

## 修 士 論 文 の 和 文 要 旨

|   |                                  |      |         |
|---|----------------------------------|------|---------|
| 研究科・専攻  | 大学院 情報理工学研究科 情報・通信工学専攻 博士前期課程    |      |         |
| 氏 名   | 山野 駿                             | 学籍番号 | 1431108 |
| 論 文 題 目   | 連続力学系におけるホモクリニック軌道の精度保証による検証について |      |         |
| <p>要 旨</p> <p>本論文では、与えられた常微分方程式で記述される連続力学系がホモクリニック軌道を持つことを、精度保証の技法を用いて検証する方法について論じる。この方法が適用できれば、問題としている力学系にホモクリニック軌道が存在することが数学的に証明され、かつ、その存在範囲が特定されてホモクリニック軌道を捕捉することが可能となる。</p> <p>常微分方程式で記述される連続力学系において、右辺が時間変数 <math>t</math> を陽に含まないとき、これを自励系という。また、自励系において、方程式右辺の零点 <math>\mathbf{x}^*</math> を不動点と呼ぶ。時刻 <math>t=0</math> で初期点 <math>\mathbf{x}</math> から出発する解軌道 <math>\varphi(t, \mathbf{x})</math> のうち、時刻が正の無限大に向かう時と負の無限大に向かう時に、ともに <math>\mathbf{x}^*</math> に収束するものをホモクリニック軌道と呼ぶ。時刻が正の無限大・負の無限大に向かう時に収束する不動点が異なる場合には、これをヘテロクリニック軌道と呼ぶ。</p> <p>与えられた力学系がホモクリニック軌道を持つかどうか分からない場合に、その存在自体を検証する方法を考える。ここでは、<math>k</math> 個のパラメータを導入して力学系の集合を扱い、その集合の中にホモクリニック軌道を持つ力学系が存在することを示す。これが本論文におけるホモクリニック軌道の捕捉の意味である。なお、検証が成功すれば、ホモクリニック軌道の空間的な存在範囲も特定できる。</p> <p>パラメータの個数 <math>k</math> は、扱う力学系の不動点の特性によって定まる。<math>k=1</math> の場合については、Lyapunov 関数を精度保証で構成した上で、中間値の定理を適用する検証法が松江・山本によって示されている。<math>k=2</math> の場合、もはや中間値の定理は利用できないが、写像度の議論を用いた新しい検証法の理論的準備が松江・山本により整えられている。</p> <p>本論文では、この理論の実際の適用を試みることを目的とする。例題に則して理論の整理を行った後、ホモクリニック軌道の精度保証による検証を行い、その存在を証明するとともに存在範囲を特定する。</p> |                                  |      |         |

平成27年度 修士論文

連続力学系におけるホモクリニック軌道の  
精度保証による検証について

学籍番号 1431108

山野駿

情報・通信工学専攻 情報数理工学コース

指導教員:山本野人教授

副指導教員:緒方秀教教授

## 概要

本論文では、与えられた常微分方程式で記述される連続力学系がホモクリニック軌道を持つことを、精度保証の技法を用いて検証する方法について論じる。この方法が適用できれば、問題としている力学系にホモクリニック軌道が存在することが数学的に証明され、かつ、その存在範囲が特定されてホモクリニック軌道を捕捉することが可能となる。

連続力学系

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{f} \in \mathbf{R}^n$$

において、右辺  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  が  $t$  を陽に含まないとき、これを自励系という。また、自励系において、右辺の零点  $\mathbf{x}^*$  を不動点と呼ぶ。時刻  $t = 0$  で  $\mathbf{x}$  から出発する解軌道  $\varphi(t, \mathbf{x})$  が、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^*$$
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^*$$

となるとき、 $\varphi(t, \mathbf{x})$  の成す軌道をホモクリニック軌道と呼ぶ。この軌道が異なる不動点  $\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*$  間で形成される場合には、これをヘテロクリニック軌道と呼ぶ。

与えられた力学系がホモクリニック軌道を持つかどうか分からない場合に、その存在自体を検証する方法を考える。ここでは、パラメータ  $\mathbf{p} \in P \subset \mathbf{R}^k$  を導入して力学系の集合を扱い、その集合の中にホモクリニック軌道を持つ力学系が存在することを示す。これが本論文におけるホモクリニック軌道の捕捉の意味である。なお、検証が成功すれば、ホモクリニック軌道の空間的な存在範囲も特定できる。

パラメータ  $\mathbf{p}$  の次元  $k$  は、扱う力学系の不動点の特性によって定まる。 $k = 1$  の場合については、Lyapunov 関数を精度保証で構成した上で、中間値の定理を適用する検証法が松江・山本 [1] によって示されている。

$k = 2$  の場合、もはや中間値の定理は利用できないが、写像度の議論を用いた新しい検証法の理論的準備が松江・山本 [2] により整えられている。

本論文では、この理論の実際の適用を試みることを目的とする。例題に則して理論の整理を行った後、ホモクリニック軌道の精度保証による検証を行い、その存在を証明するとともに存在範囲を特定する。

# 目次

|          |                            |           |
|----------|----------------------------|-----------|
| <b>1</b> | はじめに                       | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | 不動点近傍の力学系                  | <b>4</b>  |
| <b>3</b> | <b>Lyapunov 関数</b>         | <b>4</b>  |
| 3.1      | Lyapunov 関数の構成             | 5         |
| 3.2      | $L(\boldsymbol{x})$ の妥当性   | 6         |
| 3.3      | Lyapunov 関数の定義域の検証         | 7         |
| 3.4      | 実対称行列 $Y$ の妥当性             | 8         |
| 3.4.1    | $Y$ の正則性                   | 8         |
| 3.4.2    | $Y$ の正負の固有値の数について          | 9         |
| <b>4</b> | ホモクリニック軌道に対する検証手順          | <b>11</b> |
| <b>5</b> | 検証手順に関する数学的論証              | <b>13</b> |
| 5.1      | 利用する概念・定理                  | 13        |
| 5.2      | Lyapunov 関数の錐体面における軌道通過の検証 | 16        |
| 5.3      | 初期点の設定と連続性                 | 17        |
| 5.3.1    | 初期点の設定                     | 17        |
| 5.3.2    | 初期点の連続性                    | 18        |
| 5.4      | 連続関数の構成について                | 21        |
| 5.5      | 実際の検証方法との関係                | 25        |
| <b>6</b> | 数値例                        | <b>27</b> |
| 6.1      | 問題設定                       | 27        |
| 6.2      | Lyapunov 関数                | 28        |
| 6.2.1    | Lyapunov 関数の構成             | 28        |
| 6.2.2    | Lyapunov 領域の検証             | 29        |
| 6.3      | 初期点の設定と連続性の確認              | 30        |
| 6.4      | 錐体面における軌道通過の確認             | 31        |
| 6.5      | ホモクリニック軌道の検証               | 32        |
| <b>7</b> | まとめと展望                     | <b>36</b> |
| <b>8</b> | 謝辞                         | <b>36</b> |

# 1 はじめに

力学系の分野では近年，精度保証の技術が盛んに用いられるようになってきた．ホモクリニック軌道のように，存在検証が困難な対象についても，精度保証を利用した解析が行われている．また，Lyapunov 関数のような強力な解析ツールも精度保証によって構成可能となってきた．

本論文では，Lyapunov 関数を精度保証で構成し，これを用いてホモクリニック軌道の存在検証を行う手法について論じる．

連続力学系

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{f} \in \mathbf{R}^n$$

を考える．以下では，右辺  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  が  $t$  を陽に含まない自励系についてのみ扱う．これによって，点  $\mathbf{x}$  を初期値とする解軌道  $\varphi(t, \mathbf{x})$  は， $\mathbf{x}$  が異なれば交叉しないため，扱いやすくなる．

右辺の零点  $\mathbf{x}^*$  を不動点と呼ぶ． $d\varphi(t, \mathbf{x}^*)/dt$  は恒等的に 0 となる．時刻  $t = 0$  で  $\mathbf{x}$  から出発する解軌道  $\varphi(t, \mathbf{x})$  が，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^*$$
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^*$$

となるとき， $\varphi(t, \mathbf{x})$  の成す軌道をホモクリニック軌道と呼ぶ．このような軌道が異なる不動点  $\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*$  間で形成される場合には，これをヘテロクリニック軌道と呼ぶ．

次章で定義する双曲型不動点については， $t \rightarrow \infty$  で  $\mathbf{x}^*$  へ収束する初期点の集合および， $t \rightarrow -\infty$  で  $\mathbf{x}^*$  へ収束する初期点の集合は，ともに多様体となることが知られている．多様体とは，局所座標が入っていて局所的にユークリッド空間とみなせる集合のことであるが，詳細については，文献 [3] を参照されたい．さらに， $t \rightarrow \infty$  で  $\mathbf{x}^*$  へ収束する初期点の集合を安定多様体， $t \rightarrow -\infty$  で  $\mathbf{x}^*$  へ収束する初期点の集合を不安定多様体と呼ぶ．この安定多様体と不安定多様体を持つ双曲型不動点を，特にサドル型不動点とよぶ．不動点を繋ぐホモクリニック軌道，ヘテロクリニック軌道は，この安定多様体と不安定多様体の接続であると言える．また， $n$  次元力学系のサドル型不動点において，安定多様体の次元を  $s$ ，不安定多様体の次元を  $u$  としたとき， $s + u = n$  が成立する．

さて，ホモクリニック軌道を捕捉する方法としては，

- (a) 与えられた力学系がホモクリニック軌道を持つことが判明している場合に対し，その存在範囲を検証する方法．
- (b) 与えられた力学系がホモクリニック軌道を持つかが判明していない場合に対し，その存在自体を検証する方法．この場合，存在検証に伴って存在範囲も確定される．

の二種が考えられる。(a)の場合は、自励系では解軌道が交叉しないという特性を利用して、比較的容易に検証が可能である。したがって、本論文では(b)の方法について論じることとする。

ホモクリニック軌道は、存在していても特異的であることがほとんどであり、方程式の係数の僅かな変動でその存在が失われてしまうことが多い。このような特異性を考慮して、 $k$ 個のパラメータの組  $\mathbf{p} \in P \subset \mathbf{R}^k$  を導入する。通常、 $k$  はホモクリニック軌道の余次元に取られる。

ホモクリニック軌道の存在検証の手順の概略は、以下のようになる。

- (1)  $\mathbf{x}^*$  の不安定多様体上の点  $\mathbf{x}$  を選ぶ。不安定多様体は  $\mathbf{p}$  に依存することに注意する。
- (2) 点  $\mathbf{x}$  を始点とする解軌道  $\varphi(t, \mathbf{x})$  を Lohner 法により計算する。ここで、Lohner 法は、常微分方程式の初期値問題に対する精度保証法であり、Taylor 展開法、Schauder の不動点定理を用いた打ち切り誤差評価、QR 分解を用いた座標変換による誤差拡大の低減などで構成される手法である。詳細については、文献 [4] を参照されたい。
- (3)  $\mathbf{p}$  を集合  $P$  の中で動かすとき、 $\varphi(t, \mathbf{x})$  が安定多様体に接続するような  $t, \mathbf{p}$  が存在することを確認する。

この過程で、不安定多様体と安定多様体の存在範囲を特定する必要がある。これに Lyapunov 関数を用いる。これについては、第3章で記述する。

手順(3)において、余次元1のホモクリニック軌道のとき、すなわちパラメータが1つのときは中間値の定理が利用される [1]。余次元が2のとき、すなわちパラメータが2つのときは、もはや中間値の定理では不十分であり、Brouwer の一致点定理と呼ばれるものを利用する。これは写像度の議論を用いた定理であり、写像度の精度保証による扱が必要になる。そのために、Interval Simplex Theorem (IS 定理) を用意する。IS 定理は、松江・山本 [2] によって導入された精度保証で写像度を扱うための定理である。Brouwer の一致点定理、IS 定理についての詳細は第5章に記述する。

検証に関する一連の理論の準備は、IS 定理を含め松江・山本 [2] によって成されているが、これを実際に適用した例は示されていない。本論文は、余次元2のホモクリニック軌道の数値的検証法について、上記の理論を適用することを試みるものである。例題としては、 $n = 3$  の場合を取り上げ、理論的な内容も3次元に限定した形に整理して記述する。その準備の下で、精度保証によるホモクリニック軌道の存在検証を第6章で行う。

なお、その他の精度保証に関する基本的技法については、文献 [5], [6] などを参照されたい。

本論文のテーマに対する先行研究としては、Wilczak [7] による時間逆転と Covering relation を用いた方法が挙げられる。これは、3次元力学系における余次元2のホ

モクリニック軌道に対して、時間を逆転させ余次元 1 と見なすことで問題を単純化したものである。Covering relation は、トポロジーの議論を用いた力学系の解析手法である。これについては、Zgliczyński らによる論文 [8] に詳細が記述されている。

## 2 不動点近傍の力学系

連続力学系

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{f} \in \mathbf{R}^n$$

において、右辺  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  の零点である不動点  $\mathbf{x}^*$  が存在するものとする。  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  は考えている領域で  $C^r (r \geq 1)$  とし、  $\mathbf{x}^*$  における  $\mathbf{f}$  のヤコビ行列を  $D\mathbf{f}^* := D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$  とおく。  $D\mathbf{f}^*$  の固有値の実部が全て非零、つまり正負のどちらかである場合、不動点  $\mathbf{x}^*$  は双曲型であるという。本論文においては、この双曲型不動点についてのみ扱う。双曲型不動点は、  $D\mathbf{f}^*$  の固有値実部の正負によって以下の 3 種類に分別される。

- (1) 固有値実部が全て負の場合  
このとき、不動点は吸引点とよばれ、不動点近傍で不動点に流入するフローを持つ。
- (2) 固有値実部が全て正の場合  
このとき、不動点は湧出点とよばれ、不動点近傍で不動点から流出するフローを持つ。
- (2) 正と負の固有値実部を持つ場合  
このとき、不動点は鞍点 (サドル) とよばれ、不動点近傍において、ある方向からは流入し、ある方向からは流出するフローを持つ。

サドル型不動点は、  $t \rightarrow \infty$  で不動点に収束する安定多様体と、  $t \rightarrow -\infty$  で不動点に収束する不安定多様体を持つ。いま、  $D\mathbf{f}^*$  の実部正の固有値の数と、実部負の固有値の数をそれぞれ  $u, s$  とおく。  $u, s$  の値は、それぞれ不安定多様体の次元と安定多様体の次元に一致する。特に、実部正の固有値に対する固有ベクトルは不安定多様体の、実部負の固有値に対する固有ベクトルは安定多様体の不動点における接ベクトルとなる [3]。

## 3 Lyapunov 関数

双曲型不動点近傍での力学系は、これを線形化した力学系で近似されることが知られている [3]。したがって、双曲型不動点にあってはその小さな近傍で Lyapunov

関数が存在する。Lyapunov 関数は位相空間上で等位面を成し、解は等位面を下る方向へ単調に変位する。不動点周りの力学系の解析において、Lyapunov 関数を構成することは非常に重要な意味を持つ。

ここで Lyapunov 関数とは、ある開集合  $U \subset \mathbf{R}^n$  に対して以下を満たす  $C^1$  関数  $L : U \rightarrow \mathbf{R}$  をいう。

1.  $\mathbf{x} \in U$  における各解軌道  $\varphi(t, \mathbf{x})$  について  $(dL/dt)(\varphi(t, \mathbf{x}))|_{t=0} \leq 0$
2.  $\varphi(t, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}^* \in U$  となる不動点  $\mathbf{x}^*$  について  $(dL/dt)(\varphi(t, \mathbf{x}))|_{t=0} = 0$

以下では、文献 [13] 及び [14] に従い、双曲型不動点に対する Lyapunov 関数の構成法、及びその定義域の検証法について論じる。

### 3.1 Lyapunov 関数の構成

1.  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  における  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  のヤコビ行列を  $D\mathbf{f}^*$  と置く。これが正則行列によって対角化可能であるとし、 $\Lambda$  を固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  を並べた対角行列、 $X$  を対応する固有ベクトルを並べた行列とする。ただし、 $\lambda_k (k = 1, \dots, n)$  の実部は非零であることを仮定する。

このとき、

$$\Lambda = X^{-1} D\mathbf{f}^* X$$

となる。 $\Lambda$  と  $X$  の算定には通常の浮動小数点演算を用いる。なお、対角化可能でない場合については、文献 [12] で議論されている。

2. 行列  $I^*$  を、ベクトル  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  を対角成分とする対角行列とする。ここに、

$$i_k = \begin{cases} 1, & \text{if } \operatorname{Re}(\lambda_k) < 0, \\ -1, & \text{if } \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0. \end{cases}$$

なお、双曲性の仮定より、 $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  となることはない。

3. 実対称行列  $Y$  を以下のように算定する。

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= X^{-H} I^* X^{-1} \\ Y &= \operatorname{Re}(\hat{Y}) \end{aligned}$$

ただし、 $X^{-H}$  は行列  $X$  の共役転置の逆行列であり、この算定も浮動小数点演算を用いて行う。



4. Lyapunov 関数の候補として、次の 2 次形式を定義する.

$$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*).$$

精度保証で用いる際には、 $Y$  の代わりに  $(Y + Y^T)/2$  を用いるなどの方法で、 $Y$  の対称性を確保する.

### 3.2 $L(\mathbf{x})$ の妥当性

上で導いた  $L(\mathbf{x})$  が不動点を含む領域で Lyapunov 関数の要件を満たすための十分条件を導き、また双曲型不動点の十分小さな近傍ではこの条件を満たしていることを示す.

解軌道  $\mathbf{x}(t)$  に沿って  $L(\mathbf{x}(t))$  を  $t$  で微分すると、

$$\frac{d}{dt}L(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T Y (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

となる. ここで、

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)), s \in [0, 1]$$

を考える.

$$\frac{d}{ds}\mathbf{g} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

および  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  となることから、

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \int_0^1 D\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)) ds (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

を得る. ただし  $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$  は  $\mathbf{f}$  の  $\mathbf{x}$  におけるヤコビ行列である. これより、 $L(\mathbf{x}(t))$  の  $t$  微分は、実 2 次形式

$$\frac{d}{dt}L(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T \int_0^1 (D\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))^T Y + Y D\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))) ds (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

で表されることになる.

いま、 $\mathbf{z} = \mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$  とおき、実対称行列  $A(\mathbf{z})$  を

$$A(\mathbf{z}) = D\mathbf{f}(\mathbf{z})^T Y + Y D\mathbf{f}(\mathbf{z})$$

で定める.  $\mathbf{x}^*$  と  $\mathbf{x}$  を結ぶ線分上の任意の点  $\mathbf{z}$  について  $A(\mathbf{z})$  が負定値であれば、 $\mathbf{x}$  に対して  $dL(\mathbf{x})/dt < 0$  となる.

以上より、不動点  $\mathbf{x}^*$  に関する星型領域  $D_L$ 、すなわち

- $\mathbf{x}^* \in D_L$

- $\mathbf{x} \in D_L$  に対し任意の  $0 \leq s \leq 1$  について  $\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \in D_L$

を満たす領域においては、任意の  $\mathbf{z} \in D_L$  に対して  $A(\mathbf{z})$  が不定値であることが、 $L(\mathbf{x})$  が  $D_L$  で Lyapunov 関数となるための十分条件となる。

次に、 $\mathbf{z}$  が不動点  $\mathbf{x}^*$  の近傍にあるときの  $A(\mathbf{z})$  の負定値性を示す。  $A(\mathbf{z})$  の固有値の  $\mathbf{z}$  に関する連続性から、  $A(\mathbf{x}^*)$  の負定値性を示せばよい。

一般に、エルミート行列  $H$  の 2 次形式は実数値を取る。特に、実ベクトル  $\mathbf{z}$  については、

$$\mathbf{z}^T H \mathbf{z} = \mathbf{z}^T \text{Re}(H) \mathbf{z}$$

となる。したがって、  $A(\mathbf{x}^*)$  の代わりにエルミート行列

$$A^* = (D\mathbf{f}^*)^H \hat{Y} + \hat{Y} D\mathbf{f}^*$$

の負定値性を調べればよい。  $\hat{Y}$  の定義を用いると

$$\begin{aligned} A^* &= (D\mathbf{f}^*)^H X^{-H} I^* X^{-1} + X^{-H} I^* X^{-1} D\mathbf{f}^* \\ &= X^{-H} \Lambda^H I^* X^{-1} + X^{-H} I^* \Lambda X^{-1} \\ &= X^{-H} (2\text{Re}(\Lambda) I^*) X^{-1} \\ &= -2X^{-H} |\text{Re}(\Lambda)| X^{-1} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで  $|\text{Re}(\Lambda)|$  は行列  $\text{Re}(\Lambda)$  の各成分の絶対値を取った行列を表す。これより、  $A^*$  は負定値のエルミート行列であることがわかる。したがって、  $\mathbf{x}^*$  の十分小さな近傍では、

$$\frac{d}{dt} L(\mathbf{x}) < 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$$

となる。一方、  $dL(\mathbf{x}^*)/dt = 0$  であるから、  $L(\mathbf{x})$  はこの近傍で Lyapunov 関数の要件を満たす。

### 3.3 Lyapunov 関数の定義域の検証

構成した Lyapunov 関数が定義される領域を検証する。

不動点に関する星型領域  $D_L$  を取り、この領域に対して Lyapunov 関数の要件を満たすかを確認する。まず、領域  $D_L$  を不動点近傍の領域  $D_{L1}$  と、それ以外の領域  $D_{L2}$  に分ける。さらに、  $D_{L1}$ 、  $D_{L2}$  を適当な小領域に分割する。これらについて、次の検証条件の成立を確認する。

#### Stage1. 領域 $D_{L1}$ の検証

$D_{L1}$  を分割した各小領域を区間ベクトル  $[\mathbf{x}]$  で抱合し、さらに  $A([\mathbf{x}])$  の負定値性を精度保証法で以下の手順により検証する。

1.  $[\mathbf{x}]$  の中心ベクトルを  $\mathbf{x}$  とする. 行列  $A(\mathbf{x})$  を浮動小数点演算で算定し, その対角化を近似的に行う. すなわち,

$$\Lambda = (X)^{-1}A(\mathbf{x})X$$

となる行列  $X$  を算定する.

2. 精度保証法によって区間行列  $(X)^{-1}A([\mathbf{x}])X$  を算定し, その成分を  $[a]_{ij}$  と置く.
3. この区間行列にゲルシュゴリンの定理を適用する. すなわち, 各  $i = 1, \dots, n$  について

$$[a]_{ii} + \sum_{j \neq i} |[a]_{ij}| < 0$$

を精度保証で検証する.

## Stage2. 領域 $D_{L2}$ の検証

$$\frac{d}{dt}L(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T Y(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

が負となることを, 各小領域において区間演算で直接確認する.

以上で領域  $D_L$  で Lyapunov 関数が定義できることが検証される. この領域  $D_L$  を Lyapunov 領域という.

## 3.4 実対称行列 $Y$ の妥当性

Lyapunov 関数の構成において, 実対称行列  $Y$  は近似計算を通じて決定されるものであり,  $Y$  が零固有値を持たず, またその正および負の固有値の数がそれぞれ  $D\mathbf{f}^*$  の実部が負, 実部が正の固有値の数と一致するかは自明ではない.

ゆえにここで, Lyapunov 関数の要件  $dL/dt < 0$  が成立しているとき, 以上が満たされることを示す. 以下の議論では, 簡単のために双曲型不動点  $\mathbf{x}^*$  を原点に取る.

### 3.4.1 $Y$ の正則性

実対称行列  $Y$  が零固有値を持たないことは,  $Y$  の正則性と同値である.

いま,  $Y$  が正則でないと仮定すると, 零でない  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  が存在して,  $Y\mathbf{x} = \mathbf{0}$  となる. このとき,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}^T(\mathbf{x})Y\mathbf{x} + \mathbf{x}^T Y \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{f}^T(\mathbf{x})Y\mathbf{x} + (Y\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

となり,  $dL/dt < 0$  に矛盾する. したがって  $Y$  は正則行列である.

### 3.4.2 $Y$ の正負の固有値の数について

$Df^*$  の固有値のうち, 実部正のものが  $u$  個, 実部負のものが  $s$  個であるとする. ただし,  $s + u = n$  で, かつ  $s$  は安定多様体の次元,  $u$  は不安定多様体の次元とそれぞれ一致する.

ここで,  $Y$  の固有値のうち, 正のものが  $s'$  個, 負のものが  $u'$  個であるとする.  $Y$  は零固有値を持たないので,  $s' + u' = n$  である.

以下を定義する.

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{s'} : Y$  の正の固有値に対する固有ベクトル.

$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{u'} : Y$  の負の固有値に対する固有ベクトル.

$\mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_s^* : Df^*$  の実部負の固有値に対する固有ベクトル.

$\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_u^* : Df^*$  の実部正の固有値に対する固有ベクトル.

$Y$  は実対称行列であるから,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{s'}$  および,  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{u'}$  は互いに直交するように選ぶことが出来る. ここで, 安定多様体定理より,  $\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_u^*$  は不動点  $\mathbf{x}^*$  における不安定多様体の接ベクトルである. 安定多様体定理については, 文献 [3] を参照されたい. またやはり安定多様体定理から,  $\mathbf{x}^*$  の十分小さな近傍において連続写像  $\psi$  が存在して, 不安定多様体上の点  $\mathbf{z}$  に対し,

$$\mathbf{z} = \sum_{j=1}^s y_j \mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^u x_j \mathbf{u}_j$$

と表したとき,

$$(y_1, \dots, y_s) = \psi(x_1, \dots, x_u)$$

の関係が成立する. このとき,  $\mathbf{z} = (x_1, \dots, x_u, y_1, \dots, y_s)$  と表すことにする.  $\mathbf{z}$  は Lyapunov 領域内にあるので,  $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$  のとき

$$\left. \frac{dL}{dt}(\varphi(t, \mathbf{z})) \right|_{t=0} < 0$$

が成立する. また,  $\mathbf{z}$  は不安定多様体上の点であるから,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} L(\varphi(t, \mathbf{z})) = 0$$

となる. したがって,  $L(\mathbf{z}) < 0$  である. 同様の議論を安定多様体上の点  $\hat{\mathbf{z}} \neq \mathbf{0}$  に対して行えば,  $L(\hat{\mathbf{z}}) > 0$  を得る. すなわち,

$$\frac{\mathbf{z}^T Y \mathbf{z}}{\mathbf{z}^T \mathbf{z}} < 0 < \frac{\hat{\mathbf{z}}^T Y \hat{\mathbf{z}}}{\hat{\mathbf{z}}^T \hat{\mathbf{z}}}$$

となるので、実対称行列に対する Rayleigh 商の議論から、 $Y$  は少なくとも 1 つの正の固有値 および 1 つの負の固有値を持つ。したがって、 $u' \geq 1, s' \geq 1$  である。

さて、 $u' < u$  を仮定する。このとき任意の  $\mathbf{u}_j, (j = 1, \dots, u')$  に対し、

$$\mathbf{u}_j^T (\alpha_1 \mathbf{u}_1^* + \dots + \alpha_u \mathbf{u}_u^*) = 0$$

となる同時に 0 とならない  $\alpha_1, \dots, \alpha_u$  を取ることができる。そこで、

$$\mathbf{u}^* = \sum_{j=1}^u \alpha_j \mathbf{u}_j^*$$

とおけば、 $\{v_1, \dots, v_{s'}\}$  と  $\{u_1, \dots, u_{u'}\}$  の直交性から、 $\mathbf{u}^*$  は  $\{v_1, \dots, v_{s'}\}$  のみで張られる空間に属する。したがって、

$$\mathbf{u}^* = \sum_{k=1}^{s'} c_k \mathbf{v}_k.$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}^*) &= (\mathbf{u}^*)^T Y \mathbf{u}^* \\ &= \sum_{j=1}^{s'} c_j \mathbf{v}_j^T Y \sum_{k=1}^{s'} c_k \mathbf{v}_k \\ &= \sum_{j,k=1}^{s'} \lambda_k c_j c_k \mathbf{v}_j \mathbf{v}_k \\ &= \sum_{j,k=1}^{s'} \lambda_k c_j c_k \delta_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^{s'} \lambda_k c_k^2 > 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\delta_{jk}$  は Kronecker delta である。 $L(\mathbf{u}^*)$  の値を  $l^* > 0$  とおく。

さて、適当に小さい正数  $\delta$  を選べば、不安定多様体上の点  $\mathbf{z}$  を

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^* &= (\delta \alpha_1, \dots, \delta \alpha_u, \beta_1, \dots, \beta_s), \\ (\beta_1, \dots, \beta_s) &= \psi(\delta \alpha_1, \dots, \delta \alpha_u) \end{aligned}$$

と表すことができる。さらに、 $\mathbf{u}^*$  は不安定多様体の接ベクトルであるから、正数  $\delta$  を小さく取ること、

$$t_\theta = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^s \beta_j^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^u (\delta \alpha_j)^2}}$$

を任意に小さく取れる (このことは、厳密には安定多様体定理から導かれる). このとき,

$$\sqrt{\sum_{j=1}^s \beta_j^2} = \mathcal{O}(\delta t_\theta)$$

である. そこで,

$$\mathbf{z}^* = \delta \mathbf{u}^* + \mathbf{v}^*$$

と書くとき,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}^*\| &= \mathcal{O}\left(\sqrt{\sum_{j=1}^s \beta_j^2}\right) \\ &= \mathcal{O}(\delta t_\theta) \end{aligned}$$

となる. このとき,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{z}^*) &= (\mathbf{z}^*)^T Y \mathbf{z} \\ &= \delta^2 (\mathbf{u}^*)^T Y \mathbf{u}^* + \delta (\mathbf{u}^*)^T Y (\mathbf{v}^*) + \delta (\mathbf{v}^*)^T Y \mathbf{u}^* + (\mathbf{v}^*)^T Y (\mathbf{v}^*) \\ &= \delta^2 l^* + \mathcal{O}(\delta^2 t_\theta) + \mathcal{O}(\delta^2 t_\theta^2) \\ &= \delta^2 l^* + \mathcal{O}(\delta^2 t_\theta) \\ &= \delta^2 (l^* + \mathcal{O}(t_\theta)) \end{aligned}$$

ここで,  $l^* > 0$ , かつ  $t_\theta$  は任意に小さく取れるので, 右辺  $> 0$ . しかるに,  $\mathbf{z}^*$  は不安定多様体上の点であるから, 左辺  $< 0$  となり矛盾.

以上より,  $u' \geq u$  でなければならない. 同様にして  $s' \geq s$  も示すことができるので,  $u' + s' = u + s$  より  $u' = u$  かつ  $s = s'$  でなければならない.

## 4 ホモクリニック軌道に対する検証手順

本章では, ホモクリニック軌道の検証手順について簡単に整理する. この検証手順の妥当性およびそれを保証するための数学的な議論は第5章で記述し, ここでは, 実際の計算手順の概要を記すに留める. 問題としては, 3次元力学系において安定多様体の余次元が2の場合についてのみを考える. また, 議論を簡潔にするために

- 双曲型不動点  $\mathbf{x}^*$  はパラメータに依存しないこと
- $D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$  の固有値実部の符号は, パラメータによって変化しないこと

を仮定する.

1. 2次元凸パラメータ領域  $D_p$  を設定する. 余次元2のホモクリニック軌道を捉えるため, パラメータは2つ取る. パラメータ選定の具体的な方法としては,  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  の係数のうち, 解に対する過敏性が特に強いもの2つ ( $a, b$  とおく) を取ることが考えられる.
2.  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  の不動点  $\mathbf{x}^*$  の近傍で Lyapunov 関数  $L(\mathbf{x})$  を構成する. Lyapunov 関数の値が0となる曲面  $L^{-1}(0)$  は3次元空間内で錐体を定める.  $L^+ = \{\mathbf{x} \mid L(\mathbf{x}) > 0\}$ ,  $L^- = \{\mathbf{x} \mid L(\mathbf{x}) < 0\}$  とおくと, 安定多様体は  $L^+$  上に存在し, 不安定多様体は  $L^-$  上に存在することになる.
3. 得られた Lyapunov 関数の定義域である Lyapunov 領域  $D_L$  の検証を行う. この検証は, パラメータ  $(a, b) \in D_p$  に対して行う. Lyapunov 関数は, ある  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  に対して一意に定まるものではないため, パラメータ領域  $D_p$  の大きさがある程度小さければ,  $D_p$  全体に対して同一の Lyapunov 関数と Lyapunov 領域を設定できることが期待される.
4. Lyapunov 関数の0レベルセットである錐体面  $L^{-1}(0)$  を繋ぐ線分  $\gamma$  を, 領域  $D_{L1}$  に取る. 線分  $\gamma$  の両端は,  $L^{-1}(0)$  上の点であり, 両端を除く部分は  $L^-$  に含まれるものとする.  $\gamma$  はパラメータに依らない同一の直線  $l_\gamma$  上にあるものを設定する.
5.  $\gamma$  上の不安定多様体の通過点  $\mathbf{x}_0$  を含む区間  $[X_0]$  を, 精度保証を用いて確定する. さらに,  $t < 0$  に対して  $\mathbf{x}_0$  からの軌道  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  が  $D_{L1}$  から出ないことも確認する. このとき, 不安定多様体と  $\gamma$  は必ず一点で交叉することが示せる (5.3.2節参照).
6.  $t > 0$  に対し,  $\varphi(t, [X_0])$  を Lohner 法を用いて精度保証付きで計算し, これが再び  $\mathbf{x}^*$  へ近づき, ある  $T_0 > 0$  で  $L^+$  に含まれることを確認する.
7.  $\varphi(T_0, [X_0])$  と  $\mathbf{x}^*$  を内包する可縮領域  $D_h$  を考え, その境界  $\partial D_h$  のうち  $L^+$  に属する面でフローの流出がないことを確認する.
8. パラメータ領域  $D_p$  の境界  $\partial D_p$  に属する  $(a, b)$  に対し,  $\varphi(t, [X_0])$  がある  $\hat{T} > T_0$  で  $L^-$  に達することを精度保証により確認する.
9.  $L^-$  に  $\mathbf{x}^*$  を通る平面  $\Gamma$  を設定し,  $\mathbf{R}^3$  から  $\Gamma$  への正射影を  $P_\Gamma$  とおく. 集合  $\{P_\Gamma \varphi(\hat{T}, [X_0])\}$  が,  $\mathbf{x}^*$  を囲む環状の領域  $E$  に含まれることを確認する.
10.  $\Gamma$  上に  $\mathbf{x}^*$  を始点とするベクトル  $\mathbf{l}^*$  を固定する.  $E$  の各点  $\mathbf{z}$  に対し, ベクトル  $\mathbf{z} - \mathbf{x}^*$  が  $\mathbf{l}^*$  と成す角を  $\theta$  とおく. パラメータ  $(a, b)$  が  $\partial D_p$  を一周するとき,  $\theta$  が  $-\pi$  から  $\pi$  まで連続に変化することを確認する.

以上が検証における手順である。これらが全て確認できれば、ホモクリニック軌道の存在が証明される。

## 5 検証手順に関する数学的論証

本章では、第4章で記した検証手順の理論的妥当性を示す。

### 5.1 利用する概念・定理

本章において用いる概念や定理の概説を以下に記述する。なお、厳密な定義や証明については、文献 [2], [10], [11] を参照されたい。

- 写像度

$\mathbf{R}^2$  の円周  $S^1$  に対し、 $f : S^1 \rightarrow S^1$  を連続写像とする。点  $\mathbf{x}$  が  $S^1$  上を正の向きに一周するとき、その像  $f(\mathbf{x})$  は  $S^1$  上を何回かまわるが、この回数を符号までこめて考えて、 $f$  の写像度といい、 $\deg f$  で表す。詳細は IS 定理の証明中に述べている。

- Brouwer の一致点定理

$B^n$  を  $n$  次元円板、その境界である  $n-1$  次元球面を  $S^{n-1}$  とする。

$F : B^n \rightarrow B^n$  を連続写像とし、これを  $S^{n-1}$  に制限したものを  $F_S$  とする。 $F_S(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$ ,  $\deg(F_S) \neq 0$  が満たされるとき、 $F$  と任意の連続写像  $G : B^n \rightarrow B^n$  は一致点を持つ。すなわち、 $F(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$  となる  $\mathbf{x} \in B^n$  が存在する。

なお、本論文では、 $n = 2$  の場合のみを扱う。

- ホモトピーと写像度

位相空間  $X$  から位相空間  $Y$  への2つの連続写像  $F, F' : X \rightarrow Y$  に対し、連続写像  $F_h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  であって、

$$F_h(\mathbf{x}, 0) = F(\mathbf{x}), \quad F_h(\mathbf{x}, 1) = F'(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in X$$

を満たすものが存在するとき、 $F$  と  $F'$  はホモトピックまたはホモトープであるという。また  $F_h$  を  $F$  から  $F'$  へのホモトピーという。連続写像  $F, F' : S^1 \rightarrow S^1$  がホモトピックならば写像度は一致する。すなわち、 $\deg F = \deg F'$  となる。

- Interval Simplex Theorem (IS 定理)

ある連続写像に対し、その写像度が0でないことを精度保証で検証するための条件を与える定理である。



$\mathbf{R}^2$  の円周  $S^1$  で定義され,  $S^1$  に値域を持つ連続写像  $f$  を考える. 定義域である  $S^1$  を複素平面上の原点中心の単位円と同一視し, その弧  $C_1, C_2, C_3$  を,

$$C_1 = \{z \in S^1 | 0 \leq \arg(z) \leq 2\pi s_1\}$$

$$C_2 = \{z \in S^1 | 2\pi s_1 \leq \arg(z) \leq 2\pi s_2\}$$

$$C_3 = \{z \in S^1 | 2\pi s_2 \leq \arg(z) \leq 2\pi\}$$

と取る. ただし,  $0 < s_1 < s_2 < 1$  である.

値域である  $S^1$  の弧  $V_1, V_2, V_3$  がそれぞれ  $C_1, C_2, C_3$  の  $f$  による像を包含し, かつ

$$V_1 \cap V_2 \neq \phi \tag{1}$$

$$V_2 \cap V_3 \neq \phi \tag{2}$$

$$V_3 \cap V_1 \neq \phi \tag{3}$$

$$V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \phi \tag{4}$$

を満たすとする.

このとき,  $f: S^1 \rightarrow S^1$  の写像度は 0 ではない.

(証明)

$t \in \mathbf{R}$  に対し,

$$e(t) = \exp(2i\pi t)$$

とおき, さらに  $f \circ e: \mathbf{R} \rightarrow S^1$  の定義域を  $[0, 1]$  に制限した写像を  $\hat{f}: [0, 1] \rightarrow S^1$  とする. また,  $\hat{f}(0) = e(t_0)$  となる  $t_0 \in \mathbf{R}$  を選んでおく.

補題 1 [9]

$\hat{f}: [0, 1] \rightarrow S^1$  を連続写像とし,  $x_0 \in [0, 1]$  とする.

1.  $f(x_0) = e(t_0)$  を満たす実数  $t_0$  に対し, 連続写像  $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  で,  $e \circ \tilde{f} = \hat{f}$  かつ  $\tilde{f}(x_0) = t_0$  を満たすものが一意に存在する.
2. 連続写像  $\tilde{f}, \tilde{g}: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  が  $e \circ \tilde{f} = e \circ \tilde{g} = \hat{f}$  を満たせば,  $k = \tilde{g}(x_0) - \tilde{f}(x_0)$  とおくと,  $k$  は整数で, 全ての  $x \in [0, 1]$  に対して  $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x) + k$  が成り立つ.

補題 1 より,

$$e \circ \tilde{f} = \hat{f}$$

$$\tilde{f}(0) = t_0$$

を満たす写像  $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  がただ一つ存在し,  $f$  の写像度は

$$\deg f = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$$

によって定義される. この値は,  $t_0$  の選び方によらず, 必ず同じ整数となる.

以下, 背理法を用いる.  $\deg f = 0$  を仮定する.

$\deg f = 0$  より,  $\tilde{f}(1) = \tilde{f}(0) = t_0$  となる. また,  $\tilde{f}(s_1) = t_1, \tilde{f}(s_2) = t_2$  とおく.  $V_1, V_2, V_3 \subset S^1$  の  $e$  による逆像  $e^{-1}(V_1), e^{-1}(V_2), e^{-1}(V_3) \subset \mathbf{R}$  を考える. これらは一般に連続体とはならないが,

$$\begin{aligned} U_1 \subset e^{-1}(V_1) & : [0, s_1] \text{ の } \tilde{f} \text{ による像} \\ U_2 \subset e^{-1}(V_2) & : [s_1, s_2] \text{ の } \tilde{f} \text{ による像} \\ U_3 \subset e^{-1}(V_3) & : [s_2, 1] \text{ の } \tilde{f} \text{ による像} \end{aligned}$$

は, それぞれ連続な線分であり, 特に検証条件 (4) より,

$$U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \phi$$

でなければならない.

ここで,  $t_0 \in U_1 \cap U_3$  であることから,  $t_1 \in U_2$  と  $t_2 \in U_2$  は  $t_0$  に重ならない. したがって, 起こり得るものは以下の 2 通りのいずれかである.

1.  $t_1, t_2$  がともに  $t_0$  の右側もしくは左側にある場合.  
 $t_0 < t_1 < t_2$  とすると,

$$\begin{aligned} [t_0, t_1] & \subset U_1 \\ [t_1, t_2] & \subset U_2 \\ [t_0, t_2] & \subset U_3 \end{aligned}$$

より,  $t_1 \in U_1 \cap U_2 \cap U_3$  となり仮定に矛盾する. 他の場合も同様にして矛盾が導ける.

2.  $t_1, t_2$  がそれぞれ  $t_0$  の右側および左側にある場合.  
 $t_1 < t_0 < t_2$  とすると,

$$\begin{aligned} [t_1, t_0] & \subset U_1 \\ [t_1, t_2] & \subset U_2 \\ [t_0, t_2] & \subset U_3 \end{aligned}$$

より,  $t_0 \in U_1 \cap U_2 \cap U_3$  となり仮定に矛盾する. 他の場合も同様にして矛盾が導ける.

以上より, いずれの場合についても矛盾が生じるので,  $\deg f = 0$  となることはない.

## 5.2 Lyapunov 関数の錐体面における軌道通過の検証

サドル型不動点の周辺に Lyapunov 関数  $L(\mathbf{x})$  が定義されているとき, Lyapunov 領域のうち  $L(\mathbf{x}) < 0$  となる部分  $L^-$ ,  $L(\mathbf{x}) > 0$  となる部分  $L^+$  のそれぞれについて, 錐体面  $L^{-1}(0)$  を通過せずにフロー流入あるいは流出することの有無を検証する.

このような流入・流出がないことは, ホモクリニック軌道の検証過程で必要となる条件であるが,  $L^-, L^+$  のそれぞれの部分で扱いの相違がある. これは,  $L^-$  では不安定多様体の流れに関する条件を検証し,  $L^+$  では一般の軌道の流出に関する条件を検証することになるからである. さらに,  $L^+$  では Lyapunov 領域  $D_L$  で考えるのに対し,  $L^-$  では  $D_L$  のうち, 3.3 節で述べた Stage 1 で検証された領域  $D_{L1}$  に限定して扱う.

なお, 一般の軌道の流入・流出に関する条件を付加した  $D_{L1}$  内の部分の領域は, 力学系で扱う h-set と関係する [8].

連続力学系

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$$

がサドル型不動点  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  を持ち, 1次元の安定多様体と2次元の不安定多様体を持つものとする. 不動点が原点と異なる場合には, 不動点を原点とする座標系へ平行移動して以下の議論を行う.

この不動点を含む領域  $D_L$  で Lyapunov 関数

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Y \mathbf{x}$$

が定義され, 特に, 星型領域  $D_{L1} \subset D_L$  において, 条件

$$D\mathbf{f}^T(\mathbf{x})Y + YD\mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0 \quad (\text{左辺の行列が負定値の意味})$$

が任意の  $\mathbf{x} \in D_{L1}$  で成立しているものとする.

まず,  $L^- \subset D_L$  について記述する. 領域  $D_{L1} \subset D_L$  に対し, これに内包される可縮な閉領域で不動点を内部に含むもの  $D_h$  を考える.  $D_h$  の境界  $\partial D_h$  の各点  $\mathbf{x}$  のうち,  $L^-$  に含まれるものに対し,

< 1 > ある正数  $\varepsilon$  があって, 任意の  $-\varepsilon < t < 0$  について

$$\varphi(t, \mathbf{x}) \in D_h$$

または,

< 2 > ある負の時刻  $t_{-1}$  があって,

$$\varphi(t_{-1}, \mathbf{x}) \in L^+$$

となることを要請する。

これらの条件は，不安定多様体上の点を方程式のパラメータに関して連続なものとして特定する際に用いられる．次に， $L^+ \subset D_L$  について述べる．Lyapunov 領域  $D_L$  に対し，これに内包される可縮な閉領域で不動点を内部に含むものを再び  $D_h$  とおく． $D_h$  の境界  $\partial D_h$  の各点  $\boldsymbol{x}$  のうち  $L^+$  に含まれるものに対し，

< 1 > ある正数  $\varepsilon$  があって，任意の  $0 < t < \varepsilon$  について，

$$\varphi(t, \boldsymbol{x}) \in D_h$$

または，

< 2 > ある正の時刻  $t_{+1}$  があって，

$$\varphi(t_{+1}, \boldsymbol{x}) \in L^-$$

となることを要請する。

このとき， $D_h$  の内部にある点を通る軌道は，必ず錐体面  $L^{-1}(0)$  を通過する．これは自明であるので論証は省略する。

可縮領域  $D_h$  としては，円筒形や球形などが考えられる．もしくは，円筒形表面あるいは球形表面と Lyapunov 等位面の組み合わせで囲まれる領域を用いることも出来る。

また， $\partial D_h$  上の点  $\boldsymbol{x}$  が法線ベクトルを持つとき，要請条件のうちの < 1 > については，その法線ベクトルと  $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$  との内積の符号によって検証可能である。

実際の検証では， $\partial D_h$  を小領域に分割し，各小領域ごとに区間演算を用いた精度保証法を適用して，要請条件 < 1 >, < 2 > を確認することになる．詳細については数値例で示す。

## 5.3 初期点の設定と連続性

第4章の手順4で設定する解軌道の初期点の定め方について，5.3.1節でその詳細を述べる．また，パラメータ領域  $D_p$  に対して初期値が連続であることを5.3.2節で示す。

### 5.3.1 初期点の設定

Lyapunov 関数の0レベルセットである錐体面  $L^{-1}(0)$  を繋ぐ線分  $\gamma$  を，Lyapunov 領域のうち Stage1 によって検証された領域  $D_{L1}$  に取る．線分  $\gamma$  の両端は， $L^{-1}(0)$  の点であり，両端を除く部分は  $L(\boldsymbol{x}) < 0$  の領域に含まれるものとする． $\gamma$  はパラメータに依らない同一の直線  $l_\gamma$  上にあるものを設定する。

以下の手順によって，不安定多様体が通過する  $\gamma$  上の点を包含する区間を精度保証により算定する。

1. 線分  $\gamma$  を適当な区間  $[\gamma_1], [\gamma_2], \dots, [\gamma_m]$  に分割する.
2. 各区間ごとに, 常微分方程式を時間逆方向へ精度保証法によって解き, その軌道を算定する.
3. 軌道が Lyapunov 関数の錐体内部  $L^+$  に入った区間を除外する.
4. 除外されずに残った区間内を不安定多様体が通過することになる.

以上により求めた区間を第4章の手順6の軌道計算における初期区間  $[X_0]$  として用いる. 不安定多様体の通過点を  $\mathbf{x}_0 \in [X_0]$  とおく.

### 5.3.2 初期点の連続性

行列  $Y$  の固有ベクトルのうち, 正の固有値に対応する固有ベクトルを  $\mathbf{v}$  とする. これを用いて  $L^+$  を2つの領域

$$L_1 = \{\mathbf{x} \in L^+ \mid \mathbf{v}^T \mathbf{x} > 0\},$$

$$L_2 = \{\mathbf{x} \in L^+ \mid \mathbf{v}^T \mathbf{x} < 0\}$$

に分割する. すると,  $\gamma \subset D_h$  より, 任意の点  $\mathbf{x} \in \gamma$  に対して次のいずれかが成立する.

- 【1】  $\varphi(t_1, \mathbf{x}) \in L_1$ , かつ  $t > t_1$  を満たす任意の  $t < 0$  について  $\varphi(t, \mathbf{x}) \notin L_2$  となる  $t_1 < 0$  が存在する.
- 【2】  $\varphi(t_2, \mathbf{x}) \in L_2$ , かつ  $t > t_2$  を満たす任意の  $t < 0$  について  $\varphi(t, \mathbf{x}) \notin L_1$  となる  $t_2 < 0$  が存在する.
- 【3】 任意の  $t < 0$  について  $\varphi(t, \mathbf{x}) \in D_h \cap L^-$

いま, 線分  $\gamma$  の2つの端点は錐体面  $L^{-1}(0)$  上にあり, それぞれ上記【1】, 【2】を満たしている.  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$  であるから, 【1】, 【2】は同時に成立せず, かつ解軌道  $\varphi$  が初期値に連続に依存することから,  $\gamma$  上に【3】が成立する点が必ず存在する. さらに, Lyapunov 領域内において【3】の点は不安定多様体上の点であるから, 線分  $\gamma$  は不安定多様体との共通点を持つ. すなわち線分  $\gamma$  は, 不安定多様体との共通点のうち, 軌道を遡った際に  $D_h$  の領域外へ出ることがないような点を少なくともひとつ持つ.

以下, パラメータ  $(a, b) \in D_p$  に  $\gamma$  上の初期点  $\mathbf{x}_0$  を対応させる写像を  $F_0 : D_p \rightarrow \gamma$  とし,  $F_0$  が  $D_p$  で連続であることを示す. そのためには, 線分  $\gamma$  と不安定多様体との共通点のうち, 上記の性質を満たすものが唯ひとつであることが十分条件となる.

不動点  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  は、1次元の安定多様体と2次元の不安定多様体を持つ。いま、 $\mathbf{x}^*$  を含む領域  $D_L$  で Lyapunov 関数

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Y \mathbf{x}$$

が定義され、星型領域  $D_{L1} \subset D_L$  において、条件

$$D\mathbf{f}^T(\mathbf{x})Y + YD\mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0 \quad (\text{負定値の意味})$$

が任意の  $\mathbf{x} \in D_{L1}$  で成立している。

このとき、次のことが成立する。

補題 2

不安定多様体の2点  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D_{L1}$  に対して、

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$$

とおけば、

$$L(\mathbf{y}) < 0$$

である。

(証明)

(1) 任意の解軌道  $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$  が領域  $D_{L1}$  の中にある限り、任意の  $t \in \mathbf{R}$  に対し、

$$\frac{dL}{dt}(\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)) < 0$$

となることを示す。上式の左辺は微分方程式と  $L$  の定義より、

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt}(\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)) &= (\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1))^T Y (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \\ &\quad + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T Y (\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)) \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ここで、点  $\mathbf{x}_1(t)$  と  $\mathbf{x}_2(t)$  とを結ぶ線分が  $D_{L1}$  内に取れるとする。これに沿う積分を用いて

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = \int_0^1 D\mathbf{f}(\mathbf{x}_1 + s(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) ds (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$$

と表せる。ここで、 $\overline{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}$  を  $\mathbf{x}_1(t)$  と  $\mathbf{x}_2(t)$  を結ぶ線分とし、

$$D\mathbf{f}(\overline{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}) = \{D\mathbf{f}(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \overline{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}\}$$

とおく。このとき,

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x} + s(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) \in D\mathbf{f}(\overline{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}), \quad 0 \leq \forall s \leq 1$$

となることに注意すると, 上式右辺は,  $D\mathbf{f}(\overline{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2})(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$  に含まれることがわかる。したがって, ある  $\tilde{\mathbf{x}} \in \overline{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}$  が存在して

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = D\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$$

が成り立つ。

$$\tilde{D}\mathbf{f} = D\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}), \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \overline{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}$$

とおけば,

$$\frac{dL}{dt}(\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)) = (\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t))^T (\tilde{D}\mathbf{f}^T Y + Y\tilde{D}\mathbf{f})(\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t))$$

である。前提条件より  $\tilde{D}\mathbf{f}^T Y + Y\tilde{D}\mathbf{f} < 0$  であるので, 式(5)右辺は負値となる。

(2) 不安定多様体上に 2 点  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D_{L_1}$  を取り,

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$$

とおく。仮定から,  $\mathbf{x}_1$  または  $\mathbf{x}_2$  を始点とし, 時刻  $t < 0$  における解軌道上の点は常に領域  $D_{L_1}$  内にあるので, (1) より

$$L(\varphi(t, \mathbf{x}_2) - \varphi(t, \mathbf{x}_1)) > L(\mathbf{y})$$

が任意の  $t < 0$  で成り立つ。ここで,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  は不安定多様体上の点であるから,  $t \rightarrow -\infty$  で  $\varphi(t, \mathbf{x}_2) = \varphi(t, \mathbf{x}_1) = \mathbf{0}$ 。すなわち,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} L(\varphi(t, \mathbf{x}_2) - \varphi(t, \mathbf{x}_1)) = 0.$$

したがって,  $0 \geq L(\mathbf{y})$  となるが,  $L(\mathbf{y}) = 0$  とするとある時刻  $t_1 < 0$  で  $\mathbf{y}_1 = \varphi(t_1, \mathbf{x}_2) - \varphi(t_1, \mathbf{x}_1)$  について  $L(\mathbf{y}_1) > 0$  となり,  $L(\mathbf{y}_1)$  について  $L(\mathbf{y})$  と同様の議論を行えば矛盾が生じる。以上より,

$$L(\mathbf{y}) < 0$$

が示された。

補題2を用いて、線分  $\gamma$  と不安定多様体との交点が1点のみであることを示す。そのためには、 $\gamma$  上の相異なる任意の2点  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  について、 $L(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) > 0$  となることを言えばよい。2次形式として見れば、任意の点  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$  と任意の実数  $s$  について、 $L(\mathbf{x})$  と  $L(s\mathbf{x})$  の符号は一致するから、 $\mathbf{x}_1$  と  $\mathbf{x}_2$  をそれぞれ線分  $\gamma$  の端点に取って議論する。

線分  $\gamma$  上の端点を除く点は、パラメータ  $s, 0 < s < 1$  を用いて

$$\mathbf{x}(s) = s\mathbf{x}_1 + (1-s)\mathbf{x}_2$$

と表される。 $\gamma$  の定義より、

$$L(\mathbf{x}(s)) < 0.$$

また、 $L(\mathbf{x}_1) = 0, L(\mathbf{x}_2) = 0$  より、

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}(s)) &= s^2L(\mathbf{x}_1) + (1-s)^2L(\mathbf{x}_2) + s(1-s)(\mathbf{x}_1^T Y \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2^T Y \mathbf{x}_1) \\ &= s(1-s)(\mathbf{x}_1^T Y \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2^T Y \mathbf{x}_1) \end{aligned}$$

したがって、 $s(1-s) > 0$  より、

$$\mathbf{x}_1^T Y \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2^T Y \mathbf{x}_1 < 0$$

を得る。これより、 $L(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) > 0$ 。以上より、不安定多様体は  $\gamma$  と1点のみで交叉する。

次に、初期点  $\mathbf{x}_0 \in \gamma$  がパラメータ  $(a, b) \in D_p$  に連続に依存することを確認する。線分  $\gamma$  がパラメータに依らず同一の直線  $l_\gamma$  上にあることから、各パラメータに対する不安定多様体は、 $l_\gamma$  とそれぞれ一点  $\mathbf{x}_0(a, b)$  で交わることになる。不安定多様体は  $(a, b)$  に連続に依存するから、点  $\mathbf{x}_0(a, b)$  も連続に依存する。

以上より、写像

$$F_0 : D_p \ni (a, b) \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \gamma$$

が連続であることが示された。

## 5.4 連続関数の構成について

ホモクリニック軌道の検証には Brouwer の一致点定理を用いるが、これは単位円上の連続関数について記述されるものである。そこで、検証プロセス全体を連続関数の合成として表現し、Brouwer の一致点定理の適用が直接可能な形に議論を整えることにしよう。 $B_0, B_1$  を2次元単位円板、 $S_0, S_1$  をその境界である円周とする。ここで定義する関数は以下のものである：



- $\Phi_0 : B_0 \rightarrow D_p$ . 同相写像. このような同相写像が存在することは自明であるのでここでは議論しない.
- $F_0 : D_p \rightarrow l_\gamma$ .  $l_\gamma$  は線分  $\gamma$  が乗るパラメータに依存しない直線である.  $(a, b) \in D_p$  に対して決まる不安定多様体が, 線分  $\gamma$  を通過する点  $\mathbf{x}_0(a, b)$  を  $F_0$  の像とする. これが連続写像となることは, 5.3 節で既に論じた.  
像の集合  $F_0(D_p)$  を  $X_0 \subset l_\gamma$  とおく.
- $F_1$ : 定義域を  $X_0$  とする. パラメータに依存しない正数  $l_0$  を取り, Lyapunov 関数の等位面  $L^{-1}(l_0)$  を考える.  $\mathbf{x}_0 \in X_0$  に対して解軌道  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  が  $L^{-1}(l_0)$  に至る時刻を  $t = T_1(\mathbf{x}_0)$  とし,  $F_1(\mathbf{x}_0) = \varphi(T_1(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0)$  と定める. ただし, このような  $l_0$  および  $T_1(\mathbf{x}_0)$  が存在することは精度保証によって検証する. 実際の方法は数値例で記述する. これらがすべて存在すれば,  $L^{-1}(l_0)$  はパラメータに関して連続,  $T_1$  は  $\mathbf{x}_0$  について連続となるので,  $F_1$  も連続写像である.  
像の集合  $F_1(X_0)$  を  $X_1$  とおく.
- $F_2$ : 定義域を  $X_1$  とする.  $\mathbf{x}_1 \in X_1$  に対し, 解軌道  $\varphi(t, \mathbf{x}_1)$  が錐体面  $L^{-1}(0)$  に到達する点  $\mathbf{x}_2 \in L^{-1}(0)$  を像とする.  $L^{-1}(0)$  はパラメータに連続に依存するので, この写像は有限時間で錐体面に到達する点の近傍では連続になる. しかしながら,  $\mathbf{x}_1$  が対応するパラメータに対する安定多様体上にあるときには  $F_2(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}^*$  となり, 到達時間は無限大になるため  $F_2$  の連続性は自明ではない.

また, 解軌道  $\varphi(t, \mathbf{x})$  が必ず錐体面に到達するかも自明ではないが, これは精度保証により確認する. 実際の方法は数値例で述べる.

$F_2$  の連続性を以下で示しておく. ただし, 簡単のため  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  とする.  $F_2$  を以下に示す  $l$ -積分による  $L^{-1}(l_0)$  から  $L^{-1}(0)$  への写像と考える. すなわち,

$$F_2 : L^{-1}(l_0) \ni \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2 \in L^{-1}(0)$$

を,

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \int_{l_0}^0 \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}(l))}{\mathbf{f}^T Y \mathbf{x}(l) + \mathbf{x}^T(l) Y \mathbf{f}} dl$$

によって定める. これは, 時刻  $t$  を変数  $l$  に変換して軌道を積分することに相当する. ただし,  $\mathbf{x}(l)$  は始点  $\mathbf{x}$  によって定まる解軌道  $\varphi(t, \mathbf{x})$  が曲面  $L^{-1}(l)$  に達する時刻  $t$  における点である. 被積分関数の分母は  $dL/dt$  にあたるので, Lyapunov 関数の定義より原点以外では負値を取るが,  $\mathbf{x}(l)$  が原点に近づくとき 0 に近づく. しかしながら, 原点近傍では原点での  $\mathbf{f}$  のヤコビ行列  $D\mathbf{f}^*$

を用いて,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &\approx D\mathbf{f}^*\mathbf{x} \\ \mathbf{f}^T Y \mathbf{x} + \mathbf{x}^T Y \mathbf{f} &\approx \mathbf{x}^T A^* \mathbf{x} \\ A^* &:= (D\mathbf{f}^*)^T Y + Y D\mathbf{f}^* \end{aligned}$$

と近似されること, および  $A^*$  の負値性と

$$l = \mathbf{x}^T Y \mathbf{x}$$

を用いて積分が有限確定することを示すことができる. そのため,

$$\begin{aligned} r &:= \|\mathbf{x}\|, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \\ \mathbf{x} &= r\mathbf{v} \end{aligned}$$

とおく. まず, 適当に小さい正数  $\varepsilon$  を用いて,

$$\begin{aligned} \int_{l_0}^0 \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}(l))}{\mathbf{f}^T Y \mathbf{x}(l) + \mathbf{x}^T(l) Y \mathbf{f}} dl &= \int_{l_0}^\varepsilon \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}(l))}{\mathbf{f}^T Y \mathbf{x}(l) + \mathbf{x}^T(l) Y \mathbf{f}} dl \\ &\quad + \int_\varepsilon^0 \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}(l))}{\mathbf{f}^T Y \mathbf{x}(l) + \mathbf{x}^T(l) Y \mathbf{f}} dl \end{aligned}$$

とすれば, 右辺第一項は有限である. また第二項については,

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^0 \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}(l))}{\mathbf{f}^T Y \mathbf{x}(l) + \mathbf{x}^T(l) Y \mathbf{f}} dl &\approx \int_\varepsilon^0 \frac{D\mathbf{f}^*\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T A^* \mathbf{x}} dl \\ &= \int_\varepsilon^0 \frac{D\mathbf{f}^*\mathbf{v}}{r\mathbf{v}^T A^* \mathbf{v}} dl \\ &= \int_{\varepsilon'}^0 \frac{D\mathbf{f}^*\mathbf{v}}{r\mathbf{v}^T A^* \mathbf{v}} 2r\mathbf{v}^T Y \mathbf{v} dr \\ &= 2 \int_{\varepsilon'}^0 \frac{D\mathbf{f}^*\mathbf{v}}{\mathbf{v}^T A^* \mathbf{v}} \mathbf{v}^T Y \mathbf{v} dr \end{aligned}$$

となる. ここに  $\varepsilon' = \sqrt{\varepsilon/\mathbf{v}^T Y \mathbf{v}}$  である.  $A^*$  の負値性より, 右辺の被積分関数の分母は0にならず, 積分は有限である. したがって, 左辺も有限確定し, このことから  $F_2$  の連続性が従う.

- $F_3: X_2 \rightarrow \Gamma$ . パラメータに依らない平面  $\Gamma$  を取り,  $\mathbf{R}^3$  から  $\Gamma$  への正射影を  $P_\Gamma$  とする. ただし  $\Gamma$  は不動点  $\mathbf{x}^*$  を含み, 任意のパラメータ値においてこれを固定するごとに, 任意の  $\mathbf{x} \in L^- \cup L^{-1}(0)$  に対して

$$P_\Gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^* \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}^*$$

が成立するよう傾きを定める．実際には，すべてのパラメータ値に対する  $L$  の共通部分を通過する平面の中から選ばれることになる．

$F_3 = P_\Gamma$  とし，像の集合  $F_3(X_2)$  を  $X_3 \subset \Gamma$  とおく．

- $F_4 : X_3 \rightarrow B_r$ . 不動点  $\mathbf{x}^*$  を中心とし，半径  $r$  の円板  $B_r \subset \Gamma$  を取る．点  $\mathbf{x}_3 \in X_3$  と不動点  $\mathbf{x}^*$  を結ぶ線分が， $B_r$  の境界  $S_r$  と共通点を持つとき，これを  $\mathbf{y}$  とおく．写像  $F_4$  は次で定まる連続写像である．

$$F_4(\mathbf{x}_3) = \begin{cases} \mathbf{y}, & \text{for } \mathbf{x}_3 \notin B_r. \\ \mathbf{x}_3, & \text{for } \mathbf{x}_3 \in B_r. \end{cases}$$

像の集合  $F_4(X_3)$  を  $X_4 \subset B_r$  とおく．

- $\Phi_1 : B_r \rightarrow B_1$ . 同相写像．ただし， $\mathbf{x}^*$  を  $B_1$  の中心に移すものとする．このような同相写像が存在することは自明なので，ここでは議論しない．

以上に挙げた写像はいずれも連続写像である．したがって，その合成

$$F = \Phi_1 \circ F_4 \circ F_3 \circ F_2 \circ F_1 \circ F_0 \circ \Phi_0$$

は  $B_0$  から  $B_1$  への連続写像となる．これに Brouwer の一致点定理を適用する．すなわち， $F$  を  $S_1$  に限定した写像を  $F_S$  とおいたとき，

- $F_S(S_0) \subset S_1$
- $F_S$  の写像度が 0 でないこと

を精度保証により検証する．これが確認できれば，Brouwer の一致点定理により， $F$  は  $B_1$  の中心を像とする定点写像  $G$  と一致点を持つ．このことから，

$$F_4 \circ F_3 \circ F_2 \circ F_1 \circ F_0(a^*, b^*) = \mathbf{x}^*$$

となる  $(a^*, b^*) \in D_p$  が存在する．さらに， $F_4, F_3$  の定義から，

$$F_2 \circ F_1 \circ F_0(a^*, b^*) = \mathbf{x}^*$$

であり， $F_2$  は解軌道に沿った写像であるから， $F_1 \circ F_0(a^*, b^*)$  は安定多様体上の点に対応する． $\mathbf{x}_0 = F_0(a^*, b^*)$  は不安定多様体上の点で， $F_1$  は軌道に沿った積分であるから， $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  がホモクリニック軌道を与えることになる．

## 5.5 実際の検証方法との関係

理論上は、写像度は  $F$  を円周上に限定した写像  $F_S$  に対して検証される。これはパラメータ領域  $D_p$  の境界の像を錐体面  $L^{-1}(0)$  上に特定する過程を含んでいる。実際の検証では、錐体面上の像を特定することはせず、錐体面を通過した集合について写像度を調べる。ここでは、一定の条件のもとで、この方法で確認した写像度が  $F_S$  の写像度と一致することを示そう。

なお、以下ではすべての写像および写像の像について、パラメータ領域  $D_p$  の境界上のパラメータ  $(a, b)$  に対するもの限定して考える。特に、線分  $\gamma$  上に定まる初期点集合  $X_0$  に関して  $Y_0 \subset X_0$  を

$$Y_0 = \{\mathbf{y}_0 \mid \mathbf{y}_0 = F_0(a, b), (a, b) \in \partial D_p\}$$

によって定め、錐体面上で構成される集合に関して、 $Y_2 \subset X_2$  を

$$Y_2 = \{\mathbf{y}_2 \mid \mathbf{y}_2 = F_2(F_1(\varphi(T_1(\mathbf{y}_0), \mathbf{y}_0))), \mathbf{y}_0 \in Y_0\}$$

によって定める。

写像度を検証する実際の手続きでは、境界上のすべてのパラメータ  $(a, b) \in \partial D_p$  に対する初期点  $\mathbf{y}_0$  からの軌道が錐体面を通過し、領域  $L^-$  に至る時刻  $\hat{T}$  まで軌道積分を行なう。 $\hat{T}$  は、 $(a, b)$  に依存しない正数である。ここで、集合  $Y_T$  を

$$Y_T = \{\mathbf{y}_T \mid \mathbf{y}_T = \varphi(\hat{T}, \mathbf{y}_0), \mathbf{y}_0 \in Y_0\}$$

とおき、写像  $F'_1$  を  $F'_1(\mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_T$  によって定める。

次に、 $F_3 = P_\Gamma$  を用いて  $Y_T$  を平面  $\Gamma$  に射影する。精度保証による結果として、 $P_\Gamma(Y_T)$  を含む集合  $[P_\Gamma(Y_T)]$  が得られたとする。これに対し、

(A1)  $[P_\Gamma(Y_T)]$  が不動点  $\mathbf{x}^*$  を含まないこと

を検証する。

以下、条件 (A1) の成立を仮定する。このとき、十分小さな正数  $r'$  の円板  $B_{r'}$  が  $\Gamma$  上に取れて、その円周  $S_{r'}$  および内部が  $P_\Gamma(Y_T)$  と共通点をもたないようにすることができる。写像  $F_4$  において円板  $B_r$  の代わりに円板  $B_{r'}$  を用いた写像を  $F'_4$  とし、 $B_{r'}$  から  $B_1$  への同相写像（ただし中心を中心へ移すもの）を  $\Phi'_1$  と書く。これらより

$$F'_S = \Phi'_1 \circ F'_4 \circ F_3 \circ F'_1 \circ F_0 \circ \Phi_0$$

を構成する。 $B_{r'}$  が  $P_\Gamma(Y_T)$  と共通部分を持たないことから、 $F'_S(S_0) \subset S_1$  となることがわかる。同様のことが  $0 < r'' \leq r'$  を満たす全ての  $r''$  について成立する。したがって、ホモトピーの議論により、 $F'_S$  の写像度は  $r'$  を任意に小さく取っても変わらないことがわかる。写像度とホモトピーの扱いについては、この後の議論で詳細を示す。

さて、条件 (A1) より、

- $F_S$  の写像度と  $F'_S$  の写像度が一致すること

が導かれる。以下、これを証明する。

$F'_S$  を写像  $F_S$  の構造

$$F_S = \Phi_1 \circ F_4 \circ F_3 \circ F_2 \circ F_1 \circ F_0 \circ \Phi_0$$

と比較すると、 $F'_S$  は、 $F_S$  において錐体面上の集合  $Y_2$  を構成した後、各点  $\mathbf{y}_2 = F_2(F_1(\varphi(T_1, \mathbf{y}_0)))$  をそれぞれ  $\varphi(t, \mathbf{y})$  が  $\mathbf{y}_T = \varphi(\hat{T}, \mathbf{y}_0) \in Y_T$  に達するまで積分し、それから  $F_3$  以下を作用させる写像とみなすことができる。ここで  $\varphi(t, \mathbf{y}_2) = \mathbf{y}_T$  となる時刻  $t$  を  $T'(a, b)$  と置く。これは  $(a, b) \in \partial D_p$  に関して連続であることに注意する。

さて、 $\varphi(t, \mathbf{y}_2)$ ,  $0 < t \leq T'(a, b)$  は Lyapunov 関数の性質から常に  $L^- \cup L^{-1}(0)$  中に存在する。したがって、 $F_3$  の定義で設定した  $\Gamma$  の性質から、 $P_\Gamma(\varphi(t, \mathbf{y}_2)) = \mathbf{x}^*$  となるのは、 $\varphi(t, \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}^*$  であるときに限る。 $\mathbf{x}^*$  は不動点なので、このことは  $\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}^*$  を意味し、これより  $\varphi(T'(a, b), \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}^*$  を得る。これは条件 (A1) に反する。よって、

(B1)  $0 \leq t \leq T'(a, b)$  において、常に  $P_\Gamma(\varphi(t, \mathbf{y}_2)) \neq \mathbf{x}^*$

が成立する。これより特に、 $\mathbf{x}^* \notin P_\Gamma(Y_2)$  となるので、十分小さな正数  $r$  を選べば、円板  $B_r$  の円周および内部が  $P_\Gamma(Y_2)$  と共通点を持たないようにすることができる。このことから、 $F_S(S_0) \subset S_1$  となることがわかる。ここで、各  $(a, b) \in \partial D_p$  に対し、

$$\mathbf{y}(h) = \varphi(hT'(a, b), \mathbf{y}_2), \quad 0 \leq h \leq 1$$

と定めると、 $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}(0)$ ,  $\mathbf{y}_T = \mathbf{y}(1)$  となる。 $h$  を固定し、集合  $Y_h = \{\mathbf{y}(h) | (a, b) \in \partial D_p\}$  を考える。このとき (B1) によって  $P_\Gamma(Y_h)$  は不動点を含まないから、十分小さな正数  $r(h)$  を選べば、 $B_r$  と同様の円板  $B_{r(h)} \subset \Gamma$  が取れて、その円周および内部が  $P_\Gamma(Y_h)$  と共通点を持たないようにすることができる。これらの  $r(h)$  は任意に小さく取れるので、閉区間  $0 \leq h \leq 1$  について共通の正の半径を選ぶことができる。これを  $r$  とする。このとき、 $F_4 = F'_4$ ,  $\Phi_1 = \Phi'_1$  である。

さらに、 $h$  を固定するごとに写像  $F_h$  を  $F_h(\mathbf{y}_2) = \mathbf{y}_h$  によって定める。これを用いて写像  $F_S^h$  を

$$F_S^h = \Phi_1 \circ F_4 \circ F_3 \circ F_h \circ F_2 \circ F_1 \circ F_0 \circ \Phi_0$$

と定義すれば、 $B_{r(h)}$  が  $P_\Gamma(Y_h)$  と共通点を持たないことから、 $F_S^h(S_0) \subset S_1$  となることがわかる。このことおよび  $T'(a, b)$  の連続性より、 $F_S^h$  は  $0 \leq h \leq 1$  を止めるごとに  $S_0 \rightarrow S_1$  の連続写像となる。定義から、

$$F_S^h |_{h=0} = F_S, \quad F_S^h |_{h=1} = F'_S$$

であるから、 $F_S^h$  は  $F_S$  と  $F'_S$  との間のホモトピーであり、 $F_S$  と  $F'_S$  はホモトピックである。したがって、このふたつの写像度は等しい。

以上より、実際の検証過程では、

- $[P_T(Y_T)]$  について, 条件 A1 が満たされていることを確認する
- $B_{r'}$  が  $[P_T(Y_T)]$  と共通部分をもたないような  $r'$  を選ぶ
- 写像  $F'_S$  の写像度を,  $(a, b) \in \partial D_p$  を動かすときの  $F_4(P_T(\mathbf{y}_T)) \in S_{r'}$  の動きを  $B_{r'}$  の境界  $S_{r'}$  上で追うことで確認する. これには精度保証法と IS 定理を用いることになる

という手順を踏むことにする. これについては数値例で具体的に説明する.

## 6 数値例

第 4 章の手順の下, 実際にホモクリニック軌道の存在検証を行う. 精度保証の過程では, 第 5 章で論証した連続関数  $F$  の構成の根拠となる事実を確認していく.

### 6.1 問題設定

3次元連立常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = bx + (x - c)z \end{cases} \quad (6)$$

を考える. この方程式は, Rössler 方程式の変形であり, 原点が不動点となっている. また, 係数  $(a, b, c) = (0.38, 0.30, 4.82)$  のときホモクリニック軌道を持つことが知られている [10]. ここでは, 係数の変化に対する方程式の解の変化の度合いを調べ, 過敏性の高い係数  $a$  および  $b$  をパラメータとして採用することにした.

係数  $(a, b, c) = (0.38, 0.30, 4.82)$  のとき, 初期点として,

$$(x, y, z) = (1.0 \times 10^{-5}, -1.0 \times 10^{-4}, 0) \quad (7)$$

を取ると,  $t = 74.8$  で不動点近傍へ戻る近似軌道が得られる (図 1). なお, 式 (6) について, ホモクリニック軌道の近似軌道計算を時間逆転の下で行うと, わずかな初期点の変動で不動点から離れた方向へ発散する傾向が見られた. このことから, 式 (6) に対して, 時間を逆転させホモクリニック軌道の存在検証を行うことは, 困難であることが推察される. すなわち, Wilczak が採った方法はこの問題に対しては適用できないことになる.

2次元パラメータ領域  $D_p$  を

$$D_p = [0.3797, 0.3804] \times [0.2993, 0.3008]$$

に取る．ここでは，パラメータ  $a, b$  を実際に動かし，初期点 (7) からの近似軌道が不動点を取り囲むような  $a, b$  となるように取っている．

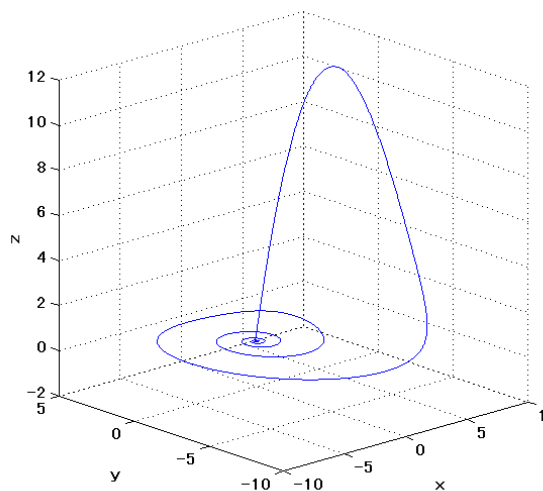


図 1: 式 (6) におけるホモクリニック軌道の近似軌道

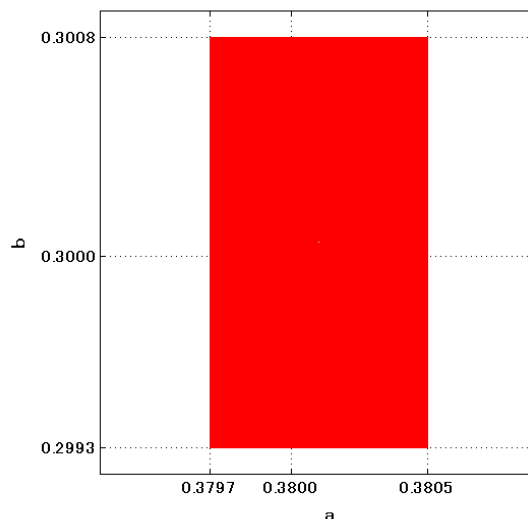


図 2: 2次元パラメータ領域  $D_p$

## 6.2 Lyapunov 関数

### 6.2.1 Lyapunov 関数の構成

式 (6) の不動点  $\mathbf{x}^* = [0, 0, 0]^T$  についての Lyapunov 関数を構成する．ただし，ここでは  $(a, b, c) = (0.38, 0.30, 4.82)$  に固定し，すべてのパラメータに対して同一の Lyapunov 関数を得ることを試みる． $\mathbf{x}^*$  における方程式 (6) 右辺のヤコビ行列  $D\mathbf{f}^*$  は，

$$D\mathbf{f}^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0.38 & 0 \\ 0.30 & 0 & -4.82 \end{pmatrix}$$

となる．また， $D\mathbf{f}^*$  の固有値を対角成分に並べた行列  $\Lambda$  は，

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.1597 + 0.9815i & 0 & 0 \\ 0 & 0.1597 - 0.9815i & 0 \\ 0 & 0 & -4.7594 \end{pmatrix}$$

となり，各固有値に対応する固有ベクトルを並べた行列  $X$  は，

$$X = \begin{pmatrix} 0.7086 & 0.7086 & 0.1977 \\ -0.1543 - 0.6873i & -0.1597 + 0.9815i & -0.0385 \\ 0.0411 - 0.0081i & 0.0411 + 0.0081i & 0.9795 \end{pmatrix}$$

となる．これらはいずれも近似計算によって得ている．各固有値の実部の正負より，安定多様体が1次元，不安定多様体が2次元であることが分かる（厳密には，Lyapunov 領域の検証によって確定する）．また，対角行列  $I^*$  の対角成分  $i_k$  は， $i_1 = i_2 = -1, i_3 = 1$  となる．以上より，Lyapunov 関数の候補として

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}^*) &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \\ &= \mathbf{x}^T Y \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T \operatorname{Re}(X^{-H} I^* X^{-1}) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x} \begin{pmatrix} -1.0671 & -0.2324 & 0.1424 \\ -0.2324 & -1.0584 & -0.0071 \\ 0.1424 & -0.0071 & 1.0257 \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

を得る．

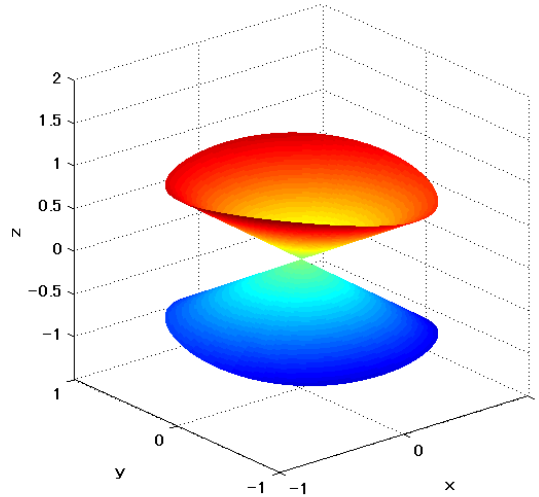


図 3: Lyapunov 関数の錐体面  $L^{-1}(0)$

### 6.2.2 Lyapunov 領域の検証

Lyapunov 関数の定義域の検証法において，パラメータ  $a, b$  をパラメータ領域  $D_p$  全体に対して同時に検証を行う．なお実際の計算においては， $a, b$  は， $[a] = [0.3797, 0.3804], [b] = [0.2993, 0.3008]$  なる区間値として扱う．

検証の結果，少なくとも

$$\begin{aligned} [x] &= [-1.0, 1.0] \\ [y] &= [-1.0, 1.0] \\ [z] &= [-0.5, 1.0] \end{aligned}$$



の領域が Lyapunov 領域となることが検証された。このうち Stage 1 で検証された領域  $D_{L1}$  は

$$[x] = [-0.1, 0.1]$$

$$[y] = [-0.1, 0.1]$$

$$[z] = [-0.1, 0.1]$$

で示される領域を含むものである。

### 6.3 初期点の設定と連続性の確認

構成された Lyapunov 関数の錐体面  $L^{-1}(0)$  を繋ぐ線分  $\gamma$  を考える。ここでは線分  $\gamma$  として、近似初期点

$$(x, y, z) = (1.0 \times 10^{-5}, -1.0 \times 10^{-4}, 0)$$

を通過し、 $z$  軸に平行なものを取る。このとき、 $\gamma$  は  $D_{L1}$  内に存在する。なお、Lyapunov 関数がパラメータに依存しないので、 $\gamma$  も依存しない。 $l_\gamma$  は  $\gamma$  を通る直線である。

$\gamma$  を適当な大きさの区間に分割し、微分方程式を時間逆方向へ解いた。その結果、不安定多様体と交叉する初期点集合を包含する区間  $[X_0]$  として、 $(1.0 \times 10^{-5}, -1.0 \times 10^{-4}, [-5.8 \times 10^{-7}, -5.6 \times 10^{-7}])$  を得た。すべての  $(a, b) \in D_p$  に対する初期点  $x_0$  が  $[X_0]$  に含まれている。

パラメータ領域  $D_p$  から、 $X_0$  への写像  $F_0$  が連続であることを確かめるため、領域  $L^-$  において不安定多様体の流入出に関する条件を検証する。原点を中心とし、 $z$  軸と軸を共にする半径  $2 \times 10^{-2}$  の円筒を考え、これと Lyapunov 等位面の組み合わせで  $D_h$  を構成しよう。

まず、線分  $\gamma$  と接触する等位面  $L^{-1}(l_{-1})$  に対し、 $l_{-1} > l_{-2}$  となる  $l_{-2}$  を取る。ここで、実際には  $l_{-1} = -1.0228 \times 10^{-8}$ 、 $l_{-2} = -1.9212 \times 10^{-4}$  である。また、円筒表面と錐体面の共通部分と、 $L^{-1}(l_{-2})$  とに端点を持つ  $z$  軸に平行な線分の集合を  $\Omega$  とする。ただし、線分  $\omega \in \Omega$  は  $l_{-2} \leq L(\omega)$  を満たすものとする。 $\Omega$  を小領域  $\Omega_j (j = 1, \dots, 128)$  に分割し (図 4)、 $\varphi(-1, \Omega_j) \subset L^+$  となることを精度保証で確認した (図 5)。これによって、 $\Omega$  を不安定多様体が通過することはないことがわかる。このことと、等位面  $L^{-1}(l_{-2})$  でのフローが外向きになっていることを合わせれば、5.2 節における  $L^-$  の場合の  $\langle 1 \rangle$ 、 $\langle 2 \rangle$  の条件が満たされる。

したがって、この問題における  $D_p \rightarrow X_0$  の写像  $F_0$  は連続である。

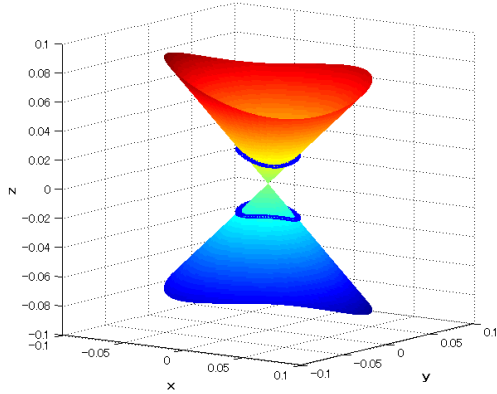


図 4: 錐体面  $L^{-1}(0)$  と小領域  $\Omega_j$

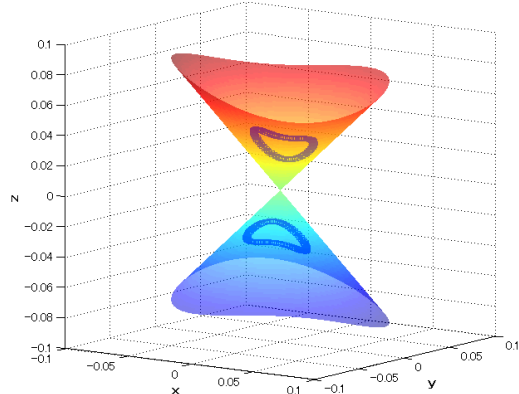


図 5:  $\Omega_j$  の  $t = -1$  における解

## 6.4 錐体面における軌道通過の確認

パラメータ領域  $D_p$  を

$$D_{p1} = [0.3797, 0.3800] \times [0.2993, 0.3000]$$

$$D_{p2} = [0.3797, 0.3800] \times [0.3000, 0.3008]$$

$$D_{p3} = [0.3800, 0.3804] \times [0.2993, 0.3000]$$

$$D_{p4} = [0.3800, 0.3804] \times [0.2993, 0.3008]$$

$$D_p = D_{p1} \cup D_{p2} \cup D_{p3} \cup D_{p4}$$

のように小領域に分割する。各パラメータ小領域に対し、 $[X_0]$  からの解軌道を計算する。これらの  $t = 72.98528 (= T_1)$  における解が図 6 である。これを  $[X_1]$  とすれば、図 7 のような  $[X_1]$  の下部に接する等位面  $L^{-1}(l)$  を成す正数  $l$  として、 $l = 0.52496$  が得られる。したがって、 $[X_1]$  と不動点  $\mathbf{x}^*$  の間に  $0 < l_0 < l$  となる  $l_0$  を任意に取ることができる。

以下で、 $[X_1]$  からの解軌道が  $0 < t \leq \infty$  で必ず等位面  $L^{-1}(l_0)$ 、および錐体面  $L^{-1}(0)$  へ至ることを示す。

領域  $L^+$  に

$$[x] = [-0.9001, 1.2001]$$

$$[y] = [-1.1001, 1.0000]$$

$$z = -1.0000$$

なる平面  $\Xi$  (図 8 の赤色で示した平面) を取る。ここで、 $L^+$  における  $D_h$  は、錐体面と  $\Xi$  で囲まれた領域であり、これは図 9 のように  $[X_1]$  を内包している。このと

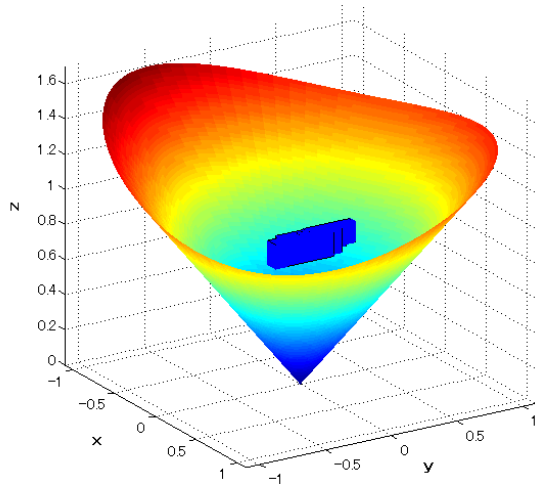


図 6: 精度保証により得られた解区間  $[X_1]$

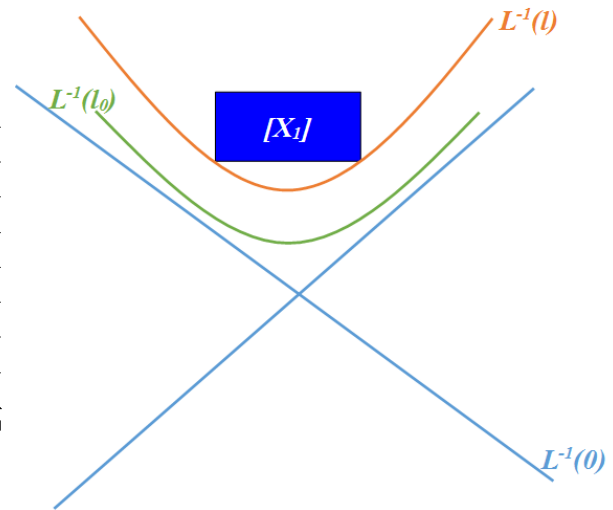


図 7:  $[X_1]$  の模式図

き,  $\Xi$  における  $dz/dt$  は,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= bx + (x - c)z \\ &= [0.2993, 0.3008] \cdot [-0.9001, 1.2001] \\ &\quad + ([-0.9001, 1.2001] - 4.82) \cdot (-1.0000) \\ &= [-5.9908, -3.2590] \end{aligned}$$

となり,  $\Xi$  におけるフローは全て  $-z$  方向である. これは 5.2 節における  $L^+$  の場合の条件  $\langle 1 \rangle$  を満たし, 錐体面  $L^+$  と平面  $\Xi$  で囲まれた領域内の解軌道は必ず錐体面に到達することになる. したがって,  $[X_1]$  からの解軌道も必ず  $L^{-1}(l_0)$  および  $L^{-1}(0)$  に到達する.

以上で, 第 5 章で述べた

$$\begin{aligned} F_0 : D_p &\rightarrow X_0 \\ F_1 : X_0 &\rightarrow X_1 \\ F_2 : X_1 &\rightarrow X_2 \end{aligned}$$

が構成可能であることが示された.

## 6.5 ホモクリニック軌道の検証

1. パラメータ領域  $D_p$  の境界  $\partial D_p$  において, 精度保証により初期区間からの軌道を計算する. パラメータの境界を 4600 個に分割し, 各々に対し, 初期点

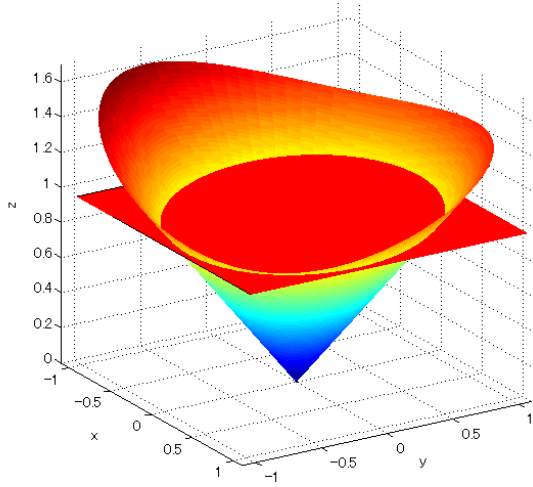


図 8: 錐体面  $L^{-1}(0)$  を切断する平面  $\Xi$

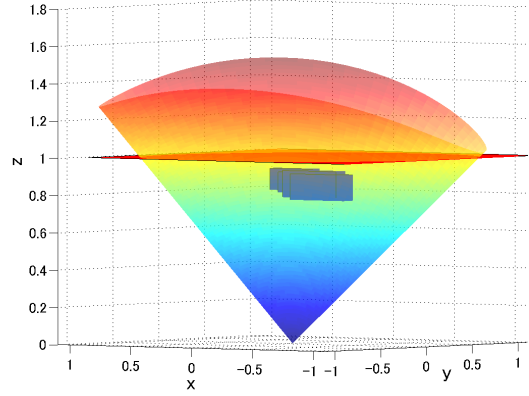


図 9:  $[X_1]$  と  $\Xi$  の位置関係

集合  $[X_0] = (1.0 \times 10^{-5}, -1.0 \times 10^{-4}, [-5.8 \times 10^{-7}, -5.6 \times 10^{-7}])$  からの解軌道を精度保証により計算すると,  $t = 74.78 (= \hat{T})$  における解  $[Y_T]$  は図 10 のようになる. このとき,  $[Y_T]$  を成す各区間  $[Y_{T1}], \dots, [Y_{T4600}]$  に対し, 区間演算により Lyapunov 関数値

$$\begin{aligned}
 L &= [Y_{Ti}]^T Y [Y_{Ti}] \\
 &= [Y_{Ti}]^T \begin{pmatrix} -1.0671 & -0.2324 & 0.1424 \\ -0.2324 & -1.0584 & -0.0071 \\ 0.1424 & -0.0071 & 1.0257 \end{pmatrix} [Y_{Ti}] \\
 &\quad (i = 1, \dots, 4600)
 \end{aligned}$$

を計算し, 全て負の区間値を取ることを確認した. すなわち,  $[Y_T] \subset L^-$  であり, かつ  $\mathbf{x}^* \notin [Y_T]$  である.

2.  $[Y_T]$  の, 不動点  $\mathbf{x}^*$  を通過する平面  $\Gamma$  への射影  $P_\Gamma$  を考える. 平面  $\Gamma$  として  $xy$  平面を取る. ここで,  $P_\Gamma$  による像  $[P_\Gamma(Y_T)]$  が, 5.4 節における条件

(A1)  $[P_\Gamma(Y_T)]$  が不動点  $\mathbf{x}^*$  を含まないこと

を満たしていることは, 図 (11) から明らかである. また, 正数  $r'$  を小さく取れば,  $[P_\Gamma(Y_T)]$  の内部に不動点を中心とする半径  $r'$  の円板  $B_{r'}$  が取れることも明らかである.

以上より,  $F_3, F_4$  の構成可能性が確認でき,  $F_S$  および  $F'_S$  も構成できることがわかる.

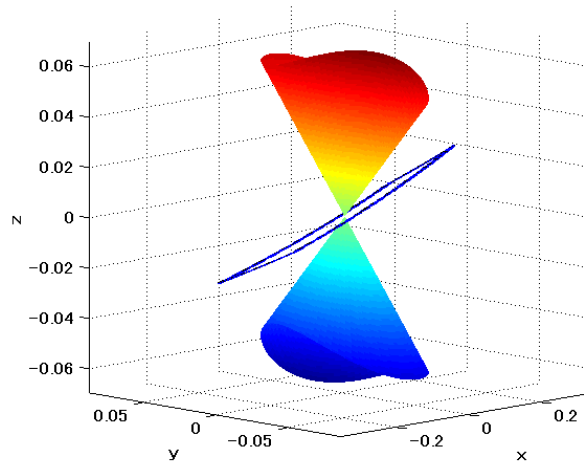


図 10: 初期点集合の  $t = 74.78$  における解  $[Y_T]$

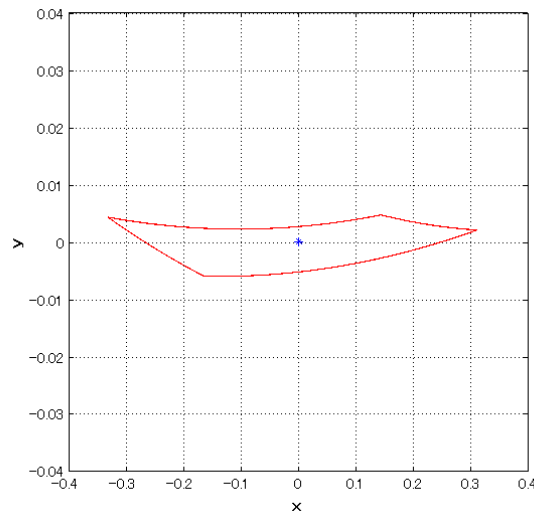


図 11:  $Y_T$  から平面  $\Gamma$  への射影による像  $[P_\Gamma(Y_T)]$

- (3)  $[P_\Gamma(Y_T)]$  と  $x$  軸正方向との角度を求める. いま, パラメータ領域の境界  $\partial D_p$  を 4600 個に分割している. これを境界右回りに  $c_1, \dots, c_{4600}$  とし,

$$C_1 = c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_{1533}$$

$$C_2 = c_{1534} \cup \dots \cup c_{3066}$$

$$C_3 = c_{3067} \cup \dots \cup c_{4600}$$

と分類する. 同様に, 得られた  $c_1, \dots, c_{4600}$  の像をそれぞれ  $v_1, \dots, v_{4600}$  と

おき,

$$V_1 = v_1 \cup v_2 \cup \cdots \cup v_{1533}$$

$$V_2 = v_{1534} \cup \cdots \cup v_{3066}$$

$$V_3 = v_{3067} \cup \cdots \cup v_{4600}$$

とする. ただし,  $[P_T(Y_T)] = V_1 \cup V_2 \cup V_3$  である. このとき IS 定理の検証条件 (1)~(4) が満たされることを確認した. したがって, この問題において写像  $F_S$  の写像度は 0 ではない. 図 12 は  $v_n (n = 1, \dots, 4600)$  と,  $x$  軸との角度を  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  で図示したものである.  $n$  の増大に伴って  $\pi$  から  $-\pi$  へ一周しており, これからも写像度が 0 でないことが読み取れる.

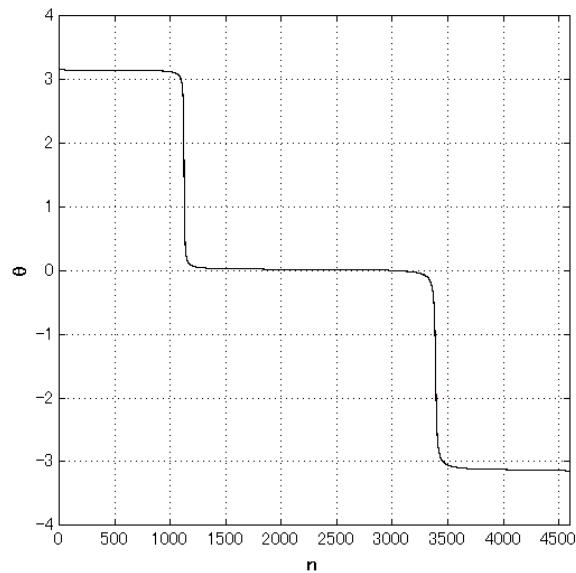


図 12:  $v_n$  の  $x$  軸正方向との角度  $\theta$  との関係

以上の結果および 5.4 節における議論により, パラメータ領域  $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2] = [0.3797, 0.3804] \times [0.2993, 0.3008]$  の範囲内に, ホモクリニック軌道を持つパラメータの組が少なくとも一つ存在することがここに証明された.

## 7 まとめと展望

3次元力学系に対し，余次元2のホモクリニック軌道の存在検証を行い，その存在を証明した．先行研究では時間を逆転させることでホモクリニック軌道を捕捉していたが，本論文では時間逆転により計算が不安定となる方程式に対して，時間を逆転させずにホモクリニック軌道を捕捉する手法について論じている．

Lyapunov 関数を利用することで，不安定多様体や安定多様体の存在範囲を限定することができる，これによって検証手順が単純化されている．本検証法は余次元2の安定多様体に対して適用可能であるため，4次元力学系における余次元2のホモクリニック軌道に対しても，適用可能であると考えられる．また，松江・山本により，理論の  $n$  次元への拡張が進められており，さらに高い余次元のホモクリニック軌道の直接的な存在検証が可能になることが期待される．

## 8 謝辞

本論文の執筆にあたり，山本野人教授，並びに統計数理研究所の松江要博士にご助力を賜りましたこと，ここに厚く御礼申し上げます．

## 参考文献

- [1] 松江要，山本野人，“Saddle-saddle connection の精度保証付き数値検証”，日本応用数理学会 2012 年度年会，2012
- [2] 松江要，山本野人，“IS 定理の系” など，Private Communications，2015
- [3] C. ロビンソン，〔国府寛司，柴山健伸，岡宏枝 訳〕 “力学系 (上・下)”，シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社，2001
- [4] 山本野人，“常微分方程式の解の精度保証法”，シミュレーション第 31 巻第 3 号，日本シミュレーション学会，2012
- [5] 中尾充宏/山本野人，“精度保証付き数値計算”，日本評論社，1998
- [6] 大石進一，“精度保証付き数値計算”，コロナ社，1999
- [7] D.Wilczak，“The Existence of Shilnikov Homoclinic Orbits in the Michelson System: A Computer Assisted Proof”，Foundations of Computational Mathematics，6(4):495-535，2006
- [8] P.Zgliczyński and M.Gidea，“Covering relations for multidimensional dynamical systems”，Journal of Differential Equations，202(1):32-58，2004

- [9] E.H.Spanier, “Algebraic Topology”, Springer-Verlag, 1966
- [10] 西浦廉政, “非平衡ダイナミクスの数理”, 岩波書店, 2009
- [11] 河田敬義, “位相数学”, 共立出版, 1956
- [12] 張替将人, “常微分方程式の解の漸近挙動に関する数値的検証法”, 平成 24 年度電気通信大学大学院情報理工学研究科修士論文, 2013
- [13] 山本野人, 松江要, “Lyapunov 関数の精度保証による構成”, 2014 年度応用数学合同研究発表会予稿集, 2014
- [14] K.Matsue, T.Hiwaki and N.Yamamoto, “On the construction of Lyapunov functions with computer assistance”, Preprint, 2016