

# 奥行き情報の空間的補完に関する視覚計算論

満倉 英一

電気通信大学大学院 情報システム学研究科

博士（工学）

2018 年 3 月

# 奥行き情報の空間的補完に関する視覚計算論

## 博士論文審査委員会

主査 佐藤 俊治 准教授

委員 阪口 豊 教授

委員 工藤 俊亮 准教授

委員 長岡 浩司 教授

委員 栗原 聡 教授

著作権所有者

満倉 英一

2018

# Computational study of visual information for depth completion

Eiichi Mitsukura

## Abstract

I proposed a new computational model that is consistent with human perception of depth in "ambiguous regions". This region has no information of binocular disparity as seen in black and white papers. However, human can perceive surfaces in ambiguous region. Then, a simple question confronts us: "how do we estimate the depth of a no-texture image?" In such ambiguous regions, mathematical solutions of binocular disparities are not indefinite or unique. Psychological view points, Ishikawa and Geiger revealed that human perceives flat surface in ambiguous region. I examine a mathematical description for depth completion that is consistent with human perception of depth in ambiguous regions. Using computer simulation, I show that resultant depth-maps qualitatively reproduce human depth perception of two kinds: concave and convex surfaces. The resultant depth-maps produced using proposed model depend on the initial depth in the ambiguous region. Considering this dependence from psychological viewpoints, I conjecture that human perceives completed surfaces that are determined by pre-stimuli corresponding to the initial condition of depth in ambiguous region. I designed psychological experiments to verify the model prediction. An ambiguous stimulus as post stimulus was presented after a prior-stimulus removed ambiguity from post stimulus. The inter-stimulus interval (ISI) was inserted between the prior-stimulus and post-stimulus. Results show that correlation of perception between the prior-stimulus and post-stimulus depends on the ISI duration. Correlation is positive, negative, and nearly zero in the respective cases of short (0-200 ms), medium (200-400 ms), and long ISI (>400 ms). Furthermore, based on proposed model, I propose a computational model that can explain the perceptual alternation. Then, the computational model that I proposed in this article have psychologically and physiologically high validity. Additionally, based on the depth completion model, a novel completion model of visual information, for example optical flow inside object of uniform color, will be proposed.

# 奥行き情報の空間的補完に関する視覚計算論

満倉 英一

## 概要

ヒトは左右両眼像から得られる情報を脳の視覚神経系で処理することで、物体の色や奥行などを知覚する。左右両眼像のずれである両眼視差は奥行知覚の重要な情報の一つであるが、均一色の紙や壁のようなパターン内部（以降、「不定領域」と呼ぶ）では左右像の対応点候補が無数存在する。したがって不定領域では両眼視差量を一意に決定することができず、奥行も知覚されないはずである。しかしながらヒトは不定領域に対しても特徴的な奥行（フラットな面）を知覚することが心理物理実験によって明らかにされている。一方で、この奥行知覚特性を説明する視覚数理モデルの検討は行われていない。そこで本研究では不定領域におけるヒトの奥行知覚を記述・説明する (i) 神経生理学的に妥当性が高く、ヒトの奥行知覚結果と整合性がある視覚数理モデルを構築し、(ii) 心理物理実験により提案モデルから予想される視覚特性について検証し、さらに新たな奥行き知覚特性を見出し、その特性に対するモデルを基盤とした計算論的考察を行った。

上記 (i) については、数学的考察によりフラットな面が 2 種類の曲率情報から計算できることを示す定理を新たに示し、視覚神経系の領野の 1 つである CIP 細胞が示す面曲率選択性と合わせて、不定領域における奥行計算を行う神経回路モデルを示した。また、数値シミュレーションによって、凹凸 2 種類の面が知覚される 1 組のステレオ画像をモデルに入力すると、ヒトが知覚するのと同様の凹凸 2 種類の面が出力されることを示した。この結果は不定領域内部の条件による。心理物理的観点からは、不定領域における奥行きは事前に与えられた奥行き情報に依存して凹凸が決定されると予想が得られる。そこで上記 (ii) について、事前に凹凸いずれか一方が一意に知覚される面を被験者に提示した後、不定領域において凹凸 2 種類の面が知覚される視覚刺激を一定時間経過後（刺激時間間隔と呼ぶ）に提示する実験を行

った．結果，不定領域における知覚は，200ms 未満の時間経過後の場合には前刺激が凹（凸）面の場合は前刺激と同じ面である凹（凸）面を知覚し，200ms-400ms 時間経過後の場合には前刺激として，凹（凸）面を提示した場合，前刺激とは反対である凸（凹）面を知覚することがわかった．これは，前刺激と後刺激の知覚の間には相関関係の正負が刺激時間間隔（ISI）の長さに依存していることを示している．この結果に対してモデルを基盤とする計算論的考察および実験結果を再現可能な数理モデルの提案とその神経回路網への実装可能性についても示した．なお本論文で提案する奥行知覚モデルは，すでに提案されている盲点補完モデルを数学的に包含している．すなわち，不定領域や盲点領域などの視覚的欠損情報の補完を統一的に記述・説明できる可能性を示している．

以上の結果から，本論文で提案する奥行知覚モデルは，神経生理学的にも妥当性が高いモデルであることがわかった．また，均一色物体内のオプティカルフロー計算など，視覚的欠損情報の補完モデルへ拡張できる可能性を示している．

# 目次

目次.....	vii
図表目次.....	ix
第1章 序論.....	11
1.1 研究の背景.....	11
1.1.1 視覚情報処理.....	11
1.1.2 奥行情報と両眼視差.....	12
1.1.3 両眼視差の計算方法.....	13
1.1.4 両眼視差の確定領域・不定領域.....	14
1.2 本研究の目的.....	16
1.3 本論文の構成と概要.....	17
第2章 既存研究と問題点.....	21
2.1 認知心理学的知見と神経生理学的知見.....	21
2.2 視覚の数理的理論.....	23
2.3 標準正則化理論.....	24
2.3.1 RDSに観測ノイズが重畳した場合の奥行値推定問題.....	26
2.3.2 SFSの奥行値推定問題.....	28
2.4 最適化問題を解く神経回路網モデル.....	29
第3章 奥行き情報補完モデル.....	35
3.1 平均曲率の最小化.....	35
3.2 ガウス曲率の最小化.....	36
3.3 レベルセット・フローカーブ曲率.....	37
3.3.1 修正レベルセット曲率・修正フローカーブ曲率.....	40
3.3.2 曲率関連量の数学的關係.....	40
3.4 本研究で提案する数理モデル.....	42
3.5 数値シミュレーションによる知覚の再現.....	43
3.6 考察.....	44
3.6.1 補完される奥行き面の初期値依存性.....	44

3.6.2	1次元情報の補完に対する2階微分モデルと等方性拡散モデルの比較	45
3.6.3	神経回路網による実装可能性	46
第4章	奥行き補完の知覚特性	57
4.1	実験目的と概要	57
4.2	実験手法	59
4.2.1	Setup	59
4.2.2	提示刺激	60
4.3	解析方法と結果	60
4.3.1	独立性	60
4.3.2	相関関係	61
第5章	ISIに依存する奥行き知覚のモデル	67
5.1	モデルの導出	67
5.2	数値シミュレーションによる知覚交替の再現	71
5.3	神経回路網への実装可能性	74
第6章	結論	80
付録		83
謝辞		122
引用文献		124
研究業績		128



# 図表目次

図 1.1 両眼視差に関する説明図. ....	18
図 1.2 Random-Dot-Stereogram (RDS)と Solid-Figure-Stereogram (SFS).....	19
図 1.3 SFS で計算可能・不可能な両眼視差と奥行き推定 .....	20
図 2.1 Georgeson らが用いた視覚刺激の例. ....	31
図 2.2 SFS の例 1. ....	32
図 2.3 SFS 刺激の例 2. ....	32
図 2.4 最急降下法を用いた奥行き修復の例 (平井, 1995). ....	33
図 2.5 最急降下法の概略図. ....	33
図 2.6 神経回路網の概略図. ....	34
図 3.1 2 種類の曲率に関する概略図と提案モデルの概要. ....	48
図 3.2 曲率と面の関係. ....	49
図 3.3 数値シミュレーション結果. ....	50
図 3.4 図 3.3a に対する面補完の詳細. ....	51
図 3.5 図 3.3b に対する面補完の詳細. ....	52
図 3.6 図 3.3c に対する面補完の詳細. ....	53
図 3.7 図 3.3d に対する面補完の詳細. ....	54
図 3.8 モデルから予想されるエネルギー関数の形状. ....	55
図 3.9 等方性拡散と 2 階微分モデルによる 1 次元の場合の補完結果の比較. ....	55
図 3.10 a. 局所座標系 $(\eta, \xi)$ とレベルセット. ....	56
図 4.1 実験で用いた前刺激. ....	63
図 4.2 実験装置の概略図. ....	63
図 4.3 実験装置と実験実施時の様子. ....	64
図 4.4 実験手続き. ....	65
図 4.5 心理物理実験の統計解析の結果. ....	66
図 5.1 スカラパラメータ $\phi(x, y)$ を用いた Depth map $Z(\phi(x, y))$ の例. ....	75
図 5.2 各点 $(x, y)$ におけるエネルギー関数の形状. ....	76
図 5.3 a～f. 各 ISI 毎の depth map.....	77

図 5.4 知覚交代モデルと奥行き補完モデル. ....	78
図 5.5 式(5.12)に関する神経回路網の概略図. ....	79
図 0.1 Filling-in モデルの概略図. ....	110
図 0.2 Filling-in モデルと提案モデルにおける境界条件の違い. ....	110
図 0.3 常微分方程式の解 $Z(t)$ . ....	116
図 0.4 エネルギー関数と面遷移の関係. ....	117
図 0.5 各 ISI 中における面遷移の様子. ....	118
図 0.6 各 ISI における評価量 $\text{Shape}(t)$ . ....	119
図 0.7 $\text{Shape}(t)$ が最小となる $\text{ISI} = 174\text{ms}$ における初期条件（左図）と補完結果（右図）. ....	119
図 0.8 面遷移モデルによって推定される後刺激の知覚. ....	120
図 0.9 2種類の曲率に関するエネルギー関数の概念図. ....	121
表 1 評価値と面の形状毎の比較. ....	121

## 第 1 章 序論

### 1.1 研究の背景

#### 1.1.1 視覚情報処理

ヒトは、左右両眼から得られる像を元に、物体の色や観測者から物体の距離である奥行などの様々な視覚情報を知覚している。このような視覚情報処理は脳に存在する $10^{11}$ 個以上の神経細胞同士の結合から構成される神経回路網によって実現されている。

視覚情報処理の起点は眼球であり、眼球の奥に存在する網膜上に投影された光を取り入れ、光は電気信号に変換され、その電気信号は大腦皮質へと送られる。さらに大腦皮質へ送られた電気信号を脳の視覚系で段階的に処理することで、ヒトは物体の形や色、奥行などを知覚することが出来る。

また、脳は複雑な階層構造をなしており、階層によって担当する機能が異なる(Felleman & Van Essen, 1991)。このようなヒトの視覚系における情報処理の仕組みを解明する手段の 1 つとして**視覚数理モデル**の構築があげられる。視覚数理モデルの研究はモデルを提案したのみでは完結しない。提案した数理モデルを用いて数値シミュレーションを行い、モデルの妥当性を神経生理学的実験結果や心理物理学の実験結果との整合性に関する定量的な評価をする必要があ

る．このように視覚数理モデルの研究は，神経生理，理学分野への横断的貢献が期待される学際的な研究であるといえる．

### 1.1.2 奥行情報と両眼視差

ヒトの視覚系では様々な情報処理がおこなわれている．たとえば色知覚，運動物体の速度推定，物体の形状知覚，物体・顔認識などがあげられる．

とりわけ観察者と物体との距離である**奥行**の推定は，形状知覚や物体認識に直接必要とされる処理であるため，重要な視覚機能であると言える．奥行の推定は物体の**表面構造**（例えば面の凹凸）を知覚する際にも必須の機能であり，物体認識のみならず，物体を把持するための運動計画を実行するためにも欠かせない計算である．

奥行を推定するための手掛かりには複数存在することが知られている．例えば絵画的手がかり(Ramachandran, 1988)，両眼視差(Howard & Brain J. Rogers, 1995)，運動視差などである．これらのうち，両眼視差量と奥行きには一定の視差量までは比例関係であることがわかっている(TYLER, 1991)．したがって，両眼視差の推定量は，奥行き推定量とみなすことができる．両眼視差を計算している神経細胞の存在は，電気生理実験によって実際に明らかにされており，特定の両眼視差量に選択制を示す神経細胞が見出されている(Anzai, Chowdhury, & DeAngelis, 2011; Hubel, Wiesel, Yeagle, Lafer-Sousa, & Conway, 2013; Marroquin, Mitter, & Poggio, 1987)．

画像工学やロボットビジョンの分野でも，空間的に離れた2台のカメラ画像から計算される空間的位置ずれ，すなわち両眼視差を元に，奥行きや物体形状を推定するアルゴリズムの研究が行われている(Schar Daniel & RICHARD SZELISKI, 2002)．ヒトの視覚系において行われている両眼視差計算を基盤とし

た奥行き知覚の計算原理を明かすことは、ヒトと相同な奥行き知覚をもたらすロボットビジョンの開発にもつながるだろう。

以上のことから、**両眼視差情報をもとにした視覚計算理論の構築は、視覚研究において重要事項である**と考えることができる。両眼視差には水平両眼視差と垂直両眼視差が存在するが、本稿では水平視差に限定して議論を進める。以降、水平両眼視差を単に両眼視差と記す。

### 1.1.3 両眼視差の計算方法

本項では両眼視差を幾何的定義ならびに計算によって求められることを示す。

Lを左眼の位置，Rを右眼の座標， $z$ を奥行きとし， $y$ 軸方向は紙面垂直手前方向とする。まず初めに，図 1.1 に示すように，両眼で点 F を注視している場合を考え，このときの輻輳角 $\theta$ を求める。図 1.1a より， $\theta = \alpha - \beta$ である。この時，

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \quad (1.1)$$

となる。ここで，両眼間の回転中心間距離を $2I$ として，注視点 F の $x$ 座標を $X$ ， $z$ 座標を $Z$ とすれば， $\tan \alpha = (X + I)/Z$ ならびに， $\tan \beta = (X - I)/Z$ であるから，これらを整理すると，

$$\tan \theta = \frac{2IZ}{X^2 + Z^2 - I^2} \quad (1.2)$$

となる。特に，注視点が $z$ 軸上の点 B にある場合は， $\tan(\theta / 2) = I/Z$ である。また，点 B までの距離が長い場合は，

$$\theta \simeq \frac{2I}{Z} \quad (1.3)$$

によって輻輳角 $\theta$ を求めることが出来る。

図 1.1 における Vieth-Muller circle は、輻輳角が常に $\theta$ である点の軌跡を表している。図 1.1b に示したように、点 B を注視しているときは、点 A は注視点より遠くに、点 C は近くにある。このとき、これらの点の左右網膜上の空間的位置にずれが生じる。このずれを**両眼視差**という。点 B と点 C の間における両眼視差を $\eta$ とすると、 $\eta$ は左右の眼で点 B と C がもたらす像の角度差であるから、

$$\eta = \gamma - \omega = \theta - \zeta \quad (1.4)$$

と計算される。

例えば、両眼視差 $\eta = 0$ を奥行きの基準とすると、 $\eta < 0$ の場合は相対的に手前、 $\eta > 0$ の場合はより遠くに点や面が存在する。

以上のような幾何学的な考察により両眼視差は計算によって求められることがわかる。

#### 1.1.4 両眼視差の確定領域・不定領域

本項では両眼視差による奥行き推定に対する問題点を挙げる。

Julesz は、奥行知覚が両眼視差のみでも生じることを実証するために、Random-Dot-Stereogram (RDS) (図 1.2a) を視覚刺激として用いた実験をおこなった(Julesz, 1971)。通常、RDS では左右両眼像の全ての点で対応点が矛盾なく与えられており、このような RDS をヒトに観察させると奥行知覚を生じさせることができる。

一方、Solid-Figure-Stereogram (SFS) (図 1.2b) と呼ばれる視覚刺激も視覚研究に用いられることがある。RDS にはない SFS 刺激の特徴として、両眼視差を一意に定められない領域の存在が挙げられる。たとえば図 1.2b の中央黒色部や周囲の白色部での両眼視差量を一意に定めることはできない。原理的には SFS 刺激中の均一色の領域では、どのような奥行きも知覚されないはずであり、理論的にも工学的にも奥行きを求めることはできない。しかしながら、SFS 刺激のような視覚刺激は我々の日常生活にも普遍的に存在しており、我々はそこに「適当な」奥行きを知覚している。例えば、本論文の白色部分である。

SFS 刺激を例にして両眼視差と奥行きについて詳細に述べる。そのために、両眼視差と奥行きの関係を図 1.3 に示す。図 1.3a は SFS 刺激である。左眼像の点 A に対応する右眼像が A' であることの計算は比較的容易であり、工学的には Lucas-Kanade 法(Lucas & Kanade, 1981)、視覚モデルとしては視差エネルギーモデル(Ohzawa, 1998)で計算することができる。このような左右両眼像で対応する空間位置を対応点という。たとえば、図 1.3a における左眼像の点 A と点 D の対応点はそれぞれ、右眼像の点 A' と D' である。これらの点では図 1.3b に示すように水平方向の視差量が 0 となる。一方、左眼像内の点 B と点 C の対応点はそれぞれ右眼像の点 B' と C' であり、視差量は非ゼロである。これらの点 ABCD, ならびに点 A'B'C'D' から構成される縦方向のエッジ上では、図 1.3c に示すように、両眼視差を計算することができるため、結果的に奥行きを推定することが出来る。以下本論文では、対応点を一意に決めることができる点ならびにその集合を**確定領域**と呼ぶ。

点 A の水平視差量を  $d(x, y)$  と記すことにし、 $d(x, y) = 0$  とする。左眼像の点 B とその対応点である右眼像内の点 B' の間の両眼視差は推定可能である。左眼像を基準に右眼像が左にずれている場合に奥行き値が正である定義すれば、図 1.3c のように各点  $(x, y)$  に対する奥行き値  $Z(x, y)$  が定義され、両眼視差が推定可

能な縦方向のエッジの全点においても同様に計算される。しかしながら、中央の黒色部分は、対応点を見出すことができないため、結果的に両眼視差量を一意に決定することができない。すなわち奥行 $Z(x, y)$ の値は不定である。本論文では、対応点が一意に定まらない領域を**不定領域**と呼ぶことにする。

ここで1つの疑問が生じる。どのようにヒトは不定領域における奥行を推定し、知覚しているのだろうか？不定領域における奥行き値は原理的に定めることができないことはすでに述べた。数学的には解が無数に存在する不良設定問題であるといえる。視覚系は、無数に存在する解候補の中から適当な基準に合致した奥行き量を計算し、この計算結果を知覚結果としている可能性がある。前述したとおり、不定領域は外界に多数存在しているため、視覚系が不定領域における奥行きをどのように計算し、知覚しているかを調べることは、種々の視覚情報処理の基盤的知見を与えるだろう。

## 1.2 本研究の目的

これまでの議論を踏まえて本研究の目的を示す。本研究の目的は不定領域における奥行の補完モデルを構築することである。すなわち、ヒトの視覚系で行われているであろう不定領域における奥行き補完モデルを、これまで明らかにされている認知心理学的特性や神経性学的知見と整合するように構築する。本研究に関連する種々の知見は次章に記す。

本研究ではさらに、構築した数理モデルから未知の視覚特性を予測し、この予測結果の妥当性を評価するための視覚心理実験を行う。実際、本研究で行った視覚心理実験では未知の視覚特性が観測されたが、この観測結果を数理的に考察し、新たに発見された視覚特性を説明するための理論を提唱する。



### 1.3 本論文の構成と概要

本論文の構成は次の通りである.

第1章 本研究の背景と目的を述べた.

第2章 既存研究の調査から提案モデルに必要な要件と基礎理論について調査する.

第3章 奥行情報伝播によって補完する数理モデルの導出について論じる.

第4章 提案モデルを数理的に考察し, ヒトの奥行き知覚特性を予想する. この予想を心理物理実験で得られた結果を考察することで検証する.

第5章 心理物理実験によって見出された新たな知覚特性を説明する計算理論を提唱する.

第6章 本論文のまとめを行う.

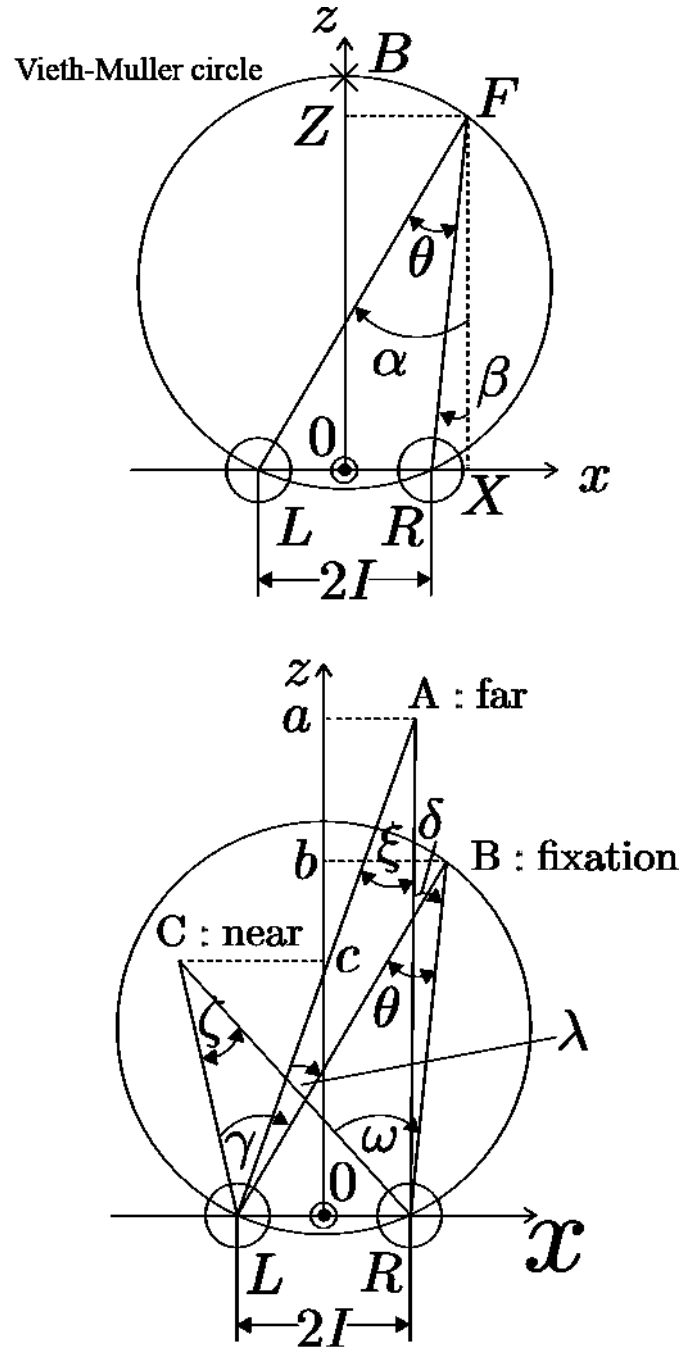


図 1.1 両眼視差に関する説明図.

L と R はそれぞれ左右の眼球を表す．眼球中心を通る線分は視軸である．点 B と点 C に位置する刺激に対する両眼視差  $\eta$  は，それらの視角度差  $\gamma - \omega = \theta - \zeta$  で定義される．

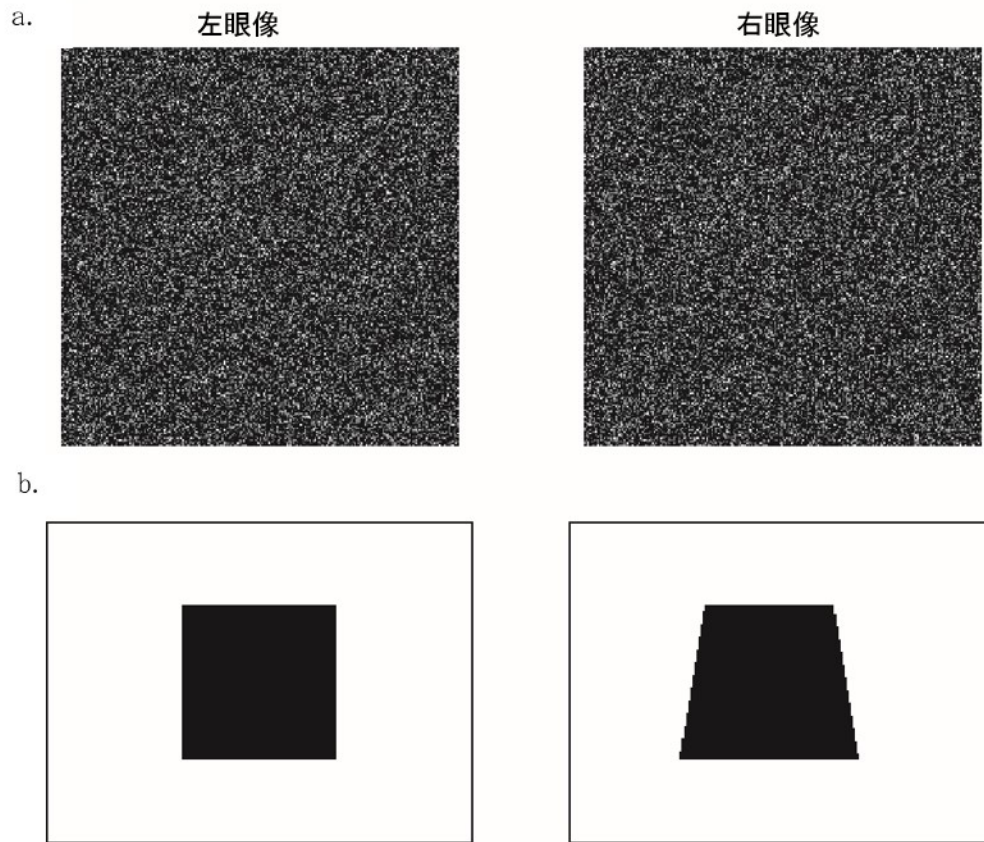


図 1.2 Random-Dot-Stereogram (RDS)と Solid-Figure-Stereogram (SFS)

a. Random-Dot-Stereogram(RDS)の例. これらを平行法や交差法で視覚的に融合すると, 正弦曲線状の立体面が知覚される. b. Solid-Figure-Stereogram の例. 本研究で対象とする視覚刺激の一例.

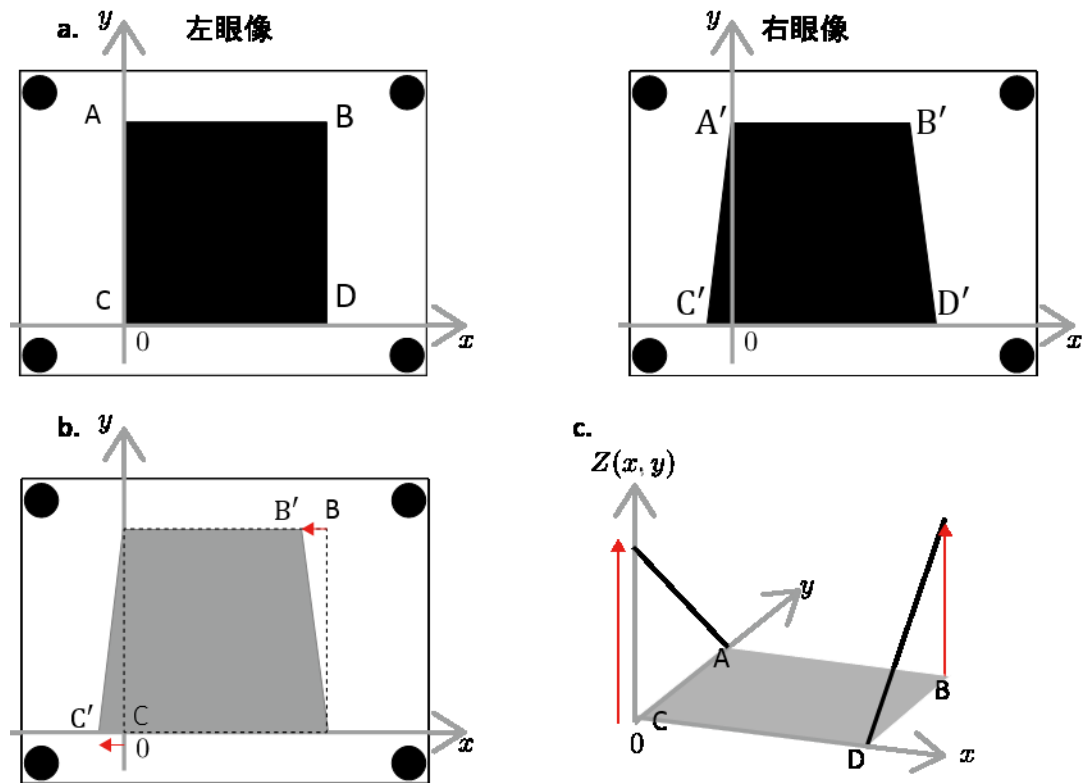


図 1.3 SFS で計算可能・不可能な両眼視差と奥行き推定

両眼視差と奥行の関係. a. 左眼像と右眼像, ならびに対応点. b. 縦方向のエッジ部では水平両眼視差量を一意に定めることができるが, 水平方向のエッジや均一黒色部分では一意に定めることができない. c. 両眼視差と奥行  $Z(x, y)$  の関係. b. の赤い矢印 (B-B' と C-C') で示される視差量は 3 次元空間内における奥行値  $Z(x, y)$  と対応付けることができる. 灰色の均一色内部では奥行値を一意に定めることが原理的にできない.

## 第 2 章 既存研究と問題点

### 2.1 認知心理学的知見と神経生理学的知見

初めに認知心理学的観点から奥行き知覚について調査と考察を行う。

Georgeson らは不定領域における奥行き知覚の特性を調査した(Georgeson & Yates, 2007). 具体的には図 2.1 に例示する水平方向のグラデーションやライン等からなる視覚パターン刺激を用いた. 刺激周辺は確定領域であるが, 中心部は不定領域である. 実験結果に対する考察として Georgeson らは次の結論を得ている; 不定領域における人の奥行き知覚は, 確定領域で得られた奥行情報を「不定領域に**伝播**」することで「**補完**」している.

Georgeson らの結論は, 不定領域の奥行き知覚に関する大まかなアルゴリズムを明らかにしたという意味では重要である. しかし, 具体的な数理モデルの導出までは行っていない. すなわち不定領域の奥行き知覚の基本的な手段は「伝播」によるものであることが分かったが, 神経回路網として実装可能なレベルで実験結果を再現する数理モデルの構築までは行っていない.

伝播による奥行き知覚のモデルは, Georgeson らの報告よりも前に Nishina と Kawato によって計算論的立場から提案されている(Nishina & Kawato, 2004). 彼らは拡散方程式の一種である熱伝導方程式を用いた奥行き伝播モデルを提案した. 例えば図 2.2a (および図 2.3a) を入力パターンとしたとき, Nishina と Kawato らのモデルによる奥行き推定結果は, 図 2.2c (及び図 2.3c) に示す鞍点状の曲面となる. 彼らのモデルでは解を一意に定めるために, 面の空間勾配を基準とした最適化問題としてモデルを構築している. 面の空間勾配を計算の基準

として用いることは、その他の多くのステレオアルゴリズムでも用いられている(Ishikawa & Geiger, 2006; Schar Daniel & RICHARD SZELISKI, 2002).

しかしながら、既存ステレオアルゴリズムによる奥行き推定結果は、ヒトの奥行き知覚結果と一致しないことが指摘された(Ishikawa & Geiger, 2006). Ishikawa と Geiger は認知心理実験を用いてヒトの奥行き知覚特性を調査し、ヒトの視覚系はガウス曲率（以下、 $K$ と記す）がゼロ（ $K = 0$ ）で特徴づけられる平坦な面を知覚することを報告した(Ishikawa & Geiger, 2006). すなわち、図 2.2c のような既存のステレオアルゴリズムの奥行き推定結果は $K \neq 0$ であり、ヒトの知覚結果である $K = 0$ と整合しないことを指摘している. なお Ishikawa は、 $K = 0$ なる面を数値計算によって得るために次の手段を用いた；(i)  $|K|$ に関するエネルギー関数を定義し、(ii) エネルギー関数を極小化もしくは最小化する面を数値的に得るために Simulated annealing を適用した(Ishikawa, 2007). しかしながら、Simulated annealing は直接的には伝播による情報補完ではないため、Georgeson らの知見と整合しないし、Simulated annealing を行っていることを裏付ける神経生理学的知見も筆者の知る限り存在しない.

次に神経生理学的観点から奥行き知覚について調査と考察を行う. Taira らは神経生理学的実験によって次の結論を得ている；RDS と SFS を提示した際に、RDS に選択的に反応する神経細胞と SFS に選択的に反応する細胞、さらにいずれの刺激を提示した際にも反応する SOS ニューロンが存在する(Taira, Tsutsui, Jiang, Yara, & Sakata, 2000). したがって、不定領域における奥行き推定は RDS と SFS では異なる計算方法を採用している可能性が考えられる. また、SOS ニューロンが SFS 刺激に対する輪郭の両眼視差の勾配を計算している可能性を示すものである. Katsuyama らは SOS ニューロンと同様の領野である CIP においてマカクザルを用いた実験から、RDS を提示した際に知覚される面の曲率に選択的に反応するニューロンを見出した(Katsuyama, Naganuma, Sakata, & Taira,

2006). これらの結果から、視覚神経細胞による視差計算には、視差量の空間的勾配と曲率が用いられていることが予想される。

以上、心理物理学的研究、神経生理学的研究、ならびに数理モデル研究を調査した結果、ヒトの奥行き知覚を説明するための数理モデルは次の3要件を満たさなければならないことが分かった。

- A) 奥行情報の伝播を基本としたアルゴリズムであり、
- B) 計算過程において何らかの曲率情報が用いられ
- C) 計算結果として平坦な面を出力すること。

## 2.2 視覚の数理的理論

視覚系が解いていると思われる数理的問題については種々提案されており、独立成分分析 (ICA) やスパースコーディングなどが挙げられる (Jutten & Herault, 1991; Olshausen & Field, 1996)。これらの問題を視覚系が解いていると仮定することで、第1次視覚野や第2次視覚野などの視覚関連細胞の入出力特性を説明できることが知られている。ICAは信号の独立性を基準とした最適化問題、スパースコーディングは入力信号の符号化に関する最適化問題である。

視覚系が適当な最適化問題を解いているとの解釈は、Poggio らによって提唱されており標準正則化理論とよばれている (Poggio, Torre, & Koch, 1985)。標準正則化理論の枠組みでは不良設定問題 (解が無数) を良設定問題 (解が1つないしは有限個) に変換するが、本研究で扱う奥行き補完問題もまた、不定領域における無数の解の候補から、特定の奥行きを得る問題を扱っていると捉えることができる。

以上のことから、標準正則化原理に基づいた視覚モデルを構築することで、本研究の目的を達成できると考えられる。以下、標準正則化理論について記す。

## 2.3 標準正則化理論

標準正則化理論は一般的に次のような手続きからなる。

1. エネルギー関数（解の評価値）を定義。エネルギーはデータ項と正則化項からなる。両項ともに積分を用いた表記がなされる。

（ア） データ項は観測される（観測できる）データと解（真値）の一致度を評価する。

（イ） 正則化項は無限に存在しうる解の中から「適切な」解を選び出すために定義される項であり、この適切度を評価する。正則化項は、解の拘束条件と解釈されることもある。適切度が高いほど、小さい値になるよう定義される。

2. エネルギー関数を最小化（極小化）する解を求めるアルゴリズムを適用する。最急降下法が用いられる場合が多い。

正則化項は、解が拘束条件を満たしているか否かを測る指標であるため、最終的に得られる解は、正則化項の定義に強く依存する。本節ではさまざまな視覚問題に対して汎用的に適用される「解の空間的滑らかさ $\asymp$ 外界像でよく観測される性質」を例として、正則化項・拘束条件を説明する。また、奥行値の推定問題を対象とする。

真の奥行値が未知であり、観測できる奥行値が $d(x, y)$ である場合を考える。たとえば $d(x, y)$ は真値と観測ノイズの和でモデル化される。ここでの問題は、観測量 $d(x, y)$ が与えられたとき、真値の推定量（求める解） $Z(x, y)$ を求めるこ



とである．もちろん観測値だけで真値を知ることはできない（可能な解は無数存在する）．そこで，「真の奥行き値の空間的变化は小さい場合が多い」といった真値に対する先見的知識を数学的に表現し，最も尤もらしい解を得ることを考える．

空間位置 $(x, y)$ の近傍における推定量の滑らかさは微分演算子を用いた $|\nabla Z(x, y)|^2 \geq 0$ を指標として評価できる．ただし $\nabla = \hat{x}\partial/\partial x + \hat{y}\partial/\partial y$ で定義される． $\nabla$ は2次元空間での微分演算子であり， $\nabla Z(x, y)$ は奥行き面の勾配方向と勾配量を与える．空間的な奥行き変化が存在しない場合には， $|\nabla Z(x, y)|^2 = 0$ であるので，小さい値ほど滑らかであると評価される．空間全体で滑らかさを評価する場合には $|\nabla Z(x, y)|^2$ の和（積分）を計算すればよい．この積分が正則化項の典型例であり，次式で表現される．

$$\iint_B |\nabla Z(x, y)|^2 dx dy \quad (2.1)$$

ただし積分領域 $B$ は問題の対象となる空間領域である．

一方，データ項は次式で与えられる．

$$\iint_D \{Z(x, y) - d(x, y)\}^2 dx dy \quad (2.2)$$

ただし $D$ はデータが観測・取得できる空間領域である．式(2.2)で表されるデータ項は観測データと解の適合度を表している．エネルギー関数は，式(2.1)と式(2.2)の線形和で表現される．

次項では，

- A) RDS に観測ノイズが重畳した場合の奥行き値推定問題，
- B) SFS の奥行き値推定問題

に対して、標準正則化理論を適用した具体的例を示す。上記問題 A)と B)の大きな違いは、データ項が与えられている領域  $D$  の違いである。問題 A)の場合、ノイズの有無にかかわらず全空間領域で観測データが与えられている。一方、本研究で対象としている問題 B)の場合は、有効な観測データは確定領域に限定されており、解くべき空間の多くを占める不定領域ではデータ項を定義することができない。

### 2.3.1 RDS に観測ノイズが重畳した場合の奥行値推定問題

図 2.4a に示すような奥行きデータ（真値）に対してノイズを重畳させた図 2.4b を作成し、標準正則化理論の枠組みの中で真値（図 2.4a）を推定する問題を考える。

エネルギー関数は、重みパラメータ  $\lambda \geq 0$  を用いて、式(2.1)と式(2.2)を線形結合した次式で定義される。

$$E[Z(x, y)] = \frac{1}{2} \iint_D \left\{ \lambda (Z(x, y) - d(x, y))^2 + |\nabla Z(x, y)|^2 \right\} dx dy. \quad (2.3)$$

なお、パラメータ  $\lambda$  は、観測データと拘束条件のどちらに重きを置くかを示している。

エネルギー関数の最小（ないしは極小）値を与える解を求める手法である最急降下法を式(2.3)に適用する。最急降下法は、事前に定義されたエネルギーを減少させる  $Z$  の変化量を求めて更新し、この更新を何度も繰り返す。具体的な変更量は、与えられたエネルギーを汎関数微分することで得られる。最急降下法を式(2.8)に適用するために、奥行き  $Z$  に時変数  $t$  を導入すると、次式の拡散方程式として知られる  $Z$  の更新側  $\partial Z(x, y, t) / \partial t$  が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} Z(x, y, t) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) Z(x, y, t) = \Delta Z(x, y, t). \quad (2.4)$$

ただし  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  である.

ここで、上式を導くために用いられる「汎関数微分」と「最急降下法」について説明する. 最急降下法の概略図を図 2.5 に記す. 今, エネルギー関数  $E[Z]$  は図 2.5 の形状をしていると仮定すると, エネルギー関数  $E[Z]$  の  $Z$  に関する偏微分が  $\partial E / \partial Z < 0$  であるとき,  $\partial Z / \partial t > 0$  の方向に  $Z$  を更新すればエネルギーが減少する, 逆に,  $\partial E / \partial Z > 0$  であれば,  $\partial Z / \partial t < 0$  となるように更新すればよい. これらの更新を繰り返すことで, 定常状態  $\partial Z / \partial t = 0$  が得られる. この定常状態はエネルギー関数の最小値 (ないしは極小値) を与える  $Z$  を得たことを意味する. したがって, 定常状態が得られれば, 目的が達せられたことになる.

この概念をより具体的に定式化する. エネルギーの時間変化  $\partial E / \partial t$  は, 合成微分を適用すると, 次式で表現される. ただし,  $\delta E[Z] / \delta Z$  はエネルギーの関数  $Z$  に関する汎関数微分である.

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\delta E[Z]}{\delta Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial t}. \quad (2.5)$$

この時,  $\partial Z / \partial t$  を次式で与えることで, 式(2.5)で表されるエネルギー変化が常に負になる (常にエネルギーが減少する) ことが保障される.

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = - \frac{\delta E[Z]}{\delta Z}. \quad (2.6)$$

ゆえに, エネルギー関数が式(2.3)のときは, エネルギーを汎関数微分することで, 更新側を得ることができる.

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -\frac{\delta E[Z]}{\delta Z} = -\frac{\delta}{\delta Z} \frac{1}{2} \iint \left\{ \lambda (Z(x, y, t) - d(x, y))^2 + |\nabla Z(x, y, t)|^2 \right\} dx dy$$

この式を実際に計算すると,

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -\lambda (Z(x, y, t) - d(x, y, t)) + \Delta Z(x, y, t) \quad (2.7)$$

となる.

定常状態となった $Z(x, y, t)$ を, 視覚が問題解決システムとして得た解とみなす. この更新側を用いて, 図 2.4b を観測データとした場合に式(2.7)を適用すると, その定常状態, すなわちエネルギーの最小化によって得られる解は図 2.4c となる. 期待通り, 観測データに合致しつつ, ノイズが除去されることがわかる. ただし, 真値である図 2.4a とは完全に一致せず, 不連続点までもが滑らかな面として復元されることがわかる.

### 2.3.2 SFS の奥行値推定問題

本研究の対象である不定領域における奥行き情報補完について述べる. 不定領域における面に対する事前知識として, ここでも「空間的滑らかさ」を指標とした場合を考える. この空間的滑らかさのエネルギー指標を $E_{\text{smooth}}[Z]$ と記すことにすると, 式(2.1)と同じ形式でこの指標を与えることができる.

$$E_{\text{smooth}}[Z] = \frac{1}{2} \iint_B |\nabla Z(x, y)|^2 dx dy \quad (2.8)$$

この $E_{\text{smooth}}[Z]$ を減少させる $Z(x, y, t)$ の最急降下法による更新側は, 前節で説明したとおり拡散方程式となる.

$$\frac{\partial}{\partial t} Z(x, y, t) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) Z(x, y, t) = \Delta Z(x, y, t). \quad (2.9)$$

ただし、上式を適用する領域は、補完すべき領域の内部  $(x, y) \in B \setminus \partial B$  に限定される。

前節で例示したノイズ除去問題との大きな違いは、データ項である。奥行き補完問題の場合、有効な観測データは、補完すべき領域  $B$  の境界（ないしは境界の一部）である  $\partial B$  に限定される。すなわち、データ項に関わる更新側  $-\lambda(Z(x, y) - d(x, y))$  は、 $(x, y) \in \partial B$  に限定される。

これらの更新側を用いて補完すると、滑らかな面が結果として得られるが、この結果は実際に知覚される面とは異なる。この問題を解決するためには、正則化項に知覚特性を反映させた量としなければならない。

## 2.4 最適化問題を解く神経回路網モデル

前節では、最急降下法を用いて得られたダイナミクスを用いて奥行き面の復元が可能であり、（問題はあるものの）面補完も可能であることを示した。本節では最急降下法による解の数値的求解アルゴリズムは、神経回路網によって実装できることを示す。簡単のために、式(2.9)に対応するニューラルネットワークを例示する。

式(2.9)で記述されるダイナミクスを空間的に離散化すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z(i, j, t)}{\partial t} = & -Z(i, j, t) \\ & + \frac{1}{4} \{Z(i-1, j, t) + Z(i+1, j, t) + Z(i, j-1, t) + Z(i, j+1, t)\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

となる。

右辺をみると、素子  $Z(i, j)$  を含めた周囲素子との情報伝播によって、2階の空間微分  $\Delta$  が計算されることがわかる。これらの素子を神経細胞モデルの出

力と考えれば，ニューロン $Z(i, j)$ はそれ自身に対して $-1$ の抑制性フィードバック結合，周辺ニューロンからは $+1/4$ の興奮性側方性結合からなるネットワークとして表現することができる．図 2.6 に示すように，4 近傍のニューロンからの入力平均値を次時刻の変化量としていると解釈することもできる．このように，神経回路網モデルで最適化問題を解くことが可能である．

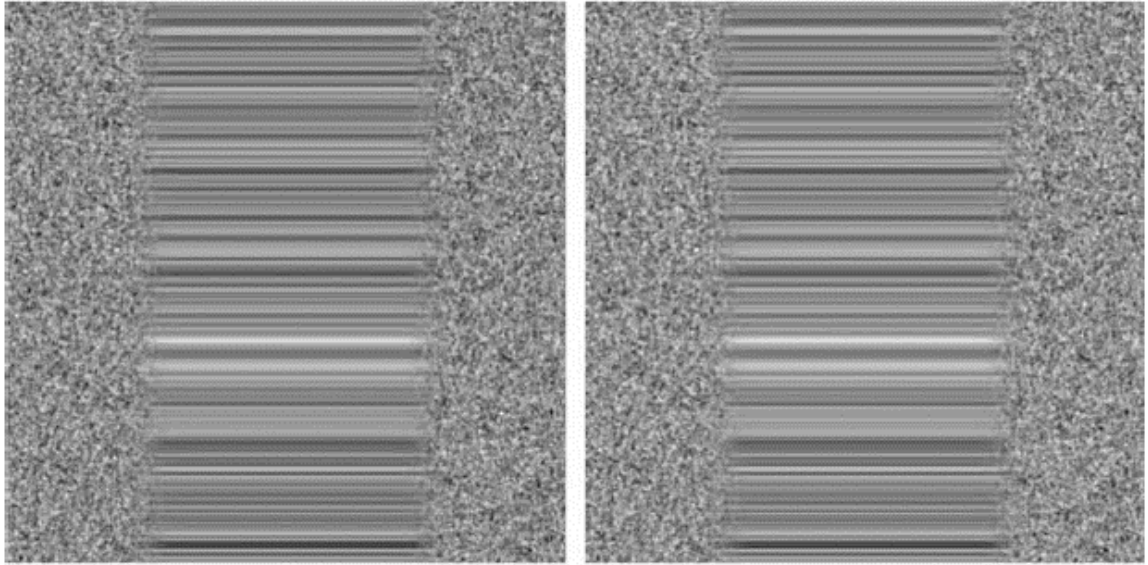


図 2.1 Georgeson らが用いた視覚刺激の例.

左右のランダムドットで構成される部分は確定領域. 中央部分は水平方向のグラデーションで構成されるため, 水平視差量を一意に定めることができない不定領域となる. 不定領域における奥行き知覚 (奥行値) は, 確定領域の奥行きを不定領域に伝播させることで確定されると考えられている.

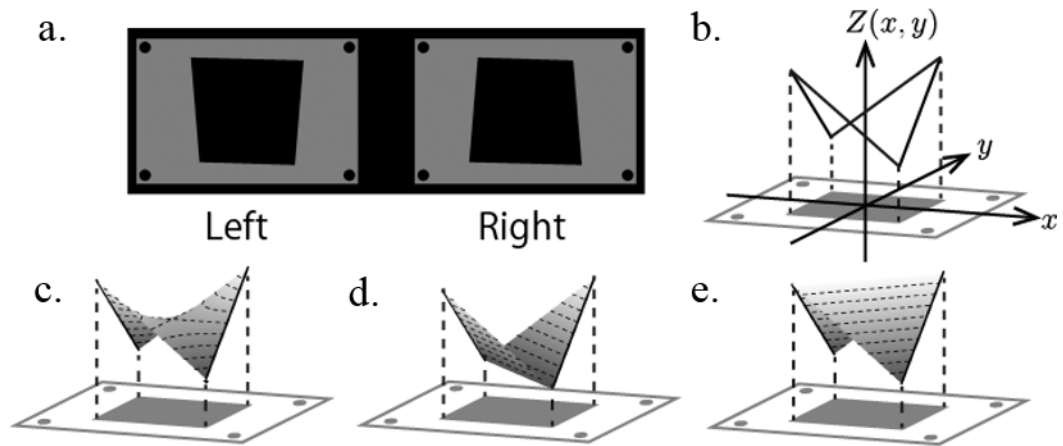


図 2.2 SFS の例 1.

a. 左右両眼像を平行方を用いて観測すると、立体面を知覚する。b. 三角形の実線は各点 $(x, y)$ における両眼視差計算によって推定できる奥行き値 $Z(x, y)$ を表す。c. 熱伝導方程式（拡散方程式）を用いて補完された奥行き伝播の結果。双曲放物面（鞍； $\bar{\kappa} \neq 0, \bar{\mu} \neq 0$ ）が得られる。この結果はヒトの知覚特性と合致しない。d, e. ヒトが知覚する不定領域内の奥行き：フラットな奥行き面が知覚される。知覚される奥行き面の数学的特長として、奥行きの等高線が直線（ $\bar{\kappa} = 0$ ）であり、平行（ $\bar{\mu} = 0$ ）であるといえる。

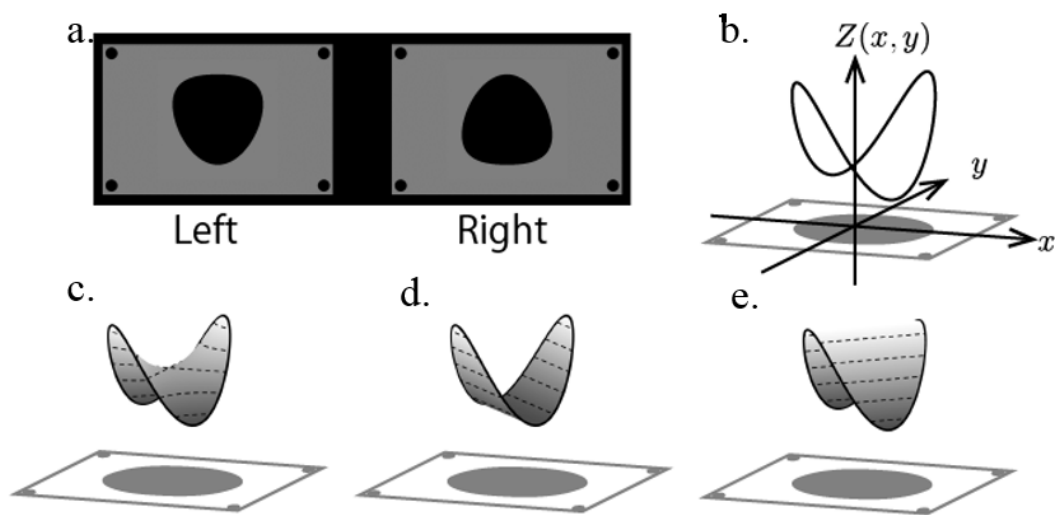


図 2.3 SFS 刺激の例 2.

a. 異なるタイプのステレオペア。実線の閉曲線は両眼視差計算によって確定される奥行き値。b. 拡散方程式に基づく奥行き補完の例（鞍； $\bar{\kappa} \neq 0, \bar{\mu} \neq 0$ ）。この結果もまた、ヒトが知覚する奥行き面と合致しない。d, e. ヒトが知覚する面（フラット； $\bar{\kappa} = 0, \bar{\mu} = 0$ ）。奥行きの等高線は前例と同様に直線であり、かつ平行である。



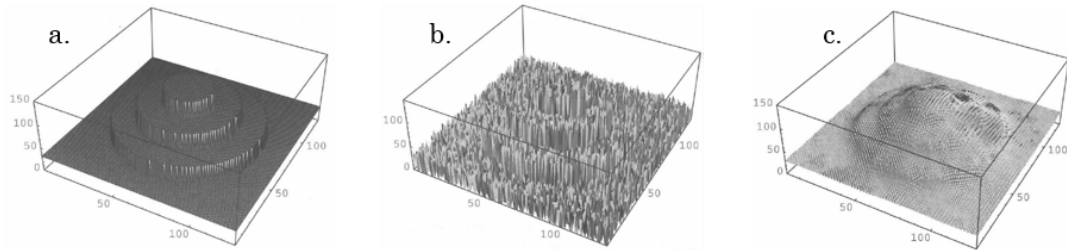


図 2.4 最急降下法を用いた奥行き修復の例 (平井, 1995).

a. オリジナルデータ. b. 図 a. にノイズを載せた奥行き面. c. 1 次微分を用いたエネルギー関数に対して最急降下法を用いた修復例. a. のような元のデータは修復されず, 滑らかな面が得られる.

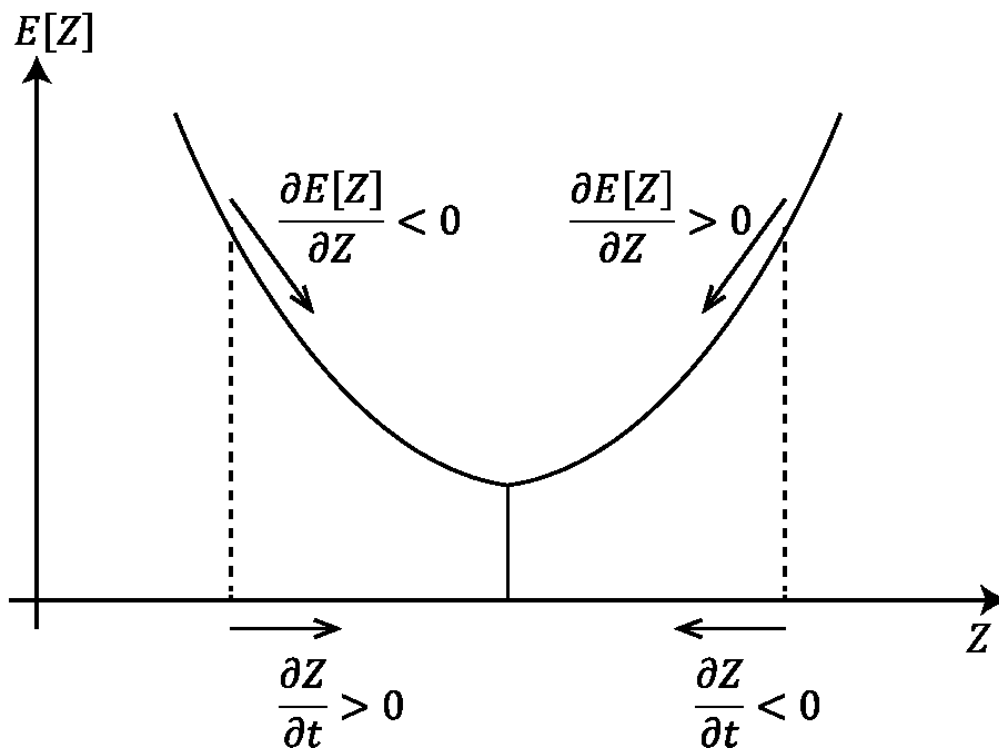


図 2.5 最急降下法の概略図.

更新量  $\partial Z / \partial t = -\partial E[Z] / \partial Z$  を用いると, エネルギー関数の値によらず, 常に極小値の方向にエネルギー値が更新されることがわかる.

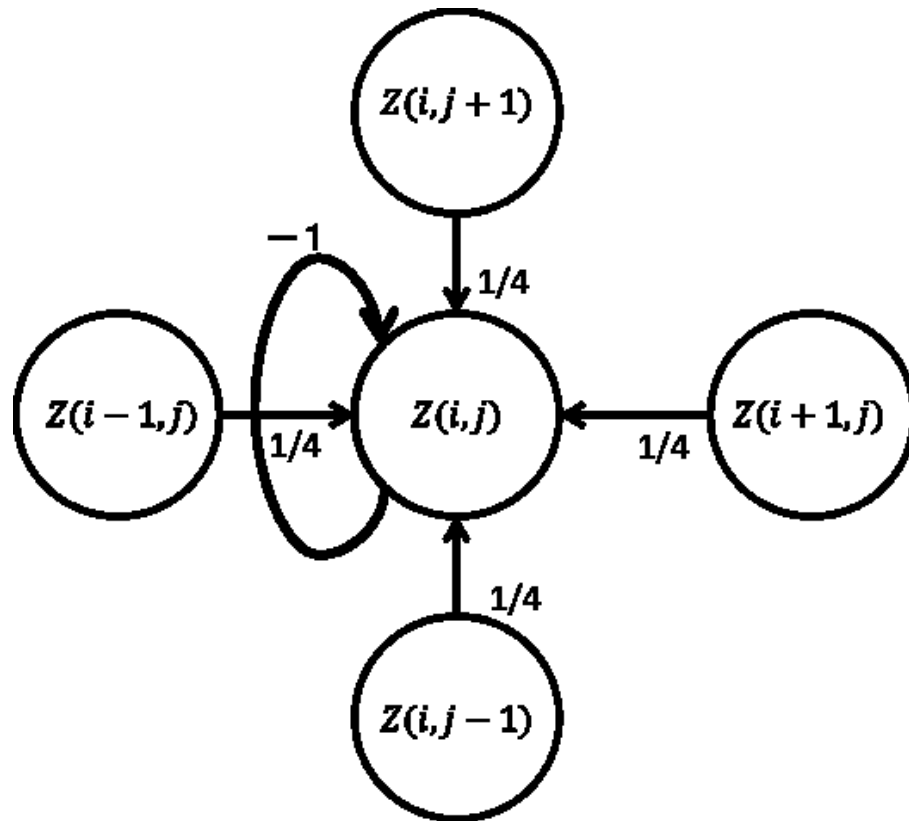


図 2.6 神経回路網の概略図.

○は各座標 $(i, j)$ における神経細胞を表す. 矢印は4近傍の神経細胞からの入力, 数字は結合係数を表す.

## 第3章 奥行き情報補完モデル

本章では面の形状を定量化する数学的指標について複数記し、それぞれの指標に従って導出された奥行き補完結果に対する計算論的考察，ならびに視覚モデルとしての妥当性評価を行う．具体的には以下に示す3種の曲率量を対象として考察し，視覚モデルとしての妥当性を評価する．

- 平均曲率  $H$
- ガウス曲率  $K$
- レベルセット曲率  $\kappa$  とフローカーブ曲率  $\mu$

### 3.1 平均曲率の最小化

不定領域の解を一意に定めるために，解に拘束条件を与えることで不良設定問題を良設定問題にする方法がしばしば用いられる．前章で説明したように，この方法は多くの視覚課題を記述し説明するための計算理論として採用されており，標準正則化理論と呼ばれている．奥行き補完問題では，Nishina らの熱伝導方程式を基盤としたモデルでも採用されているように面形状の「滑らかさ」を解の拘束条件とすることが考えられる(Nishina & Kawato, 2004)．事実，図 2.2d, e のような“フラット”な面はほとんどの位置において急激に奥行が変化しない．

拘束条件は奥行き面の形状（関数）を，実数値として表現する汎関数（エネルギー）を用いる．このときエネルギーは，その値が小さいほどより望ましい解（本問題の場合，望ましい奥行き面）となるように定式化される．

$$\frac{\partial}{\partial t} Z(x, y, t) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) Z(x, y, t) = \Delta Z(x, y, t) \quad (2.9)$$

では、Nishina らのモデルで採用されている式(2.9)の収束状態は、すなわち式(2.9)を視覚モデルとみなした場合には、所望の奥行き補完が得られるだろうか。この問い答えるために、第2章で導出した式(2.9)を用いて図 2.2b（図 2.3b）を境界条件とした場合のZの収束状態を図 2.2c（図 2.3c）に示す。

得られた面は鞍点形状であり、

図 2.2d（図 2.3d）や

図 2.2e（図 2.3e）に示す“フラット”な面を得ることができなかった。すなわち式(2.8)ならびに式(2.9)は、奥行き補完の数理モデルとしての妥当性が低いことがわかる。

拡散方程式、すなわち式(2.9)の収束解として得られる面は、平均曲率とよばれる微分幾何量を最小化する式として知られている。すなわち式(2.8)は面形状の“フラット”性を直接表現してないため、視覚モデルとしての妥当性が低いと解釈することができる。ただし拡散方程式は、一般的な不良設定問題を良設定問題にする手段として有効であり、事実、不良設定問題のひとつである窓問題に適用され、収束解が知覚特性と合致することが知られている。また拡散方程式(2.9)は図 2.6 に示すとおり、側方性結合を介して情報伝播を行う神経回路網として実装することができる利点がある。

## 3.2 ガウス曲率の最小化

より直接的に“フラット性”を表現する量がガウス曲率 $K$ であり、第1章で示したとおり、Ishikawa はガウス曲率を評価量として知覚と合致する奥行き面を

得ている．しかしながら，Ishikawa はガウス曲率を極小化する $Z$ を得るために Simulated Annealing を用いており，神経回路網として実装可能なアルゴリズムとして所望の $Z$ を得ていない．

そこで本節では以下に示すガウス曲率 $K$ を用いた評価関数 $E_{\text{flat}}[Z]$ の更新側を導出する．

$$E_{\text{flat}}[Z] = \frac{1}{2} \iint_{\mathbf{B}} K(x, y)^2 \, dx dy \quad (3.1)$$

なお， $K(x, y)$ は以下のように定義される．

$$K(x, y) = \frac{Z_{xx}Z_{yy} - Z_{xy}^2}{(1 + Z_x^2 + Z_y^2)^2} \quad (3.2)$$

$Z$ の添え字は偏微分を示しており，例えば， $Z_x \stackrel{\text{def}}{=} \partial Z / \partial x$ ,  $Z_{xy} \stackrel{\text{def}}{=} \partial^2 Z / \partial x \partial y$  である．

最急降下法を式(3.1)に適用すると， $Z$ の4階微分を含む129項からなる複雑なダイナミクスが得られる（詳細は付録A.5に示す）．数値計算によって偏微分方程式を解く場合，一般的には空間を正方格子で離散化し，微分を差分に表現しなおす手段が用いられるのだが，4階微分のような高階微分を離散化し，正確かつ安定に計算することは困難である．また129項それぞれを神経回路網の素子や結合強度として解釈することもまた困難である．

### 3.3 レベルセット・フローカーブ曲率

“フラット性”を表現するためにガウス曲率 $K$ を用いることは，微分幾何的には自然な選択肢であろう．しかし，ガウス曲率だけが知覚特性を説明しうる唯一無二の選択肢であるとは限らない．そこで本節では，ガウス曲率に替わる微

分幾何量について調査する．本節においても前節と同様に，新たなエネルギー関数に対して最急降下法を適用した後，数値実験により所望の結果が得られるかを確認し，最後に神経回路網としての実装可能性について論じる．

Lindeberg は一般的な 2 次元静止画像  $I(x, y)$ ，ただし  $I$  は輝度や RGB 値，から有用な画像特徴を抽出するためには，2 次元空間  $(x, y)$  で定義される曲面  $I(x, y)$  の微分量が重要であることを見出した(Lindeberg, T, 1993)．特に  $I(x, y)$  の等高線（レベルセットと呼ばれる）の曲率情報は，例えば画像処理の必須要件であるスケールに依存しない物体検出に有用であることが知られている．

ここで着目すべきことは， $I$  は輝度や RGB 値に限定する必要はなく，一般的な 2 次元関数であれば Lindeberg らの知見を導入できることである．そこで本研究では上記の輝度  $I$  を奥行き  $Z$  に置き換え，たとえば奥行き値のレベルセットを定義した場合に“フラット性”を表現しうるかどうかを検討する．

予備的検討の結果，以下 2 つの曲率関連量が奥行面のフラット性を表現するのに有用であることがわかった．

- レベルセット曲率：  $\kappa(x, y)$ 
  - 奥行き  $Z$  の位置  $(x, y)$  を通過する等高線（レベルセット）の曲率を与える．
  - レベルセットが  $(x, y)$  で直線である場合には，  $\kappa(x, y) = 0$  となる．
  - $\kappa$  の正負は曲率の正負を示しているので，レベルセットが直線か否かを評価するには，  $\kappa^2$  が 0 であるか否かを評価すればよい．
- フローカーブ曲率：  $\mu(x, y)$ 
  - レベルセットに垂直な線をフローカーブと呼び，位置  $(x, y)$  におけるフローカーブの曲率を与える．
  - フローカーブが  $(x, y)$  で直線である場合には，  $\mu(x, y) = 0$  となる．

- フローカーブが直線であることは、位置 $(x, y)$ に隣接するレベルセットが平行であることと等価である。
- レベルセットの平行性を評価するためには、 $\mu^2$ が0か否かを評価すればよい。

これら2つの曲率量 $\kappa, \mu$ は、関数 $Z$ の微分係数から計算することができ、次式で与えられる(Florack, Romeny, Koenderink, & Viergever, 1992) (図 3.1)。

$$\kappa(x, y) = \frac{Z_y^2 Z_{xx} - 2Z_x Z_y Z_{xy} + Z_x^2 Z_{yy}}{Z_x^2 + Z_y^2}, \quad (3.3)$$

$$\mu(x, y) = \frac{(Z_x^2 - Z_y^2) Z_{xy} + Z_x Z_y (Z_{yy} - Z_{xx})}{Z_x^2 + Z_y^2} \quad (3.4)$$

但し紙面の都合上、右辺では座標 $(x, y)$ の記載を省略している。

本研究では、 $\kappa^2$ と $\mu^2$ がそれぞれ、レベルセットの“直線性”と“平行性”を表していることに着目して、面のフラット性を評価する新たな評価量を与える。直感的には、例えば図 3.2a の右側に例示されるようなフラットな $Z$ であれば任意の位置 $(x, y)$ において、 $\kappa^2(x, y) = 0$ でありかつ $\mu^2(x, y) = 0$ であることから、任意の $(x, y)$ で $\kappa^2 + \mu^2$ を評価すればフラット性を評価できる期待がある。

図 3.1 以外の例として、不定領域での面知覚；

図 2.2d や図 2.2e (図 2.3d や図 2.3e) でも、レベルセットが直線であるし、隣接するレベルセットが平行であることが分かる。したがって、ガウス曲率ではなく、これら $\kappa^2 + \mu^2$ がゼロであるか否かを評価することで、ヒトの奥行き知覚に合致するか否かを表現できるだろう。

以上の考察は定性的かつ直感的な議論であった。そこで、式(3.3)や式(3.4)を実際の評価量として用いる場合の問題点と解決方法を述べる。さらに、 $\kappa$ と $\mu$ ならびに $K$ の数学的関係を理論的に示す。

### 3.3.1 修正レベルセット曲率・修正フローカーブ曲率

図 2.2d や図 2.2e の奥行き面の頂点や底では奥行き勾配が 0 ( $Z_x^2 + Z_y^2 = 0$ ) であり、これらの位置では $\kappa$ も $\mu$ も発散する。この問題を解決するためには単純に、 $\kappa$ を定義する式(3.3)と、 $\mu$ を定義する式(3.4)の分子のみを評価すればよい。なぜならば直線性や平行性を評価するためには、これら分子のゼロ・非ゼロを評価すれば十分だからである。これら分子をそれぞれ $\bar{\kappa}$ と $\bar{\mu}$ とすれば次式で与えられる。

$$\bar{\kappa} = \kappa \cdot (Z_x^2 + Z_y^2)$$

$$\bar{\mu} = \mu \cdot (Z_x^2 + Z_y^2)$$

これら $\bar{\kappa}$ と $\bar{\mu}$ を本稿では修正レベルセット曲率と修正フローカーブ曲率と呼ぶことにする。本研究では、 $\bar{\kappa}^2 + \bar{\mu}^2$ を奥行き面のフラット性評価量として用いる。

### 3.3.2 曲率関連量の数学的関係

次に、 $(\bar{\kappa}, \bar{\mu})$ と $K$ の数学的関係を以下の新定理として示す。

#### 新定理

$Z_x(x, y) \neq 0$ または $Z_y(x, y) \neq 0$ ならば

$$\text{新定理 1} \quad \bar{\kappa}(x, y) = \bar{\mu}(x, y) = 0 \Rightarrow K(x, y) = 0 \quad (3.5)$$



証明

曲率は回転不変量であることに注意する．すなわち，曲率は式(3.3)，(3.4)に示すように $x$ 方向や $y$ 方向の微係数を用いて計算されるが，局所的に回転した $\xi$ 方向と $\eta$ 方向への微係数（ただし方向 $\xi$ と $\mu$ は直交）を用いても計算できる．したがってガウス曲率 $K(x, y)$ は以下の式に書き換えられる（詳細は付録 A.3 に記す）．

$$K(x, y) = \frac{Z_{\eta\eta}(x, y)Z_{\xi\xi}(x, y) - Z_{\eta\xi}^2(x, y)}{(1 + Z_{\xi\xi}^2(x, y) + Z_{\eta\eta}^2(x, y))^2} \quad (3.6)$$

ここで方向 $\xi$ を $Z$ の勾配方向 $\nabla Z$ とすると， $\bar{\kappa}, \bar{\mu}$ は以下の式で与えられることが知られている (Sato & Usui, 2008a).

$$\bar{\kappa}(x, y) = Z_{\eta\eta}(x, y), \quad (3.7)$$

$$\bar{\mu}(x, y) = Z_{\eta\xi}(x, y) \quad (3.8)$$

式(3.6)，(3.7)ならびに(3.8)を比較すると， $\bar{\kappa}(x, y) = \bar{\mu}(x, y) = 0 \Rightarrow K(x, y) = 0$ であることがわかる．

また，定理の逆は成り立たないことは反例を示すことで証明できる．円錐形状の面を，以下の数式で記述する．

$$Z_{\text{cone}}(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2} + 1 \quad (3.9)$$

この面に対してガウス曲率の分子の各項を計算すると，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_{\text{cone}}(x, y) = -\frac{x^2}{(-x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{-x^2 + y^2}} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} Z_{\text{cone}}(x, y) = -\frac{y^2}{(-x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{-x^2 + y^2}} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} Z_{\text{cone}}(x, y) = \frac{xy}{(-x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (3.12)$$

となる．したがって，式(3.2)で記述されるガウス曲率の分子は

$$\frac{\partial^2 Z_{\text{cone}}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Z_{\text{cone}}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Z_{\text{cone}}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.13)$$

一方， $\kappa \neq 0$ ， $\mu \neq 0$ である．したがって，定理(3.5)の逆は成り立たない．

Q.E.D

以上， $\bar{\kappa}^2 + \bar{\mu}^2$  を， $K^2$ に替わる評価量として利用できる可能性を示した．

### 3.4 本研究で提案する数理モデル

前節で得た定理を空間積分すると，次の関係を導出することができる．

$$\iint_B (\bar{\kappa}^2(x, y) + \bar{\mu}^2(x, y)) dx dy = 0 \Rightarrow \iint_B K^2(x, y) dx dy = 0 \quad (3.14)$$

以降，本論文では $B$ を不定領域とする．上式は， $\bar{\kappa}^2 + \bar{\mu}^2$  による奥行 $Z$ のフラット性評価は， $K^2$ による評価よりも厳しい条件であることを意味する．事実，いたるところ $K^2 = 0$ である面であっても， $\bar{\kappa}^2 + \bar{\mu}^2 \neq 0$ なる面が存在する（例えば図 3.2b）．換言すれば，上式の逆は必ずしも成立しないため， $\bar{\kappa}^2 + \bar{\mu}^2$ はフラット性を表現するには条件が厳しく，不適切である可能性がある．しかしながら，本研究では後述するように，エネルギー関数（評価関数） $\iint \bar{\kappa}^2 + \bar{\mu}^2 dx dy$  に最急降下法を適用して奥行補完面を得るために，より厳しい条件下で得られる補完面が結果的に（ $\iint \bar{\kappa}^2 + \bar{\mu}^2 dx dy > 0$ であっても）フラットになる可能性がある．

本研究では最終的に、次式で定義される奥行き $Z$ のエネルギー関数を提案する。

$$E[Z] = \iint_B (\bar{\kappa}^2(x, y) + \bar{\mu}^2(x, y)) \cdot \|\nabla Z(x, y)\|^2 dx dy \quad (3.15)$$

$E[Z]$ を最急降下法によって最小化（ないしは極小化）する $Z$ を求めるために、奥行き $Z$ に時間変数 $t$ を導入する。結果として得られる更新側は次式で示される。

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} Z = \nabla(\Delta Z) \cdot \nabla^\perp Z + \bar{\kappa} \quad (3.16)$$

但し、 $\nabla^\perp Z$ は $\nabla Z$ に対して直交するベクトル、 $\tau$ は時定数である。以降のシミュレーションでは、 $\tau = 10 \text{ ms}$ とした。座標系は通常の $(x, y)$ 座標系と偏微分を用いる。式(3.16)が本稿で提案する奥行き補完モデルの数理表現である。式(3.16)の導出は、Sato & Usui による。奥行き補完結果は、式(3.16)の定常状態とする。

式(3.16)は対流拡散方程式の一種であり、奥行き情報 $Z$ が空間的に伝播される性質をもつ。この性質は、第1章で述べた Georgeson らの指摘に反しない。

本研究で提案する数理モデルは、(i) 視覚は不定領域での奥行き値を拡散による補完によって実現し、(ii) 数学的には式(3.15)を最小化もしくは極小化するために、(iii) 式(3.16)に基づいて情報伝播が行われていることを意味する。

### 3.5 数値シミュレーションによる知覚の再現

本節では前節で提案した奥行き補完のための式(3.16)を不定領域に適用し、得られた結果がヒトの奥行き知覚特性を再現しうるか、数値シミュレーションによって検証する。奥行き補完結果は、式(3.16)の定常状態とする。提示するパター

ンとして2種類の境界条件（図 2.2b と図 2.3b）を設定した（2種の Dirichlet 境界条件）。また，微分方程式として表される数理モデル，すなわち式(3.16)の  $t = 0$ における初期条件として  $Z(x, y, t = 0) = +1$ ，もしくは  $Z(x, y, t = 0) = -1$  の2種類を用意した。

図 3.3 は初期値（ $t = 0$ ）との奥行き $Z$ を示している。モデル適用後の定常状態（ $t = 500$  ms）はヒトの知覚特性と同様にフラットな面になることが分かった。また，初期値に依存して定常状態が異なり，凹面もしくは凸面になることがわかった。これらフラットな凹凸面はいずれも同じエネルギー値 $E[Z]$ をあたえる。

以上の結果は，本研究によって情報伝播によるヒトの奥行き知覚結果を再現可能な奥行き補完モデルが初めて構築されたことを示すものである。なお，図 2.2a や図 2.3a のように，観測者に2種類の知覚がもたらされる視覚刺激は多義図形と呼ばれており，多義図形の知覚を再現したのも本提案モデルが初めてである。

## 3.6 考察

### 3.6.1 補完される奥行き面の初期値依存性

前節での数値シミュレーション結果から，補完される奥行き面は初期値に依存して異なることが分かった。本節では式(3.15)で定義されるエネルギー関数  $E[Z]$ の性質と，面補完の初期値依存性について考察する。

原理的に2種存在する定常状態は式(3.16)の初期値に依存しているが，定常状態である2種のフラットな凹凸面はいずれも同じエネルギー値 $E[Z]$ を与える。 $E[Z]$ は図 3.8 のような double potential 型のエネルギー関数であることが予測さ

れる．以降  $Z_v$  をフラットな凹面（図 2.2d）,  $Z_\Lambda$  はフラットな凸面（図 2.2d）とする．この考えは定性的に Kanai らの考察でも採用されている (Kanai, Moradi, Shimojo, & Verstraten, 2005)．図 3.3a は初期値  $Z(x, y, t = 0) = -1.0$  から凸面への遷移を表している．この結果は，初期条件  $Z(x, y) = -1.0$  が  $Z = Z_v$  側のエネルギー谷の近傍にあるために，凹面（ $Z = Z_v$ ）が定常状態として得られたものと予測される（その他の図 3.3b などでも同様）．

以上の考察から，ヒトの奥行き知覚に関する特性を予測することができる．端的述べると，（知覚が一意に定まる）凹面をヒトに提示した直後に，図 2.2a のパターンを提示すると凹面が知覚されることが予測される．逆に，凸面を提示した直後に同様の不定領域を含むパターンを提示すれば，凸面が知覚されるであろう．この予測については次章で詳しく調査する．

### 3.6.2 1次元情報の補完に対する2階微分モデルと等方性拡散モデルの比較

2階微分モデル（本章提案モデルの1次元版）と等方性拡散モデルによって補完される曲線を比較することで，本章提案モデルの一般性に関して考察する．なお，等方性拡散モデルに関しては，Nishina & Kawato (2004)によって1次元に対する熱伝導方程式を基盤とする奥行き補完モデルがすでに提案されている．

本章で提案した奥行き補完モデルを1次元曲線の補完に適用するためには，1次元曲線の場合の曲率情報が空間の2階微分で記述されることに着目すればよい．まず，補完結果である曲線の評価に用いるエネルギー関数を以下のように定義する．

$$E_{\text{flat-1}}[Z] = \int_B \left( \frac{d^2}{dx^2} Z(x) \right)^2 dx \quad (3.17)$$

式(3.17)に最急降下法を適用することで、 $E_{\text{flat-1}}[Z]$ を最小化する $Z(x)$ の更新則として次の拡散方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} Z(t, x) = -\frac{\partial^4}{\partial x^4} Z(t, x) \quad (3.18)$$

図 3.9a に 2 階微分モデル（式(3.18)）と等方性拡散方程式を用いた数値シミュレーションの結果を示す。等方性拡散によって平らな線が補完されるが、境界周囲における連続性は保たれていないことがわかる。一方、式(3.18)によって補完された曲はなめらかであるが、境界周囲の連続性は保たれている。これは、スプライン補完を用いて得られる曲線（図 3.9b）と同様の結果である。例えば図 3.9c に示すように、2 階微分モデルを用いると、境界における奥行き値に合った直線や曲線を補完可能である。

### 3.6.3 神経回路網による実装可能性

本項では、提案モデル（式(3.16)）が神経回路網によって実装できることを示す。図 3.10a に示す $(\eta, \xi)$ 局所座標系を導入すると、曲率は回転不変量であるから、 $(\eta, \xi)$ を用いて式(3.16)を以下のように書き換えることができる。

$$\frac{\partial}{\partial t} Z = (\nabla \Delta Z) \cdot \nabla^\perp Z + \kappa |\nabla Z| = Z_\xi \left( \frac{\partial}{\partial \eta} Z_{\eta\eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} Z_{\xi\eta} \right) + \lambda Z_{\eta\eta}$$

したがって、

$$\frac{\partial}{\partial t} Z = Z_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta Z - \Delta Z + (\Delta Z + \lambda Z_{\eta\eta}) \quad (3.19)$$

ここで、 $Z(x, y)$ を2次曲面として近似すると、 $\partial \Delta Z / \partial \eta = 0$ となる。よって最終的に式(3.16)は以下の式で表される。

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} Z \simeq -\Delta Z + (\Delta Z + \lambda Z_{\eta\eta}) \quad (3.20)$$

上記の式(3.20)のダイナミクスの $\Delta Z$ については、すでに述べたように、図 2.6 に示すような周辺ニューロンからの興奮性側方性結合と自身に対する抑制性フィードバック結合にからなるネットワークとして表現できる。したがって、同様にして第1項は図 3.10b に示すようなネットワークとして表現できる。続いて、第2項： $(\Delta Z + \lambda Z_{\eta\eta})$ について述べる。第2項の原点における量と Shape Index (Koenderink, 1990)は図 3.10c に示すような比例関係にあることを見出した。Shape Index は主曲率（付録を参照）を用いた3次元面の（凹凸などの）形状に関する指標であり、Katsuyama らによって Shape Index に選択性を示すニューロンが CIP に見いだされている(Katsuyama et al., 2006)。したがって、式(3.20)の第2項は CIP からの信号を記述していると言える。以上の考察から、式(3.16)で記述される提案モデルは図 3.10b に記す神経回路網によって実装できることがわかった。

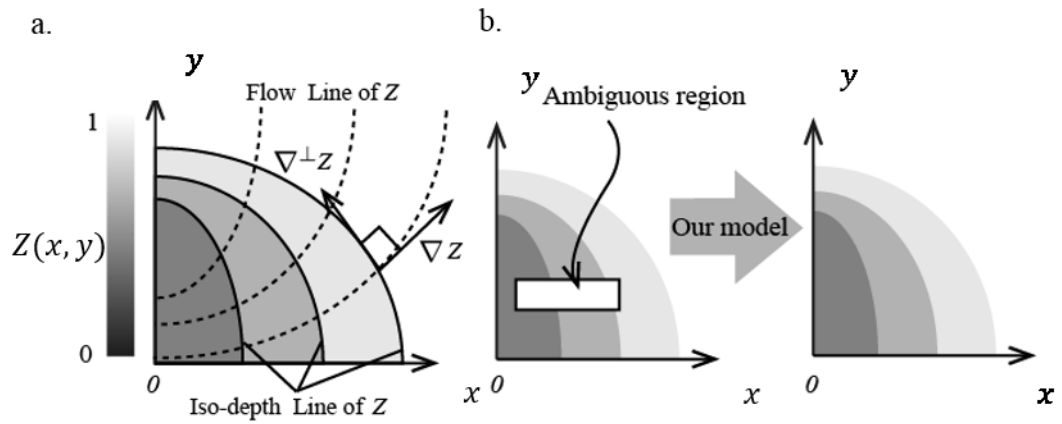


図 3.1 2種類の曲率に関する概略図と提案モデルの概要.

実線の曲線はレベルセット（奥行きの等高線），点線の曲線はフローカーブを示している．フローカーブはレベルセットに直交する曲線である．奥行きの勾配 $\nabla Z$ は空間的な $Z(x, y)$ の変化が最大となる方向を与える．また， $\nabla^\perp Z$ は $\nabla Z$ に対して垂直である．b. 左図の白い領域は補完される領域，すなわち，不定領域である．提案モデルを適用すると，右図に示すようにレベルセットとフローカーブの曲率をなるべく小さくする曲線が補完される．



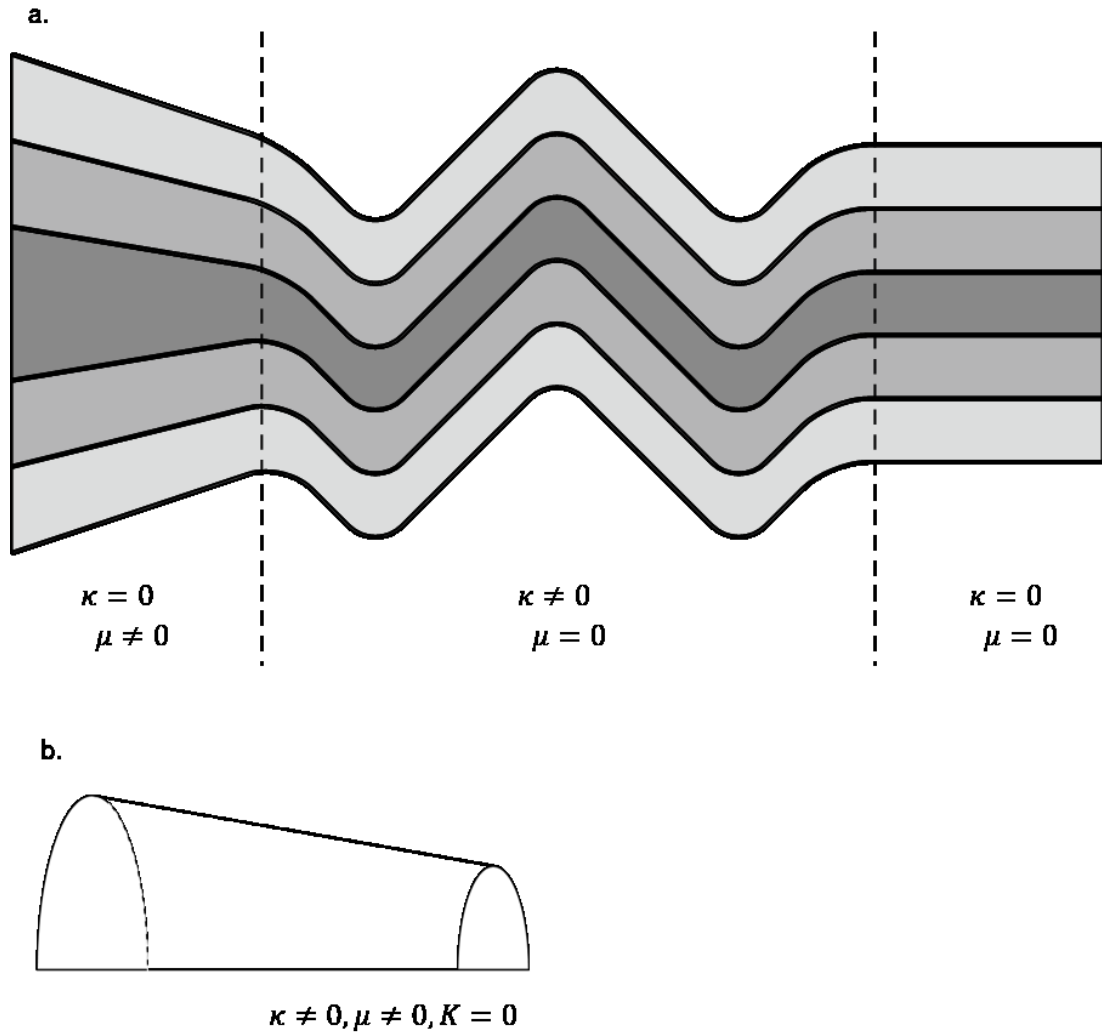


図 3.2 曲率と面の関係.

a. 式(3.3), (3.4)で表される 2 種類の曲率とレベルセットの関係を示す. なお, 図 3.1 と同様に実線はレベルセットを表している. レベルセットの特徴は 2 種類の曲率の値に応じて以下の 3 通りとなる.

$\kappa(x, y) = 0, \mu(x, y) \neq 0$ : レベルセットは直線となるが, 平行にはならない.

$\kappa(x, y) \neq 0, \mu(x, y) = 0$ : レベルセットは平行であるが, 直線とはならない.

$\kappa(x, y) = 0, \mu(x, y) = 0$ : レベルセットは平行な直線となる. この時, フラットな面となる.

b. 提案する新定理 1 の逆が成り立たないことを示す反例. このような面に対して 3 種類の曲率を計算すると,  $\kappa \neq 0, \mu \neq 0, K = 0$  となり, 定理の逆は偽となることがわかる.

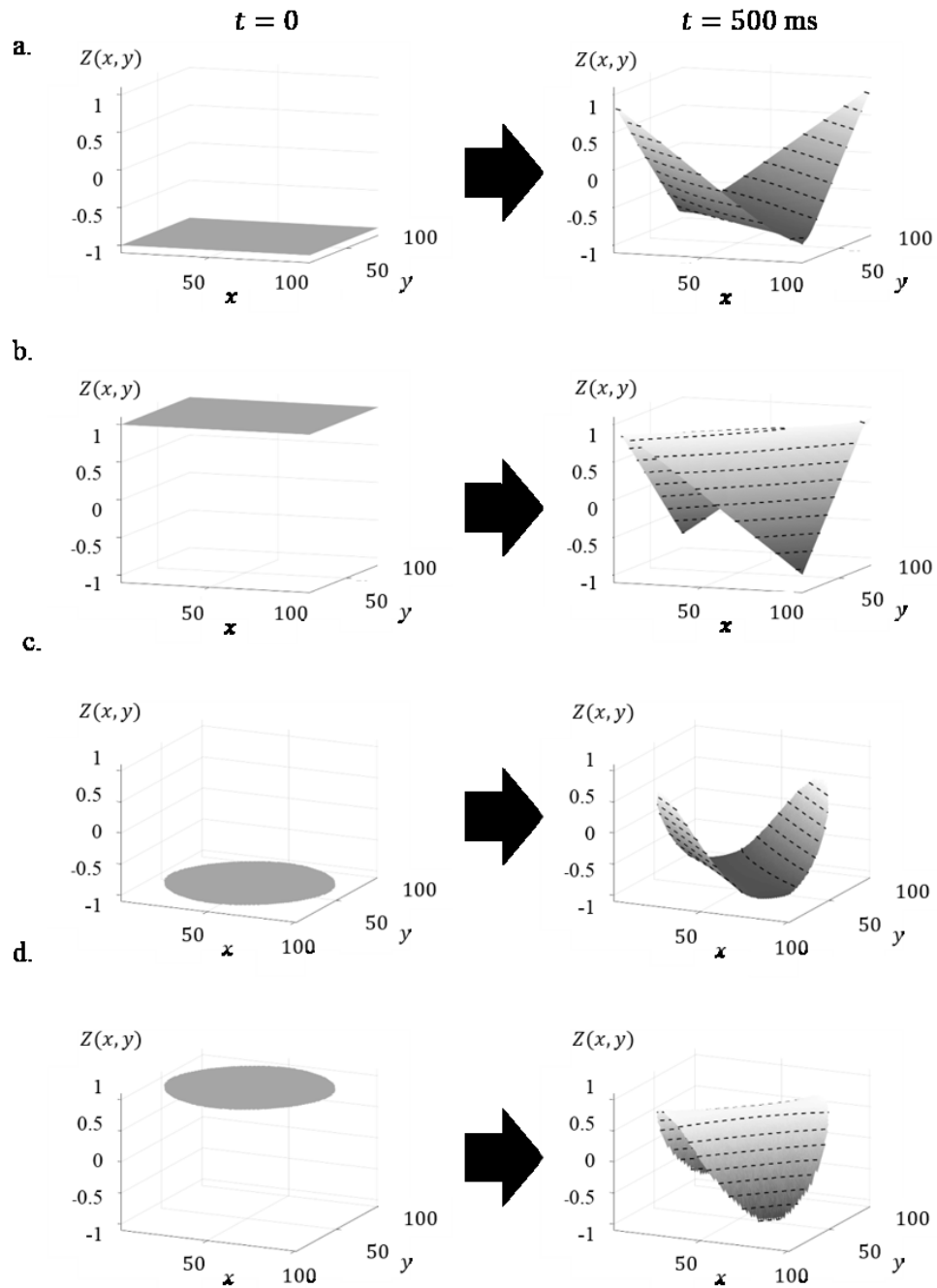


図 3.3 数値シミュレーション結果.

点線は奥行き等高線：Iso-depth Line. 図 2.2a や a 図 2.3 に示されるような 2 種類の境界条件を用いて 2 つの初期条件からスタートした場合の奥行き補完の数値シミュレーションの結果. 左から右へ時間経過を表している. a. と b. (c. と d.) の境界条件は同じである. 初期条件に依存して, Depth map は凹面もしくは凸面のフラットな面に収束する. なお, より詳細な伝播の様子は図 3.4～図 3.7 に示す.

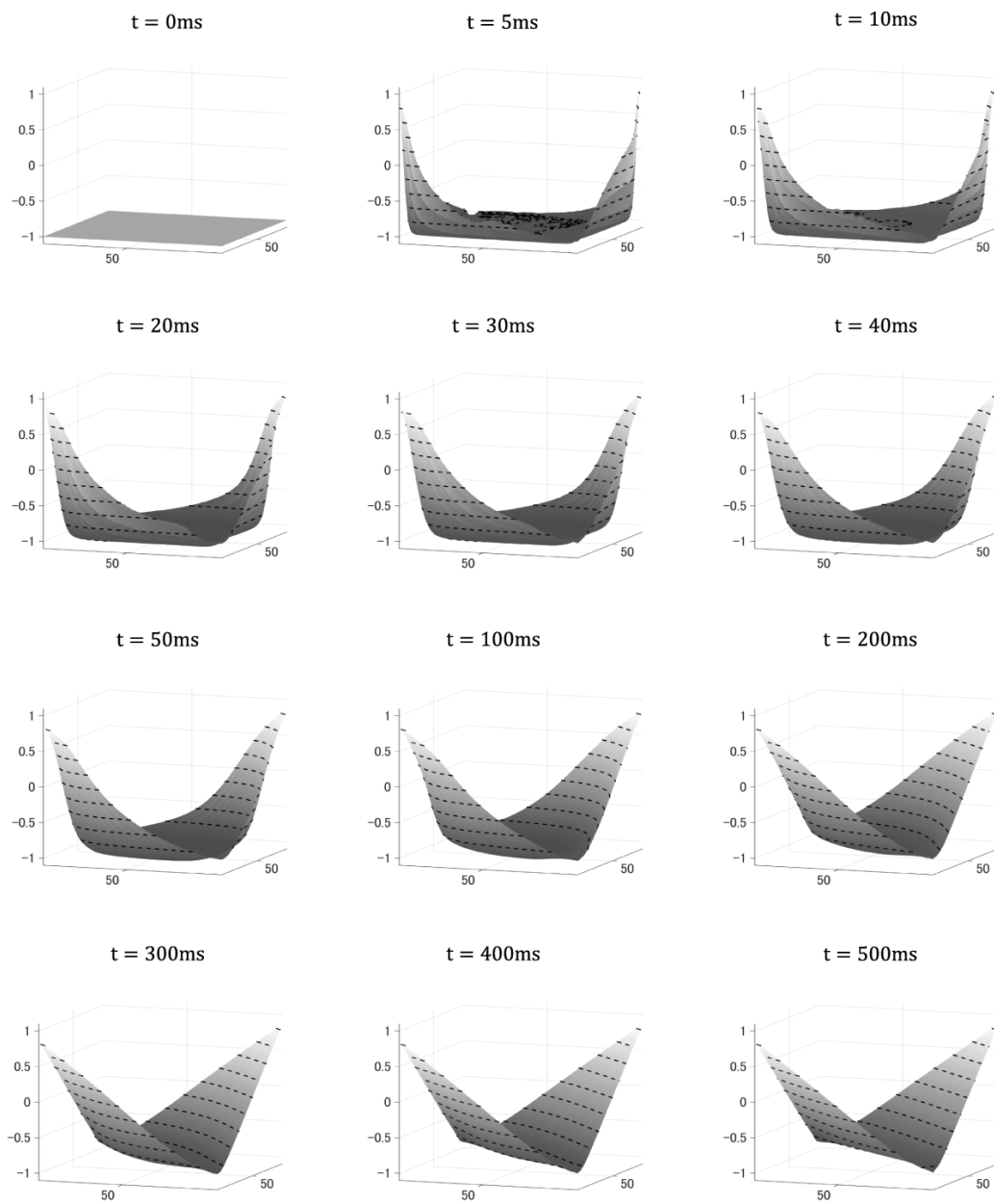


図 3.4 図 3.3a に対する面補完の詳細.

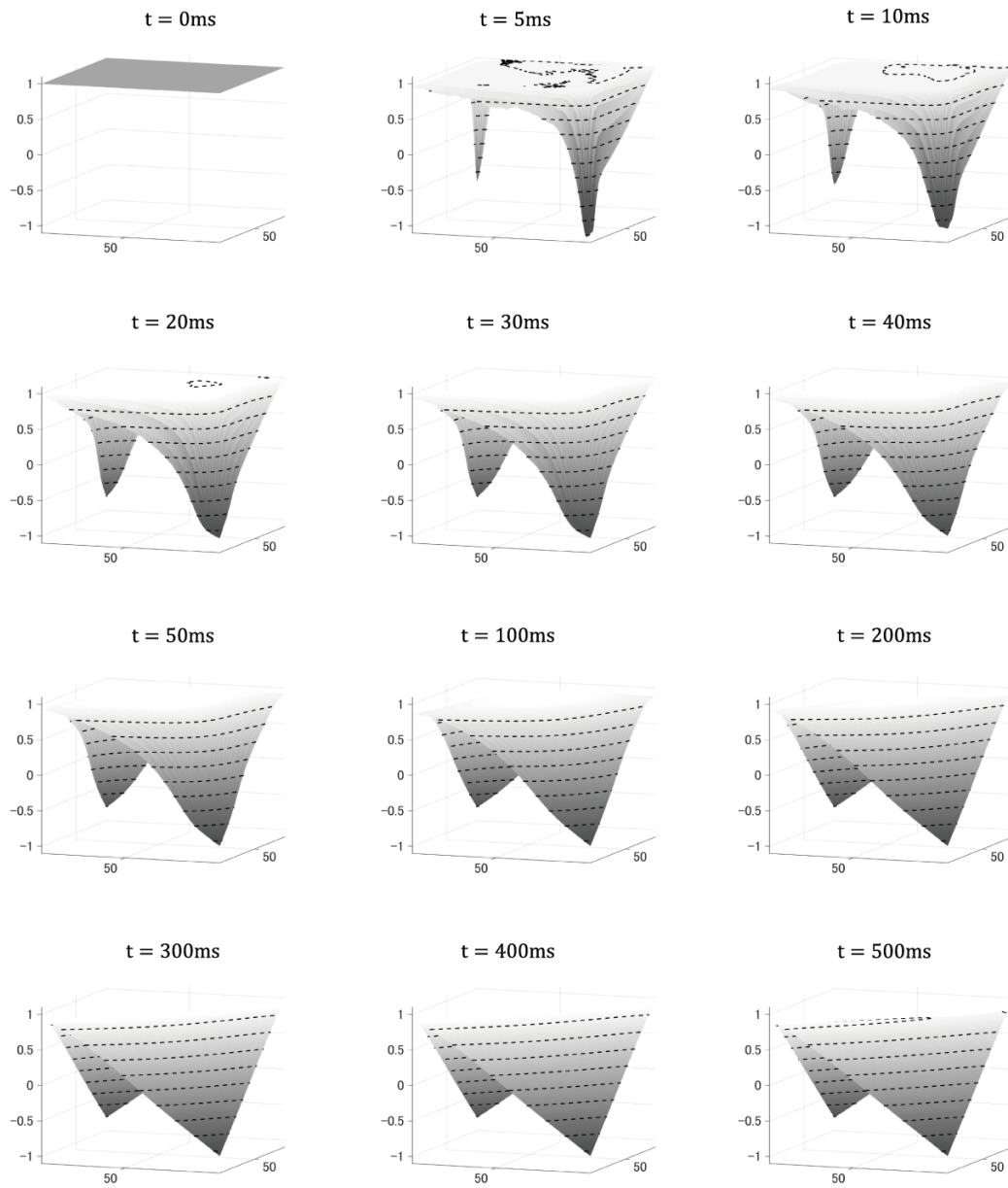


図 3.5 図 3.3b に対する面補完の詳細.

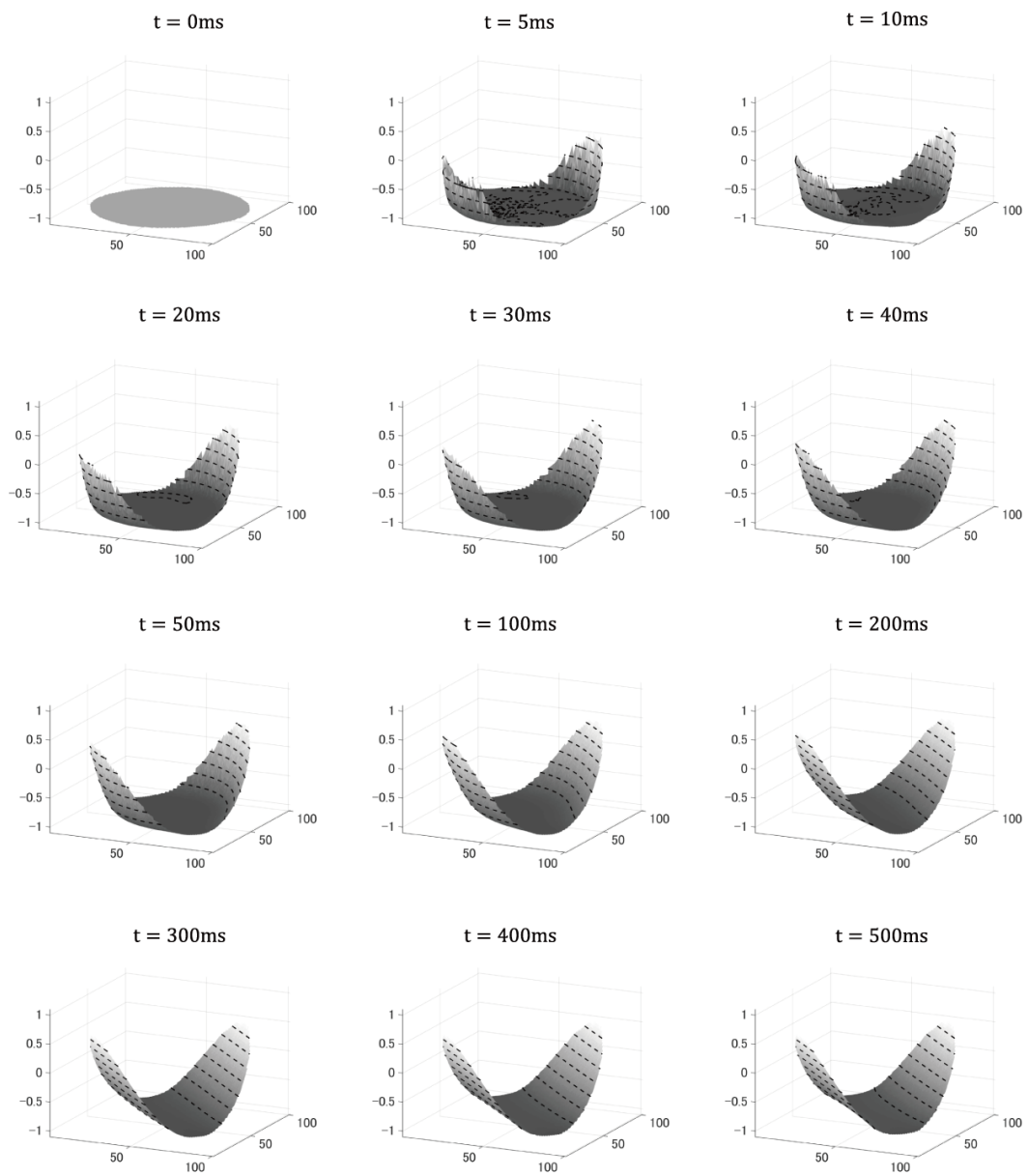


図 3.6 図 3.3c に対する面補完の詳細.

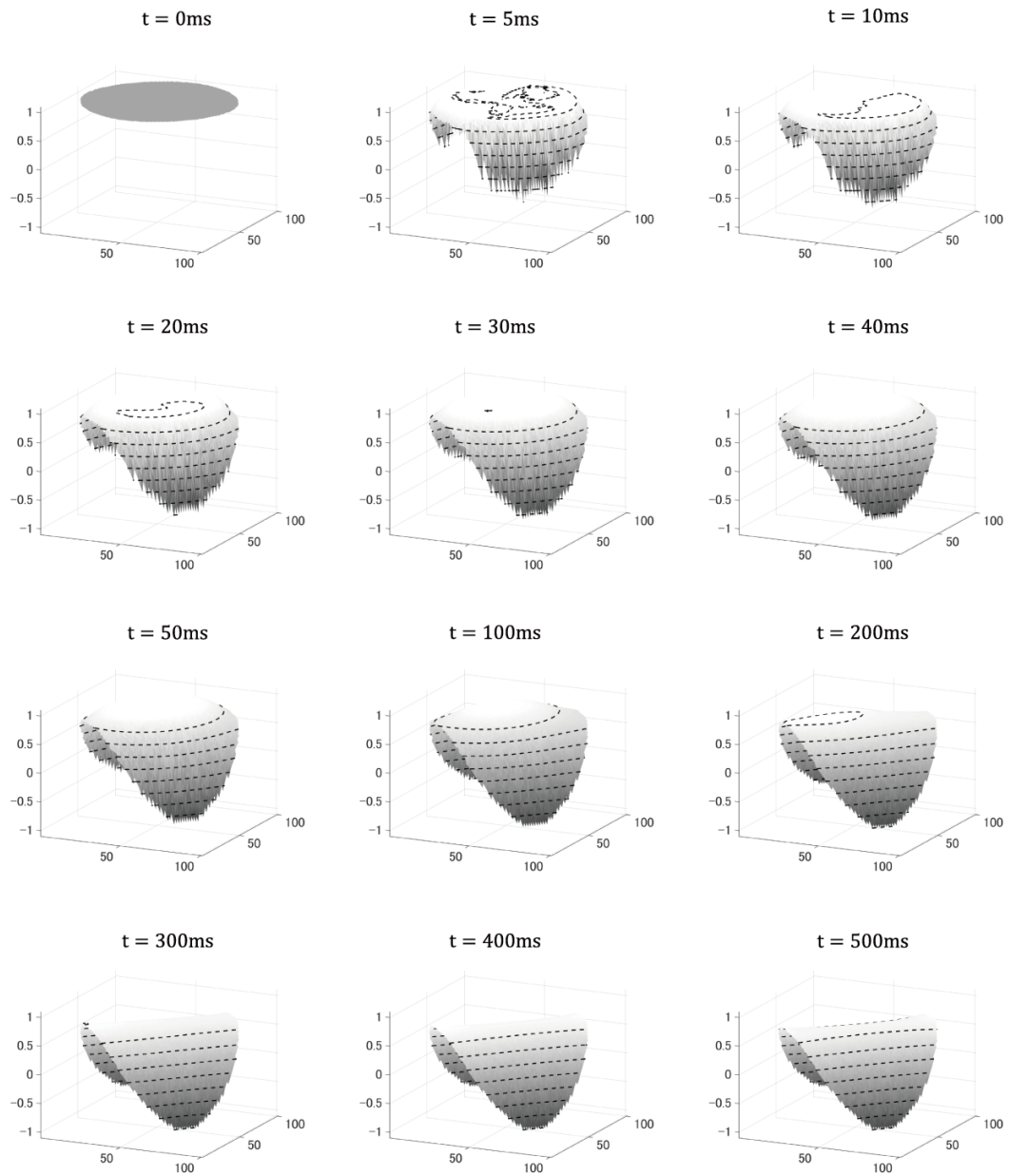


図 3.7 図 3.3d に対する面補完の詳細.

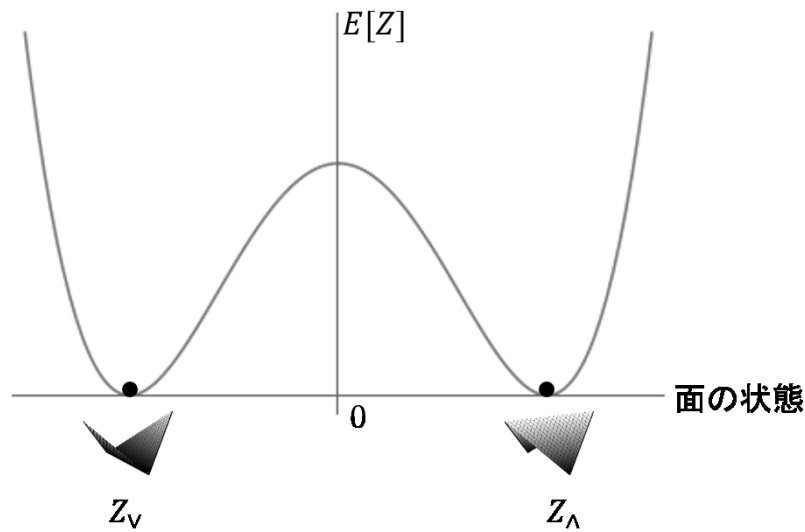
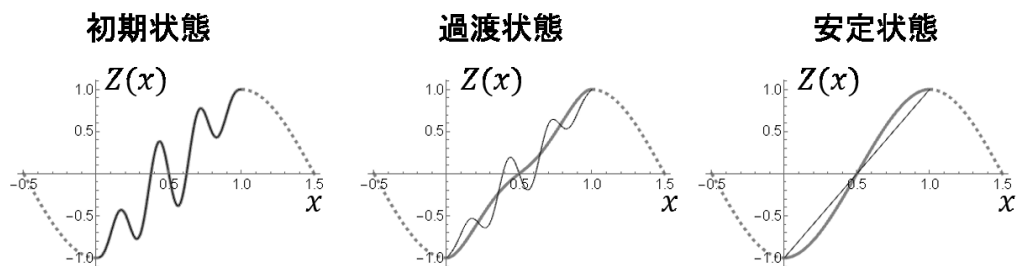


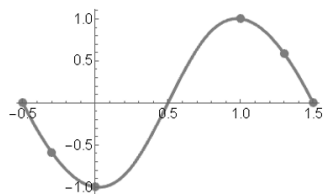
図 3.8 モデルから予想されるエネルギー関数の形状.

$Z = Z_V, Z_\Lambda$  の時に最小値となるようなエネルギー関数  $E[Z]$ . 横軸は不定領域における面の形状を表している. 例えば, 図に示す凹面 (凸面) :  $Z(x, y) = Z_V$  ( $Z(x, y) = Z_\Lambda$ ) は, エネルギー関数の値が最小となる面である.

a.



b.



c.

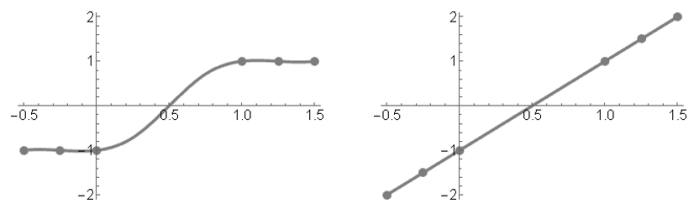


図 3.9 等方性拡散と 2 階微分モデルによる 1 次元の場合の補完結果の比較.

不定領域を  $0 \leq x \leq 1$  とした. a. 等方性拡散と 2 階微分モデルの補完結果の比較. 黒線: 等方性拡散. 灰色線: 2 階微分モデル. b. スプライン補完による補完結果. c. 2 階微分モデルの境界条件による補完結果の違い.

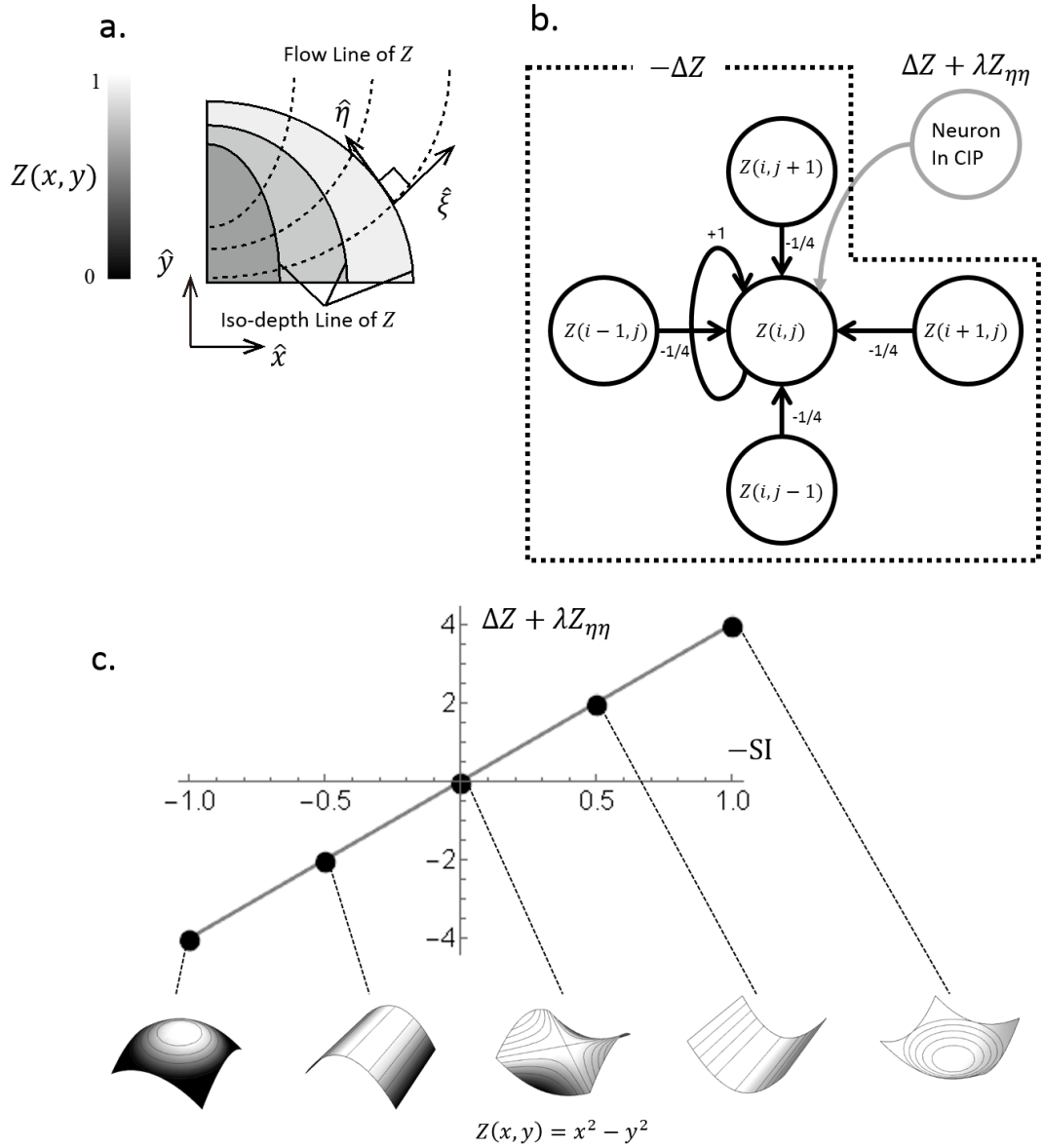


図 3.10 a. 局所座標系 $(\eta, \xi)$ とレベルセット.

実線はレベルセットを表す. レベルセットに接する方向を $\hat{\eta}$ ,  $\hat{\eta}$ に直交する方向を $\hat{\xi}$ とする. b. 提案モデルに関する神経回路網の概略図. 円は単一ニューロン, 矢印は神経細胞同士の結合, 数字は結合係数を示す. c. 提案モデルと SI の関係. 横軸に $-SI$ , 縦軸は各 SI に対する式(3.20)の第 2 項の原点における量を表す.



## 第4章 奥行き補完の知覚特性

前節の考察（3.6.1 項）では、提案モデルの不定領域における初期値依存性から、奥行き知覚特性に関する次のモデル予測が得られた。

モデル予測：凹（凸）面をヒトに提示した後に図 2.2a のパターン（奥行き不定）を提示すると凹（凸）面が知覚されるだろう。

もし提案モデルが不定領域におけるヒトの視覚特性を正しく記述しているならば、モデルから予測される上記の知覚特性がヒトの視覚系にも備わっていると予想される。実際にヒトの視覚系にモデル予測と相同な奥行き知覚特性が見出されれば、提案モデルの妥当性も高くなる。そこで、本章ではモデル予測を検証する心理物理実験を行った結果を報告する。なお、本実験の手順の概略図を図 4.4 に示す。

### 4.1 実験目的と概要

前章で示したように、不定領域において補完される凹凸 2 種類の面は、提案モデルによる数値シミュレーションの結果、初期条件に依存して決定されることがわかった。この性質より不定領域におけるヒトの奥行き知覚は、直前に知覚した奥行きによって決定されると予測できる。例えば、凹（凸）面を知覚した後に図 2.2a のような視覚刺激を提示した場合、凹（凸）面を知覚するだろう。

このモデル予測を確かめるために、奥行きが凹凸面のいずれか一意に定まる視覚刺激（以降、前刺激と呼ぶ）を被験者に提示した後に、凹凸 2 種類の解釈

が存在する視覚刺激（以降，後刺激と呼ぶ）を提示し，被験者に後刺激の知覚を回答してもらった．後刺激のように複数の解釈が存在する視覚刺激を多義図形と呼ぶ．後刺激は図 2.2 a や図 2.3a を採用した．一方，後刺激から奥行き知覚の“多義性”を取り除き，前刺激を作成した．図 4.1a のように黒の不定領域上に白い斜線を描けば，斜線上の水平視差が一意に定まるため，その方向に応じて凹／凸面のいずれかの面を一意に観測者に知覚させられる．例えば図 4.1 に示されるような傾き  $135^\circ$  の斜線が描かれた視覚刺激をヒトに観測させた場合，ヒトは常に凹面を知覚し，反対に  $45^\circ$  の斜線の場合は常に凸面を知覚する．また，提案モデルからは前刺激による効果の持続時間は予測できないため，前刺激と後刺激の提示の間に刺激時間間隔（以降，ISI と呼ぶ）を設定した．

得られた被験者の応答に対して統計解析を行い（詳細は後に述べる），前刺激と後刺激の知覚の間の独立性と相関関係を検証した．もし前刺激の知覚と後刺激の知覚の間に独立性が見られなければ，前刺激の知覚に依存して後刺激の知覚が決定されることを示している．加えて，前刺激と後刺激の知覚の間の相関関係（以降，知覚相関と記す）が正であれば，モデル予測が正しいとの結論が得られるだろう．直感的には，モデル予測が正しければ，短時間の ISI における知覚相関は正（モデル予想通り）であると予測される．一方，長時間の ISI では，前刺激の効果は時々刻々と減衰すると考えられるため，知覚相関は徐々に小さくなると予想される．また，負の知覚相関はいずれの ISI においても観測されないはずである．

## 4.2 実験手法

### 4.2.1 Setup

視覚刺激の提示や被験者応答の記録のために、心理物理実験用のソフトウェアライブラリである MATLAB Psychtoolbox を用いた(Brainard, 1997; Kleiner M; D, Brainard; D, 2007; Pelli, 1997). 立体刺激の提示に対応したグラフィックカード(GeForce GTX560; NVIDIA Corp.)を搭載した PC を用いて液晶ディスプレイ(XL2410T; BenQ Corp.)上に視覚刺激を提示した. 液晶ディスプレイのリフレッシュレートは左右それぞれの像に対して 60Hz, 解像度は  $1920 \times 1080$  であった. 被験者は椅子に座った状態で, その頭部を顎台で緩やかに固定し, 両眼立体視のために液晶シャッターゴーグル(3D vision 2; NVIDIA Corp. )を装着させ, 視距離 1.5メートルより視覚刺激を観測させた. なお, 実験装置の概略図を図 4.2, 実際の実験時の様子を図 4.3 に示す.

実験の流れとして被験者に前刺激を提示し, ISI (詳細は後述) の後に後刺激を提示した. その後, 被験者は後刺激の知覚を 3 つの選択肢 (凹面, 凸面, 鞍面の 3 AFC) から 1 つを選びキーボードを用いて回答した. 実験には 9 人(23–35 years)の被験者が参加した. 全ての被験者は正常な裸眼視力, もしくは矯正視力を有していた. また, 全被験者に対して両眼立体視による奥行き知覚可能があることを事前に確認した.

1 セッションは  $25$  (試行)  $\times 8$  (刺激条件) =  $200$  試行で構成され, 各被験者は 1 つのセッションに参加した. ただし, 9 名のうち 2 名は別途  $400$  試行の実験を追加で行った.

なお、本実験は電気通信大学の倫理委員会によって承認されており、実験参加者に対しては事前にインフォームドコンセントを得た上で、いつでも参加者の希望で実験を中止できることを保証して実験を行った。

### 4.2.2 提示刺激

黒色の不定領域内に白い斜線を描いたステレオグラムを前刺激として用いた（図 4.1）。前述したとおり、白い斜線の方角に応じて、凹／凸のいずれか一方の面を観測者は一意に知覚する。刺激提示の際には、両眼立体視を補助するために、両眼視差が 0 である 4 つの黒塗りの円を刺激の周りに提示した。視覚刺激の黒と白の輝度はそれぞれ  $0.23 \text{ cd/m}^2$  と  $171 \text{ cd/m}^2$ 、灰色の背景の輝度は  $34.9 \text{ cd/m}^2$  であった。

刺激の不定領域における境界条件として四角形（図 4.1a）と円形（図 4.1c）の 2 種類を用いた。以後、それぞれの境界条件（およびその視覚刺激）を R-boundary と C-boundary 条件（刺激）と呼ぶ。前刺激は全 8 条件を用意した。具体的には 2（R-boundary 刺激／C-boundary 刺激） $\times$  2（斜線方向： $45^\circ$ ／ $135^\circ$ ） $\times$  2（左右像の入れ替え）である。前刺激は上記 8 条件の中から一様分布に従いランダムに選択し 1000ms 提示した。ISI の後、前刺激から対角線を除いた後刺激を提示した（図 4.4）。ISI の長さは 1 試行ごとに一様分布に従い決定した。

## 4.3 解析方法と結果

### 4.3.1 独立性

ISI を 200ms 毎のビンに区切り、全被験者からの全応答を各ビンに振り分け、ビン毎に前刺激と後刺激の知覚の間の独立性を検証した。独立性の検証に

は、帰無仮説 $H_0$ を「前刺激と後刺激の知覚は独立である」、対立仮説 $H_1$ を「前刺激と後刺激の知覚は独立ではない」とした Fisher の正確確率検定を用いた。結果、有意水準を 5%とした場合、次の帰結が得られた

- R-boundary 刺激では  $0 \leq \text{ISI} < 600 \text{ ms}$  である場合、C-boundary 刺激では、 $0 \leq \text{ISI} < 400 \text{ ms}$  である場合、帰無仮説が棄却される。 ( $p < 0.05$ ; 図 4.5a, c).

### 4.3.2 相関関係

独立性の検証と同様に、各ビンのデータに対してオッズ比 (Odds Ratio ;  $OR \geq 0$ ) を算出し、前刺激と後刺激の知覚に対する知覚相関を調査した。結果を図 4.5b, d に記す。

OR は  $2 \times 2$  のクロス表から算出される統計量である。実験では“鞍点”を含む 3AFC によって回答を得たため、“鞍点”の回答を除外した  $2 \times 2$  のクロス表から OR を求めた。なお、ISI の長さと鞍点を知覚した割合の間に依存性は見られなかった。OR の値によって次の帰結が得られる。

- $OR = 1$  の場合は、前刺激と後刺激の知覚は無相関であることを示している。
- $OR > 1$  の場合は、正の知覚相関があることを表している。例えば被験者に前刺激の知覚として凹（凸）面が提示されたならば、後刺激の知覚面は凹（凸）面を見出しやすい傾向を示している。
- $OR = 0$  の場合は前刺激と後刺激の間には負の相関があることを表している。すなわち、後刺激を知覚する際に補完される面は前刺激とは逆の知覚であることを示す。

OR を算出した結果、0-200ms（短時間）の ISI に対しては予想通り正の知覚相関が見出された（以降、この現象を正の奥行き残効と呼ぶ）。この結果は最急降下法を用いて導出された提案モデルによって説明可能である。すなわち、前

刺激の知覚は最急降下法の初期値に相当し、後刺激の知覚は初期値近傍のエネルギー谷にトラップされたため、正の奥行き残効が観測されたと説明することができる。

一方、予想しなかった興味深い視覚特性もあきらかになった。200-400ms（中時間）の ISI では負の知覚相関が得られたことである（以降、この現象を負の奥行き残効と呼ぶ）。この性質は単純な最急降下法では説明することができないのでモデルを修正する必要があるのだが、新たな知覚現象を見出せたことについては喜ばしいことである。

心理物理実験の結果についてまとめる：

- 不定領域での面補完に関して、ISI が短時間の場合に正の奥行き残効、
- 中時間の場合には負の奥行き残効が起こるということを示した。
- 600-1000ms（長時間）の ISI の区間においては有意差や相関に関する傾向はない。

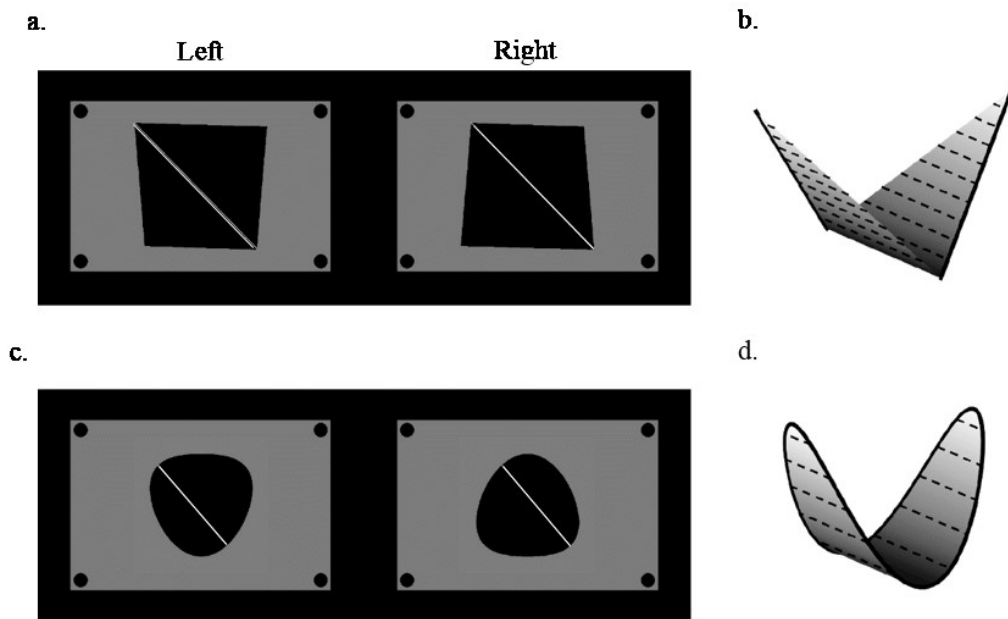


図 4.1 実験で用いた前刺激.

a. R-boundary 刺激. 左右二つの画像は左右両眼にそれぞれ提示される視覚刺激である. 液晶シャッターメガネかけた被験者に対して左右両眼にこれらの画像をそれぞれ提示すると, b. に描く凹面を知覚する. c, d. C-boundary 刺激と知覚される面を示す.

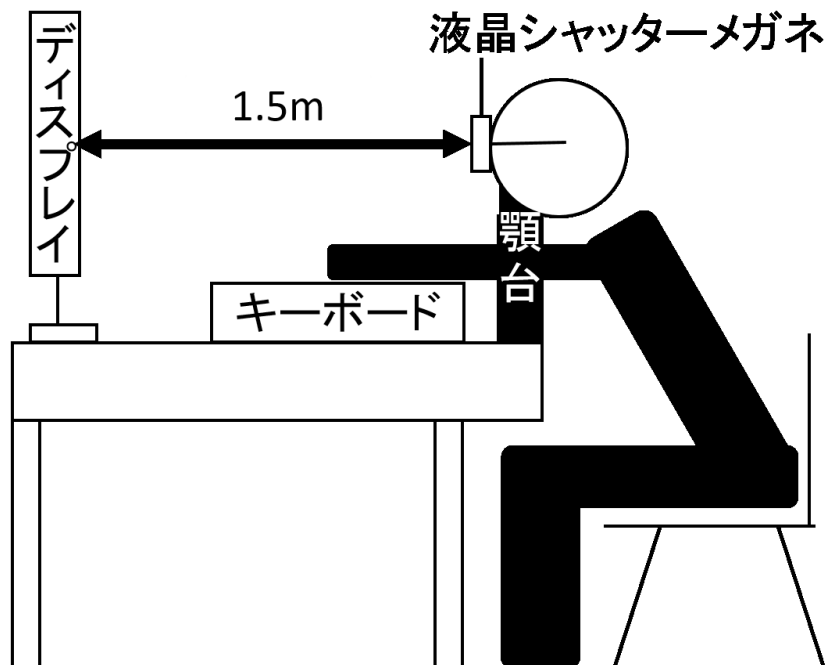


図 4.2 実験装置の概略図.

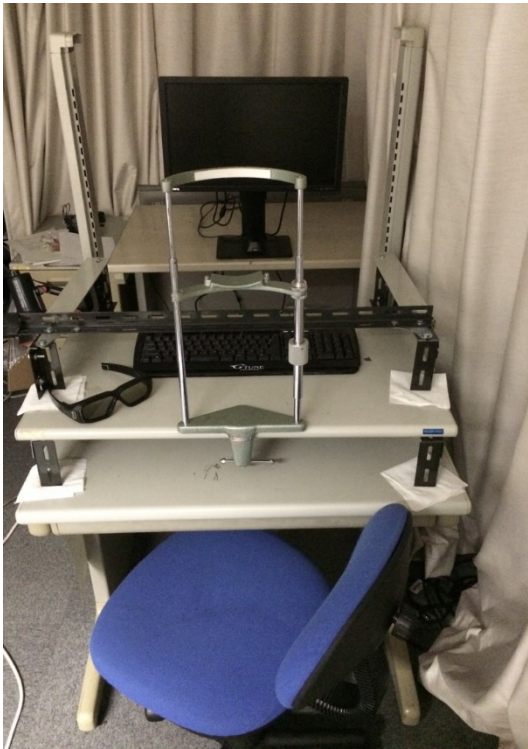


図 4.3 実験装置と実験実施時の様子.  
実際の実験は暗室で行っている.



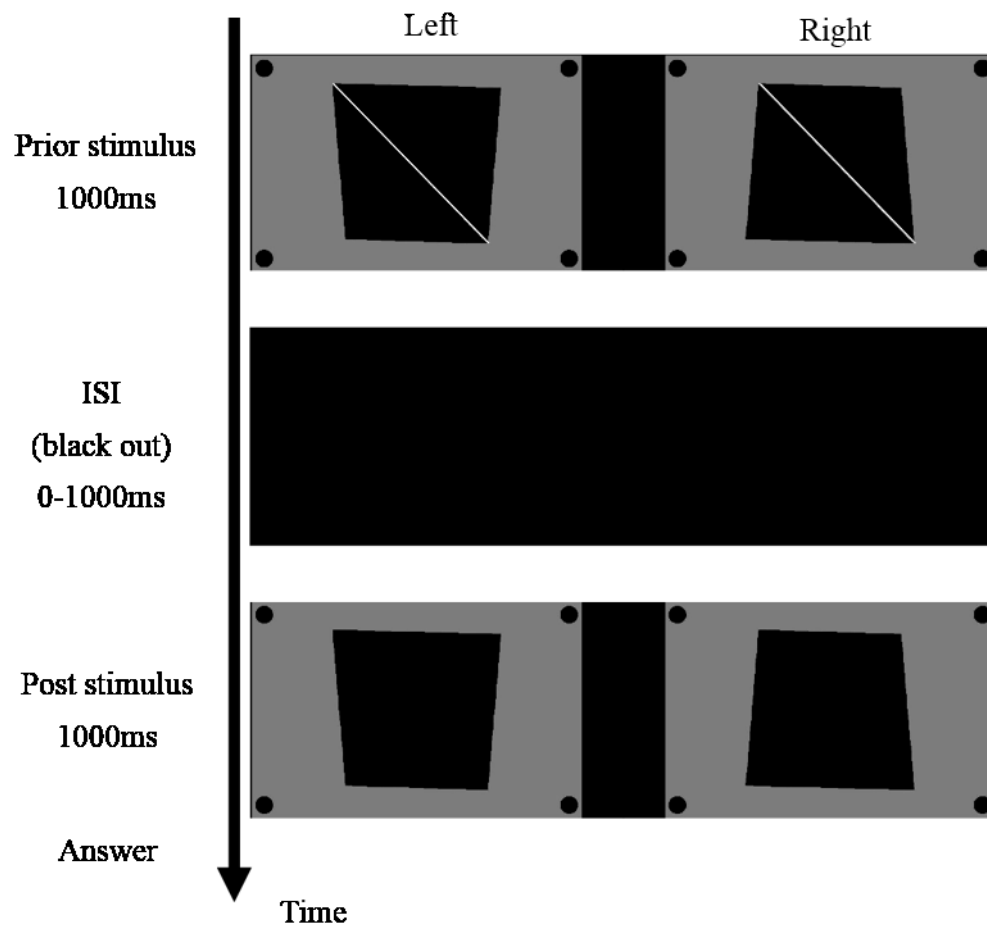


図 4.4 実験手続き.

前刺激は 1000ms 提示される．前刺激が消えた後，ディスプレイはブラックアウトする（ISI）．ISI の時間幅は 0-1000ms の間で一様分布に従いランダムに設定した．ISI の後，視覚刺激（後刺激）が 1000ms 提示される．後刺激は前刺激より白の対角線を除去した画像であり，多義的な知覚を被験者にもたらし．

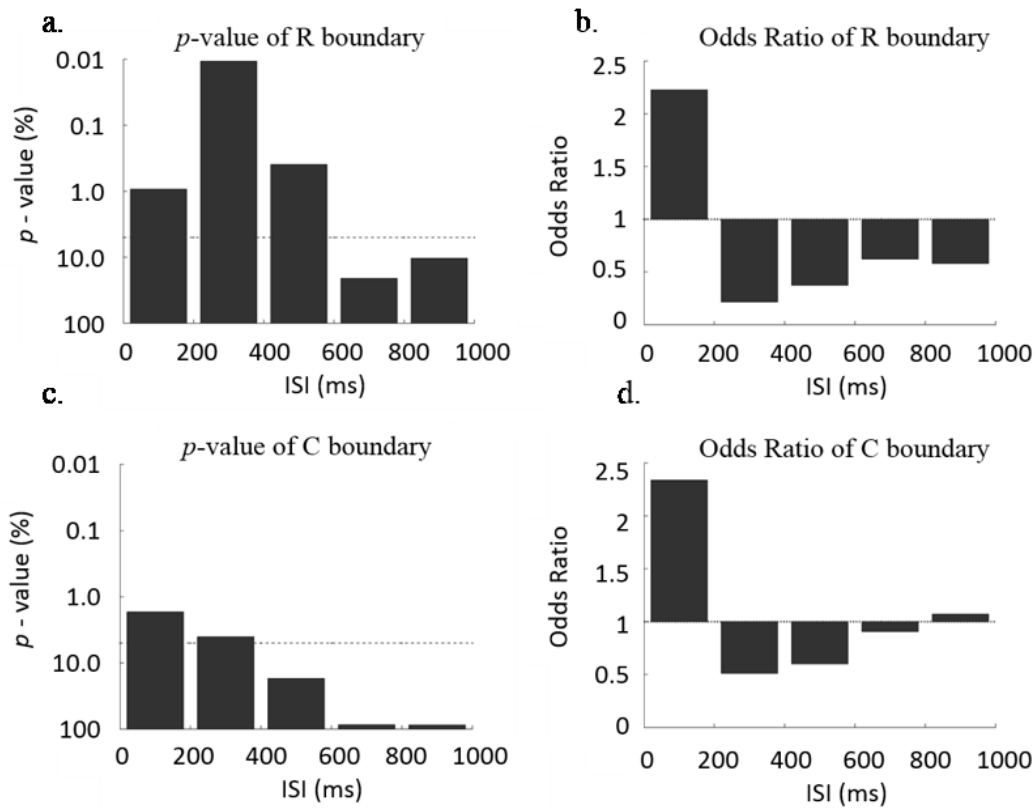


図 4.5 心理物理実験の統計解析の結果.

a. 各ビン幅ごとの  $p$  値. 点線は有意水準 5% を示す. 点線より上にプロットされた  $p$  値は  $p < 0.05$  であることを示す. b. R-boundary 刺激に対する各ビン区間毎の Odds Ratio (OR).  $OR > 1$  の場合は正の相関,  $OR = 0$  の場合は負の相関であることを表している. 点線は無相関であることを示す  $OR = 1$  を表す. c, d に同様に示す.

## 第5章 ISIに依存する奥行き知覚のモデル

### 5.1 モデルの導出

本章では前章の心理物理実験で見出された新たな知覚特性を再現可能な奥行き補完モデルを提案する．第3章の奥行き補完モデル（式(3.16)）はヒトが知覚する“フラット”な面の補完に成功した．すなわち， $ISI < 200ms$ における正の奥行き残効を再現できた．しかしながら，提案モデルでは $ISI > 200ms$ における負の奥行き残効は再現できない．提案モデルが補完する面は，初期条件  $Z(x, y, t = 0)$ （前刺激の知覚）が凹面であるとき，定常状態（後刺激の知覚）も常に凹面となるためである．

本研究では，ISI後の後刺激提示時の不定領域におけるモデルの初期条件は

- ISI中に脳内で表象される面の奥行きに相当し，
- 時々刻々と変化している

と仮定する．もし $ISI > 200ms$ における脳内の奥行き表象が，前刺激（以降，凹であると仮定する）と逆の面（凸）に変化しているのならば，結果的に後刺激は逆の面として補完されるだろう．

ISI中も被験者に不定領域が提示されているため，本来はISIにおける脳内の奥行き表象の変化を記述するモデルは式(3.15)と式(3.16)を基盤として導出されるべきである．そこで，エネルギー関数の観点から前刺激と逆の面が得られるようエネルギー障壁を越える効果を考え，奥行き補完モデル（式(3.16)）に直接修正を施したが，実験結果の再現には至らなかった．また，式(3.15)と式(3.16)

を基盤としないモデルも考慮したが、再現には至らなかった（詳細は Appendix C）。

そこで本研究では、運動や色の知覚においても負の奥行き残効と同様の知覚が生ずることに着目した。例えば滝を2～3分見続けた後に周囲の景色を見ると、景色が上昇する（すなわち、前の運動方向とは逆に動く）知覚が得られる（滝の錯視）。この知覚を運動残効という。運動残効のメカニズムは神経生理学的観点から説明される。ヒトの視覚系における神経細胞は常に一定の強さで自発的な反応を示している。しかし、観測者が一定方向に運動する物体を見続けると、その運動方向に選択性を持つ神経細胞の反応が自発的な反応よりも弱くなる。これを順応効果という。そして、細胞の順応時に運動を静止させると、順応の方向とは逆方向に対して選択性を持つ神経細胞の反応の方が相対的に強くなり、結果として観測者は逆方向の運動を知覚する。奥行きの残効は、両眼視差ではなく3次元面の形状に対する順応によって誘発されることがわかっている(Domini et al., 2001)。したがって、第3章の提案モデルに対して形状への順応効果を導入できれば、ISIの長さに依存して知覚相関の正負が変化する結果を再現可能な視覚数理モデルを導出できるだろう。

続いてモデル化を容易にするために、ISI中に脳内で表象される奥行き面を凹面、凸面、 $Z(x, y) = 0$ なる面（以降、平坦面と記す）の結合で表せる面に限定する（図5.1）。凹凸面は奥行き補完モデル（式(3.16)）を前刺激や後刺激に適用して得られる定常状態であり、平坦面は $ISI > 1000ms$ において最終的に得られる面である。具体的には凹面（ $\phi = -1$ ）、凸面（ $\phi = +1$ ）、平坦面（ $\phi = 0$ ）を表す面の形状パラメータ $\phi(x, y)$ を導入し、 $Z(x, y)$ を $Z(\phi(x, y))$ として次式で定義する。

$$Z(\phi(x, y)) = \begin{cases} \phi(x, y) \cdot Z_{\wedge}(x, y), & \text{if } \phi > 0 \\ 0, & \text{if } \phi = 0 \\ -\phi(x, y) \cdot Z_{\vee}(x, y), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (5.1)$$

$Z_{\vee}(x, y)$ と $Z_{\wedge}(x, y)$ はそれぞれ凹面，凸面を表す． $Z(\phi(x, y))$ は図 5.1 に示すように全点 $(x, y)$ で $\phi = -1, +1, 0$ の時，それぞれ凹面（図 5.1a），凸面（図 5.1c），平坦面（図 5.1b）となる．なお，凹，凸，平坦面以外のサドル面（図 5.1d）やその他複雑な形状の面（図 5.1e）も，各点 $(x, y)$ 毎に異なる $\phi(x, y)$ を設定すれば，式(5.1)で記述できる．すなわち，詳細は後述するが，全点において $\phi(x, y) = \text{const}$ となれば，凹，凸，平坦面のいずれかの面となるように立式している．

$Z(\phi(x, y))$ は $\phi(x, y)$ の合成関数なので，式(3.16)の左辺 $\partial Z / \partial t$ は次式で記述される．

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5.2)$$

ここで， $\partial Z / \partial \phi$ は式(5.1)より

$$\tau \frac{\partial Z(\phi)}{\partial \phi} = \begin{cases} Z_{\wedge}, & \text{if } \phi > 0 \\ 0, & \text{if } \phi = 0 \\ -Z_{\vee}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.3)$$

となる．また， $\partial \phi / \partial t$ は ISI 中に脳内で表象される奥行き面の形状（以降，内部状態と記す）の遷移を記述するダイナミクスである．したがって，第 4 章の実験結果を再現可能な新たな奥行き補完モデルを導出するためには， $\partial \phi / \partial t$ が重要な役割を果たすことがわかる．そこで以降は $\partial \phi / \partial t$ の導出を考える．

まず，面のフラット性を評価するエネルギー関数（式(3.15)）を $\phi(x, y)$ で再記述する．図 5.1a と図 5.1c（式(3.16)適用後の定常状態）はそれぞれ， $\phi(x, y) = -1$ （凹面）と  $\phi(x, y) = +1$ （凸面）であり，ISI > 1000 ms で知覚されう

る面 $Z(x, y) = 0$ は,  $\phi(x, y) = 0$ に対応する. これら3つの“フラット”な奥行き面はいずれも $\phi(x, y) = \text{const}$ であることに着目すると,  $\phi$ を用いてエネルギー関数 (式(3.15)) を次式で記述できる.

$$E_1[\phi] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \iint_B \|\nabla \phi(x, y)\|^2 dx dy. \quad (5.4)$$

なぜならば,  $E_1[\phi]$ と元のエネルギー関数 (式(3.15))  $E[Z]$ との間には以下の関係があることを数学的考察により示せたからである (証明は Appendix A.6 に記す).

$$\text{新定理 2} \quad E_1[\phi] = 0 \Rightarrow E[Z] = 0$$

次に $\phi = -1$ と $\phi = +1$ の時に最小値 (または極小値) となるエネルギー関数  $E_2[\phi]$ を次式で定義する (図 5.2a) .

$$E_2[\phi] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \iint_B (\phi(x, y) + 1)^2 (\phi(x, y) - 1)^2 dx dy \quad (5.5)$$

以上,  $E_1[\phi] + E_2[\phi]$ を最小化すれば図 5.1a や図 5.1c のようなフラットな凹凸面が得られるだろう.

最後に上記のエネルギー関数に対して面の形状に対する順応効果を導入し, 負の奥行き残効を再現可能な修正を施す. 本研究では順応効果を次式で定義する.

$$E_3[\phi] \stackrel{\text{def}}{=} \iint_B \frac{1}{4} \phi(x, y) (\phi^2(x, y) - 3) dx dy \quad (5.6)$$

上式は前刺激 (凹面:  $\phi = -1$ ) への順応効果は, エネルギー値を上昇させる効果であると仮定している. 注意すべきは  $\phi = -1$  (凹面) の時に $E_3[\phi]$ が最大値 (極大値) となる点である (図 5.2b) . なお, 前刺激が凸面である場合は,  $-E_3[\phi]$ を考えれば良い.

以上より、不定領域 $B$ における最終的なエネルギー関数を次式で記述する (図 5.2c) .

$$F[\phi] = \beta_1 E_1[\phi] + \beta_2 E_2[\phi] + \beta_3 E_3[\phi] \quad (5.7)$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ は正のスカラーとする. これらのパラメータは,  $\beta_1, \beta_2$ は奥行き補完による面のフラット化の効果,  $\beta_3$ は前刺激による順応効果の強さを示す. なお, 前刺激が凸面の場合は, 式(5.7)の右辺第3項の $+E_3$ を $-E_3$ に書き換えれば良い. 以上より, 前刺激に対する順応効果を奥行き補完モデル (式(3.16)) に導入できた.

$\phi$ に時間変数 $t$ を導入し,  $F[\phi]$ に最急降下法を適用すると, 次式の $F[\phi]$ を減少させるダイナミクスが得られる.

$$\tau \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} = \beta_1 \cdot \Delta \phi + \beta_2 \cdot 2\phi(1 - \phi^2) + \beta_3 \cdot \frac{3}{4}(1 - \phi^2). \quad (5.8)$$

上式(5.8)は ISI 中の内部状態 $\phi(x, y, t)$ の遷移を表すダイナミクスであった. したがって, 最終的に式(5.3)と上式(5.8)を式(5.2)に代入すれば, ISI 中の脳内における奥行き面の表象 $Z$ の遷移を記述するダイナミクスとなり, 所望のモデルが得られたといえる.

## 5.2 数値シミュレーションによる知覚交替の再現

前項の提案モデルの妥当性を数値シミュレーションによって検証する. 数値シミュレーションの条件として, 前刺激を凹面 ( $\phi(x, y, t = 0) = -1$ ), 境界は R-boundary とする. ここで, ISI 中に奥行き情報は不定領域 $B$ 及びその周囲では与えられていないため,  $\beta_2$ と $\beta_3$ は時刻 $t$ の単調減少関数とし, 次式で定義する.

$$\beta_2(t) = \beta_3(t) = e^{-\frac{t}{20}} \quad (5.9)$$

その他のパラメータは $\tau = 10, \beta_1 = 0.0001$ とした．時間変数 $t$ はISIの長さを表し，時刻 $t = 0$ はISIの開始時刻である．領域 $B$ は $|x| < 1$ かつ $|y| < 1$ の矩形領域とした．ISI中の領域 $B$ の境界条件である $Z(x, y) = 0$ は， $\phi(x, y) = 0$ に相当する．式(5.2)を矩形領域の内部に適応して得られた結果のうち， $t = 0, 100, 300, 500, 700, 900$ の $Z$ を図5.3に示す．結果をまとめると，以下の通りである．

- ISIが $t = 0\text{ms}$ ，もしくは $t = 100\text{ms}$ のとき， $Z$ は前刺激と類似した凹形状である．
  - $t = 100\text{ms}$ における $Z$ を後刺激の不定領域における初期値として，奥行き補完モデル（式(3.16)）を適用すると凹面に収束する（図5.4）．
  - この結果はISIが短い場合，前刺激と後刺激の間に正の知覚相関があることと矛盾しない．
- ISIが $t = 300\text{ms}$ のとき， $Z$ は転じて凸形状となる．すなわち，前刺激（凹面）と反対の形状である．
  - 先と同様に， $t = 300\text{ms}$ における $Z$ を後刺激の不定領域における初期値として奥行き補完モデル（式(3.16)）を適用すると， $t = 100\text{ms}$ の場合とは逆に，凸面が補完される（図5.4）．
  - 図5.2c.に示されるように，凹状態と凸状態の間には0ではないエネルギー障壁が存在するが， $\phi = -1$ から $\phi = +1$ への遷移が起こる．
- より長いISIでは $Z = 0$ となるため，前刺激と後刺激の形状間に相関はない．
  - 長時間のISIの場合は前刺激の効果が失われ，時間経過と共に面の状態は $\phi = 0$ ，すなわち平坦な面（ $Z = 0$ ）に収束していく（例えば図5.4の $t = 900$ ）．



続いて第4章の Odds 比と上記のモデル（式(5.8)）から得られた結果を，前刺激と後刺激の面の形状の相関を算出し比較する．この相関は次式 $C_\phi(t)$ で算出する．

$$C_\phi(t) = \iint_B \phi_{\text{prior}}(x, y) \cdot \phi(x, y, t) dx dy. \quad (5.10)$$

$\phi_{\text{prior}}(x, y)$ は前刺激の状態 $\phi$  ( $= -1$ もしくは $+1$ )を表し， $\phi(x, y, t)$ は式(5.8)で得られ，各ISIの長さ $t_{\text{ms}}$ において補完された内部状態を表す．

前刺激を凹面（ $\phi_{\text{prior}}(x, y) = -1$ ）とし， $\text{ISI} = 0\text{ms}$ から $1000\text{ms}$ まで $5\text{ms}$ 毎に $C_\phi(t)$ を算出した．結果を図 5.3g に記す．定性的に図 4.5b や d の Odds Ratio と相同であることがわかる．

以上より，前刺激への順応効果をエネルギー関数へ導入すれば，第4章の実験結果を再現できるモデルを導出できることがわかった．したがって，ISI の長さに依存して現れる正負の知覚相関は，前刺激への順応効果によって説明できる．なお，C-boundary condition に対しても定量的に上記と同様の結果が得られる．

### 5.3 神経回路網への実装可能性

第3章と同様に提案モデルに対して、神経回路網への実装可能性について考察する。まず、形状 $\phi$ のダイナミクス（式(5.8)）に対して述べる。議論を簡単にするために、前刺激による効果を除外し、 $E_3[\phi] = 0$ とする。このとき式(5.7)は

$$F[\phi] = \beta_1 E_1[\phi] + \beta_2 E_2[\phi] \quad (5.11)$$

となる。各種パラメータを $\beta_1 = \beta_2 = 1$ とすれば、式(5.8)は

$$\tau \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} = \Delta \phi(x, y) - 2\phi(x, y)(\phi^2(x, y) - 1) \quad (5.12)$$

となる。上記のダイナミクスの神経回路網の概略図を図 5.5 に示す。

まず、第1項の $\Delta \phi$ はこれまで述べたように、4近傍の神経細胞からの信号の入力平均と自己結合による抑制性信号で計算可能である。続いて、第2項の $2\phi(x, y)(\phi^2(x, y) - 1)$ について考察する。面が凹面（ $\phi(x, y) = -1$ ）、平坦面（ $\phi(x, y) = 0$ ）、凸面（ $\phi(x, y) = +1$ ）である時、第2項の量は任意の点において0となる。他方、Saddle面（図 5.1d）の場合は第2項の量は0ではない。実際、Saddle面に対して選択的に反応する神経細胞がCIPに見出されているため（Katsuyama et al., 2006）、第2項はこの細胞からの出力を立式していると考えられる。以上より、式(5.8)はCIPにおけるダイナミクスを表しており、式(5.8)を式(5.2)に代入することは、面形状を符号化しているCIPから奥行きZを符号化するV1への出力に相当すると考えられる。したがって、本章の提案モデルも神経回路網への実装が可能である。

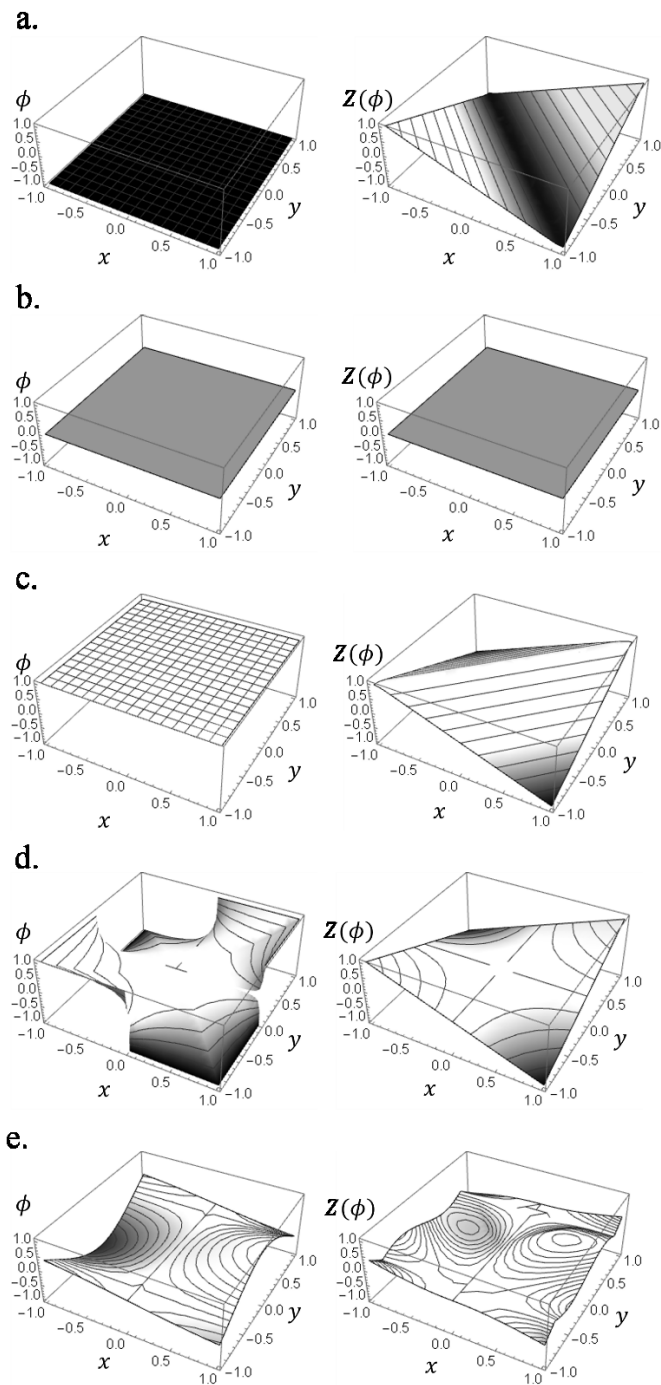


図 5.1 スカラパラメータ  $\phi(x, y)$  を用いた Depth map  $Z(\phi(x, y))$  の例。  
a~e. 左には  $\phi(x, y)$ , その右側に対応する  $Z(\phi(x, y))$  を示す. a, b, c, はそれぞれ凹面,  
平坦面, 凸面. d. は鞍形状となる時の  $\phi(x, y)$  と  $Z(\phi(x, y))$  である. また, e. のような  
複雑な面も記述可能である.

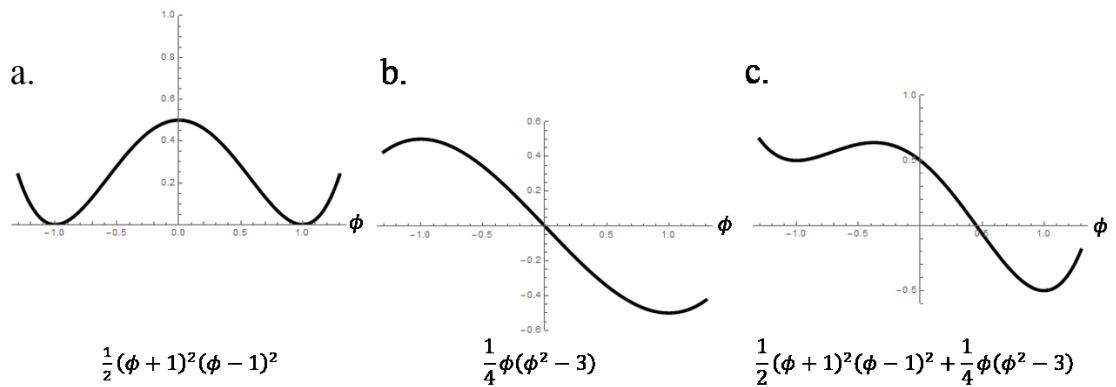


図 5.2 各点 $(x, y)$ におけるエネルギー関数の形状.

簡単のため横軸の $\phi(x, y)$ を $\phi$ として略記している. 縦軸はエネルギー値. **a.** Double well タイプのエネルギー関数. 極小値は2つの知覚 (凹凸面) を表す. **b.** 左側のウェル (すなわち凹形状) に対するパターンへの順応効果を記述するエネルギー関数. これら2つのエネルギー関数の和を **c.**に示す. 2つの well のうち, 左側の well のエネルギー値は右側の well のエネルギー値よりも大きくなる.

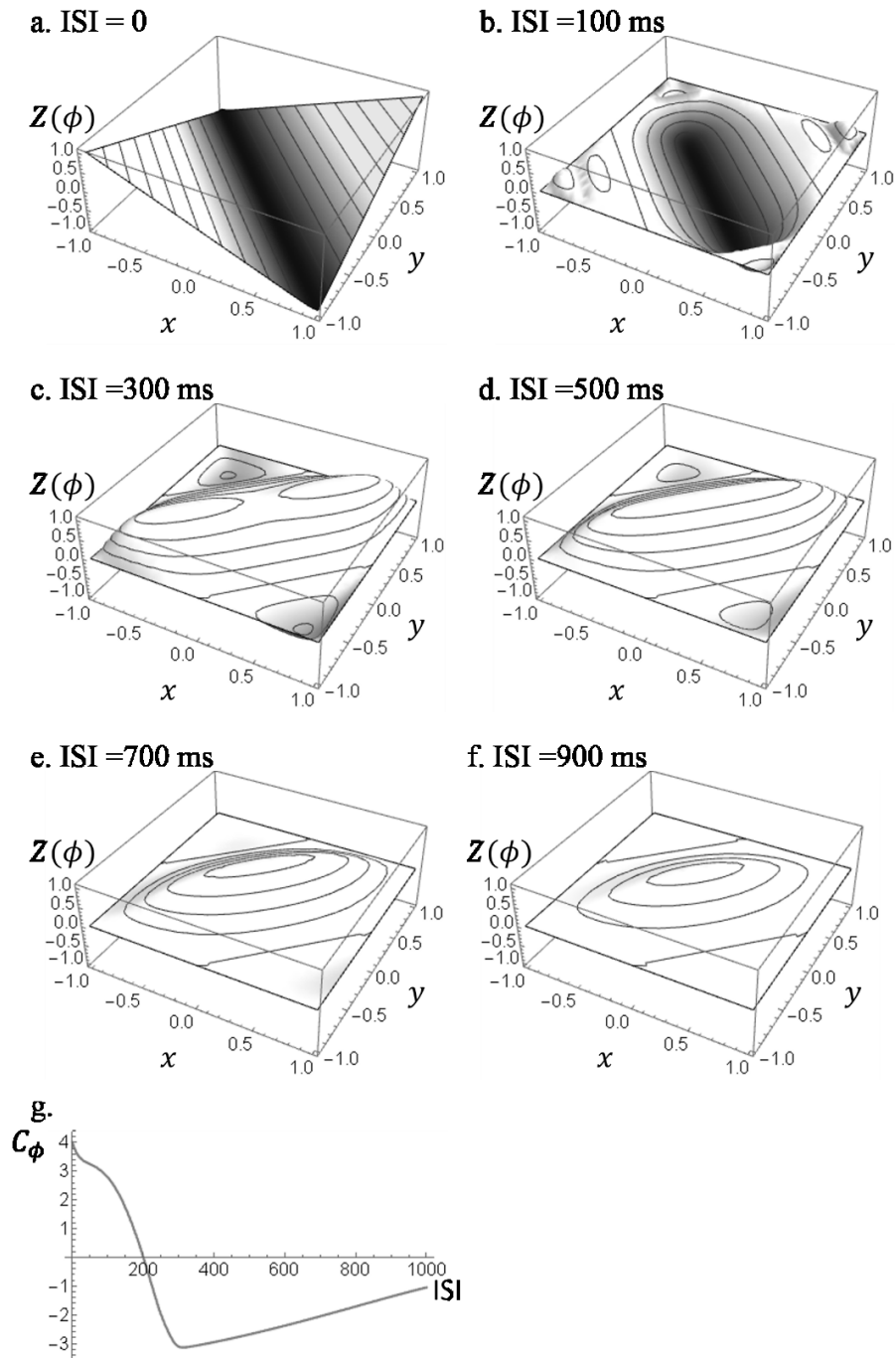


図 5.3 a～f. 各 ISI 毎の depth map.

これらの depth map は ISI 後の後刺激の不定領域における奥行き情報補完の初期値として用いられる。境界条件はいずれも  $Z = 0$  であり、 $\phi = 0$  に相当する。g. 横軸は ISI, 縦軸は  $C_\phi(t)$  (式(5.10)) の値。  $C_\phi(t)$  を 5ms 毎にプロットした。

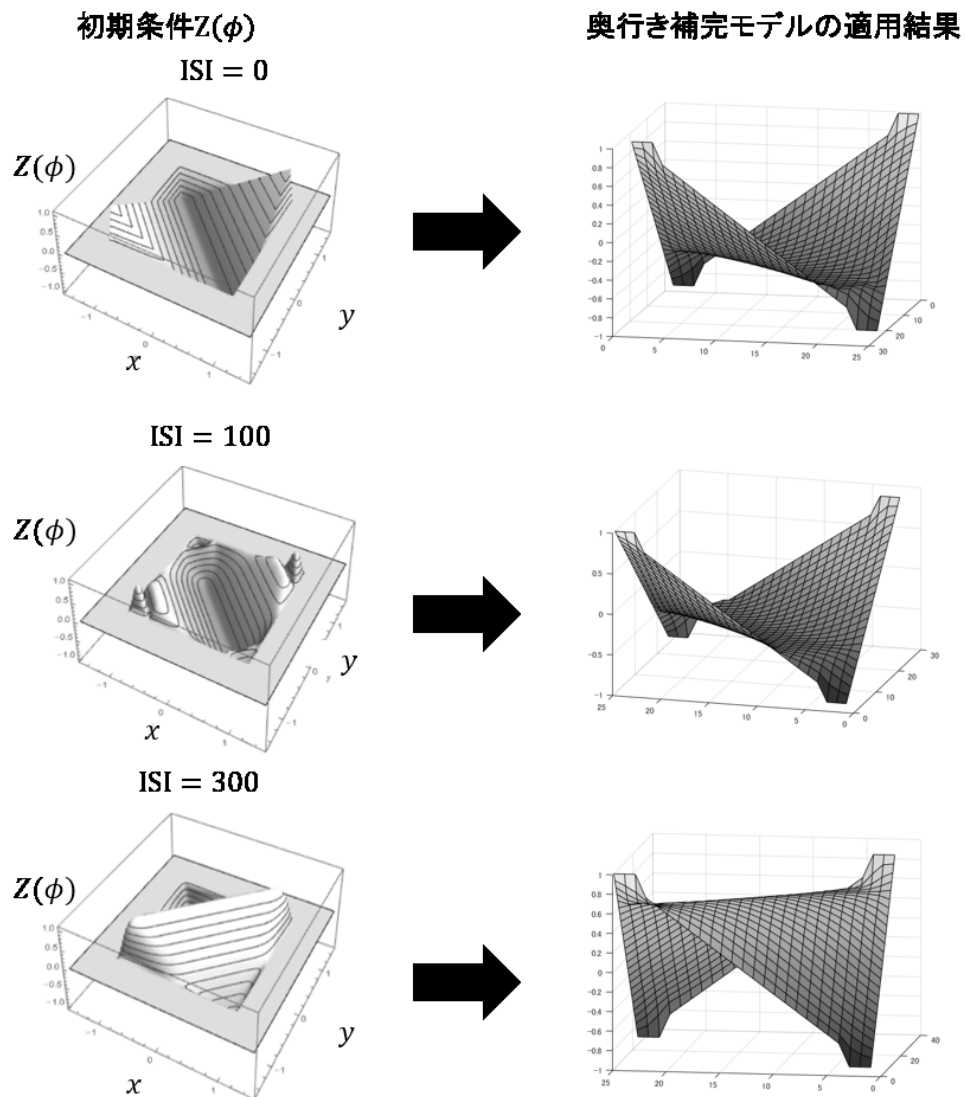


図 5.4 知覚交代モデルと奥行き補完モデル.  
知覚交代モデルによって生成された Depth map (左図) を不定領域における初期値として、奥行き情報補完モデルを適用した. ISI=0, 100, 200, 300ms 時のシミュレーション結果 (右図) を示す.

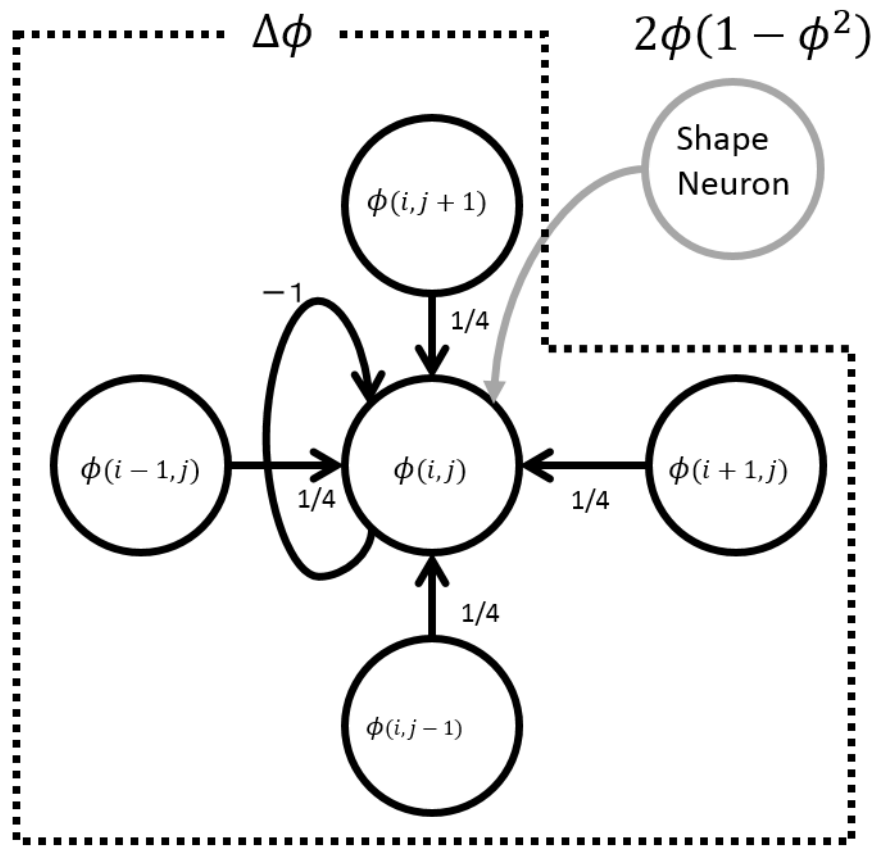


図 5.5 式(5.12)に関する神経回路網の概略図.

円は単一ニューロンを示す. Shape ニューロンは Saddle 形状に選択性を持つ CIP における神経細胞. 矢印は神経細胞間の結合, 数字は結合係数を表す.

## 第 6 章 結論

本研究のまとめと今後の課題について述べる．

本研究で提案した奥行き補完モデルはヒトの奥行き知覚に無矛盾である．すなわち，提案モデルは奥行き情報伝播により， $K^2 = 0$ として評価される“フラット”な面として不定領域の奥行き値を補完する．加えて，ヒトが知覚する 2 つの解（凹凸面）も提案モデルによって再現できた．これら 2 つの解は最急降下法を用いて導出したモデルのシミュレーションを行う上で必要な初期値に依存して得られる．この結果は本研究によって初めて得られたものである．

次に不定領域の面補完に対して，提案モデルから得られる予想から構築した心理物理実験を行い，これまで未知であったヒトの奥行き知覚に関する性質を明らかにした．すなわち，不定領域において補完される面の形状は，ISI の長さと前刺激の形状に依存するという性質である．短い ISI 区間における知覚相関は正であり，提案モデルから得られる予測に一致する．一方，より長い特定の ISI 区間では負の知覚相関が見出されたが，この性質は提案モデルでは再現できなかった．

そこで，上記の ISI の長さに依存して知覚相関が変化するという新たな奥行き知覚特性を再現可能な数理モデルを元のモデルに修正を施すことで構築した．この数理モデルは，前刺激への順応効果をエネルギー値の上昇として立式し，元のエネルギー関数に対して導入することで得られた視覚数理モデルである．順応によってエネルギー値が上昇するという予想は一見すると大胆に思えるが，Kanai ら(Kanai et al., 2005)が行った先行研究でも同様の説明がなされており，エネルギー値が上昇す



るという考え方は決して特殊ではない．ただし，Kanai らによる考察では概念レベルで知覚交代の説明がなされており，思考実験にとどまっている．本研究のように奥行き面を数値シミュレーションで陽に再現するものではない．さらに，排他的に知覚される凹凸パターン間に存在するエネルギー障壁を，確率的に変動する量を用いずに超える数理モデルを構築したのは本研究が初めてである．

本研究では面の形状（すなわち $\phi$ ）のダイナミクスを提案している．形状パラメータ $\phi$ を導入した本質はヒトの視覚系において表現される特徴量が領野毎に異なるという点にある．例えば V1 は両眼視差量，V2 は線分間の角度，V3A は奥行き勾配，V4 は線分の曲率やその変化，CIP は 3 次元面に対する曲率（すなわち，面の形状），MT，MST では速度ベクトルやその空間分布である．本研究では以下の 2 点を考慮し，視覚系において奥行き補完に直接的に用いる特徴量は奥行き量 $Z$ ではなく面の形状であると推測し，特徴量 $\phi$ を導入しモデルを構築した．

- CIP の神経細胞からの出力信号が元の奥行き補完モデルに関与している
- 奥行きの残効は奥行き面の形状に対する順応効果によって誘発される

本研究で提案するモデルのように，全ての視覚数理モデルはモデルに関連する領野が表現する特徴量は何かを十分に考慮し構築すべきであることを主張したい．

最後に今後の課題について述べる．

1 点目に形状パラメータ $\phi$ を凹面，凸面，平坦面の 3 種類のみに限定し，モデルを構築した点である．本来はこのような限定をせず，元のエネルギー関数（式 (3.15)）に対し，前刺激の形状に対する順応効果を導入し，ISI 中のダイナミクスを導出すべきである．さらに本研究では， $\phi(x,y)$ を各点 $(x,y)$ 毎に定義しているが，実際の CIP の神経細胞の受容野サイズ（単一の神経細胞が反応を示す空間的範囲）は点ではない．このことを考慮しモデル化を行うべきである．

2 点目に提案モデルによって得られる結果は決定論的であるという点である．心理物理実験の結果は確率的指標の Odds Ratio で評価されているため，本来は確率的

な要素もモデルに導入すべきである．例えば Odds Ratio は全被験者のデータに対して行った統計解析によって得られた統計量であり，被験者毎に面知覚の時空間特性は異なる．被験者毎の知覚特性は提案モデルの各種パラメータ $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau$ の値を変えて再現できるはずである．すなわち，これらのパラメータを決定する際に確率的な要素を導入できれば，確率的な要素をモデルに組み込めるだろう．

したがって，次の２点が今後の課題である．

- 形状を限定しないモデルの提案
- 提案モデルへの確率的な要素の導入

## 付録

## Appendix A 数学に関する基本事項

### A.1 曲率に関する基礎知識

本項では曲率に関する基本的な知識について述べる.

平面座標系 $(x, y)$ 上の曲線

$$x = x(t), y = y(t) \quad (0.1)$$

を考える. これらをベクトルとして表記して

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t)). \quad (0.2)$$

上記を $t$ に関して微分したものを

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \quad (0.3)$$

と書く.

$\boldsymbol{p}(t)$ が時間 $t$ の時の点の位置を表すとする,  $\dot{\boldsymbol{p}}(t)$ は動点の速度ベクトルとなる. ベクトル $\dot{\boldsymbol{p}}(t)$ の長さ $|\dot{\boldsymbol{p}}(t)|$ は

$$|\dot{\boldsymbol{p}}(t)| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} \quad (0.4)$$

で与えられる. これは運動の速さを表している. 同様に $\dot{\boldsymbol{p}}(t)$ を微分して

$$\ddot{\boldsymbol{p}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) \quad (0.5)$$

は加速度ベクトルを表す.

ここで, 曲線 $\boldsymbol{p}(t) (0 \leq t \leq b)$ の長さは

$$\int_0^b |\dot{\mathbf{p}}(t)| dt \quad (0.6)$$

となる．これは，動点 $\mathbf{p}(t)$ が $t = 0$ から $t = b$ の間を移動した距離となる．

はじめの時間  $0$  を固定して， $b$ を $t$ と置き換えると

$$s = \int_0^t |\dot{\mathbf{p}}(t)| dt \quad (0.7)$$

と書ける．このとき， $s$ は時間  $0$  から時間 $t$ の間を移動した距離となり， $t$ の関数となる．

したがって，両辺を $t$ で微分すると，

$$\dot{s}(t) = |\dot{\mathbf{p}}(t)| \quad (0.8)$$

が得られる．

すべての $t$ に対して $|\dot{\mathbf{p}}(t)| \neq 0$ ならば $|\dot{\mathbf{p}}(t)| > 0$ なので， $s$ は $t$ の単調増加関数ということになる．したがって， $t = t(s)$ を式(0.2)もしくは式(0.3)に代入することによって，曲線をパラメータ $s$ を用いて表記することが出来る．

ここでは簡単のために，式(0.2)や式(0.3)がすでに，

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(s) = (x(s), y(s)) \quad (0.9)$$

とパラメータ $s$ で書かれているとする．ここで， $s$ で微分することを

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}'(s) = (x'(s), y'(s)) \quad (0.10)$$

と表記することにする．

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds}, \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds}$$

と書けるので,

$$|\mathbf{p}'(s)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \frac{dt}{ds} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{ds} = 1 \quad (0.11)$$

となる. このようなパラメータ  $s$  を弧長パラメータと呼ぶ.

物理的には運動の速さは常に 1 であることを表す. いま, 式(0.10)で与えられる長さ 1 のベクトル  $\mathbf{p}' = \mathbf{p}'(s)$  を  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1(s)$  として表すと,

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{p}'. \quad (0.12)$$

幾何学的には,  $\mathbf{e}_1(s_0)$  は曲線  $\mathbf{p}(s)$  の  $\mathbf{p}(s_0)$  における接ベクトルを表している.

さらに,  $\mathbf{e}_1(s_0)$  に直交する長さ 1 のベクトルを  $\mathbf{e}_2(s_0)$  とする.

この時,  $\mathbf{e}_1(s)$  と  $\mathbf{e}_2(s)$  の関係は

$$\mathbf{p}' = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1, \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \quad (0.13)$$

となる.  $\cdot$  は内積を表す.

$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$  を微分すると  $\mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1' = 0$ , すなわち,  $2\mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_1 = 0$  となる.

したがって,  $\mathbf{e}_1'$  は  $\mathbf{e}_1$  に直交することになる. したがって,  $\mathbf{e}_1(s)$  に直交するベクトルは  $\mathbf{e}_2(s)$  は  $\mathbf{e}_2(s)$  の何倍かであるから, その倍数を  $\kappa(s)$  とすると,

$$\mathbf{e}_1'(s) = \kappa(s)\mathbf{e}_2(s) \quad (0.14)$$

と書くことが出来る. 同様に  $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1$  を微分することにより,  $\mathbf{e}_2'$  は  $\mathbf{e}_2$  に直交, したがって  $\mathbf{e}_2'$  は  $\mathbf{e}_1$  の何倍かになる. また,  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$  を微分して,  $\mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2' = 0$  となる. これに  $\mathbf{e}_1'(s) = \kappa(s)\mathbf{e}_2(s)$  を代入して,  $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1$  より,  $\kappa + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2' = 0$  となるから,  $\mathbf{e}_2'$  は  $\mathbf{e}_1$  の  $-\kappa$  倍でなければならない. 以上をまとめると,

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \kappa(s)\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = -\kappa(s)\mathbf{e}_1 \end{cases} \quad (0.15)$$

となり，この $\kappa(s)$ を曲線 $\mathbf{p}(s)$ の**曲率(curvature)**と呼ぶ．

ここでは簡易のため，2次元平面上の円の曲率を求めることを行う．

まず，

$$x(t) = r \cos t, y(t) = r \sin t \quad (0.16)$$

は半径 $r$ の円の方程式を表す．

はじめに，パラメータ  $s$  で書き直すために式(0.7)を用いて計算すると

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt \\ &= \int_0^t r dt = rt \end{aligned} \quad (0.17)$$

となるので，円の式は

$$x(s) = r \cos \frac{s}{r}, y(s) = r \sin \frac{s}{r}. \quad (0.18)$$

これを $s$ で微分すると，

$$x'(s) = -\sin \frac{s}{r}, y'(s) = \cos \frac{s}{r}, \quad (0.19)$$

$$\mathbf{e}_1(s) = \left( -\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right) \quad (0.20)$$

なので，

$$\mathbf{e}_2(s) = \left( -\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right). \quad (0.21)$$

さらに， $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ を $s$ で微分すると，

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \left( -\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r}, \right) = \frac{1}{r} \mathbf{e}_2(s) \\ \mathbf{e}'_2 &= \left( \frac{1}{r} \sin \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r} \right) = -\frac{1}{r} \mathbf{e}_1(s) \end{aligned} \quad (0.22)$$

したがって、円の曲率は  $\kappa = \frac{1}{r}$  と求められる。

## A.2 ガウス曲率の導出

曲面  $I(x, y)$  をベクトルで表記すると、以下のように書ける。

$$\mathbf{I}(x, y) = (x, y, I(x, y)) \quad (0.23)$$

ベクトル  $\mathbf{I}(x, y)$  の  $x$  方向、 $y$  方向微分をそれぞれ  $\mathbf{I}_x(x, y), \mathbf{I}_y(x, y)$  とすると、

$$\mathbf{I}_x(x, y) = \left( 1, 0, \frac{\partial I(x, y)}{\partial x} \right), \quad (0.24)$$

$$\mathbf{I}_y(x, y) = \left( 0, 1, \frac{\partial I(x, y)}{\partial y} \right), \quad (0.25)$$

と書ける。なお、以降は方向微分を以下の通り添え字で表記する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} I(x, y) &\equiv I_x, \quad \frac{\partial}{\partial y} I(x, y) \equiv I_y. \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} I(x, y) &\equiv I_{xx}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} I(x, y) \equiv I_{xy}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} I(x, y) \equiv I_{yy}. \end{aligned}$$

この時、以下の曲率が定義される。

### 定義：主曲率

曲面  $\mathbf{I}(x, y)$  上の任意の点  $(x, y)$  における曲率のうち、最大曲率  $\kappa_M$  と最小曲率  $\kappa_m$  を主曲率と呼ぶ。



### 定義：ガウス曲率

曲面 $\mathbf{I}(x, y) = (x, y, I(x, y))$ 上の点 $(x, y)$ におけるガウス曲率 $K(x, y)$ は，以下のよう定義される．

$$K(x, y) = \kappa_M \times \kappa_m.$$

但し $\kappa_M, \kappa_m$ は点 $(x, y)$ における主曲率．

ガウス曲率を求めるにあたり，以下の定理を証明する．

### 定理

ガウス曲率は第 1 基本量および第 2 基本量を用いて以下のように求められる．

$$K = \kappa_M \kappa_m = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

第 1 基本量  $E, M, N$  は以下のように求められる．

$$E = \mathbf{I}_x \cdot \mathbf{I}_x, M = \mathbf{I}_x \cdot \mathbf{I}_y, N = \mathbf{I}_y \cdot \mathbf{I}_y.$$

また，同様に第 2 基本量  $L, M, N$  は以下のように求められる．

$$L = \mathbf{I}_{xx} \cdot \mathbf{e}_1, M = \mathbf{I}_{xy} \cdot \mathbf{e}_1, N = \mathbf{I}_{yy} \cdot \mathbf{e}_1.$$

ただし， $\mathbf{e}_1$  は  $\mathbf{I}_x, \mathbf{I}_y$  に直交する単位ベクトル．

上記の定理を証明するために，以下に示す 2 つの補題を証明する．

### 補題 1

主曲率 $\kappa_M, \kappa_m$ はそれぞれ

$$E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1$$

の時,

$$L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2$$

の最大値と最小値である.

### 証明

弧長パラメータを $s$ とすると, 曲面 $\mathbf{I}(s)$ は

$$\mathbf{I}(s) = \mathbf{I}(x(s), y(s)). \quad (0.26)$$

と書ける.

曲面 $\mathbf{I}(s)$ に対する単位接ベクトルを $\mathbf{e}_1(s)$ とすると,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1(s) &= \frac{\partial \mathbf{I}(s)}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{I}(x(s), y(s))}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathbf{I}(x(s), y(s))}{\partial y} \frac{dy}{ds} \\ |\mathbf{e}_1(s)|^2 &= \left( \frac{\partial \mathbf{I}(x(s), y(s))}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathbf{I}(x(s), y(s))}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right)^2 \\ &= \left| \frac{\partial \mathbf{I}(x(s), y(s))}{\partial x} \right|^2 \left( \frac{dx(s)}{ds} \right)^2 \\ &\quad + 2 \frac{\partial \mathbf{I}(x(s), y(s))}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{I}(x(s), y(s))}{\partial y} \frac{dx(s)}{ds} \frac{dy(s)}{ds} \\ &\quad + \left| \frac{\partial \mathbf{I}(x(s), y(s))}{\partial y} \right|^2 \left( \frac{dy(s)}{ds} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= I_x^2 \left( \frac{dx(s)}{ds} \right)^2 + 2I_x I_y \frac{dx(s)}{ds} \frac{dy(s)}{ds} + I_y^2 \left( \frac{dy(s)}{ds} \right)^2 \\
&= E \left( \frac{dx(s)}{ds} \right)^2 + 2F \frac{dx(s)}{ds} \frac{dy(s)}{ds} + G \left( \frac{dy(s)}{ds} \right)^2
\end{aligned}$$

ここで,  $\frac{dx(s)}{ds} \equiv \xi, \frac{dy(s)}{ds} \equiv \eta$  とおくと,  $\mathbf{e}_1(s)$  は単位ベクトルなので,

$$|\mathbf{e}_1(s)|^2 = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1.$$

この時, 曲率  $\kappa(s)$  を求める. 曲率  $\kappa(s)$  はその定義から,

$$\begin{aligned}
\kappa(s) &= \frac{\partial \mathbf{e}_1(s)}{\partial s} \cdot \mathbf{e}_2(s) \\
&= I_{xx} \cdot \mathbf{e}_2(s) \left( \frac{dx(s)}{ds} \right)^2 + 2I_{xy} \cdot \mathbf{e}_2(s) \frac{dx(s)}{ds} \frac{dy(s)}{ds} + I_{yy} \cdot \mathbf{e}_2(s) \left( \frac{dy(s)}{ds} \right)^2 \\
&= L \left( \frac{dx(s)}{ds} \right)^2 + 2M \frac{dx(s)}{ds} \frac{dy(s)}{ds} + N \left( \frac{dy(s)}{ds} \right)^2 \\
&= L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2.
\end{aligned}$$

したがって,  $|\mathbf{e}_1(s)|^2 = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1$  のとき,  $L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2$  は曲率を表しており示せた.

## 補題 2

主曲率  $\kappa_M, \kappa_m$  はそれぞれ  $(\xi, \eta) \neq 0$  に対して

$$\lambda(\xi, \eta) = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2}$$

の最大値と最小値になっている.

## 証明

$L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2$ との意味を考える．これまでの議論から，

$$L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 = (\text{接ベクトルの微分}) \cdot (\text{法ベクトル})$$

$$E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = |\text{接ベクトル}|^2$$

と考えられる．ここで， $\lambda(\xi, \eta)$ を以下のように定義する．

$$\lambda(\xi, \eta) = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2}$$

したがって，

$$\lambda(\xi, \eta) = \frac{(\text{接ベクトルの微分}) \cdot (\text{法ベクトル})}{|\text{接ベクトル}|^2}$$

と考えることができる．

### A.3 ガウス曲率の座標変換

ガウス曲率を $K$ とすると，第1基本形式  $I$  に対する  $L, M, N$ ，第2基本形式  $II$  に対する  $E, F, G$  を用いて以下のようにかける．

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

まず，ガウス曲率が  $xy$  座標系で表記できることを示す．

曲面  $I(x, y)$  に対して第1基本形式  $I$  は以下のように定義される．

$$I = dI \cdot dI = Edxdy + 2Fdx dy + Gdx dy$$

この定義に沿って曲面  $I(x, y)$  に対する第1基本量  $I$  を計算すると以下のようになる．

$$\begin{aligned}
I &= dl \cdot dl = (dx, dy, I_x dx + I_y dy) \cdot (dx, dy, I_x dx + I_y dy) \\
&= dx dx + dy dy + I_x^2 dx dx + 2I_x I_y dx dy + I_y^2 dy dy \\
&= (1 + I_x^2) dx dx + 2I_x I_y dx dy + (1 + I_y^2) dy dy.
\end{aligned}$$

ゆえに、定義から

$$E = 1 + I_x^2,$$

$$F = I_x I_y,$$

$$G = 1 + I_y^2.$$

次に第2基本形式IIを求める.

定義

$$\begin{aligned}
II &= -dl \cdot de = -(I_x dx + I_y dy) \cdot (e_x dx + e_y dy) \\
&= L dx dx + 2M dx dy + N dy dy.
\end{aligned}$$

ただし、曲面 $I(x, y)$ に対する $L, M, N$ は、 $e$ を $I_x, I_y$ に垂直な単位ベクトルとすると以下のように定義されている.

$$L = I_{xx} \cdot e$$

$$M = I_{xy} \cdot e$$

$$N = I_{yy} \cdot e.$$

次に、 $e$ を具体的に求める.

曲面 $I(x, y)$ に対する接ベクトル $I_x, I_y$ は

$$I_x = \left(1, 0, \frac{\partial I(x, y)}{\partial x}\right), I_y = \left(0, 1, \frac{\partial I(x, y)}{\partial y}\right).$$

よって

$$I_x \times I_y = \left( \begin{vmatrix} 0 & I_x \\ 1 & I_y \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & I_x \\ 0 & I_y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-I_x, -I_y, 1).$$

なので,

$$e = \frac{I_x \times I_y}{|I_x \times I_y|} = \left( \frac{-I_x}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2 + 1}}, \frac{-I_y}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2 + 1}} \right).$$

また,

$$I_{xx} = \frac{\partial I_x}{\partial x} = (0, 0, I_{xx}),$$

$$I_{xy} = \frac{\partial I_x}{\partial y} = (0, 0, I_{xy}),$$

$$I_{yy} = \frac{\partial I_y}{\partial y} = (0, 0, I_{yy}).$$

なので,

$$L = I_{xx} \cdot e = \frac{I_{xx}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2 + 1}},$$

$$M = I_{xy} \cdot e = \frac{I_{xy}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2 + 1}},$$

$$N = I_{yy} \cdot e = \frac{I_{yy}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2 + 1}}.$$

以上から

$$LN - M^2 = \frac{1}{I_x^2 + I_y^2 + 1} (I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2),$$

$$EG - F^2 = (1 + I_x^2)(1 + I_y^2) - (I_x I_y)^2 = 1 + I_x^2 + I_y^2.$$

ゆえにガウス曲率 $K$ は $xy$ 座標系において以下のように定義される.

$$K = \frac{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}{(1 + I_x^2 + I_y^2)^2}.$$

次に図のように、 $I(x, y)$ の等輝度線を考える．等輝度線上のすべての点において、gradient 方向，すなわち等輝度線の法線方向の単位ベクトル $\hat{\xi}$ を考え、 $x$ 軸とのなす角を $\theta$ とする．また、 $\hat{\xi}$ を $\frac{\pi}{2}$ 反時計回りに回転させた単位ベクトル $\hat{\eta}$ を考える．すなわち

$$\begin{aligned}\hat{\xi} &= (\cos\theta, \sin\theta) = \nabla I = \frac{1}{|\nabla I|}(I_x, I_y) \\ \hat{\eta} &= \frac{1}{|\nabla I|}(-I_y, I_x)\end{aligned}$$

このように各点ごとに、 $xy$ 座標系を反時計回りに $\theta$ 回転させた $\xi\eta$ 座標系を定義する．

回転行列 $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を用いて、座標 $(x, y)$ は次のように座標変換が可能となる．

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} &= R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= R^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi \cos\theta + \eta \sin\theta \\ -\xi \sin\theta + \eta \cos\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

このとき、ガウス曲率は次のように書けることを示す．

$$K = \frac{I_{\xi\xi}I_{\eta\eta} - I_{\eta\xi}^2}{(1 + I_{\xi}^2 + I_{\eta}^2)^2}.$$

$\hat{\xi}, \hat{\eta}$ をそれぞれ $\xi, \eta$ 方向の単位ベクトルとすると、 $\xi$ 方向、 $\eta$ 方向の微分はそれぞれ以下のようになる。

$$I_{\xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} I = \hat{\xi} \cdot \nabla I = \|\nabla I\| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{I_x^2 + I_y^2},$$

$$I_{\eta} = 0.$$

次に $\xi, \eta$ 方向の2回微分を考える。すなわち $I_{\xi\xi}, I_{\eta\eta}, I_{\xi\eta}$ はそれぞれ定義に従い微分すると以下のように表される。

$$\begin{aligned} I_{\xi\xi} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} I(x, y) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} \right) I(x, y) \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} \right) I(x, y) \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \equiv x_{\xi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} \equiv y_{\xi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} \equiv x_{\eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} \equiv y_{\eta}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \equiv \partial_x, \quad \frac{\partial}{\partial y} \equiv \partial_y$$

とすると、

$$I_{\xi\xi} \equiv (x_{\xi}^2 \partial_x^2 + 2x_{\xi}y_{\xi} \partial_x \partial_y + y_{\xi}^2 \partial_y^2) I(x, y) = x_{\xi}^2 I_{xx} + 2x_{\xi}y_{\xi} I_{xy} + y_{\xi}^2 I_{yy}.$$

同様にして

$$I_{\eta\eta} \equiv (x_{\eta}^2 \partial_x^2 + 2x_{\eta}y_{\eta} \partial_x \partial_y + y_{\eta}^2 \partial_y^2) I(x, y) = x_{\eta}^2 I_{xx} + 2x_{\eta}y_{\eta} I_{xy} + y_{\eta}^2 I_{yy}.$$

さらに

$$\begin{aligned} I_{\eta\xi} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} I(x, y) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y} \right) I(x, y) \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y} \right) I(x, y) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\equiv (x_\xi \partial_x + y_\xi \partial_y)(x_\eta \partial_x + y_\eta \partial_y)I(x, y) \\
&= (x_\xi x_\eta \partial_x^2 + x_\xi y_\eta \partial_x \partial_y + x_\eta y_\xi \partial_x \partial_y + y_\xi y_\eta \partial_y^2)I(x, y) \\
&= x_\xi x_\eta I_{xx} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi)I_{xy} + y_\xi y_\eta I_{yy}
\end{aligned}$$

ゆえに,

$$I_{\eta\xi} \equiv (x_\xi x_\eta \partial_x^2 + x_\xi y_\eta \partial_x \partial_y + x_\eta y_\xi \partial_x \partial_y + y_\xi y_\eta \partial_y^2)I(x, y).$$

これらから $\xi\eta$ 座標系におけるガウス曲率の分子( $I_{\xi\xi}I_{\eta\eta} - I_{\eta\xi}^2$ )を計算する.

$$\begin{aligned}
I_{\xi\xi}I_{\eta\eta} &= (x_\xi^2 I_{xx} + 2x_\xi y_\xi I_{xy} + y_\xi^2 I_{yy})(x_\eta^2 I_{xx} + 2x_\eta y_\eta I_{xy} + y_\eta^2 I_{yy}) \\
I_{\eta\xi}^2 &= (x_\xi x_\eta I_{xx} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi)I_{xy} + y_\xi y_\eta I_{yy})^2
\end{aligned}$$

$ \begin{aligned} I_{\xi\xi}I_{\eta\eta} &= I_{xx}^2(x_\xi^2 x_\eta^2) \\ &+ I_{yy}^2(y_\xi^2 y_\eta^2) \\ &+ I_{xy}^2(4x_\xi x_\eta y_\xi y_\eta) \\ &+ I_{xx}I_{yy}(x_\xi^2 y_\eta^2 + x_\eta^2 y_\xi^2) \\ &+ I_{xx}I_{xy}(2(x_\xi^2 x_\eta y_\eta + x_\eta^2 x_\xi y_\xi)) \\ &+ I_{yy}I_{xy}(2(y_\xi^2 x_\eta y_\eta + y_\eta^2 x_\xi y_\xi)) \end{aligned} $	$ \begin{aligned} I_{\eta\xi}^2 &= I_{xx}^2(x_\xi^2 x_\eta^2) \\ &+ I_{yy}^2(y_\xi^2 y_\eta^2) \\ &+ I_{xy}^2(x_\eta y_\xi + x_\xi y_\eta)^2 \\ &+ I_{xx}I_{yy}(2(x_\xi x_\eta y_\xi y_\eta)) \\ &+ I_{xx}I_{xy}(2x_\xi x_\eta(x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi)) \end{aligned} $
--	--

よって

$$\begin{aligned}
I_{\xi\xi}I_{\eta\eta} - I_{\eta\xi}^2 &= -I_{xy}^2(x_\eta y_\xi - x_\xi y_\eta)^2 \\
&+ I_{xx}I_{yy}(x_\xi^2 y_\eta^2 + x_\eta^2 y_\xi^2 - 2x_\xi x_\eta y_\xi y_\eta) \\
&+ I_{xx}I_{xy}(2(x_\xi^2 x_\eta y_\eta + x_\eta^2 x_\xi y_\xi) - 2(x_\xi^2 x_\eta y_\eta + x_\eta^2 x_\xi y_\xi))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +I_{yy}I_{xy}\left(2(y_{\xi}^2x_{\eta}y_{\eta}+y_{\eta}^2x_{\xi}y_{\xi})-2(y_{\xi}^2x_{\eta}y_{\eta}+y_{\eta}^2x_{\xi}y_{\xi})\right) \\
& =I_{xx}I_{yy}(x_{\eta}y_{\xi}-x_{\xi}y_{\eta})^2-I_{xy}(x_{\eta}y_{\xi}-x_{\xi}y_{\eta})^2 \\
& =(x_{\eta}y_{\xi}-x_{\xi}y_{\eta})^2(I_{xx}I_{yy}-I_{xy}^2)
\end{aligned}$$

ここで、 $x_{\xi}, x_{\eta}, y_{\xi}, y_{\eta}$  について考える.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \cos \theta + \eta \sin \theta \\ -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\hat{\xi} = (\cos \theta, \sin \theta) = \nabla I = \frac{1}{|\nabla I|} (I_x, I_y)$$

$$\hat{\eta} = \frac{1}{|\nabla I|} (-I_y, I_x)$$

だから,

$$x_{\xi} = \cos \theta = \frac{I_x}{|\nabla I|}$$

$$x_{\eta} = \sin \theta = \frac{I_y}{|\nabla I|}$$

$$y_{\xi} = -\sin \theta = -\frac{I_y}{|\nabla I|}$$

$$y_{\eta} = \cos \theta = \frac{I_x}{|\nabla I|}.$$

なので,

$$(x_{\eta}y_{\xi}-x_{\xi}y_{\eta})^2 = \left(\frac{-(I_y^2 + I_x^2)}{|\nabla I|^2}\right)^2 = \left(-\frac{|\nabla I|^2}{|\nabla I|^2}\right)^2 = 1.$$

ゆえに,

$$I_{\xi\xi}I_{\eta\eta} - I_{\eta\xi}^2 = (I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2).$$

$I_{\xi} = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}, I_{\eta} = 0$ だったことを思い出すと,

$$(K \text{の分母}) = (1 + I_x^2 + I_y^2)^2 = (1 + I_{\xi}^2)^2 = (1 + I_{\xi}^2 + I_{\eta}^2)^2.$$

したがって、以下を示すことができた.

$$K = \frac{I_{\xi\xi}I_{\eta\eta} - I_{\xi\eta}^2}{(1 + I_{\xi}^2 + I_{\eta}^2)^2} = \frac{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}{(1 + I_x^2 + I_y^2)^2}.$$

## A.4 最急降下法

本研究で用いた最急降下法の詳細を述べる. ここでは簡単のため, 1 変数の場合を考える.

今, 以下のエネルギー関数の最小化を考える.

$$E[I] = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{d}{dx} I(x, t) \right\}^2 dx$$

$E[I]$ が最小となるためには, 最急降下法で求める量は以下の通りである.

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta I(x, t)} \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} < 0$$

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial t} = - \frac{\delta E}{\delta I(x, t)}.$$

$\frac{\delta E}{\delta I}$ は以下のようにして求めることができる.

$$\begin{aligned} \frac{\delta E}{\delta I} &= \frac{\delta}{\delta I} \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dx} I(x, t) \right\}^2 dx \\ \frac{\delta E}{\delta I(x)} &= \frac{\delta}{\delta I(x)} \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} I(x', t) \right\}^2 dx' \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\delta}{\delta I(x)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} I(x', t) \right\}^2 dx' \\ &= \frac{1}{2} \int 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} I(x', t) \right\} \frac{\delta}{\delta I(x)} \frac{\partial}{\partial x'} I(x') dx' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} I(x', t) \right\} \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{\delta}{\delta I(x)} I(x') \right) dx' \\
&= \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} I(x', t) \right\} \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x' - x) dx' \\
&= \left[ \frac{\partial}{\partial x'} I(x', t) \delta(x' - x) \right]_{\Omega} - \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} I(x', t) \delta(x' - x) dx' \\
&= \left[ \frac{\partial}{\partial x'} I(x', t) \delta(x' - x) \right]_{\Omega} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} I(x, t) \int_{\Omega} f(x') \delta(x - x') dx' \\
&= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} I(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} I(x, t) & \text{if } x \in \partial\Omega \ (x' = x) \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} I(x, t) & \text{if } x \in \Omega \ (x' \neq x) \end{cases}
\end{aligned}$$

## A.5 ガウス曲率最小化のダイナミクス

式(3.1)で記されるガウス曲率に関するエネルギー関数に最急降下法を適用することで得られるガウス曲率を最小化するダイナミクスを以下に記す. 129項からなるダイナミクスが得られるのだが, 紙面の都合上, 略記する.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z(x, y, t)}{\partial t} = & \left( -4Z_{yy} Z_{xy}^4 + 36Z_y^2 Z_{yy} Z_{xy}^4 - 4Z_{yy} Z_x^2 Z_{xy}^4 + 80Z_y Z_x Z_{xy}^5 \right. \\
& - 32Z_y Z_{xy}^3 Z_{xyy} - 32Z_y^3 Z_{xy}^3 Z_{xyy} - 32Z_y Z_x^2 Z_{xy}^3 Z_{xyy} + 8Z_{yy}^2 Z_{xy}^2 Z_{xx} \\
& - 72Z_y^2 Z_{yy}^2 Z_{xy}^2 Z_{xx} + 16Z_y Z_{yyy} Z_{xy}^2 Z_{xx} + 16Z_y^3 Z_{yyy} Z_{xy}^2 Z_{xx} \\
& + 8Z_{yy}^2 Z_x^2 Z_{xy}^2 Z_{xx} + 16Z_y Z_{yyy} Z_x^2 Z_{xy}^2 Z_{xx} - 160Z_y Z_{yy} Z_x Z_{xy}^3 Z_{xx} \\
& - 4Z_{xy}^4 Z_{xx} - 4Z_y^2 Z_{xy}^4 Z_{xx} + 36Z_x^2 Z_{xy}^4 Z_{xx} + 32Z_y Z_{yy} Z_{xy} Z_{xyy} Z_{xx} \\
& + 32Z_y^3 Z_{yy} Z_{xy} Z_{xyy} Z_{xx} + 32Z_y Z_{yy} Z_x^2 Z_{xy} Z_{xyy} Z_{xx} + 16Z_x Z_{xy}^2 Z_{xyy} Z_{xx} \\
& + 16Z_y^2 Z_x^2 Z_{xy}^2 Z_{xyy} Z_{xx} + 16Z_x^3 Z_{xy}^2 Z_{xyy} Z_{xx} - 2Z_{xyy}^2 Z_{xx} - 4Z_y^2 Z_{xyy}^2 Z_{xx} \\
& - 2Z_y^4 Z_{xyy}^2 Z_{xx} + \cdots + \textbf{(100 terms)} + 2Z_{yy}^2 Z_x^2 Z_{xxxx} + 2Z_y^2 Z_{yy}^2 Z_x^2 Z_{xxxx} \\
& \left. + Z_{yy}^2 Z_x^4 Z_{xxxx} \right) / (1 + Z_x^2 + Z_y^2)^6
\end{aligned}$$

## A.6 $E_1[\phi] = 0 \Rightarrow E_{\text{flat}}[Z] = 0$ の証明.

第5章の式(5.4)で記述される $\phi(x, y)$ を用いたフラット性を評価するためのエネルギー関数であることを示すために、以下の関係を証明する.

$$E_1[\phi] = 0 \Rightarrow E_{\text{flat}}[Z] = 0 \quad (0.27)$$

まず、以下の2つの命題は明らかに真である.

$$E_1[\phi] = 0 \Leftrightarrow \forall (x, y) \in B; \|\nabla\phi(x, y)\|^2 = 0 \quad (0.28)$$

$$\forall (x, y) \in B; \|\nabla\phi(x, y)\|^2 = 0 \Leftrightarrow \forall (x, y) \in B; \phi(x, y) = \text{const} \quad (0.29)$$

したがって、以下の命題は明らかに真である.

$$\forall (x, y) \in B; \phi(x, y) = \text{const} \Rightarrow E_{\text{flat}}[Z] = 0 \quad (0.30)$$

$\partial Z(x, y)/\partial\phi$ は以下の式で記述される.

$$\frac{\partial Z}{\partial\phi} = \begin{cases} Z_{\wedge}(x, y) & \text{if } \phi > 0 \\ 0 & \text{if } \phi = 0 \\ Z_{\wedge}(x, y) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (0.31)$$

また、 $\phi > 0$ のとき、 $Z_x(x, y)$ は

$$Z_x(x, y) = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial\phi} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x} = Z_{\wedge}(x, y) \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x}.$$

で記述される.

ここで、 $\phi(x, y) = \text{const}$ なので、 $\partial\phi(x, y)/\partial x = 0$ である. ゆえに、 $Z_x(x, y) = 0$ .

同様に $Z_y(x, y) = 0$ .

したがって,  $\bar{\kappa}(x, y) = \bar{\mu}(x, y) = 0$ .

$\phi < 0$ の場合も同様に示される.  $\phi = 0$ の場合は, 明らかである.

したがって,  $\phi(x, y) = \text{const}$ ならば,

$$E_{\text{flat}}[Z] = \iint_{\text{B}} (\bar{\kappa}^2 + \bar{\mu}^2) dx dy = 0$$

である.

以上より,

$$E_1[\phi] = 0 \Rightarrow E_{\text{flat}}[Z] = 0$$

となる.

# Appendix B

## B.1 Filling-in モデル

Filling-in モデルは視覚情報伝播によって盲点補完を記述する視覚数理モデルである(Satoh & Usui, 2008b). Filling-in モデルの原理は画像工学の分野で用いられる 2 種類の曲率：等輝度線曲率 (Curvature of isophoto line)  $\bar{\kappa}_I(x, y)$ , およびフローライン曲率 (Curvature of flow line)  $\bar{\mu}_I(x, y)$  を用いて  $\{\bar{\kappa}_I^2, \bar{\mu}_I^2\}$  を最小化することである.

はじめに 2 種類の曲率  $\{\bar{\kappa}_I, \bar{\mu}_I\}$  と輝度  $I(x, y)$  から得られるガウス曲率  $K_I(x, y)$  の間に数学的考察から定理を与える.  $\bar{\kappa}, \bar{\mu}$  は以下の様にして得られる.

$$\bar{\kappa}_I(x, y) = \frac{I_y^2 I_{xx} - 2I_x I_y I_{xy} + I_x^2 I_{yy}}{(I_x^2 + I_y^2)} \quad (0.32)$$

$$\bar{\mu}_I(x, y) = \frac{(I_x^2 - I_y^2)I_{xy} - I_x I_y (I_{yy} - I_{xx})}{(I_x^2 + I_y^2)} \quad (0.33)$$

Satoh & Usui が提案した Filling-in モデルは V1 と V2 における視覚情報処理の性質を用いて, 盲点補完を記述する視覚数理モデルである. その概要をはじめに, V1 では方位選択性を持つ神経細胞が存在していることから, 以下のエネルギー関数を考える.

$$E_1 = \iint_B |\nabla I(x, y)|^2 dx dy \quad (0.34)$$

また、V2 では曲率の計算を行っていることから、以下のエネルギー関数を導入する.

$$E_2 = \iint_B (\bar{\kappa}^2(x, y) + \bar{\mu}^2(x, y)) dx dy \quad (0.35)$$

そして、式(0.34), (0.35)で定義される $E_1, E_2$ の積によって定義するエネルギー関数 $E_{BS}[I]$ を最小化するのが Filling-in モデルである.

$$E_{BS}[I] = \iint_{BS} \left( \bar{\kappa}_I^2(x, y) + \bar{\mu}_I^2(x, y) \right) |\nabla I(x, y)|^2 dx dy. \quad (0.36)$$

ただし、BSは盲点領域と定義する.

Satoh& Usui らは $E_{BS}[I]$ に V1 と V2 における特性を導入し、最急降下法を適用した. 具体的には、V1 と V2 における経路での情報伝達の違いが異なることが生理実験によって示されており、この特性を用いると、V1 において処理がなされる $|\nabla I(x, y)|^2$ を定数項としてみなすことが出来る. したがって、 $|\nabla I(x, y)|^2$ を定数項とみなして、導出したダイナミクスは以下の様になる.

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \nabla(\Delta I) \cdot \nabla^\perp I + \bar{\kappa} |\nabla I| \quad (0.37)$$

ただし、 $\nabla^\perp I$ は $\nabla I$ に垂直なベクトルである.

また、本ダイナミクスは画像補完アルゴリズムである Digital Image Inpainting (DII) と数学的に等価であることも Satoh によって示されている (Satoh, 2011).



## B.2 Digita Image Inpainting

Image Inpainting は古くから絵画を輸送する際についてしまう傷を修復する技術である．具体的には以下の手順によって画像が修復される．Bertalmio と Sapiro は Digital Image Inpainting (DII) を提案した．DII はこの技術を画像中の失われた情報の復元に応用したコンピュータアルゴリズムである．このアルゴリズムは以下のダイナミクスによって与えられている．

$$\frac{\partial}{\partial t} I(x, y) = \delta I(x, y), \forall (x, y) \in \Omega \quad (0.38)$$

ただし、 $(x, y)$  は画像中の座標、 $\delta I(x, y)$  は時間  $t$  における更新則を表す．最も大切な量は  $\delta I(x, y)$  である．Isophote line (等輝度線) を引き延ばすことで画像修復を実現している．具体的には以下の計算で行われる． $\delta I(x, y)$  は以下の用に分解される．

$$\delta I = \nabla L \cdot \vec{N}, \quad (0.39)$$

ただし、 $\nabla L = \left( \frac{\partial L(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} \right)$  である．また、 $\nabla L$  は以下のように定義される輝度  $I$  の滑らかさの指標である．

$$L(x, y, t) = \left( \frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (0.40)$$

輝度をよりよく復元するために  $\nabla L$  の伝播方向は輝度  $I(x, y)$  の変化が最小である方向である必要がある．この方向を  $\vec{N}$  とすると、 $\nabla I$  を  $90^\circ$  反時計回りに回転させた方向となり、以下の用に記述される．

$$\begin{aligned}\vec{N}(x, y, t) &= \left(-\hat{x} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial x}\right) I(x, y, t) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \nabla^\perp I(x, y, t)\end{aligned}\tag{0.41}$$

しかしながら，この伝播方向は境界の輝度の状態によっては交わってしまうことが考えられる．したがって，この状態を回避するために，更新則 $\delta I$ には $I$ の異方性拡散プロセスを加えている(Perona & Malik, 1990)．この拡散は以下の偏微分方程式として表される．

$$\frac{\partial}{\partial t} I(x, y, t) = \kappa(x, y, t) \|\nabla I(x, y, t)\|\tag{0.42}$$

ここで， $\kappa(x, y, t)$ は $I$ の Isophote line の曲率を表す．(0.39)～(0.41)を(0.38)に代入して(0.42)を加えると，DII に用いる異方性拡散方程式が得られる．

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \nabla(\Delta I) \cdot \nabla^\perp I + \bar{\kappa} |\nabla I|\tag{0.43}$$

### B.3 奥行き補完モデルと輝度補完モデルの比較：境界条件

奥行き情報補完モデルは輝度情報補完モデルを内包していることが，数学的考察からわかっている(Mitsukura & Satoh, 2013)．本項では盲点補完モデルと奥行き情報補完モデルの関係について述べた後，その違いについて示す．提案モデルである式(3.16)は Filling-in や DII と数学的に等価であることを本文中で述べた．しかしながら，奥行情報補完モデルは境界条件が輝度情報補完モデルとは異なる場合が存在する．以降，奥行き情報補完モデルとの違いについて述べる．

盲点補完モデルは盲点周囲の輝度情報を用いて、盲点領域の輝度情報を補完する情報伝播モデルであり、そのダイナミクスは得られた奥行情報補完モデルと数学的に等価である。

これらの輝度情報補完モデルと奥行き情報補完モデルでは視覚情報が不定な領域の境界における様子が異なる。盲点補完モデルを適用する盲点領域の位置は固定されているが、奥行き情報補完の際に現れる不定領域はいつどのタイミングでどの位置に現れるかはわからない上に、水平方向の両眼視差が計算不可能な領域はすべて、不定領域となる。したがって不定領域に例えば図 0.2.a のような像の場合、左右両眼像における中央の灰色領域の上下にある水平方向のエッジにおいて不定領域となる。不定領域における境界条件の違いを図 0.2 に示す。

このように、奥行き情報補完と盲点補完では境界条件が異なる。数学的には盲点領域における境界条件は **Dirichlet boundary condition** である。一方、奥行き情報補完に関する境界条件は、**Dirichlet boundary condition** とそうでない領域が存在する（図 0.2.b）。より具体的には、左右の線成分（図 0.2.a や b の実線部分）は両眼視差によって奥行を推定することが出来る領域を指す。一方、図 0.2.a および b の上下の点線部は奥行情報を伝播したい境界である。このことは奥行情報を伝播する際、水平方向（ $x$  方向）に伝播の方向を固定する方法が考えられ、**Neumann boundary condition** と呼ばれている。端的に述べると、空間的な微分を直接固定することで、境界における値を定義している。

## B.4 提案モデルのアルゴリズム

本節では前節で導出した奥行き情報補完モデルの詳細と数値シミュレーションを行うためのアルゴリズムについて述べる． $n$ を繰り返し回数， $(i, j)$ を奥行空間上の座標， $\Delta t$ を更新率， $Z_t^n(i, j)$ を更新値， $B$ を不定領域とすると，領域 $B$ における奥行値 $Z(x, y)$ の更新側は以下の式で与えられる．

$$Z^{n+1}(i, j) = Z^n(i, j) + \Delta t Z_t^n(i, j), \forall (i, j) \in B, \quad (0.44)$$

次に， $Z_t^n(i, j)$ の求め方に関して以下述べる．

$$Z_t^n(i, j) = \overrightarrow{\delta L^n}(i, j) \cdot \overrightarrow{N^n}(i, j), \quad (0.45)$$

ただし， $\overrightarrow{\delta L^n}(i, j)$ は $L^n(i, j)$ の変化量， $\overrightarrow{N^n}(i, j)$ は奥行の変化が最小となる方向とする．

また， $L^n(i, j) = Z_{xx}^n(i, j) + Z_{yy}^n(i, j)$ と定義する．したがって， $\overrightarrow{\delta L^n}(i, j)$ はラプシアンの変化量を表し， $\overrightarrow{N^n}(i, j)$ は奥行情報の伝播の方向を表している．

$\overrightarrow{N^n}(i, j)$ は奥行の変化が最小となる方向である．したがって， $\overrightarrow{N^n}(i, j) = \nabla^\perp Z(i, j)$ となる． $\nabla^\perp Z(i, j)$ は $\nabla Z(i, j)$ を  $90^\circ$  回転させた方向ベクトルを表す．これは Isodepth Line の接線方向でもある（図 3.1 を参照）．

また， $\nabla(\Delta Z) \cdot \nabla^\perp Z$ は以下の様に計算される．

$$Z_t^n(i, j) = \left( \overrightarrow{\delta L^n}(i, j) \cdot \frac{\overrightarrow{N}(i, j, n)}{|\overrightarrow{N}(i, j, n)|} \right) |\nabla Z^n(i, j)|, \quad (0.46)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\delta L^n}(i, j) := & (L^n(i+1, j) \\ & - L^n(i-1, j), L^n(i, j+1) \\ & - L^n(i, j-1)),\end{aligned}\quad (0.47)$$

$$L^n(i, j) = Z_{xx}^n(i, j) + Z_{yy}^n(i, j), \quad (0.48)$$

$$\frac{\vec{N}(i, j, n)}{|\vec{N}(i, j, n)|} := \frac{(-Z_y^n(i, j), Z_x^n(i, j))}{\sqrt{(Z_x^n(i, j))^2 + (Z_y^n(i, j))^2}}, \quad (0.49)$$

$$\beta^n(i, j) = \overrightarrow{\delta L^n}(i, j) \cdot \frac{\vec{N}(i, j, n)}{|\vec{N}(i, j, n)|}, \quad (0.50)$$

$$\begin{aligned}& |\nabla Z^n(i, j)| \\ &= \begin{cases} \sqrt{(Z_{xbm}^n)^2 + (Z_{xfM}^n)^2 + (Z_{ybm}^n)^2 + (Z_{yfM}^n)^2} \\ \quad (\text{when } \beta^n > 0) \\ \sqrt{(Z_{xbM}^n)^2 + (Z_{xfm}^n)^2 + (Z_{ybm}^n)^2 + (Z_{yfm}^n)^2} \\ \quad (\text{when } \beta^n < 0). \end{cases} \quad (0.51)\end{aligned}$$

なめらかさを図る量である $L(i, j)$ と Isodepth Line の接線方向である計算する．そして， $\overrightarrow{\delta L^n}(i, j)$ は $L^n(i, j)$ を元に算出する． $|\nabla Z^n(i, j)|$ は奥行 $Z(i, j)$ の勾配のノルムの slope-limited version と呼ばれる量であり， $\beta^n$ に応じて更新量を変えるために用いている． $\kappa|\nabla Z|$ は曲率に応じて，確定領域における奥行を滑らかにする働きを持っており，画像工学的にはノイズ除去の役割を果たす．

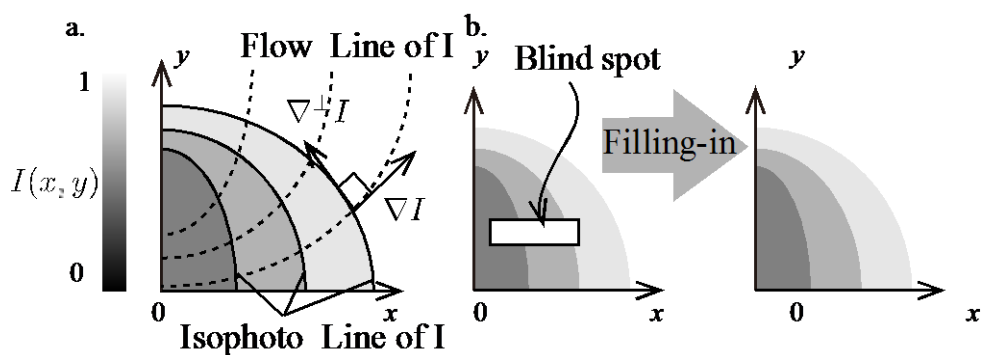


図 0.1 Filling-in モデルの概略図.

周囲の奥行き情報を伝播し，輝度情報を補完する.

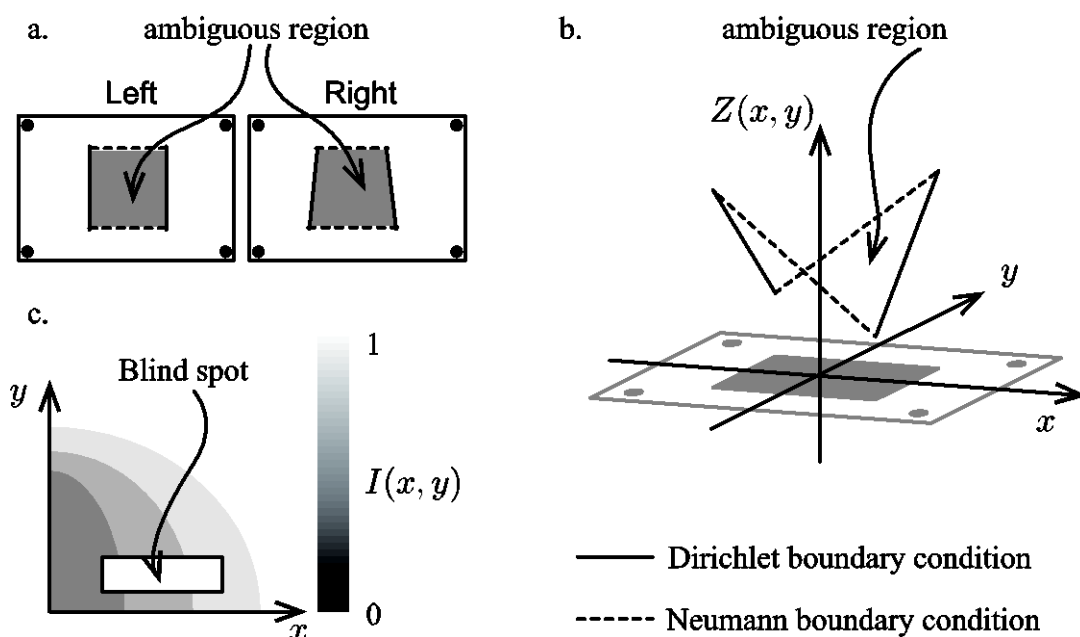


図 0.2 Filling-in モデルと提案モデルにおける境界条件の違い.

**a.** 境界条件が領域によって異なる SFS の例. **b.** 点線で示すような水平視差が不定となる領域も不定領域であり，このような境界条件は Neumann boundary condition となる. 一方， Filling-in モデルの Blind spot の境界条件は， **c.**に記すように上下水平方向の線上も含め，すべて Dirichlet boundary condition である.

## Appendix C 面の振動のダイナミクス

### C.1 モデルの導出

第5章に先立って提案したモデルについて述べる．なお，本文中で述べたように，実験結果を再現できていない．

もし提案するモデルが心理物理実験結果を再現できなければ，モデルの計算論的な意味や神経回路網への実装可能性の考察は意味をなさない．そのため，本章では心理物理実験結果の再現を目的とした数理モデルを導出し，数値シミュレーションにより心理物理実験結果を再現できるか否かを先ず検証した．これが本モデルを提案した動機である．

第5章と同様の理由で ISI 中における脳内に表象される奥行き面の遷移（以降，面遷移と呼ぶ）を考える．提案モデル（式(3.16)）の定常状態と心理物理実験に着目し，ダイナミクスを導出する．具体的には以下の2点に着目した．

- ① 長時間の ISI では  $Z(x, y) = 0$ （平坦面）に収束（奥行きのリセット効果）
- ② 時間経過と共に奥行き面は凹から凸（または凸から凹）に遷移（面の振動効果）

まず①に関しては，ISI 中において奥行き情報は与えられていないため，最終的に  $Z(x, y) = 0$  に収束すると考えられる．この奥行き情報のリセット効果は Single well タイプのエネルギー関数を最小化するダイナミクスとして記述でき，以下の式で定義する．

$$E[Z] = \frac{1}{2} \iint \|\nabla Z(x, y)\|^2 dx dy \quad (0.52)$$

上記のエネルギー関数に最急降下法を適用すると、以下のダイナミクスが得られる。

$$d \frac{\partial Z(x, y, t)}{\partial t} = c \Delta Z(x, y, t) \quad (0.53)$$

$d, c$ はスカラパラメータである。上式は本文中で述べたように（等方性）拡散方程式であり、前刺激に対して適用すると、最終的に平坦な面が得られる。

次に②に関して、面が凹から凸（または凸から凹）へ遷移する現象を立式する。ここで導入したのは波動方程式である。

$$m \frac{\partial^2 Z(x, y, t)}{\partial t^2} = c \Delta Z(x, y, t) \quad (0.54)$$

$m, c$ はスカラパラメータである。上式を図 2.2b を境界条件として、凹面（凸面）に適用すると、凹面から凸面（または凸面から凹面）へ遷移する。

以上、①奥行きのリセット効果と②面の振動効果を仮定し、最終的なダイナミクスを次式で記述する。

$$m \frac{\partial^2 Z(x, y, t)}{\partial t^2} + d \frac{\partial Z(x, y, t)}{\partial t} = c \Delta Z(x, y, t) \quad (0.55)$$

$m, d, c$ はそれぞれスカラパラメータである。なお、境界上においては原理的に $\Delta Z$ を計算することができないため、境界上の各点は、以下のダイナミクスに従い $Z(x, y) = 0$ に収束するものとした。

$$m \frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + d \frac{dZ(t)}{dt} = -a Z(t) \quad (0.56)$$



$m, d, a$ はそれぞれスカラパラメータである．上記ダイナミクスは質点の減衰振動を記述するダイナミクスとして知られている．パラメータの値によって，上記の微分方程式の解である $Z(t)$ の時間特性が異なる．例えば， $m = 50, d = \sqrt{50}/10, a = 1/50$ の時， $Z(t)$ が正の値から負の値へ遷移してから最終的に0に収束するダイナミクスとなる．実際に，式(0.56)を解いて得られる $Z(t)$ のグラフを図0.3に記す．各ISI中における $Z(t)$ の値を，面の境界における奥行き値にかけることで，境界における奥行きは，正から負の値となり，同様のパラメータを式(0.55)に設定すれば，面が凹から凸への振動し，最終的には $Z(x, y) = 0$ へ収束することが期待される．

## C.2 数値シミュレーションによる検証

式(0.55)と式(0.56)の提案モデルによって，心理実験結果を再現できるか否か，数値シミュレーションによって検証する．前刺激を凹面，境界は R-boundary，各種パラメータは前述の通り $m = 50, d = \sqrt{50}/10, c = 3/10, a = 1/50$ とした． $t$ はISIの継続時間であり， $t = 0$ はISIの開始時刻とする．

ISI中，心理物理実験では被験者に黒の均一色が提示されており，面遷移ダイナミクス（式(0.55)および(0.56)）に加え，奥行き補完ダイナミクス（式(3.16)）を同時に適用し，面遷移のシミュレーションとした．さらに得られた結果を後刺激の不定領域における初期条件として奥行き補完モデルのみを適用した．ISI中における面の遷移を1ms毎にシミュレーションした結果の一部を図0.5に示す．200ms付近のISIにおいて凸形状の面が得られており，このような面を後刺激の不定領域における初期条件として奥行き補完モデルを適用すれば，前刺激の奥行き面（凹面）と逆の面（凸面）が得られると期待される．よって，上

記シミュレーションで得られた面を後刺激の不定領域における初期条件として、奥行き補完モデル（式(3.16)）を適用した．さらに、この結果を各 ISI 継続時間毎に以下の評価関数を用いて定量評価した．

$$\text{Shape}(t) = \iint_B Z_{\xi\xi}(x, y, t) dx dy \quad (0.57)$$

$\xi$ を奥行き変化が最大となる方向とすると、上式はISI =  $t$  ms 時の面の凹凸形状を表している．例えば、面が凹形状のときは $\text{Shape}(t) > 0$ 、凸形状のときは $\text{Shape}(t) < 0$ 、平坦な面であるときは $\text{Shape}(t) = 0$ となるはずである．結果を図 0.6 に記す．最も顕著に面が逆の形状に遷移すると期待される ISI 時刻は $\text{Shape}(t)$ が最小となるISI = 174msである．この時に補完される面（以降、 $Z_{\min}$ と記す）を図 0.7 に表す．前刺激（凹面）と逆（凸面）の面にはならない．その他の ISI における補完結果も図 0.8 に示すように同様である．

### C.3 考察

ISI 中における脳内の奥行き面の表象が凹から凸（または凸から凹）へ面が遷移するダイナミクスを導出し、これらを初期値として奥行き補完モデルを適用したが、凹凸いずれでもない面が補完された（図 0.8）．本項ではエネルギー関数の観点から、第 4 章の心理物理実験結果を再現できなかった原因についてエネルギー関数の観点から考察を行う．

具体的には $Z_{\min}$ （図 0.7）に対し、面のフラット性を本論文で述べた 2 種類の曲率を用いた評価関数によって定量評価した．

$$E_{\kappa\mu}[Z] = \iint_B \{\kappa^2(x, y) + \mu^2(x, y)\} dx dy.$$

上記の評価関数は $E_{\kappa\mu}[Z]$ の値が小さい面ほどよりフラット性が高いことを表す．評価結果を表 1 に記す．表より以下の関係がわかる．

$$E_{\kappa\mu}[Z_V] = E_{\kappa\mu}[Z_\Lambda] < E_{\kappa\mu}[Z_{\min}] \quad (0.58)$$

上の関係式は $Z_V$ や $Z_\Lambda$ の方が $Z_{\min}$ に比べ，よりフラット性が高い面ことを示している． $Z_{\min}$ は最急降下法を基盤とする奥行き補完モデルによって得られる面であるため，エネルギー関数の最小値でなく極小値にトラップされていると予想される．この時に予想されるエネルギー関数の概念図を図 0.9 に示す．

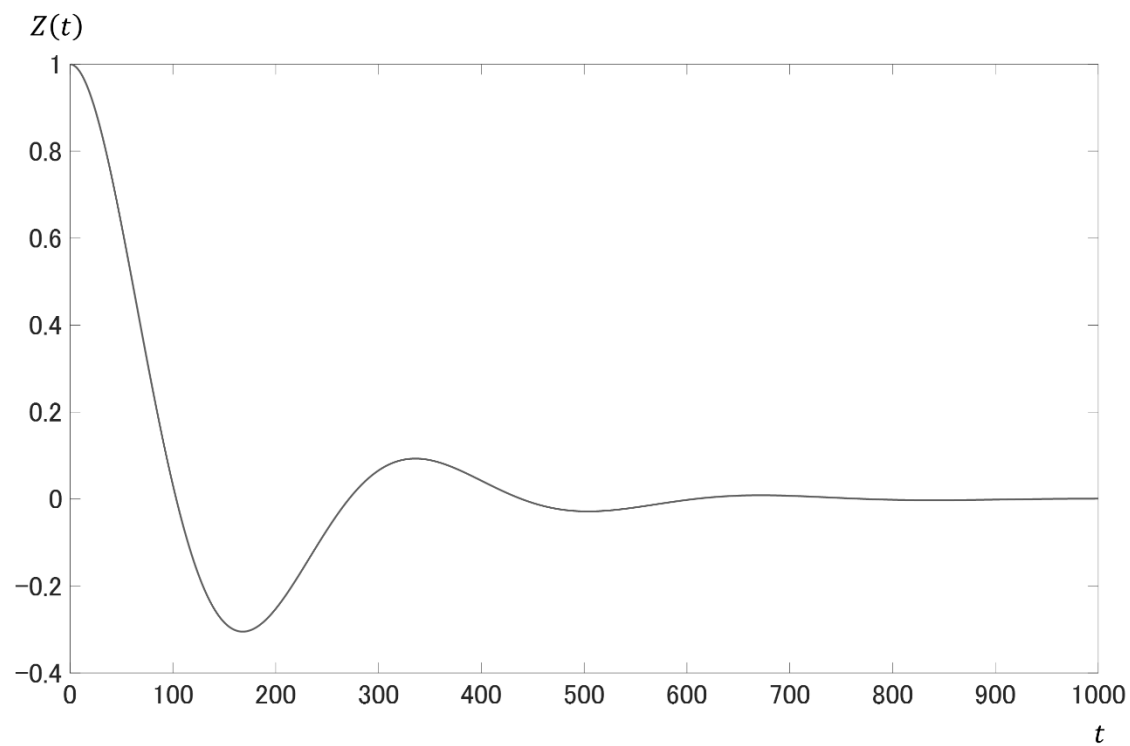


図 0.3 常微分方程式の解 $Z(t)$ .

横軸は ISI の長さ，縦軸は $\text{ISI} = t \text{ ms}$ における $Z(t)$ の値を示す.

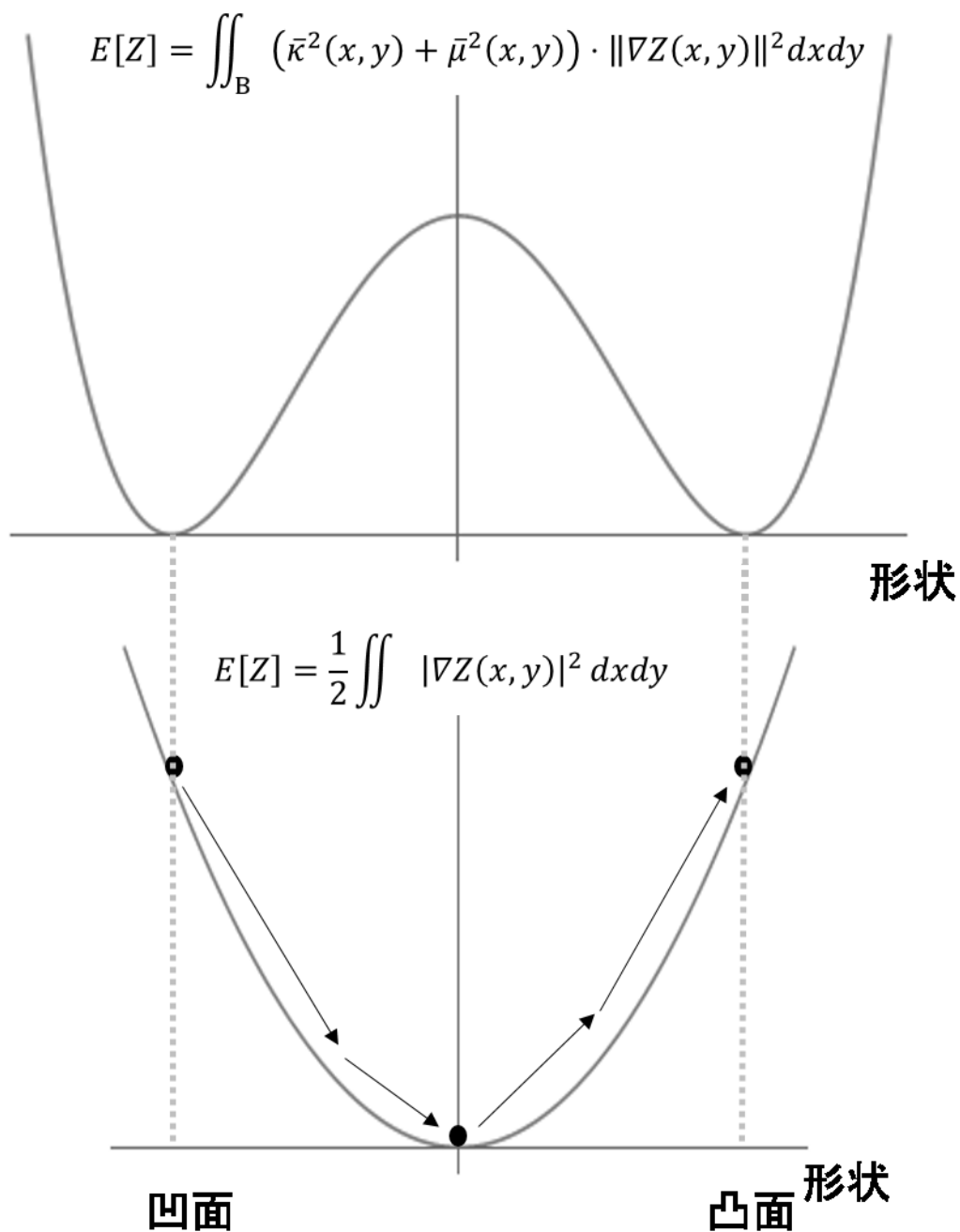


図 0.4 エネルギー関数と面遷移の関係.

横軸は面の形状，縦軸はエネルギー値を表す．また，●は面の状態，矢印は式(0.54)を凹面に適用したときの凸面への遷移を表す．

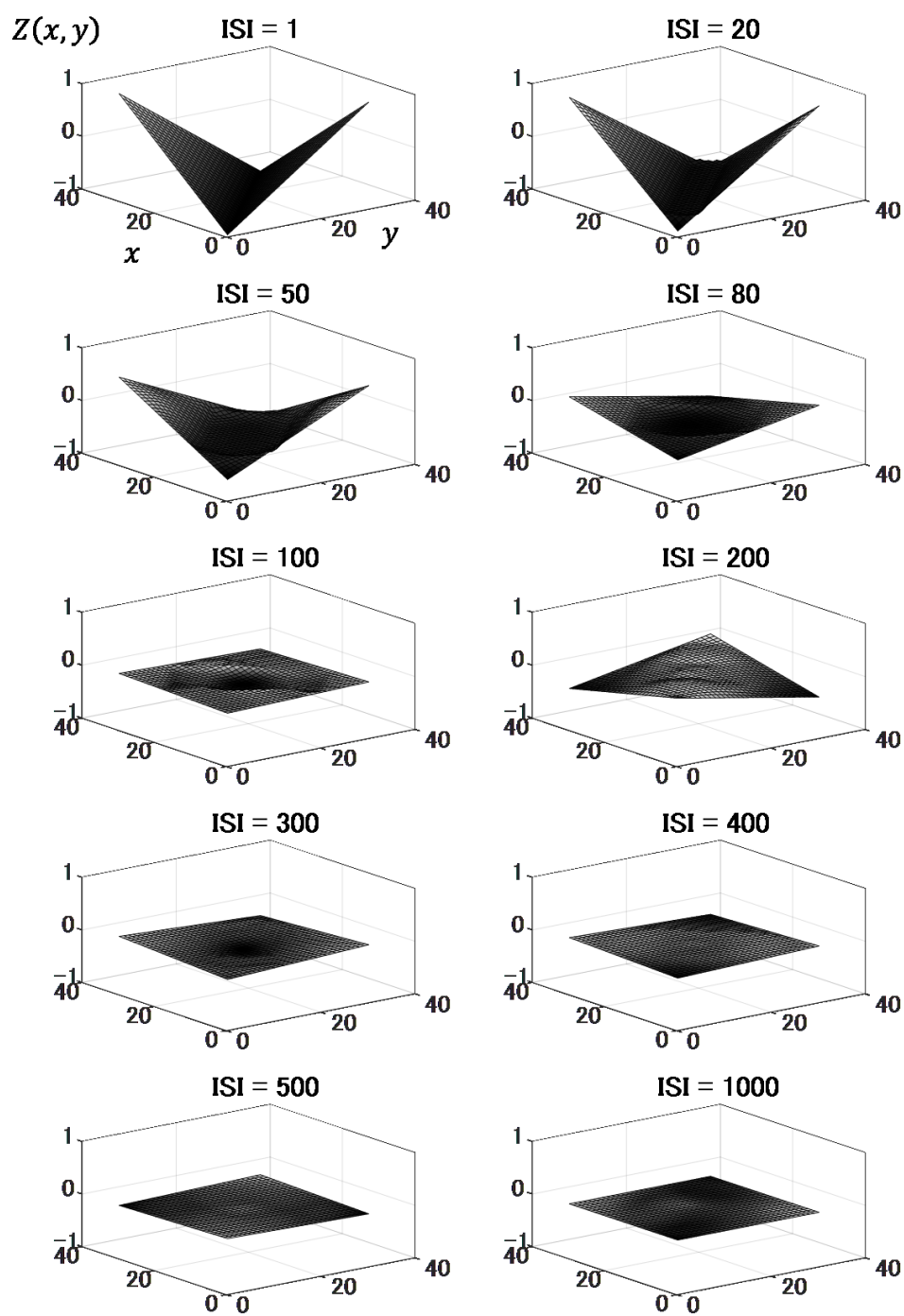


図 0.5 各  $ISI$  中における面遷移の様子.

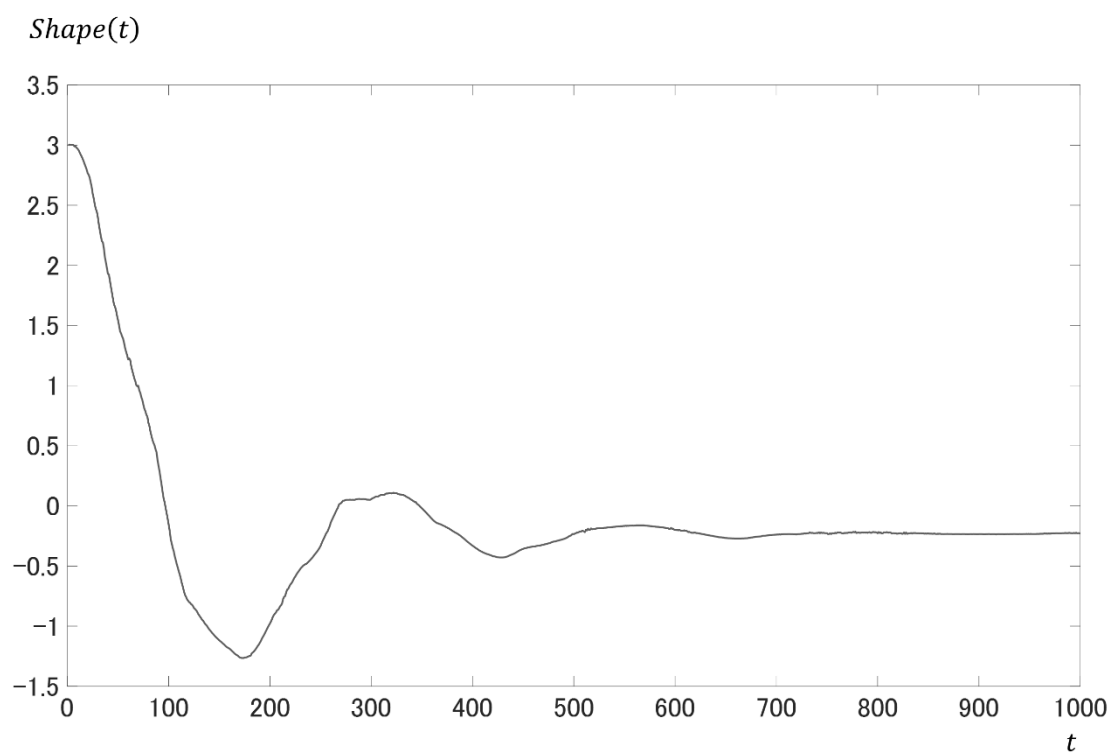


図 0.6 各 ISI における評価量 $Shape(t)$ .  
横軸は ISI の長さ $t$ , 縦軸は $t$ における $Shape(t)$ .

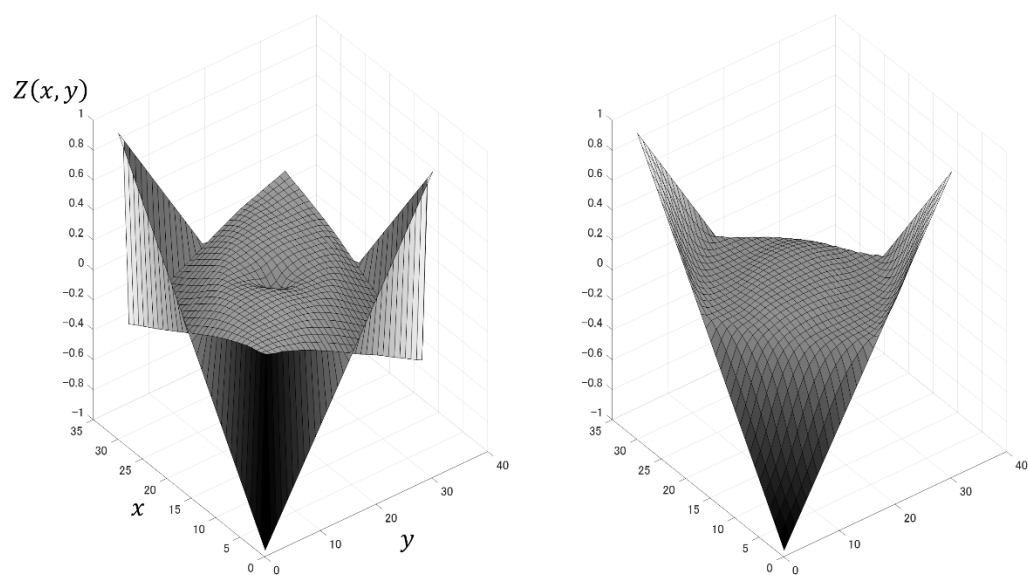


図 0.7  $Shape(t)$ が最小となる  $ISI = 174ms$  における初期条件（左図）と補完結果（右図）.

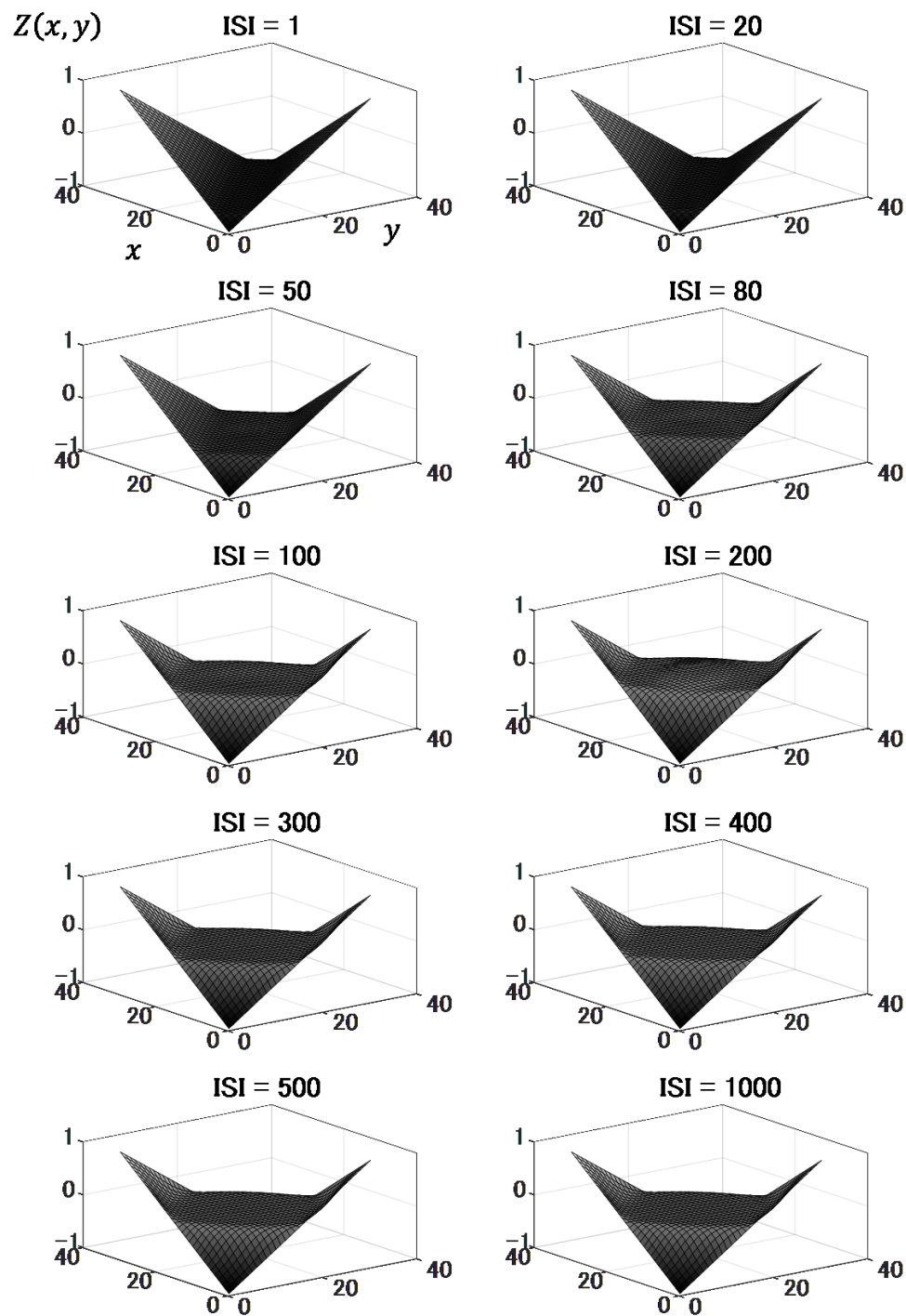


図 0.8 面遷移モデルによって推定される後刺激の知覚.

各 ISI において生成される面（図 0.5）を初期条件とし，奥行き補完モデルを適用することで得られる面.



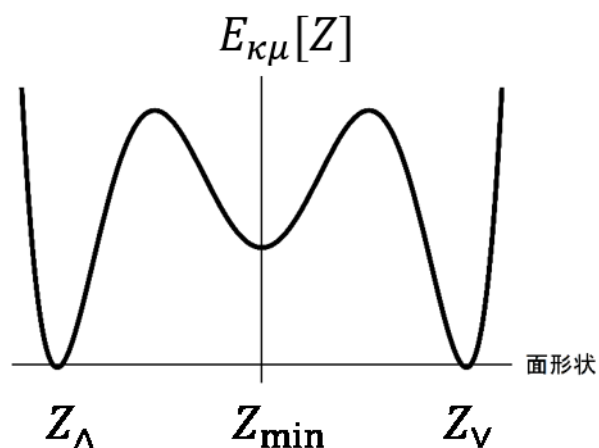


図 0.9 2種類の曲率に関するエネルギー関数の概念図.

エネルギー関数 $E_{\kappa\mu}$ の形状. 横軸は面形状, 縦軸は形状に対するエネルギー値である.  
 $Z_{min}$ は図 0.7 に示す面である.

表 1 評価値と面の形状毎の比較.

$Z_V$ は凹面,  $Z_{\Lambda}$ は凸面,  $Z_{min}$ は ISI=174ms における面. なお $Z_V$ ,  $Z_{\Lambda}$ の結果に関しては, 折り目における曲率は微分不可能なため, 曲率を定義できない領域である. したがって評価からは除外してある.

$Z$ 評価関数	$Z_V$	$Z_{\Lambda}$	$Z_{min}$
$E_{\kappa\mu}[Z]$	$3.11 \times 10^{-2}$	$3.11 \times 10^{-2}$	$4.66 \times 10^{-2}$

# 謝辞

本研究を進めるにあたり、この上なく熱心にご指導をしてくださった佐藤俊治先生に深く感謝の意を表します。佐藤俊治先生の方でなければここまで研究を進めることができませんでした。また、研究に対して適宜助言を頂きました阪口豊先生、佐藤好幸先生、饗庭絵里子先生、井上 康之先生、中嶋 豊先生に感謝申し上げます。また、審査員を引き受けてくださり、審査の際には本論文に対して貴重なご指摘をくださった工藤俊亮先生、栗原聡先生、長岡浩司先生に感謝申し上げます。また、心理物理実験を実施する際に事務手続きをしてくださった秘書の津田葉子さん、堀地 晶代さん、ゼミなどの機会を通して様々な意見を寄せてくださり、実験の被験者を引き受けてくださった人間情報学講座の皆様感謝申し上げます。

祖父母、父母をはじめ、大学院生活を支えてくれた家族・親族の励ましと支えがなければ研究を進めることはできませんでした。特に私が生まれてより生涯を通じて常に傍で励まし続けてくれた 2016 年に逝去した母である満倉訓子に深く感謝します。また、研究を進めるにあたり学生である私を講師として採用して頂きました職場の創価学園の中川恵夫学園長、木下清一校長、大貫進主任（数学科）、落合謙一郎主任（数学科）、佐藤暢明主任（情報科）をはじめとする関係者の皆様、突然の授業変更や休講があったにも関わらず私を慕い、いつも元気を与えてくれた 48 期、49 期、50 期生の生徒たちに感謝申し上げます。最後に在職中に母の余命を宣告され突然の入院や逝去した際をはじめ、公私ともに様々な機会を通し、一人の講師に過ぎない私と母を気にかけて、私が博士課程に学びながら高校の教壇に立っていることをご自身の連載記

事や書籍等で紹介していただくなど，数多くご配慮頂きました創価学園創立者  
池田大作先生に深く感謝申し上げます．

## 引用文献

- Anzai, A., Chowdhury, S. a, & DeAngelis, G. C. (2011). Coding of stereoscopic depth information in visual areas V3 and V3A. *The Journal of Neuroscience : The Official Journal of the Society for Neuroscience*, 31(28), 10270–82.  
<http://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.5956-10.2011>
- Brainard, D. H. (1997). The Psychophysics Toolbox. *Spatial Vision*, 10(4), 433–436.
- Domini, F., Adams, W., & Banks, M. S. (2001). 3D after-effects are due to shape and not disparity adaptation. *Vision Research*, 41(21), 2733–2739.  
[http://doi.org/10.1016/S0042-6989\(01\)00161-4](http://doi.org/10.1016/S0042-6989(01)00161-4)
- Felleman, D. J., & Van Essen, D. C. (1991). Distributed hierarchical processing in the primate cerebral cortex. *Cerebral Cortex (New York, N.Y. : 1991)*, 1(1), 1–47.  
Retrieved from <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/1822724>
- Florack, L. M. J., Romeny, B. M. ter H., Koenderink, J. J., & Viergever, and M. A. (1992). Scale and the differential structure of images, (1), 376–388.
- Georgeson, M., & Yates, T. (2007). Depth propagation and surface construction in 3-D vision. *Perception*. Retrieved from <http://eprints.aston.ac.uk/4579/>
- Howard, I. P., & Brain J. Rogers. (1995). *binocular vision and Stereopsis*. Oxford University Press.
- Hubel, D. H., Wiesel, T. N., Yeagle, E. M., Lafer-Sousa, R., & Conway, B. R. (2013). Binocular Stereoscopy in Visual Areas V-2, V-3, and V-3A of the Macaque Monkey. *Cerebral Cortex (New York, N.Y. : 1991)*.  
<http://doi.org/10.1093/cercor/bht288>
- Ishikawa, H. (2007). Total Absolute Gaussian Curvature for Stereo Prior. In Y. Yagi, S. B. Kang, I. S. Kweon, & H. Zha (Eds.), *ACCV 2007, Part II, LNCS 4844* (pp. 537–548). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007.  
[http://doi.org/10.1007/978-3-540-76390-1\\_53](http://doi.org/10.1007/978-3-540-76390-1_53)
- Ishikawa, H., & Geiger, D. (2006). Illusory volumes in human stereo perception. *Vision Research*, 46(1-2), 171–8. <http://doi.org/10.1016/j.visres.2005.06.028>

- Julesz, B. (1971). Foundations of Cyclopean Perception. *Optometry and Vision Science*. London: The university of Chicago Press.
- Jutten, C., & Herault, J. (1991). Blind separation of sources, part I: an adaptive algorithm based on neuromimetic architecture. *Signal Processing*, 24, 1–10.  
[http://doi.org/10.1016/0165-1684\(91\)90079-X](http://doi.org/10.1016/0165-1684(91)90079-X)
- Kanai, R., Moradi, F., Shimojo, S., & Verstraten, F. A. J. (2005). Perceptual alternation induced by visual transients. *Perception*, 34(7), 803–822.  
<http://doi.org/10.1068/p5245>
- Katsuyama, N., Naganuma, T., Sakata, H., & Taira, M. (2006). Coding of 3D curvature in the parietal cortex (area CIP) of macaque monkey. In K. Murase, K. Sekiyama, T. Naniwa, N. Kubota, & J. Sitte (Eds.), *Proceedings of the 3rd International Symposium on Autonomous Minirobots for Research and Edutainment (AMiRE 2005)* (pp. 1–7). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.  
[http://doi.org/10.1007/3-540-29344-2\\_27](http://doi.org/10.1007/3-540-29344-2_27)
- Kleiner M; D, Brainard; D, P. (2007). “What’s new in Psychtoolbox-3?” In *Perception 36 ECVF Abstract Supplement*.
- Koenderink, J. J. (1990). *Solid shape. Artificial intelligence*.
- Lindeberg. T. (1993). *Scale-space theory in computer vision*. USA: Kluwer Academic Publishers.
- Lucas, B. D., & Kanade, T. (1981). An Iterative Image Registration Technique with an Application to Stereo Vision. In *Proceedings of the 7th International Joint Conference on Artificial Intelligence - Volume 2* (pp. 674–679). San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc. Retrieved from  
<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1623264.1623280>
- Marroquin, J., Mitter, S., & Poggio, T. (1987). Probabilistic solution of ill-posed problems in computational vision. *Journal of the American Statistical ...*, 82(397), 76–89. Retrieved from  
<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01621459.1987.10478393>
- Mitsukura, E., & Satoh, S. (2013). Computational Study of Depth Perception for an Ambiguous Image Region : How Can We Estimate the Depth of Black or White Paper ?, 225–232.

- Nishina, S., & Kawato, M. (2004). A computational model of spatio-temporal dynamics in depth filling-in. *Neural Networks : The Official Journal of the International Neural Network Society*, 17(2), 159–63.  
<http://doi.org/10.1016/j.neunet.2003.09.004>
- Ohzawa, I. (1998). An iterative image registration technique with an application to stereo vision. *Current Opinion in Neurobiology*, 8(4), 509–15. Retrieved from  
<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/9751654>
- Olshausen, B. A., & Field, D. J. (1996). Emergence of simple-cell receptive field properties by learning a sparse code for natural images. *Nature*.  
<http://doi.org/10.1038/381607a0>
- Pelli, D. G. (1997). The VideoToolbox software for visual psychophysics: transforming numbers into movies. *Spatial Vision*. <http://doi.org/10.1163/156856897X00366>
- Perona, P., & Malik, J. (1990). Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7), 629–639. <http://doi.org/10.1109/34.56205>
- Poggio, T., Torre, V., & Koch, C. (1985). Computational vision and regularization theory. *Nature*, 317(6035), 314–319. Retrieved from  
<http://dx.doi.org/10.1038/317314a0>
- Ramachandran, V. S. (1988). Perception of shape from shading. *Nature*, 331, 163–166.
- Sato, S. (2011). Computational identity between digital image inpainting and filling-in process at the blind spot. *Neural Computing and Applications*, 21(4), 613–621.  
<http://doi.org/10.1007/s00521-011-0646-y>
- Sato, S., & Usui, S. (2008a). Computational theory and applications of a filling-in process at the blind spot. *Neural Networks : The Official Journal of the International Neural Network Society*, 21(9), 1261–71.  
<http://doi.org/10.1016/j.neunet.2008.05.001>
- Sato, S., & Usui, S. (2008b). Computational theory and applications of a filling-in process at the blind spot. *Neural Networks : The Official Journal of the International Neural Network Society*, 21(9), 1261–71.  
<http://doi.org/10.1016/j.neunet.2008.05.001>

Schar Daniel, & RICHARD SZELISKI. (2002). A Taxonomy and Evaluation of Dense Two-Frame Stereo. *International Journal of Computer Vision*, 47(1), 7–42.

Taira, M., Tsutsui, K. I., Jiang, M., Yara, K., & Sakata, H. (2000). Parietal neurons represent surface orientation from the gradient of binocular disparity. *Journal of Neurophysiology*, 83(5), 3140–6. Retrieved from <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/10805708>

TYLER, C. W. (1991). Cyclopean Vision. *Binocular Vision*, 38–74.

平井有三. (1995). 視覚と記憶の情報処理. 培風館.

## 研究業績

### < 学術雑誌（査読付き） >

- ・ **E.Mitsukura** and S. Satoh: Computational model of depth and surface completion consistent with human stereo perception, Neural Networks, 99, pp.42-55,2018.

### < 国際会議 Proceedings >

- ・ **E. Mitsukura** and S. Satoh: Computational Study of Depth Perception for an Ambiguous Image Region: How Can We Estimate the Depth of Black or White Paper?, ICONIP 2013, Part III, LNCS 8228, pp. 225–232, 2013.

### < 口頭発表 >（○発表者）

- ・ ○**E. Mitsukura** and S. Satoh: Computational Study of Depth Perception for an Ambiguous Image Region: How Can We Estimate the Depth of Black or White Paper? , ICONIP 2013, 2013.

### < ポスター発表 >

- ・ ○**E. Mitsukura** and S. Satoh: Computational study of depth perception for non-textured images. 脳と心のメカニズム 第14回冬のワークショップ, 2014.
- ・ ○**E. Mitsukura** and S. Satoh: 多義的な奥行き知覚に関する心理物理実験と計算論的考, JNNS2015, 2015.

### < 外部資金 >

- ・ 脳と心のメカニズム 第14回冬のワークショップ 参加助成, 2014

### < その他 >

- ・ Research Highlights, Research Highlights, UECe-bulletin (<http://www.ru.uec.ac.jp/>) , 2014.