修 士 論 文 の 和 文 要 旨

研究科・専攻	大学院　情報理工学研究科　情報･通信工学専攻　博士前期課程		
氏　　　名	島田　陽	学籍番号	1131055
論 文 題 目	色数と盤面の幅を限定したぷよぷよの必勝性		

要　旨

計算理論の分野で、ゲーム・パズルの複雑さについての研究が数多く行われている。様々なゲーム・パズルについて必勝性判定の問題などの計算量が明らかにされている。更には様々な組合せゲームについて論理的な解析が行われており、ゲームについて数多く研究がなされている。

落ち物パズルゲームは、パズルのブロックが次々とゲームの盤面に落ちていき、プレイヤーがブロックを操作して、適当な場所に落としていくパズルゲームである。落ち物パズルゲームは、将来の情報が分からない中で、適切な判断を下しながらプレイするゲームである。

本研究では、ぷよぷよという日本で広く知られる落ち物系パズルゲームを題材とし、その必勝法についての研究を行う。ぷよぷよとは、格子状の盤面に次々に落ちてくる、組ぷよと呼ばれる2つ一組みのブロックをプレイヤーが操作し、ゲームの基本単位の色つきブロックである「ぷよ」を、盤面に配置していき、同色のものを4つ以上連結させることで消滅させていくゲームである。プレイヤーが上手くぷよを消滅させられなければ、ぷよはどんどん積み上がっていき、ある一定の高さに達した時点でゲームオーバーとなってしまう。本研究では、一人用のぷよぷよについて、最悪のケースでも永遠にプレイできる条件を必勝である条件とした。そして、出現するぷよの色数を一般化した場合、盤面の幅がいくつあれば必勝であるかを考察した。さらに、一般化された幅に対して、最悪のケースにおいてプレイヤーが無限にぷよを積み上げてしまうには、何色のぷよが出現すれば十分かを考察した。

結果として、出現するぷよの色数がk色のとき、kが6以上かつ偶数ならk^2幅以上、kが奇数なら$\{k(k-1)+2\}/2$幅以上の場合は必勝であることがわかった。また、盤面がw幅のとき、$w=1$なら2色以上、$w=2$または3なら$w+2$色以上、$w\geq4$なら$3w-4$色以上の場合は必敗の入力列が存在することを示した。また、出現するぷよの色数を4色と固定した場合において、盤面の幅が7あれば必勝であると示した。さらに、出現する色数が3色で盤面の幅が2のときに、プレイヤーは最悪の場合でも1回はぷよを消せることを示した。

平成25年度　修士論文

色数と盤面の幅を限定したぷよぷよの必勝性

電気通信大学大学院　情報理工学研究科
情報・通信工学専攻　情報数理工学コース
学籍番号 1131055
島田陽
指導教員:武永康彦准教授
副指導教員:村松正和教授
平成26年3月7日

目 次

1　はじめに

計算理論の分野で、ゲーム・パズルの複雑さについての研究が数多く行われており、様々なゲーム・パズルについて、必勝性判定の問題などの計算量が明らかにされている [1]。また、様々なゲーム・パズルの必勝性について、論理的な解析が行われている [2]。

落ち物パズルゲームは、パズルのブロックが次々とゲームの盤面に落ちていき、プレイヤーがブロックを操作して、適当な場所に落としていくパズルゲームである。落ち物パズルゲームは、将来の情報が分からない中で、適切な判断を下しながらプレイするゲームである。落ち物パズルゲームの研究の例として、テトリスというゲームの必勝法の研究が挙げられる [3]。この研究では、出現するブロックを限定した場合の必勝法について研究がなされた。本研究では、ぷよぷよという日本で広く知られる落ち物系パズルゲームを題材とし、その必勝法についての研究を行う。

ぷよぷよとは、格子状の盤面に次々に落ちてくる、組ぷよと呼ばれる 2 つ一組みのブロックをプレイヤーが操作し、ゲームの基本単位の色つきブロックである「ぷよ」を、盤面に配置していき、同色のものを 4 つ以上連結させることで消滅させていくゲームである。プレイヤーが上手くぷよを消滅させられなければ、ぷよはどんどん積み上がっていき、ある一定の高さに達した時点でゲームオーバーとなってしまう。ぷよぷよについての研究は、k 連鎖可能かという判定問題や、全消し可能かという判定問題の計算量の解明などが行われている [4, 5]。その他に、熱心なゲーマーの手によって、対戦用の AI の研究が盛んに行われている [6]。

本研究では、一人用のぷよぷよについて、最悪のケースでも永遠にプレイできる条件を必勝である条件とした。そして、出現するぷよの色数を k と一般化した場合、盤面の幅がいくつあれば必勝であるかを考察した。さらに、一般化された幅 w に対して、最悪のケースにおいてプレイヤーが無限にぷよを積み上げてしまうには、何色のぷよが出現すれば十分かを考察した。また、出現する色数が 3 色で盤面の幅が 2 のときに、プレイヤーは最悪の場合でも 1 回はぷよを消せることを示した。

本論文の構成は次の通りである。2 章で本研究で扱われるぷよぷよのルールを説明し、用語の定義を行う。3 章ではプレイヤーが必勝であるには、盤面にどれだけの幅があれば十分かを考察し、4 章でプレイヤーが無限にぷよを積み上げてしまうには、何色のぷよが出現すれば十分かを考察する。5 章で色数が 3 色で幅が 2 のときに、プレイヤーは最悪の場合でも 1 回はぷよを消せることを示す。最後に 6 章でまとめと今後の課題について述べる。

2　ぷよぷよのルール

この章では、本研究で用いるぷよぷよのルール及び用語について説明する。

ゲームの基本単位であるブロックをぷよと呼ぶ。それぞれのぷよには色が付いている。ゲームの盤面は格子状となっており、1 マスにつき 1 つのぷよが配置できる。盤面は長方形であり、横のラインを行、縦のラインを列と呼び、一番下の行より下は床と呼ばれる。また、盤面の行数のことを高さと表現する。

組ぷよと呼ばれる 2 つ一組のぷよが、盤面の上から重力に従い落ちてくる。ゲームをプレイするプレイヤーは、一組ぷよを左右移動または回転させることで操作する。盤面へ次々と落ちてくる組ぷよの列を入力列と呼ぶ。実際のゲームでは、プレイヤーは次の組ぷよを知ることが出来るが、本研究ではプレイヤーは入力列の情報を知ることができないとする。

落下してきたぷよは、盤面の床や他のぷよの上に着地することで、そのマスに配置される。組ぷよを横にした状態で配置すると、片方のぷよの下方向が空白であることがあるが、その場合、そのぷよはちぎれて盤面の床や他のぷよの上に配置されるまで落下する。

ぷよは、上下左右の隣接したマスに同色のぷよが配置されると連結し、4 つ以上連結した時点で、それらのぷよは消滅する。上下のぷよ同士の連結を縦連結、左右のぷよ同士の連結を横連結と呼ぶ。ぷよが消滅した際、消滅したぷよの上に乗っているぷよは着地するまで落下する。その際に、新たに 4 連結したぷよができた場合、それらのぷよも消滅する。この現象を連鎖と呼ぶ。

次の組ぷよに 1 色でも同色のぷよがあれば、プレイヤーの操作によって消滅させることができる複数のぷよの集まりを、リーチと呼ぶ。盤面上でリーチが 2 つある状態を、ダブルリーチと呼ぶ。

プレイヤーにどんな入力列であっても、盤面に積まれるぷよを有限の高さに留めた状態で永遠にプレイできる戦略があるとき、プレイヤーが必勝であるといい、その戦略を必勝法と呼ぶ。逆に、プレイヤーが最善を尽くしても、ぷよが無限に積み上がってしまうような入力列が存在するとき必敗であり、そのような入力列を必敗の入力列という。入力列はアドバーサリと呼ばれる存在によって決定される。

本稿では、ぷよの種類を大文字のアルファベットで表す。特に指示がない限り、アルファベットの種類はそのぷよの色の種類を意味する。

3 必勝の幅

この章では、ぷよの色数が決まっている場合、プレイヤーが必勝である条件として、盤面の幅がいくらあれば十分かを考察する。

プレイヤーが必勝である条件について議論するため、プレイヤーにとって入力列は最悪のものであるとする。つまり、アドバーサリはプレイヤーの戦略を知った上で、あえて状況が悪くなるような配色を次の組ぷよに設定する。

3.1 色数に対する必勝の幅

定理 3.1 ゲームに出現するぷよの色数が k 色のとき、下記の盤面の幅 w があればプレイヤーは必勝である。

$$w = \begin{cases} \frac{k^2}{2} & (k \text{ が偶数の場合}) \\ \frac{k(k-1)+2}{2} & (k \text{ が奇数の場合}) \end{cases}$$

証明　どのような組ぷよを与えられても、それぞれの列に一種類の色のぷよだけを落とせるように、各列に専用色を設定する。組ぷよが与えられたとき、両方のぷよが各色の専用列に落ちるようにプレイヤーは操作すれば必勝である。

必要な幅を考えるため、色数と同じ数の頂点を持つ完全グラフを考える。各頂点はゲームに出現するぷよの色に対応し、各辺は出現する組ぷよの組み合わせに対応している。よって、頂点数が奇数の場合は完全グラフのオイラー路を考えることで、すべての組ぷよに対応できる各列の専用色を設定できる (図 3.1)。頂点数が偶数の場合、オイラーグラフになるように、多重辺を $k/2-1$ 本追加する (図 3.2)。巡回する頂点に対応させた色を、順番に各列の専用の色に定める。辿った頂点の延べ数が必要な幅となる。辿った頂点の延べ数は、(グラフの辺の数)+1 である。よって色数が奇数の場合は $\{k(k-1)+2\}/2$、偶数の場合は $k^2/2$ となる。 □

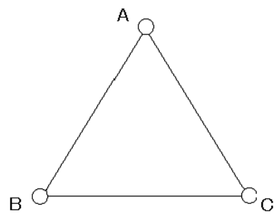

図 3.1: 色 3 のぷよぷよに対応する完全グラフと専用列

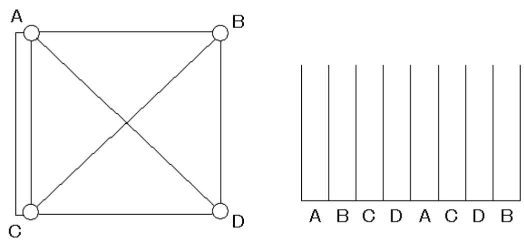

図 3.2: 色 4 のぷよぷよに対応する完全グラフと専用列

3.2　色数 4 の場合の必勝の幅

出現するぷよの色数が 4 の場合の必勝となる盤面の幅について考察する。

定理 3.2 出現するぷよの色数が 4 のとき、プレイヤーは盤面の幅が 7 あれば十分に必勝である。

証明 4色のぷよぷよは、4頂点の完全グラフによって落ちてくる組ぷよの組み合わせを表現することができる。4色のぷよぷよを、「3色のぷよぷよに加えて、残り1色が必ず組ぷよに含まれる4色のぷよぷよ」として解釈する。つまり、4色のぷよぷよを、BCDの3色のぷよぷよに加えて、AA,AB,AC,ADの組ぷよが落ちてくるぷよぷよと考えることができる(図3.3)。

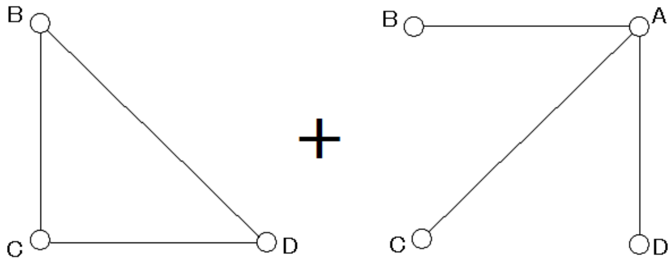

図 3.3: 4色のぷよぷよに対応するグラフを分解した図

出現するぷよの色数が3のとき、プレイヤーは盤面の幅が4あれば必勝であると、定理3.1で証明されている。以下では、ある1色が必ず組ぷよに含まれる4色のぷよぷよについて考える。

補題 3.3 出現するぷよの色数が4で、その中の1色が必ず組ぷよに含まれるとき、プレイヤーは盤面の幅が4あれば、盤面の端の列をある1色の専用列にしつつ必勝である。

証明 必ず組ぷよに含まれる色をAとする。

盤面の左の列から順に1列目、2列目、3列目、4列目とする。プレイヤーは落ちてくる組ぷよの種類により、以下の操作を行う。

- ABのとき、1列目にB、2列目にAを配置する。
- AAのとき、2列目に縦に配置する。
- ACのとき、2列目が空または一番上のぷよがCの場合、Cを下にして縦に配置する。2列目、3列目のAがリーチの場合、Aを消すように縦に配置する。2列目、3列目のCがリーチの場合、Cを消すように縦に配置する。それ以外の場合、2列目にA、3列目にCを配置する。
- ADのとき、3列目にA、4列目にDを配置する。

1列目はBのみ、4列目はDのみを配置するため、無限に積み上がることはない。また、2列目もAの上にCを配置することはないため、無限に積み上がることはない。列の下の行から順にぷよの色を見ていき、色が切り替わる回数を交替回数と呼ぶ。ここで、AとCが交互に配置される可能性のある3列目の交替回数に注目し、

プレイを続ける上で増え続けることはないことを証明する。最低でも2回以上交替している状態からスタートし、交替回数が増えていくことはないことを示す。

3列目のCのぷよが消えるスピードを考察する。CとCの間にAのぷよが挟まっているとき、2列目との連結でAのぷよを消すことができれば、Aの上下のCのぷよは連結する。これが最大で3回繰り返されればCのぷよを消すことができる。Cに挟まれているAのぷよを消すたび、交替回数は2減少する。なお、2列目との連結で消える3列目のAは、下から2番目までである。図3.4(a)は、3列目の一番下のぷよがCである場合の盤面の3列目に注目したものである。ここから、Cに挟まれたAが消え続けたとき、Cが連結していくことで最終的にCも消える為、Cが消える際に交替回数は1減少する。図3.4(b)は、3列目の一番下のぷよがAである場合の盤面の3列目に注目したものである。ここから、Cに挟まれたAが消え続けたとき、Cが連結していくことで最終的にCも消える為、Cが消える際に交替回数は2減少する。

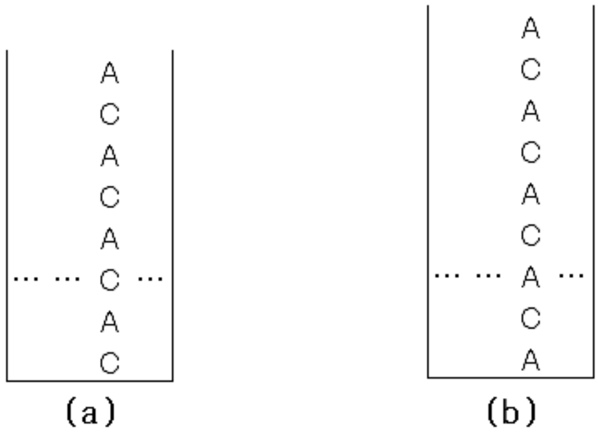

図3.4: 3列目でAとCのぷよが配置されている状態の例

次に、Aが消えてから次にAが消えるまでの間の3列目の交替回数の増減を考える。3列目の一番上のぷよや、例外のパターンなどで場合分けを考える。

1)3列目の一番上のぷよがAである場合を考える。Cに挟まれるAのぷよを消すには、2列目に最大で3つのAのぷよが必要である。3列目はAのぷよとCのぷよしか積まれないため、アドバーサリが3列目の交替回数を増やすためにはACとADを交互に選ぶ必要がある。3列目の一番上のぷよがAであるため、その上にCを積むために、アドバーサリは最初にACを選ぶ必要がある。ここで、ACを操作するルールに着目する。図3.5は盤面の2列目と3列目に注目したものである。この図の例のように、2列目が空または一番上のぷよがCのとき、プレイヤーはACをCが下になるように縦に配置する。この時点では3列目の交替回数は増えることはない。2列目の一番上がAのとき(図3.6)、ACは横に配置され、3列目にはCが積まれることで交替回数は増加する。その後ADにより、3列目にAが積まれたのち、再びACが選ばれると、プレイヤーはAが必ずリーチになっているため(図3.6の遷移後

の状態)、AC の操作は A を下にして縦に配置する。したがって、A が消えるまでの間に交替回数は高々2 しか増加しない。C に挟まれている A を消す度に、交替回数は 2 減少するため、交替回数は増えることはない。

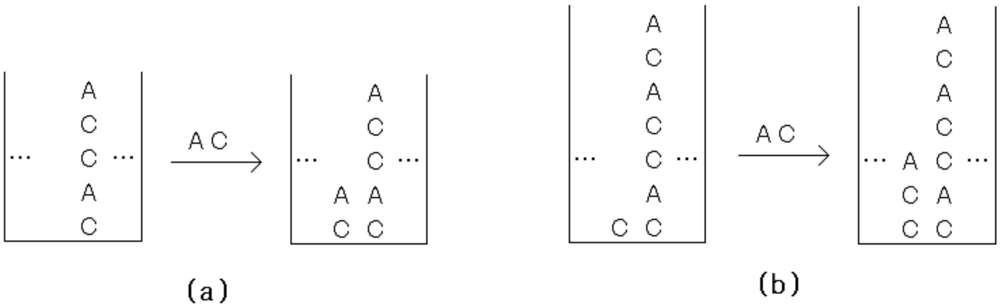

図 3.5: 2 列目が空の場合と一番上が C の場合の AC による状態遷移

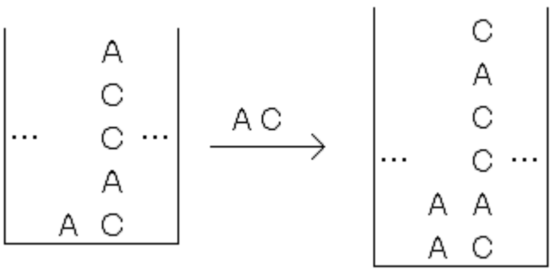

図 3.6: 2 列目の一番上が A の場合の AC による状態遷移

2)3 列目の一番上のぷよが C である場合は、アドバーサリが AD を選ぶことで 3 列目の交替回数は 1 増える。このとき、3 列目の一番上のぷよが A となるため、次に 1) の状態となる。1) では 3 列目の交替回数は高々2 増加するため、1 回 A が消える間に最大 3 増加することになる。交替回数が 3 増加した場合、アドバーサリは最後に AD を選択しているはずである。このとき、A が消えたとしても交替回数の減少は 2 であるため、交替回数が高々1 増えてしまうが、その後 C が消えるまでの間に交替回数が増え続けることはない。なぜなら、アドバーサリが AD を選んだ直後は A が一番上のぷよになるため、その後に A が消えるまでは交替回数は高々2 しか増加しない。C に挟まれている A が一度消えるごとに交替回数は 2 減少するため、交替回数の増減は 0 となる。よって、C が消えるまで交替回数が増えていくことはなく、C が消えたとき 1 多かった交替回数も減少する。

3)1) と 2) では、C に挟まれた A が消え続ける場合について考えた。次は、3 列目の一番下の行に配置されている A が消える場合を考える。この A を消しても交替回

数が1しか減少しない。3列目が一番下のぷよがAかつ、2列目が空のとき、アドバーサリはABまたはAAを選択することで、プレイヤーが次に消せる3列目のAを一番下のぷよにすることができる(図3.7)。この場合、Aを消したときに交替回数の減少は1しかない。3列目の一番下の行のAを消した後、落下したCが3列目の一番下の行に配置される。

i) まずは、3列目の一番上のぷよがAのときを考える。アドバーサリがACとADを選ぶことにより交替回数が高々2増加し、一番下のAを消すことにより交替回数が1減少するので、Aが消えた直後までに交替回数は高々1だけ増加する。これでは交替回数が高々1増えてしまうが、その後Cが消えるまでの間に交替回数が増え続けることはない。なぜなら、3列目の一番上のぷよはAであるため、その後にAが消えるまでの間に交替回数は2までしか増加しない。Cに挟まれているAが一度消えるごとに交替回数は2減少するため、交替回数の増減は0となる。よって、Cが消えるまで交替回数が増えていくことはなく、Cが消えたとき高々1多かった交替回数は減少する。図3.8は図3.7以降の状態遷移の例とそれに伴う交替回数の増減の例である。各状態の右上にある数字は、前の状態からの交替回数の増減を意味する。

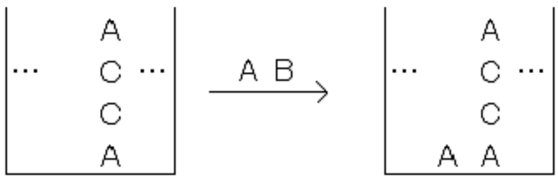

図 3.7: 3列目が一番下がAかつ2列目が空の場合のABによる状態遷移

ii) 次に3列目の一番上のぷよがCのときを考える。アドバーサリがADを選ぶことで交替回数は1増加し、3列目の一番上のぷよがAとなる。このときの1増加分だけ交替回数は増え、更にアドバーサリがACとADを選ぶことによって、一番下のAが消えるまでの間に交替回数の増加は高々3となる。一番下のAが消えたとしても、交替回数は1しか減少せず、これでは高々2増えてしまうことになる。しかし、その後、3列目の一番下の行のぷよとなったCが消えるまでの間に交替回数が増え続けることはない。なぜなら、3列目の一番上のぷよはAであるため、その後にAが消えるまでの間に交替回数は高々2しか増加しない。Cに挟まれているAが一度消えるごとに交替回数は2減少するため、交替回数の増減は0となる。したがって、3列目の一番下の行のCがリーチの状態になるまで、交替回数は高々2増えている状態を保つことができる。ここで、3列目の一番下の行のぷよとなったCの消え方について考える。

a)3列目の一番下の行のCがリーチのときに、挟まれているAが消えることでの連鎖で消えたときは、交替回数は合計3減少する。よって、高々2多かった交替回数は減少する。

b)3列目の一番下の行のCがリーチのときに、ACの操作で消えたときは、2列目、3列目は図3.9の状態になる。このとき、3列目の下から2番目のAは1番目のAと

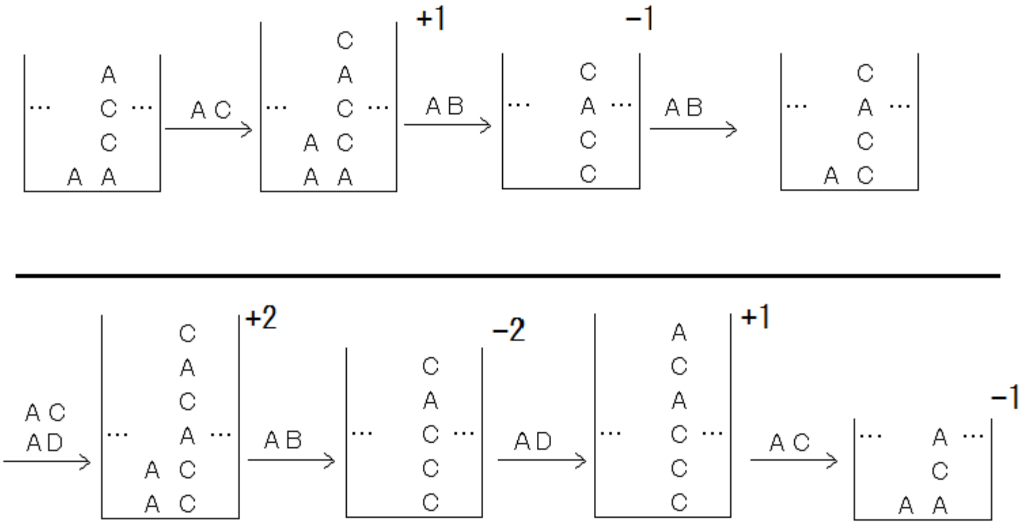

図 3.8: 図 3.7 以降の状態遷移の例

同時に消えるため、交替回数は 3 減少する。よって、この場合も交替回数は増えることはない。

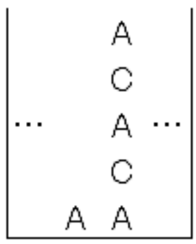

図 3.9: 3 列目の一番下の行の C が AC の操作によって消えた後の状態

4) 最後に 3 列目の C が挟まれている A を消し続けることの連鎖によらず、AC によって直接消えてしまうパターンについて考える。このとき、C はリーチの状態である。AC を操作する際の、2 列目、3 列目の C がリーチの場合、C を消すように縦に配置するというルールから、AC は縦に配置されるため、C がリーチの間は交替回数が増えることはない。よって、この場合も交替回数が増えることはない。

よって、交替回数は増えつづけることはないため、3 列目も無限に積み上がることはない。 □

補題 3.3 の証明より、ある 1 色が必ず組ぷよに含まれる 4 色のぷよぷよは、盤面の幅 4 で必勝であり、盤面の端の列は他の 3 色のうちいずれかの専用列であることが

わかる。3 色のぷよぷよもまた、盤面の幅 4 で必勝であり、盤面の端の列は 3 色のうちいずれかの専用列である。この 2 つのぷよぷよの盤面を、図のように同色の専用列である端の列を共有し、1 つの盤面とする (図3.10)。これにより、幅 7 の盤面が出来上がり、定理 3.1 の証明と補題 3.3 の証明中にある必勝法でプレイすれば、4 色のぷよぷよに対してプレイヤーは必勝である。 □

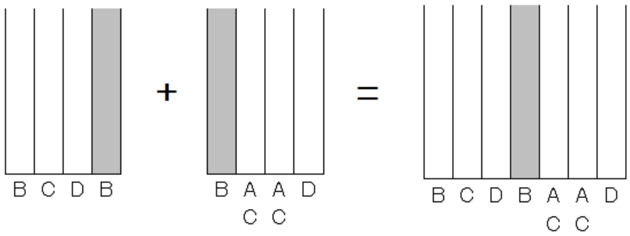

図 3.10: 4 色のぷよぷよに対する幅 7 の必勝の盤面

4　幅に対する必敗の入力列が存在する色数

この章では、プレイヤーが必敗である入力列が存在するためには、何色のぷよがゲームに出現すれば十分かを考察する。

アドバーサリの視点に立ち、プレイヤーが 1 回もぷよを消すことができない入力列を生成する戦略を考え、その戦略に必要なぷよの色数をもってして、プレイヤーが必敗となる入力列が存在するために十分なぷよの色数とする。

定理 4.1 盤面の幅 w に対して、ゲームに出現するぷよの色数 k が下記の数以上であるとき、プレーヤが必敗となる入力列が存在する。

$$k = \begin{cases} 2 & (w = 1) \\ w + 2 & (w = 2, 3) \\ 3w - 4 & (w \geq 4) \end{cases}$$

証明 最初に、w が 1 のとき、出現するぷよの色数が 2 あれば、プレイヤーが必敗である入力列が存在することを示す。アドバーサリは、異なる色の組合わせである組ぷよを決定する。色数が 2 であるため、アドバーサリは常にこのように組ぷよを決定することができる。これにより、プレイヤーはどのように組ぷよを盤面に配置しても、縦連結が 2 までしかできない。幅が 1 なので横連結もできない。したがって、一度もぷよが消えることはない。

次に、w が 2 または 3 のとき、出現するぷよの色数が $w + 2$ あれば、プレイヤーが必敗である入力列が存在することを示す。アドバーサリは、盤面の各列の一番上の

ぷよの色を含まないように、組ぷよの色を決める。色数は $w+2$ のため、アドバーサリは常にこのように組ぷよを決定できる。これにより、プレイヤーはどのように組ぷよを盤面に配置しても、ぷよが縦連結することはない。ぷよは横連結しかできないが、$w \leq 3$ なので 4 つ以上横にぷよが連結することはない。したがって、一度もぷよが消えることはない。

最後に w が 4 以上のとき、出現するぷよの色数が $3w-4$ あれば、プレイヤーが必敗である入力列が存在することを示す。アドバーサリは毎回盤面の状態を確認し、次の条件に該当するぷよの色のリスト C を作成する。1 つ目の条件はリーチのぷよの色、2 つ目の条件は各列で一番上のぷよの色である。アドバーサリは C には含まれない 2 色からなる組ぷよを次にプレイヤーに与える。常にこの条件で組ぷよを与えることができれば、プレイヤーは一度もぷよを消すことができない。

幅 w の盤面の状態のうち、2 つの条件によって C に加えられる色数が一番多い状態について考え、$|C|$ の最大数を求める。2 つ目の条件のぷよの色は組ぷよに選ばれないため、プレイヤーは絶対に縦連結を作ることができない。よって、盤面の状態について、縦連結があるものについて考える必要はない。

2 つ目の条件によって C に加わる色のリストを C_2 とする。各列の一番上のぷよが全て異なる場合 $|C_2|$ が最大なので、$|C_2|$ の最大値は w である。

1 つ目の条件によって C に加わる色のリストを C_1 とする。2 つ目の条件より、縦には 1 つも連結していないので、プレイヤーは横連結のリーチしか作ることができない。すなわち、リーチは図 4.1, 図 4.2 の A の形のみである。Y は連結しないぷよが存在するか、何もないマス、または盤面の床を意味する。X は上下間で連結しない任意の色のぷよ、または盤面の床を意味する。 リーチであるには、対象となるぷ

```
  A A A
Y X X X Y
Y X X X Y
```

図 4.1: 横連結のリーチの形 1

よの隣接マスに組ぷよを配置できなくてはならないため、図 4.1, 図 4.2 の Y の位置のいずれかにぷよが存在するか、1 行目の Y と X が盤面の床である必要がある。このように、リーチが存在する行の 1 つか 2 つ下の行には、横 4 連結を作るために、上にぷよを積むための盤面の床、またはぷよが存在する。そのような盤面の床、またはぷよを足場と呼ぶ。図 4.1, 図 4.2 の Y の位置に存在する盤面の床、またはぷよが足場である。

$|C_1|$ が最大になるときは、盤面に存在するリーチの数が最大であり、それらの色が全て異なるときである。ここで、幅 w の盤面に対して、最もリーチの数が多くなる状態について考える。まず、幅が 6 以下の場合、一つの足場に対して左右の両方

```
A A   A
X X Y X
X X Y X
```

図 4.2: 横連結のリーチの形 2

に異なる色のリーチが存在することはありえない。また、それぞれのリーチには必ず足場が存在するため、足場の数が最大になる状態が盤面のリーチの数が最大になる状態である。

幅が 7 以上になると、図 4.3 のように一つの足場に対して左右の列の両方に異なるリーチが存在する状態も考えられる。このように、一つの足場に対して左右の列の両方に異なるリーチが存在するとき、その足場を境にして、図 4.4 のようにぷよの塊が分割される状態となる。

ここで、左右の列の両方に異なるリーチを持つ足場を境目と呼ぶ。また、盤面のぷよ全体を、盤面の端と端、端と境目の列、境目の列と境目の列に挟まれるぷよに区切り、一区切りのぷよを山と呼ぶ。

```
                  ⋮
                  ⋮
      X N N N           L L L X
      X M M M           K K K X
⋯ ⋯  X X H I J       E F G X X ⋯ ⋯
      X X D D D       B B B X X
      X X C C C       A A A X X
      ─────────────────────────────
                  境
                  目
```

図 4.3: 境目

幅 w の盤面について、リーチの数が最大となる状態を考える。このとき、各山のリーチのなかで最も高い行にあるリーチにそれぞれ着目する。それらのリーチの真横に、図 4.5 の Y のように他の色のぷよが隣接していることはない。なぜなら、4 個以上ぷよが並んでいるとすると、図 4.5 の色つきの 3 マスのように、その上にリーチを作ることができるので、リーチの数が最大となる状態であるという前提と矛盾する。4 個以上ぷよが並んでいないということは、そのリーチの上に足場を作るこ

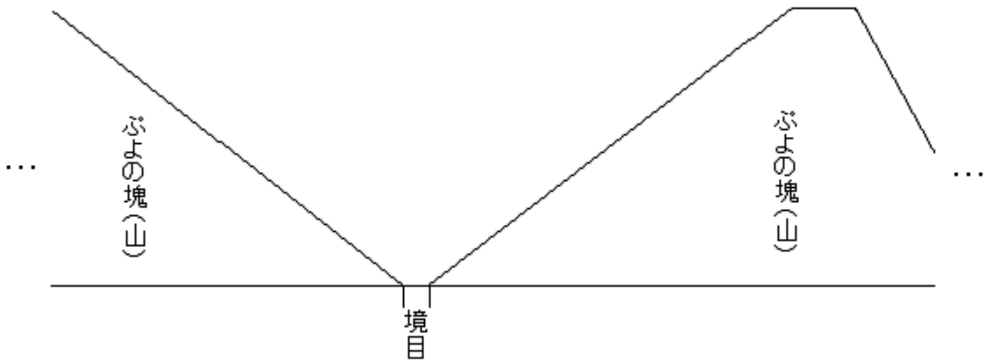

図 4.4: 境目と山

とはできない。よって、山が 1 個あるごとに足場のできない列がちょうど 3 列存在することになる。

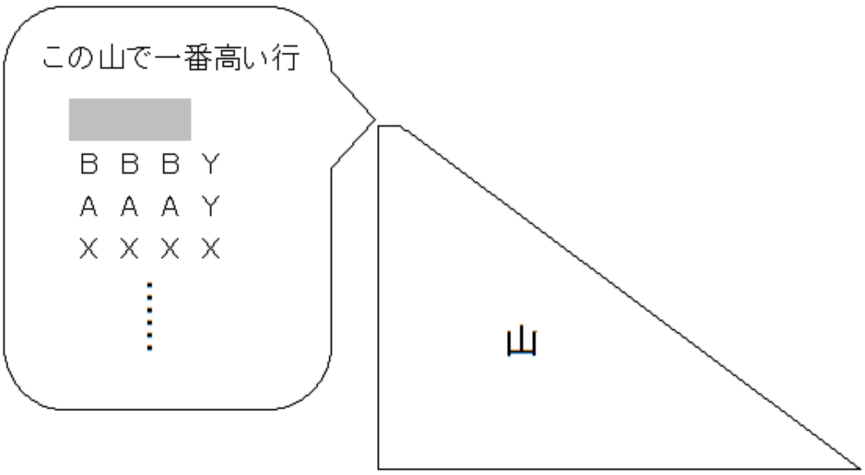

図 4.5: 山で一番高い行

ここで、リーチの数が最大となる盤面の状態は、足場の数が最大となる状態であることを示す。境目は普通の足場と比較して、反対側に高々2 つ多くのリーチを持っている。しかし、境目が一つ存在するごとに山が 1 個増える。山が 1 個増えるということは、存在しうる足場の数が 3 つ減る。足場 1 つに対して高々2 つのリーチが存在できるので、足場が 3 つ減ると高々6 つのリーチが減ってしまう。よって、境目を持つことで両隣にリーチを持つ状態より、山が 1 個で足場の数が最大となる状態の方がリーチの最大数は大きくなる。

1 つの山には足場ができない列が少なくとも 3 列存在するため、幅 w の盤面に対

して足場の最大数は $w-3$ である。１つの足場に対してリーチは高々２つ存在するため、リーチの最大数は $2(w-3)$ である。よって、$|C_1|$ の最大数は $2(w-3)$ である。

ここで、$|C|$ が最大である状態の中には、C_1 と C_2 に同じ色がなく、かつ $|C_1|$ と $|C_2|$ がどちらも最大となるような状態が存在する。よって、$|C|$ の最大数は $|C_1|$ の最大数と $|C_2|$ の最大数を加えたものである。以上から、$|C|$ の最大数は $w+2(w-3)$ である。

一番色数が多くなる C の他に 2 色あれば、アドバーサリは常にこの戦略をとることができる。よって、$w+2(w-3)+2=3w-4$ 色あれば、プレイヤーが一度もぷよを消せないようにアドバーサリは妨害が可能である。以上から、幅 $w \geq 4$ の盤面に対して、色数が $3w-4$ 以上のとき、プレイヤーが一度も消すことのできない入力列が存在する。 □

5　色数 3 幅 2 の場合

前章で幅 2 のとき、ゲームに出現するぷよの色が 4 色だとプレイヤーが必敗となる入力列が存在することを示した。この章では、盤面の幅を 2 のとき、色数が 3 の場合を考察する。その条件でプレイヤーは最善を尽くせば、最悪の入力列に対しても最低でも 1 回はぷよを消すことが可能であることを示す。ここでは、アドバーサリは盤面のぷよが消えてしまうような組ぷよは絶対に選ばないとする。

定理 5.1　色数 3 幅 2 のとき、プレイヤーは最低でも 1 回はぷよを消すことが可能である。

証明　この定理を証明するために、まずは次の補題を証明する。

補題 5.2　盤面の一番高い位置にあるぷよが縦 3 連結している場合、プレイヤーは必ず 1 回ぷよを消すことができる。

証明　盤面の一番高い位置にあるぷよが縦 3 連結しているとき、アドバーサリがどのように組ぷよを選んでも、低い方の列に縦にぷよを配置していけば、図 5.1 の左上の状態に必ず遷移することができる。ここで、リーチが盤面に 3 つある状態をトリプルリーチと呼ぶ。トリプルリーチとなった状態では、次にどのような組ぷよが来ても、必ずぷよを消すことができる。図 5.1 はアドバーサリが選びうる全ての組ぷよに対する、トリプルリーチの状態までのプレイヤーの配置の方法である。盤面の一番高い位置にあるぷよが縦 3 連結しているとき、図 5.1 の状態遷移図より、プレイヤーは必ず 1 回ぷよを消すことができる。 □

補題 5.2 より、盤面の一番高い位置にあるぷよが縦 3 連結している場合、プレイヤーは必ず 1 回ぷよを消すことができる。よって、アドバーサリは盤面の一番高い位置にあるぷよが縦 3 連結にしている状態にされるような組ぷよは選ばない。

図 5.2 の状態遷移図は、空の状態からスタートし、アドバーサリが選びうる全ての組ぷよに対する、図 5.1 のいずれかの状態の類似系への遷移図である。類似系とは、盤面の上部がぷよの色の種類が異なるだけで、同じ形をしている状態である。類似

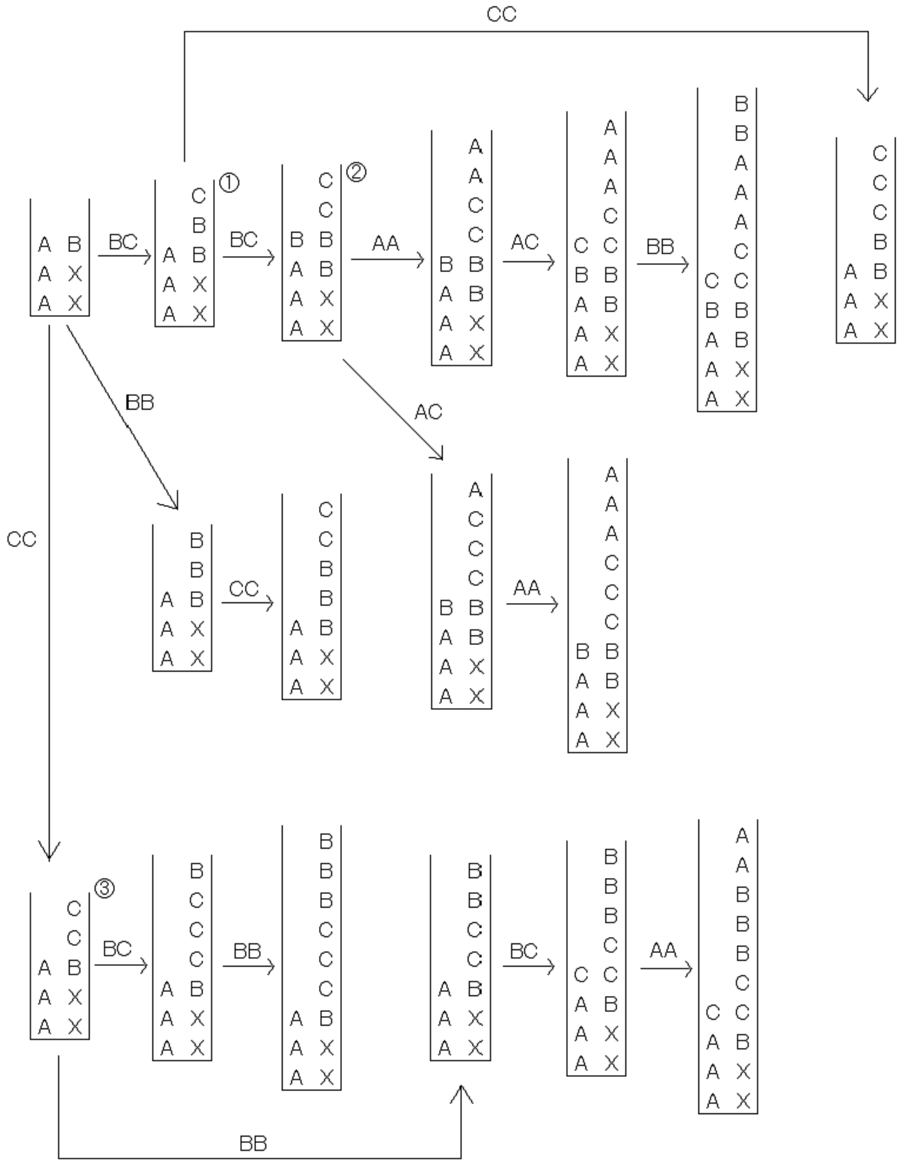

図 5.1: トリプルリーチへの状態遷移図

系同士では、全く同じように状態遷移できるものとみなすことができる。図 5.2 の状態遷移図より、プレイヤーは必ず 1 回ぷよを消すことができる。図中の①②③は、図 5.1 のそれぞれ①②③の類似系であり、同じように状態遷移をすることができるため、トリプルリーチの状態まで遷移することが可能である。 □

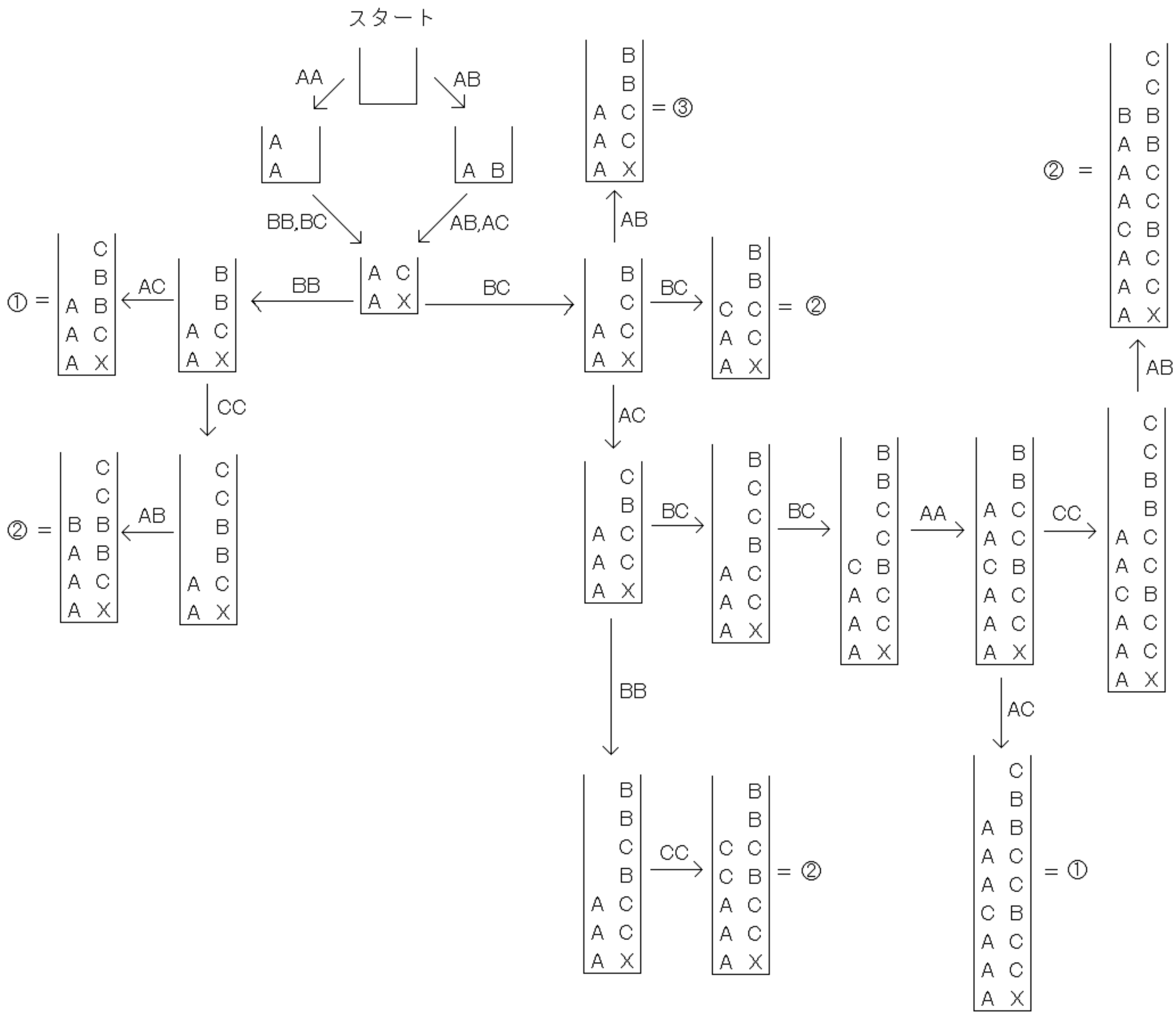

図 5.2: 図 5-1 の類似系への状態遷移図

6　おわりに

本論文では、プレイヤーが必勝であるのに十分な盤面の幅数や、プレイヤーが必敗となるのに十分な色数について考察した。k 色のとき、k が 6 以上かつ偶数なら k^2 幅以上、k が 4 または奇数なら $\{k(k-1)+2\}/2$ 幅以上の場合は必勝であることと、w 幅のとき、$w \geq 4$ なら $3w-4$ 色以上の場合は必敗の入力列が存在することを示し

た。また、出現する色数が 3、盤面の幅が 2 と固定した場合、プレイヤーは一度でもぷよを消せることを示した。

最後に、必勝、必敗と色数、幅の関係を表にしてまとめた（図 6.1）。①のマスは、少なくとも 1 回はぷよが消せることが明らかになったことを示している。空白のマスは必勝か、あるいは必敗となる入力列が存在するか明らかになっていないことを示している。

<table>
<tr><th></th><th colspan="10">幅</th></tr>
<tr><th>色数</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>…</th><th>11</th><th>…</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="10">必勝</td></tr>
<tr><td>2</td><td rowspan="8">必敗</td><td colspan="9">必勝</td></tr>
<tr><td>3</td><td>①</td><td></td><td colspan="7">必勝</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="5">必敗</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="4">必勝</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="4">必敗</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">必勝</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td rowspan="2">必敗</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>⋮</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

図 6.1: 必勝、必敗と色数、幅の関係

今後の課題として、図 6.1 の空白のマスについて、それぞれ必勝であるか、必敗となる入力列が存在するかを明らかにすることが重要な課題である。

謝辞

本研究を進めるにあたり、ご指導を頂いた修士論文指導教員の武永康彦准教授に感謝致します。また、日常の議論を通じて多くの示唆を頂いた武永研究室の皆様に感謝致します。

参考文献

[1] Erik D. Demaine, “Playing Games with Algorithms: Algorithmic Combinatorial Game Theory”, in Proc. 26th Symposium on MFCS 2001, LNCS volume 2136, Marianske Lazne, Czech Republic, 2001, pp 18-32.

[2] Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy, “Winning Ways for Your Mathematical Plays, Volume 1-4(2nd edition)”, A K Peters, Ltd, 2001-2003.

[3] Brzustowski John, “Can you win at TETRIS?”, Master’s thesis, University of British Columbia, 1992.

[4] 松金輝久, 武永康彦, “組合せ最適化問題としてのぷよぷよの連鎖数判定問題”, 電子情報通信学会論文誌. D, 情報・システム J89-D(3), 405-413, 2006-03-01.

[5] 牟田秀俊, “ぷよぷよは NP 完全”, 電子情報通信学会技術研究報告. COMP, コンピュテーション 105(72), 39-44, 2005-05-13.

[6] http://kamoland.com/wiki/wiki.cgi?RensaWiki.