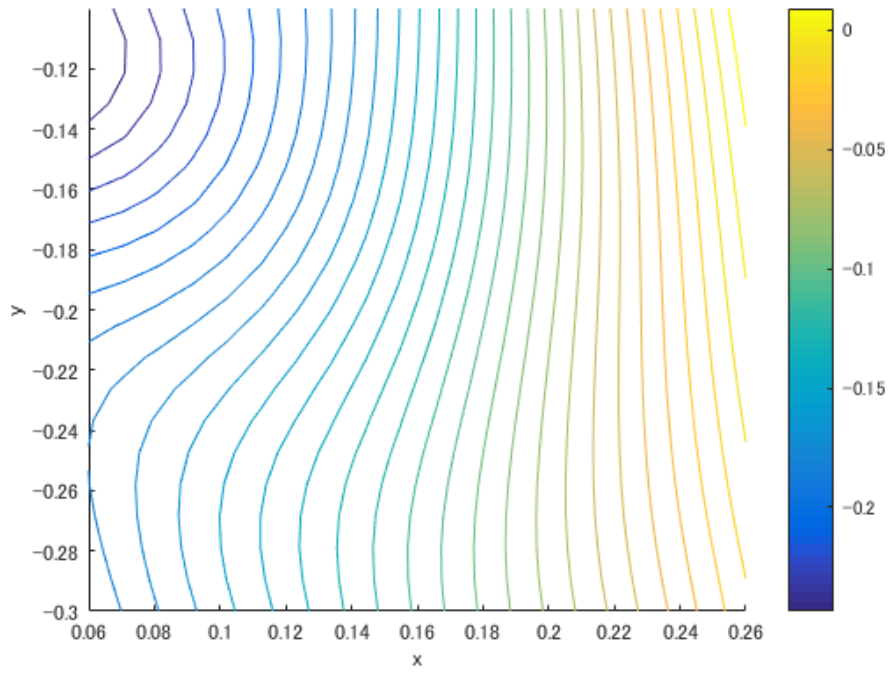


図 14: RBF による Lyapunov 関数の等高線

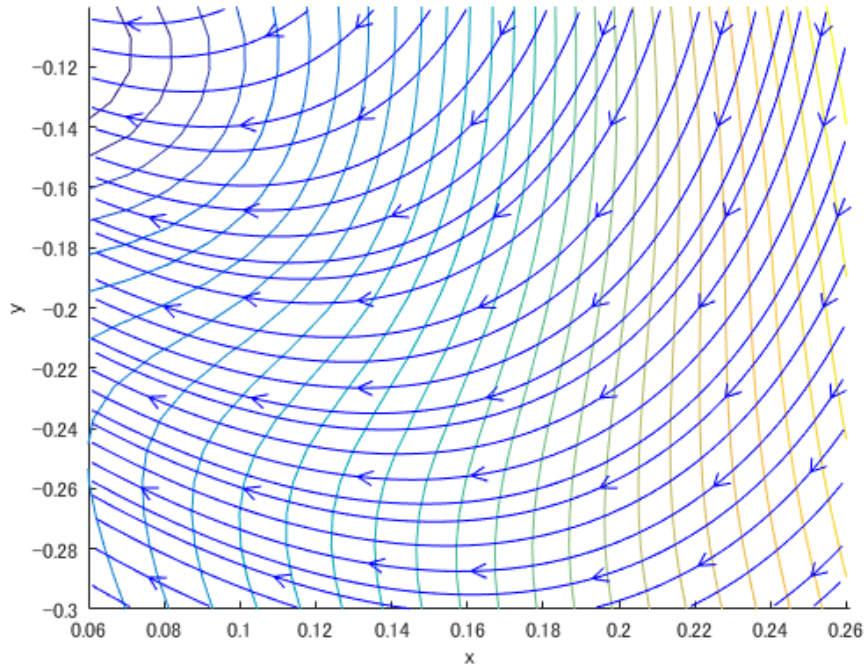


図 15: 等高線と流れ図

流れに沿って Lyapunov 候補関数値が減少しているのが確認できる。

二次形式の等高線と $q(\boldsymbol{x})$ の等高線それぞれが定義域として確認できている部分を重ねると次の図 16 のようになる。

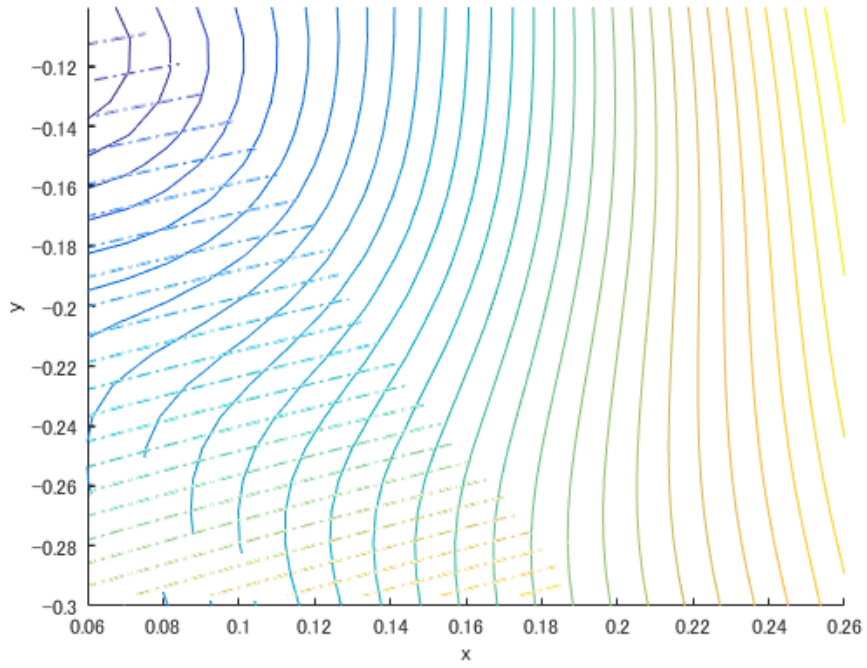


図 16: L (点線) と L_q (実線) の等高線

図 16 で等高線が重なっている部分が図 13 において定義域が重なる部分あり、そこで L と L_q を乗り換えることになる。

7 まとめ

区間演算を用いた精度保証の利点として、saddle型平衡点に対応している、三角形分割の必要がない、 $DQ(\boldsymbol{x})$ として与えるものの自由度、検証のための計算が直接的である、というものを上げたが数値実験を行ったところその利点は確認できた。しかし区間演算ゆえの問題点として、区間拡大による失敗、計算に時間がかかる、という点が分かった。またRBFを構成するための要素が区間演算にどのようにかかわってくるかは単純ではなく、場合によってそれぞれを操作しなくてはならないことが分かった。

8 今後の展望

現在では二次形式のものも含めてLyapunov関数を領域ごとにばらばらに作っている状態である。そこで $DQ(\boldsymbol{x})$ の与え方が自由な点を活かしてLyapunov関数を連続的につなぐことを考えている。各Lyapunov関数を構成する際に $DQ(\boldsymbol{x})$ が境界面で一致するように与え、連続性を保つような工夫をすれば可能なはずである。

次に問題のひとつにあがっている区間拡大と計算時間の問題の解消としてkvライブラリ [2][3] の活用を考えている。

そして、RBFを構成するための要素に関して今回は実験を元により良い数値は何かを場合ごとに割り出したが、ここにどのような法則があるのかの一般性を見つけることも1つの課題である。

参考文献

- [1] 中尾充宏・山本野人,「精度保証付き数値計算」, 日本評論社, 1998, pp.1-21
- [2] 柏木雅英,「c++による精度保証付き数値計算ライブラリ」
2014/12/25 <http://verifiedby.me/kv/>
- [3] 柏木 雅英,「常微分方程式の精度保証」, 日本応用数理学会監修 応用数理ハンドブック, 朝倉書店,2013,pp.442-445.
- [4] Kaname Matsue,Tomohiro Hiwaki,Nobito Yamamoto,On the construction of Lyapunov functions with computer assistance,to appear in Journal of Computational and Applied Mathematics, Article Number: 10967
- [5] Peter Giesl, construction of Global Lyapunov Funtions Using Radial Basis Function,Lecture Notes in Math. 1904, Springer, Berlin, 2007.
- [6] Peter Giesl and Sigurdur Hafstein,Computation and Verification of Lyapunov Functions,SIAM J. APPLIED DYNAMICAL SYSTEMS Vol. 14, No. 4, pp. 1663 - 1698,2015
- [7] S.M.Rump. *Intlab-Interval Laboratory,version 6.*
- [8] 山野駿,「連続力学系におけるホモクリニック軌道の精度保証による検証について」, 平成 27 年度電気通信大学情報理工学研究科修士論文,2016

謝辞

本研究を進めるにあたり、ご指導を頂いた修士論文主任指導教員の山本野人教授に感謝致します。また講義等でのご指導を頂いた指導教員の小山大介助教授に感謝します。また、日常の議論を通じて多くの知識や示唆を頂いた山本研究室の皆様感謝します。